SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit $\TeX$

Grundlagen (Physik)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

1. Mai 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Weltbilder

1. In einer Wissenschaftssendung wir berichtet, dass es in der Physik erstmals gelungen ist, in einem Experiment die Messgenauigkeit so weit zu steigern, dass das untersuchte Naturgesetzt exakt bewiesen werden konnte.
   Nimm zu dieser Aussage Stellung.

Lösung: Naturgesetzte können prinzipiell nicht bewiesen werden. Sie sind ,,Erfindungen" von Menschen, mit deren Hilfe Vorhersagen möglich werden. An der Gültigkeit der Vorhersagen von Naturgesetzen werden diese gemessen.
Oder:
Auf der Basis von Naturgesetzen werden Vorhersagen getroffen, die in Experimenten überprüft werden können. Erfolgt eine Bestätigung der Vorhersage, steigt das Vertrauen in das Naturgesetz.

2 Ungenaue Größen

1. **Dezimalen und geltende Ziffern**

   Dezimalen sind Nachkommastellen, geltende Ziffern beginnt man mit der ersten Ziffer ungleich Null zu zählen:

Zahl	Dezimalen	geltende Ziffern
23,0234	4	6
0,0034	4	2
20	0	2
20,00	2	4
$2 \cdot 10^1$	0	1
$3{,}78 \cdot 10^{-7}$	9	3

   (a) Begründe folgende Regeln:

Eine Summe ungenauer Zahlen hat höchstens so viele sinnvolle Dezimalen wie der ungenaueste Summand!

Ein Produkt (Quotient) ungenauer Zahlen hat höchstens so viele geltende Ziffern wie der ungenaueste Faktor!

   (b) $a = 2{,}304$, $b = 0{,}00456$, $c = 3{,}5 \cdot 10^{-3}$, $d = 1{,}004 \cdot 10^8$, $e = 5 \cdot 10^{-8}$
   Die in folgenden Termen auftretenden numerischen Werte sind exakt, a, b, c, d und e sind gerundete Zahlen.

   i. Schreibe die Ergebnisse sinnvoll gerundet:

   $$2\,a + 3\,b; \quad a^2 + b^2; \quad (b + c) \cdot d; \quad a \cdot d; \quad \sqrt{d} + \frac{a - b}{c}; \quad d \cdot c^3; \quad d \cdot e^2$$

   ii. Runde einmal schon die Zwischenergebnisse und einmal nur das Endergebnis:

   $$\frac{a}{b} + 100 \cdot b; \qquad \frac{c^2}{e^2}$$

   Welche Regel folgt daraus?

Lösung: (a) Hat der ungenaueste Summand n Dezimalen, dann ist sein Fehler $5 \cdot 10^{-(n+1)}$. Da sich die Fehler zum Gesamtfehler Δx addieren, gilt $\Delta x > 5 \cdot 10^{-(n+1)}$, d.h. das Ergebnis hat höchstens so viele Dezimalen wie der ungenaueste Summand.

Wir betrachten eine gerundete Zahl mit z geltenden Ziffern, v vor und n nach dem Komma: $a = \underbrace{\overbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet}^{v},\overbrace{\bullet\bullet\bullet}^{n}}_{z}$. Der absolute Fehler der Zahl ist $\Delta a = 5 \cdot 10^{-(n+1)}$. Aus $10^{v-1} \leqq a < 10^{v}$ folgt für den relativen Fehler von a:

$$\frac{\Delta a}{10^{v}} < \delta_a \leqq \frac{\Delta a}{10^{v-1}}$$

Einsetzen von von $\Delta a = 5 \cdot 10^{-(n+1)}$ liefert mit $z = v + n$

$$5 \cdot 10^{-(z+1)} < \delta_a \leqq 5 \cdot 10^{-z}$$

Für den relativen Fehler einer Zahl a mit z geltenden Ziffern gilt also $\delta_a \approx 10^{-z}$. Da sich bei Produkten und Quotienten die relativen Fehler addieren, ist der Gesamtfehler größer als der größte Einzelfehler, die Zahl der geltenden Ziffern des Ergebnisses also höchstens gleich der Zahl der geltenden Ziffern des ungenauesten Faktors.

(b) Die Ziffern nach dem senkrechten Strich sind nicht mehr gültig:

$2\,a + 3\,b = 4{,}608 + 0{,}0136|8 = 4{,}62168 \approx 4{,}622$

$a^2 + b^2 = 5{,}308|416 + 0{,}0000207|936 = 5{,}308|436794 = 5{,}308$

$(b+c) \cdot d = (0{,}00456 + 0{,}0035) \cdot 1{,}004 \cdot 10^8 = 0{,}0080|6 \cdot 1{,}004 \cdot 10^8 = 80|9224 \approx 8{,}1 \cdot 10^5$

$a \cdot d = 2{,}313|216 \cdot 10^8 \approx 2{,}313 \cdot 10^8$

$\sqrt{d} + \dfrac{a-b}{c} = 1001|9{,}98 + \dfrac{2{,}299|44}{0{,}0035} = 1001|9{,}98 + 65|6{,}98 = 1067|6{,}96290 \approx 1{,}068 \cdot 10^4$

$d \cdot c^3 = 1{,}004 \cdot 10^8 \cdot 4{,}2|875 \cdot 10^{-8} = 4{,}3|0465 \approx 4{,}3$

$d \cdot e^2 = 1{,}004 \cdot 10^8 \cdot 2{,}|5 \cdot 10^{-15} = 2{,}|51 \cdot 10^{-7} \approx 3 \cdot 10^{-7}$

$\dfrac{a}{b} + 100\,b = 505{,}|2631579 + 0{,}456 \approx 505 + 0{,}456 = 505{,}|456 \approx 505$

$\dfrac{a}{b} + 100\,b = 505{,}|2631579 + 0{,}456 = 505{,}|7191579 \approx 506$

$\dfrac{c^2}{e^2} = \dfrac{0{,}000012|25}{2{,}|5 \cdot 10^{-15}} \approx \dfrac{0{,}000012}{3 \cdot 10^{-15}} = 4 \cdot 10^9$

$\dfrac{c^2}{e^2} = \dfrac{0{,}000012|25}{2{,}|5 \cdot 10^{-15}} = 4{,}|9 \cdot 10^9 \approx 5 \cdot 10^9$

3 Absoluter und relativer Fehler

1. Am 1.1.1990 um 0:00:00 Uhr wird eine Quartzuhr mit der Standardatomuhr synchronisiert (genau gleich gestellt). Am 24.3.1993 zur Standardzeit 12:00:00 Uhr zeigt die Quartzuhr die Zeit 12:00:17 Uhr an. Berechne die relative Ungenauigkeit der Quartzuhr!

Lösung: $t = (3 \cdot 365 + 1 + 31 + 28 + 23{,}5)\,\mathrm{d} = 1178{,}5\,\mathrm{d} = 101822400\,\mathrm{s}$

$$\delta_{\mathrm{rel}} = \frac{17\,\mathrm{s}}{t} = 1{,}67 \cdot 10^{-7}$$

2. Eine Kugel fällt achtmal eine immer gleiche Höhe von 7 m hinunter. Mit einer Stoppuhr werden die Fallzeiten 1,13 s, 1,24 s, 1,22 s, 1,17 s, 1,20 s, 1,15 s, 1,18 s und 1,26 s gemessen. Berechne den Mittelwert und den relativen Fehler der Fallzeit!

Lösung: $[t] = \dfrac{(1{,}13 + 1{,}24 + 1{,}22 + 1{,}17 + 1{,}20 + 1{,}15 + 1{,}18 + 1{,}26)\,\mathrm{s}}{8} = 1{,}19375\,\mathrm{s}$

$\Delta t = 0{,}06625\,\mathrm{s}$, $\delta_{\mathrm{rel}} = \dfrac{\Delta t}{[t]} = 0{,}0555$, Ergebnis sinnvoll gerundet: $t = (1{,}19 \pm 0{,}07)\,\mathrm{s}$

3. Ein Vielfachmessgerät hat bei Spannungsmessungen einen Fehler von 2 % und bei Strommessungen einen Fehler von 0,5 %. Mit dem Gerät wird an einem Widerstand R die Spannung $U = 10{,}00\,\mathrm{V}$ und durch den Widerstand der Strom $I = 0{,}200\,\mathrm{A}$ gemessen. Berechne R mit Angabe des absoluten und relativen Fehlers! Rechne zuerst den maximalen und den minimalen Wert aus, den R annehmen kann!
Welches Gesetz vermutet man für den relativen Fehler eines Quotienten von zwei ungenauen Zahlen?

Lösung: $U_{\max} = 10{,}2\,\mathrm{V}$, $U_{\min} = 9{,}8\,\mathrm{V}$, $I_{\max} = 0{,}201\,\mathrm{A}$, $I_{\min} = 0{,}199\,\mathrm{A}$

$R_{\max} = \dfrac{U_{\max}}{I_{\min}} = 51{,}256\,\Omega$, $R_{\min} = \dfrac{U_{\min}}{I_{\max}} = 48{,}756\,\Omega$ $[R] = \dfrac{R_{\min} + R_{\max}}{2} = 50{,}0\,\Omega$

$\Delta R = R_{\max} - [R] = 1{,}25\,\Omega$, $\delta_{\mathrm{rel}} = \dfrac{\Delta R}{[R]} = 0{,}025 = 2{,}5\,\% = 2\,\% + 0{,}5\,\%$

4.

> Der relative Fehler eines Terms der Form
> $$T = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots\ldots \cdot a_n}{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots\ldots \cdot b_m}$$
> ist ungefähr gleich der Summe der relativen Fehler der Faktoren.

Beweise diesen Satz für den Spezialfall $T = \frac{a}{b}$ unter der Voraussetzung $\Delta a \ll a$ und $\Delta b \ll b$! Das Zeichen „$\ll$“ bedeutet „sehr klein gegen“. Es darf die Näherungsformel

$$\boxed{\frac{1}{1+x} \approx 1 - x \quad \text{für} \quad |x| \ll 1}$$

verwendet werden. Überprüfe die eingerahmte Formel für $x \in \{0{,}01\,;\ 0{,}0006\,;\ -0{,}00008\}$!

Lösung: $a_{\max} = [a] + \Delta a, \quad a_{\min} = [a] - \Delta a, \quad b_{\max} = [b] + \Delta b, \quad b_{\min} = [b] - \Delta b$

Die relativen Fehler von a und b sind: $\delta_a = \frac{\Delta a}{[a]}$ und $\delta_b = \frac{\Delta b}{[b]}$.

Für das Produkt $T = a\,b$ gilt:

$$\begin{aligned} T_{\max} &= a_{\max} \cdot b_{\max} = [a]\,[b] + 2\,[a]\,\Delta b + 2\,[b]\,\Delta a + \Delta a\,\Delta b \\ T_{\min} &= a_{\min} \cdot b_{\min} = [a]\,[b] - 2\,[a]\,\Delta b - 2\,[b]\,\Delta a + \Delta a\,\Delta b \end{aligned}$$

$$[T] = \frac{T_{\max} + T_{\min}}{2} = [a]\,[b] + \Delta a\,\Delta b \qquad \Delta T = T_{\max} - [T] = [a]\,\Delta b + [b]\,\Delta a$$

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{\Delta T}{[T]} = \frac{[a]\,\Delta b + [b]\,\Delta a}{[a]\,[b] + \Delta a\,\Delta b} = \frac{\frac{[a]}{\Delta a} + \frac{[b]}{\Delta b}}{1 + \frac{\Delta a\,\Delta b}{[a]\,[b]}} = \frac{\delta_a + \delta_b}{1 + \delta_a\,\delta_b}$$

Wegen $\Delta a \ll [a]$ und $\Delta b \ll [b]$ gilt $\delta_a \ll 1$ und $\delta_b \ll 1$, d.h. $1 + \delta_a\,\delta_b \approx 1$:

$$\delta_{\text{rel}} \approx \delta_a + \delta_b$$

Für den Quotienten $T = \frac{a}{b}$ gilt:

$$T_{\max} = \frac{a_{\max}}{b_{\min}} = \frac{[a] + \Delta a}{[b] - \Delta b} \qquad T_{\min} = \frac{a_{\min}}{b_{\max}} = \frac{[a] - \Delta a}{[b] + \Delta b}$$

$$[T] = \frac{T_{\max} + T_{\min}}{2} = \frac{[a]\,[b] + \Delta a\,\Delta b}{([b] + \Delta b)\,([b] - \Delta b)}$$

$$\Delta T = T_{\max} - [T] = \frac{[a]\,\Delta b + [b]\,\Delta a}{([b] + \Delta b)\,([b] - \Delta b)}$$

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{\Delta T}{[T]} = \frac{[a]\,\Delta b + [b]\,\Delta a}{[a]\,[b] + \Delta a\,\Delta b} = \frac{\delta_a + \delta_b}{1 + \delta_a\,\delta_b} \approx \delta_a + \delta_b \quad (\text{wie bei } T = a\,b)$$

5. Mit einer Atomuhr wird die Zeitspanne T gemessen. Da eine Atomuhr nur *ganze* Schwingungsdauern ΔT_0 zählen kann, setzt sich der absolute Fehler dieser Zeitmessung aus ΔT_0 und dem Langzeitfehler $\Delta T_L = 10^{-14} \cdot T$ zusammen.
   (a) Berechne den relativen Fehler der Zeitmessung für $T \in \{1\,\mathrm{ns}, 1\,\mu\mathrm{s}, 1\,\mathrm{s}, 1\,\mathrm{a}\}$!
   (b) Für welches T beträgt der relative Fehler $2 \cdot 10^{-14}$?
   (c) Zur Messung der Länge s einer Strecke $[AB]$ wird von einer Atomuhr die Zeit gestoppt, die ein Lichtimpuls zum zurücklegen dieser Strecke benötigt. Berechne den relativen Fehler dieser Messung für $s = 1\,\mathrm{m}$, $s = 1\,\mathrm{km}$ und $s = 1\,\mathrm{LJ}$!

   Die Ergebnisse von (c) zeigen, dass für eine präzise Längenmessung andere Verfahren benötigt werden (Schwebungsfrequenz von zwei Lasern; siehe z.B. W. Kranzer, *So interessant ist Physik*, S.148 oder F. Westermann, *Laser*, S.146).

Lösung: (a) $\Delta T = \Delta T_0 + \Delta T_\mathrm{L} = \Delta T_0 + 10^{-14} \cdot T, \quad \Delta T_0 = \dfrac{1\,\mathrm{s}}{9\,192\,631\,770} \approx 1{,}09 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{s}$

$$\delta_\mathrm{rel} = \frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1{,}09 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{s}}{T} + 10^{-14}$$

T	$1\,\mathrm{ns}$	$1\,\mu\mathrm{s}$	$1\,\mathrm{s}$	$1\,\mathrm{a} = 31\,536\,000\,\mathrm{s}$
ΔT	$\approx \Delta T_0$	$\approx \Delta T_0$	$\approx \Delta T_0$	$3{,}15 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}$
δ_rel	$10{,}9\,\%$	$0{,}01\,\%$	$1{,}1 \cdot 10^{-10}$	$\approx 10^{-14}$

(b) $\dfrac{\Delta T_0}{T} + 10^{-14} = 2 \cdot 10^{-14} \quad \Longrightarrow \quad T = 10^{14}\,\Delta T_0 = 10\,878\,\mathrm{s} = 3\,\mathrm{a}\,1\,\mathrm{min}\,18\,\mathrm{s}$

(c) Mit der exakten Lichtgeschwindigkeit $c = 299792458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ gilt $s_\mathrm{max} = (T + \Delta T) \cdot c$ und $s_\mathrm{min} = (T - \Delta T) \cdot c$ und damit $[s] = [T] \cdot c$ und $\Delta s = \Delta T \cdot c$. Der relative Fehler der Längenmessung ist dann gleich dem relativen Fehler der Zeitmessung:

$$\delta_s = \frac{\Delta s}{s} = \frac{c\,\Delta T}{c\,T} = \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta T_0}{T} + 10^{-14} = \frac{c\,\Delta T_0}{s} + 10^{-14} = \frac{3{,}26\,\mathrm{cm}}{s} + 10^{-14}$$

$$\Delta s = c\,\Delta T + 10^{-14} \cdot s = 3{,}26\,\mathrm{cm} + 10^{-14} \cdot s$$

s	$1\,\mathrm{m}$	$1\,\mathrm{km}$	$1\,\mathrm{LJ} = 9{,}46 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}$
Δs	$3{,}26\,\mathrm{cm}$	$3{,}26\,\mathrm{cm}$	$94{,}6\,\mathrm{m}$
$\dfrac{\Delta s}{s}$	$3{,}26\,\%$	$0{,}00326\,\%$	$1 \cdot 10^{-14}$

4 Umrechnen von Einheiten

1. **Umrechnen von Einheiten**

   (a) Das 2004 in Dienst gestellte Passagierschiff Queen Mary 2 hat eine Höchstgeschwindigkeit von 29,6 kn. Dabei ist $1\,\mathrm{kn} = 1\,\frac{\mathrm{sm}}{\mathrm{h}}$. Hierbei bedeutet 1 sm eine Seemeile. Eine Seemeile sind 1852 m. Gib die Höchstgeschwindigkeit der Queen Mary 2 in der Einheit $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ an.

   (b) Am 7.7.1999 in Rom stellte Hicham El Guerrouj den Weltrekord über eine Meile (das sind 1609,344 m) in einer Zeit von 3 : 43,13 min auf. Mit welcher durchschnittlichen Geschwindigkeit in der Einheit $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ bzw. $1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ lief Hicham El Guerrouj diesen Rekord?

   Verwende in den folgenden Teilaufgaben $9{,}80665\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ für die Fallbeschleunigung.

   (a) 1 PS ist definiert als die Leistung, die erbracht werden muss, um einen Körper der Masse $m = 75\,\mathrm{kg}$ entgegen dem Schwerkraftfeld der Erde mit einer Geschwindigkeit von $1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ zu bewegen. Gib 1 PS in der Einheit 1 kW an.

   (b) Pound per square inch (Pfund pro Quadratzoll) ist eine in den USA gebräuchliche Maßeinheit des Drucks. Diese Einheit wird mit 1 psi abgekürzt. 1 Inch sind 2,54 cm und 1 pound 0,454 kg. Gib 1 psi in der Einheit $1\,\mathrm{Pa} = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$ an.

   (c) Ein Torr oder auch Millimeter-Quecksilbersäule — benannt nach dem italienischem Physiker und Mathematiker Evangelista Torricelli — ist der statische Druck, der von einer Quecksilbersäule von 1 mm Höhe erzeugt wird. Die Dichte von Quecksilber ist $13{,}546\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}}$. Gib ein Torr in der Einheit Pascal an.

Lösung: (a) $15{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

(b) $7{,}2126\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 25{,}965\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

(c) 0,735499 kW

(d) 69,0 hPa

(e) 132,84 Pa