SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Weiterführende Aufgaben (Gymnasium)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

11. Juni 2010

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Algebra

1. Ungleichungen

1.1. Ungleichungen vom Typ (x+a)(x+b) kleiner 0

1. $]-\infty;-3[\cup[-\frac{1}{2};1[$

2. (a) $L=]-5\,;\,4[$ (b) $L=]-1\,;\,2]$

3. (a) $L=]-\infty\,;\,-4[$ (b) $L=]-3\,;\,3[$

4. (a) $L=]1\,;\,+\infty[$ (b) $L=\{0\}\cup]3\,;\,+\infty[$

5. $L=]-2\,;\,-1[\cup]0\,;\,3[$

6. $L=\ [-2\,;\,-1[\cup[1\,;\,2]\cup]3\,;\,+\infty[$

1.2. Ungleichungstyp (x+a)(x+b) kleiner 0 erst nach Umformung

1. $L=\mathbb{Q}\setminus[\frac{3}{2};\frac{8}{5}[$

2. (a) $\dfrac{1-x}{x}<0 \quad\Longrightarrow\quad L=]-\infty\,;\,0[\cup]1\,;\,+\infty[$

   (b) $\dfrac{2\,x+3}{x+2}\leqq 0 \quad\Longrightarrow\quad L=]-2\,;\,-\frac{3}{2}]$

3. $\dfrac{8\,x+17}{2\,x+5}\geqq 0 \Longrightarrow L=]-\infty\,;\,-2,5[\cup[-2,125\,;\,+\infty[$

4. $L=]\frac{5}{3};\infty[$

5. $]-\infty;1,5]\cup]2;\infty[$

6. $]-\infty;\frac{4}{3}] \quad\cup\quad]3;\infty[$

7. $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}<0 \Longrightarrow L=]-2\,;\,-1[$

8. $\dfrac{4\,(3-x)}{x(x+6)} \geqq 0 \Longrightarrow L =]-\infty\,;\,-6[\cup]0\,;\,3]$

9. $\dfrac{x-5}{(x-1)(x-3)} < 0 \Longrightarrow L =]-\infty\,;\,1[\cup]3\,;\,5[$

10. $D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{3}{2}\}$, $L =]-\infty; -2[\cup]\frac{3}{2}; \infty[$

11. $D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{2}{3}\}$, $L =]-\infty; \frac{3}{5}[\cup]\frac{2}{3}; \infty[$

1.3. Ungleichungen mit Betrag

1. $[-8; 16]$

2. $]1; 2[$

3. $L =]-\infty; 6]$

4. $L = [-\frac{7}{10}; -\frac{1}{2}] \setminus \{-\frac{2}{3}\}$

5. $L =]\frac{4}{3}; \frac{3}{2}[$

6. $L = \mathbb{Q} \setminus [-38; -10]$

7. (a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{1\frac{3}{4}\}$, $L =]0; 1\frac{3}{4}[$
   (b) $L =]-5; -1[$

8. (a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{1\frac{4}{5}\}$, $L =]-\infty; 0[\cup]1\frac{4}{5}; \infty]$
   (b) $L = \{\ \}$

9. $L =]-1; 2[$

10. $]-3{,}5; 1[$

11. $[-\frac{1}{2}; \infty[$

12. $D = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$, $L =]2{,}6; 3[\cup]3; 3{,}4[$

13. $[-\frac{1}{3};\infty[$
14. $D = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$, $L =]1{,}25; 2[\cup]2; 2{,}75[$
15. $D = \mathbb{Q}$, $L =]-\frac{11}{15};\infty[$
16. $D = \mathbb{Q}$, $L =]2{,}4;\infty[$

2. Lineare Gleichungssysteme

2.1. Gleichungssysteme mit Formvariablen

1. a beliebig, $b \neq 0$
2. Für $k = -3$ ist die Lösung $(0|-4)$
3. $L = \begin{cases} \{(a-b|-ab)\} & \text{für} \quad a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq -b \\ \left\{(x|y) \,|\, x + \frac{y}{b} = -b\right\} & \text{für} \quad a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a = -b \\ \{\} & \text{für} \quad a = 0 \vee b = 0 \end{cases}$

3. Ungleichungen

3.1. Ungleichungen vom Typ (x+a)(x+b) kleiner 0

1. $]-\infty; -3[\cup[-\frac{1}{2}; 1[$

2. (a) $L =]-5\,;\,4[$ (b) $L =]-1\,;\,2]$

3. (a) $L =]-\infty\,;\,-4[$ (b) $L =]-3\,;\,3[$

4. (a) $L =]1\,;\,+\infty[$ (b) $L = \{0\}\cup]3\,;\,+\infty[$

5. $L =]-2\,;\,-1[\cup]0\,;\,3[$

6. $L = [-2\,;\,-1[\cup[1\,;\,2]\cup]3\,;\,+\infty[$

3.2. Ungleichungstyp (x+a)(x+b) kleiner 0 erst nach Umformung

1. $L = \mathbb{Q}\setminus[\frac{3}{2}; \frac{8}{5}[$

2. (a) $\dfrac{1-x}{x} < 0 \quad\Longrightarrow\quad L =]-\infty\,;\,0[\cup]1\,;\,+\infty[$

   (b) $\dfrac{2\,x+3}{x+2} \leqq 0 \quad\Longrightarrow\quad L =]-2\,;\,-\frac{3}{2}]$

3. $\dfrac{8\,x+17}{2\,x+5} \geqq 0 \Longrightarrow L =]-\infty\,;\,-2{,}5[\cup[-2{,}125\,;\,+\infty[$

4. $L =]\frac{5}{3}; \infty[$

5. $]-\infty; 1{,}5]\cup]2; \infty[$

6. $]-\infty; \frac{4}{3}] \quad\cup\quad]3; \infty[$

7. $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} < 0 \Longrightarrow L =]-2\,;\,-1[$

8. $\dfrac{4\,(3-x)}{x(x+6)} \geqq 0 \Longrightarrow L =]-\infty\,;\,-6[\cup]0\,;\,3]$

9. $\dfrac{x-5}{(x-1)(x-3)} < 0 \Longrightarrow L =]-\infty\,;\,1[\cup]3\,;\,5[$

10. $D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{3}{2}\}$, $L =]-\infty;-2[\cup]\frac{3}{2};\infty[$

11. $D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{2}{3}\}$, $L =]-\infty;\frac{3}{5}[\cup]\frac{2}{3};\infty[$

3.3. Ungleichungen mit Betrag

1. $[-8;16]$

2. $]1;2[$

3. $L =]-\infty;6]$

4. $L = [-\frac{7}{10};-\frac{1}{2}] \setminus \{-\frac{2}{3}\}$

5. $L =]\frac{4}{3};\frac{3}{2}[$

6. $L = \mathbb{Q} \setminus [-38;-10]$

7. (a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{1\frac{3}{4}\}$, $L =]0;1\frac{3}{4}[$
   (b) $L =]-5;-1[$

8. (a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{1\frac{4}{5}\}$, $L =]-\infty;0[\cup]1\frac{4}{5};\infty]$
   (b) $L = \{\ \}$

9. $L =]-1;2[$

10. $]-3{,}5;1[$

11. $[-\frac{1}{2};\infty[$

12. $D = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$, $L =]2{,}6;3[\cup]3;3{,}4[$

13. $[-\frac{1}{3}; \infty[$
14. $D = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$, $L =]1{,}25; 2[\cup]2; 2{,}75[$
15. $D = \mathbb{Q}$, $L =]-\frac{11}{15}; \infty[$
16. $D = \mathbb{Q}$, $L =]2{,}4; \infty[$

4. Lineare Gleichungssysteme

4.1. Gleichungssysteme mit Formvariablen

1. a beliebig, $b \neq 0$

2. Für $k = -3$ ist die Lösung $(0|-4)$

3. $L = \begin{cases} \{(a-b|-ab)\} & \text{für} \quad a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq -b \\ \left\{(x|y) \,|\, x + \frac{y}{b} = -b\right\} & \text{für} \quad a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a = -b \\ \{\} & \text{für} \quad a = 0 \vee b = 0 \end{cases}$

5. Die Wurzelfunktion

1. $x = 2,25$
2. $D = \mathbb{R}_0^+$; $W = \mathbb{R}_0^-$; $y = -x - 0,25$
3. $D = \mathbb{R}_0^-$; $W = \mathbb{R}_0^-$; $y = x - 0,25$
4. $L = \left\{ 0\,;\, \frac{16}{9} \right\}$

6. Quadratische Ungleichungen

1. $L = \left]-\infty\,;\,-\frac{4}{5}\right[\cup \left]\frac{4}{5}\,;\,\infty\right[$
2. $L = \left]-\frac{5}{2}\,;\,\frac{5}{2}\right[$
3. $L = \left]-\infty\,;\,-\frac{1}{3}\right] \cup [2\,;\,\infty[$
4. $L = \left[-\frac{21}{5}\,;\,-\frac{9}{5}\right]$
5. $L =]-3\,;\,0[$
6. $L = \left]-\infty\,;\,-\frac{1}{3}\right] \cup [1\,;\,\infty[$
7. $L = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$
8. $L = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$
9. $L = \left]\frac{1}{7};\,\frac{5}{7}\right[$
10. $L = \{\}$
11. $L = \mathbb{R}$
12. $L =]-4;2[$
13. $L =]-2;3[$
14. $L =]-\infty;\frac{5-\sqrt{3}}{2}] \cup [\frac{5+\sqrt{3}}{2};\infty[$
15. $L =]-\infty;\frac{5-\sqrt{7}}{2}] \cup [\frac{5+\sqrt{7}}{2};\infty[$
16. $L = \mathbb{R}\setminus]-3;0,25[$
17. $L =]-\infty;1-\sqrt{2}] \cup \{1\} \cup [1+\sqrt{2};\infty[$

18. Man erhält für die Seitenlänge x (gemessen in m) die Beziehung $2 - 0,5\sqrt{2} \leqq x \leqq 2 + 0,5\sqrt{2}$. D. h., eine Seitenlänge des Rechtecks darf ca. $2,71$ m nicht überschreiten, die andere beträgt dann mindestens $1,29$ m.

19. $l = 13\,\mathrm{m}$; $A = 338\,\mathrm{m}^2$

Teil II.

Geometrie

7. Vierecke

7.1. Punktsymmetrische Vierecke

1. Der Kehrsatz ist falsch, weil die Diagonalen in diesem Fall nicht notwendigerweise orthogonal sind.

2.

7.2. Parallelogramme

1.
2.
3.

7.3. Drachenvierecke und Trapeze

1. (a): Parallelität der Mittellinie zu den Grundseiten
   (b): $m = \frac{1}{4} \cdot (a + c)$

2.

3. (b) Geht man von einem konvexen Viereck aus, so gilt $60^0 < \beta < 120^0$, sonst $\beta < 120^0$. Es handelt sich um ein (spezielles) Drachenviereck: Aus $b = c$ ergibt sich, daß BCD ein gleichschenkliges Dreieck ist. Daraus folgt wegen $\beta = \delta$, daß auch ABD gleichschenklig sein muß.

7.4. Beweise

1. (a) Wenn ein Viereck achsensymmetrisch ist und einen 90°-Winkel hat, dann ist es ein Rechteck.

(b) Die Voraussetzung ist notwendig für den Satz.
Die Voraussetzung ist aber nicht hinreichend für den Satz.
Ein Gegenbeispiel ist z. B. ein Drachenviereck mit Symmetrieachse AC und $\beta = \delta = 90°$.

2.

3.

4.

5.

6. (a) „Wenn ein Dreieck zwei gleiche Winkel besitzt, ist es gleichseitig.“
   (b) „Wenn ein Dreieck keine zwei gleichen Winkel besitzt, dann ist es nicht gleichseitig.“
   (c) Satz und (äquivalent) Kontraposition sind wahr, der Kehrsatz ist falsch.

7. Die Seitenhalbierende zerlegt das Dreieck in zwei Teildreiecke, die in zwei Seiten und einem rechten Winkel übereinstimmen.

8. Die Voraussetzung ist hinreichend aber nicht notwendig. Deswegen ist nur der Satz wahr.

9.

10.

11.

12. Der Kehrsatz ist falsch, weil die Diagonalen in diesem Fall nicht notwendigerweise orthogonal sind.

13. Man zeigt: Die vier rechtwinkligen Dreiecke sind kongruent, also ist das neuentstandene Viereck eine Raute. Die Innenwinkel der Raute sind so groß wie die Summe der beiden von 90^0 verschiedenen Winkel der Dreiecke, also sind sie rechte Winkel.

14. Man bezeichne wie üblich die Seiten mit $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$, $d = \overline{DA}$, und die Diagonalen mit $e = \overline{AC}$ bzw. $f = \overline{BD}$. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung:

$$\begin{array}{rrl} & e & \leqq a+b \\ & e & \leqq d+c \\ & f & \leqq a+d \\ & f & \leqq b+c \\ \text{Summation ergibt:} & 2(e+f) & \leqq 2(a+b+c+d) \end{array}$$

15.

16. (a) z.B. „zwei Seiten sind parallel “
    (b) z.B. „alle Seiten gleich lang “
    (c) z.B. „je zwei Gegenseiten gleich lang “

17.

18.

19.

7.5. Vektoren

1. $C(-6|3)$
2. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{DA}$
3. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{a}$
4. (b): $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$
5. (b): $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$
6. Er muß um $38,7^0$ „vorhalten “.

8. Kreise und Geraden

8.1. Sehnen- und Tangentenvierecke

1. Die vier Lote vom Inkreismittelpunkt auf die Vierecksseiten a, b, c und d schneiden diese in den Punkten X, Y, Z und W. Es gilt $\overline{AW} = \overline{AX}$, $\overline{BX} = \overline{BY}$, $\overline{CY} = \overline{CZ}$ und $\overline{DZ} = \overline{DW}$. Daraus folgt:

$$a + c = (\overline{AX} + \overline{XB}) + (\overline{CZ} + \overline{ZD}) = (\overline{AW} + \overline{WD}) + (\overline{BY} + \overline{YC}) = b + d$$

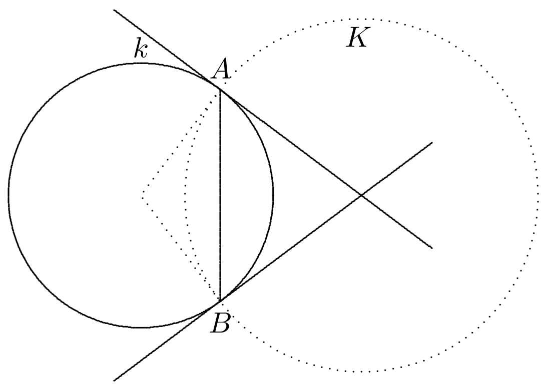
2. $\alpha = 70^o$; $\beta = 82,5^o$; $\delta = 97,5^o$

3.

4.

5. $\alpha = 65^0$, $\beta = 105^0$, $\gamma = 115^0$ und $\delta = 75^0$

6. $\mu = 80^0$, $\alpha = 50^0$, $\delta = 35^0$, $\gamma = 140^0$



7.

8. Das (gleichschenklige) Dreieck ABP enthält zwei Sehnen-Tangentenwinkel und nach Voraussetzung den Scheitelwinkel 2α. Also ist $4\alpha = 180^0$.

9. Jeweils gegenüberliegende Dreiecke sind winkelgleich (Scheitelwinkel, Umfangswinkel über einer außerhalb liegenden Sehne, Winkelsumme im Dreieck)
10. Man zeichnet den Inkreis und ein Paar paralleler Tangenten AB und CD. Die beiden anderen Seiten sind ebenfalls Tangenten. Die Kreisradien zu den Berührpunkten schließen jeweils Winkel ein, die sich mit den korrespondierenden Innenwinkeln des Trapezes zu 180^0 ergänzen. Durch Konstruktion der Radien erhält man die gesuchten Tangenten.
11. Konstruktion des Dreiecks ABD und seines Umkreises. Antragen von β an $[AB]$, der freie Schenkel schneidet den Umkreis im vierten Eckpunkt C.
12. ACD ist nach SWS eindeutig bestimmt ($\delta = 75^0$). B liegt auf dem Umkreis von ACD und hat von A den Abstand $7,5\,\mathrm{cm}$. Von den zwei möglichen Punkten auf dem Umkreis liefert nur einer ein überschneidungsfreies Viereck $ABCD$.
13. $\gamma = 104^0$
14. Es handelt sich um die Mittelpunkte des Inkreises und der drei Ankreise.
15.

8.2. Umfangswinkelsatz

1. 108°, Zusammenhang zwischen Mittelpunkts- und Umfangwinkel
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9. $M =$ Mittelpunkt von $[BC]$
   $\{A\} =$ Faßkreisbogen über $[BC]\ \cap\ k(M\,;\, r = s_a)$

10. (b) Thaleskreis (d) keine Lösung für $\gamma > 52°$
11.
12.
13.
14.
15. $\{C\} =$ Faßkreisbogen über $[AB]$ $\cap$ Parallele zu AB
16. $P =$ Faßkreisbogen (120°) über $[AB]$ $\cap$ Faßkreisbogen (120°) über $[BC]$
17. $\alpha = 65^o$; $\gamma = 115^o$; $\delta = 75^o$; $\beta = 105^o$
18. $\varepsilon = \alpha = 180° - \gamma = 40°$; $\beta = 15°$
19. $\varphi = \tau = 50°$; $\varepsilon = 40°$; $\beta = 10°$; $\delta = 130°$
20.
21. (a) WW-Satz, $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BCF$ und $\sphericalangle DBC = \sphericalangle CAB = \sphericalangle CFB$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck und Umfangswinkelsatz)
    (b) Folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CDB und CFB.
22. (a) Die Winkel der beiden Dreieecke bei A und D sind nach dem Umfangswinkelsatz gleich, den Winkel bei T haben beide gemeinsam.
    (b) Wegen der Ähnlichkeit gilt $\frac{\overline{AT}}{\overline{DT}} = \frac{\overline{CT}}{\overline{BT}}$

8.3. Anwendungaufgaben mit Faßkreisbögen

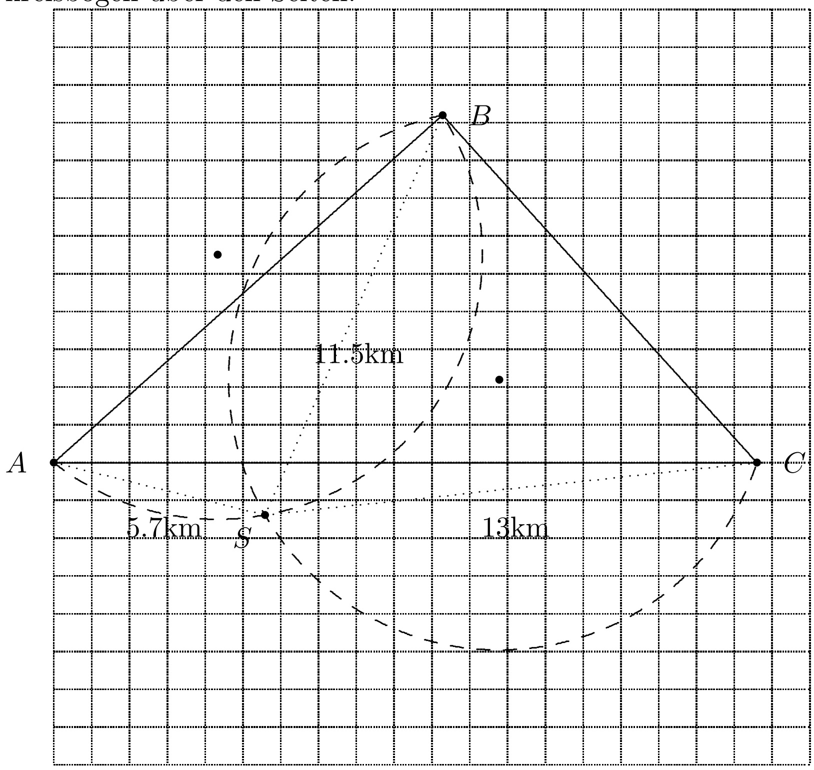
1. Die beiden zu AB parallelen Kreistangenten berühren den Kreis in zwei Punkten C und C'. C ist der Punkt der von AB den größeren Abstand hat (zwei Lösungen, falls AB Zentrale ist).

2. $L =$ Faßkreisbogen über $[BS]$ $\cap$ Parallele zu DE

3. $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} 6\,\text{cm}$
   $M_1 =$ Äußeres des Faßkreisbogenpaares über $[AB]$ zum Winkel 110°
   $M_2 =$ Inneres des Faßkreisbogenpaares über $[AB]$ zum Winkel 40°
   $M_3 =$ Äußeres des Kreises um A mit Radius 3 cm
   $M_4 =$ Äußeres des Kreises um B mit Radius 7 cm
   Lösung $= M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap$ jeweilige Flußseite

4. (a) 110° ; (b) 30° ; (c) 40° ; (d) 40°

5. Konstruktion von ABC aus den drei Seitenlängen und die Konstruktion von zwei Faßkreisbögen über den Seiten.



6.

9. Flächenmessung

9.1. Verwandlungsaufgaben

1. $C' = C$; B' liegt auf CB im Abstand a' von C; A' liegt auf CA und auf der Parallelen zu AB' durch B.

2. $AC' \| A'C$

3. $B_2C \parallel BC_2$

4.

5. Das Trapez kann zunächst in ein Parallelogramm verwandelt werden. Mit einer ersten Scherung erreicht man, daß eine Höhe die gewünschte Länge hat, eine zweite verwandelt das Parallelogramm in ein Rechteck.

6. (b) Abstand $3,5\,\mathrm{cm}$, (c) $b = \frac{35}{4}\,\mathrm{cm}$

7.

10. Zentrische Streckung

10.1. Reine Konstruktionsaufgaben

1.
2.
3. Sie ist gegensinnig.
4.
5. $A'(10,5|7,5)$
6.
7.

10.2. Rein rechnerische Aufgaben

1. $m = 1,25$; $\overline{A'C'} = 6,25\,\text{cm}$; $\gamma\,' = 56^o$
2. $b' = 7\,\text{cm}$
3. (a): $\overline{AC} = 12,8\,cm \neq 12,5\,cm = \overline{BD}$ (d): $\overline{AA'} = 8,8\,cm$
4. (a) $\overline{ZA'} = 10\,\text{cm}$, $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$, $\overline{BB'} = 4,5\,\text{cm}$.
   (b) Der Abstand $\overline{ZC'}$ ist nicht festgelegt.

10.3. Umfangreichere Aufgaben (Zeichnung/Rechnung)

1. $\overline{ZL} = 3\,\text{cm}$, $\overline{ZL'} = 5\,\text{cm}$,
2. (a) $\overline{BC} = 1,8\,\text{cm}$; $\overline{AB} = 1,6\,\text{cm}$; $\overline{CC'} = 6,75\,\text{cm}$ (b) $m_2 \approx 0,7$
3. $\overline{ZA} = \frac{8}{3}\,\text{cm}$, $A_{ZAB} = 4\,\text{cm}^2$, $A_{ZA'B'} = \frac{49}{4}\,\text{cm}^2$, $A_{ZA'B} = 7\,\text{cm}^2$

4. (b): Parallele zu $[PQ]$ durch P' schneidet ZQ in Q'
   (c): $6,0\,cm$
   (d): $A_{ZPQ} = 5,4\,cm^2$; $A_{ZP'Q'} = 15\,cm^2$
   (e): $m^* = 2,5$

5. $m = \pm\frac{3}{4}$

6. (b): $-\frac{4}{7}$ (d): $A_{ABC} = 17,5\,cm^2$; $A_{A'B'C'} = \frac{40}{7}\,cm^2$

7. $k = -\frac{4}{3}$; $h_c = 1,8\,\mathrm{cm}$

8. (c): $5,6\,cm$

9. (a) $m = -\frac{4}{3}$ (b) $h_c = 1,8\,\mathrm{cm}$

10. (c): $\frac{75}{8}\,cm^2$
    (d): Streckfaktor: -3

11. (d): $m = -0,6$; $A_{A'B'C'} = 15,12\,cm^2$; $\overline{A'B'} = 7,2\,cm$
    (e): $k = \frac{5}{3}$
    (f): nein, da $AC \nparallel ZD$

12. (a) $\sphericalangle C'BC = \alpha$
    (b) $\Delta ABC \sim \Delta AB'C' \sim \Delta C'B'B$, $\Delta ABC' \sim \Delta BCC'$
    (c) $x = \overline{BB'} = (k-1)\,c$, $\dfrac{x}{k\,a} = \dfrac{a}{c} \implies k = \dfrac{c^2}{c^2 - a^2} = \dfrac{25}{16}$
    $\dfrac{d}{k\,a} = \dfrac{b}{c}$, $d = \dfrac{a\,b\,c}{c^2 - a^2} = \dfrac{45}{8}$

11. Kegelschnitte

1.

2. (a) $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{(2{,}5)^2} = 1$
   (b) Symmetrie zur x-Achse
   (c) $4 \cdot a = 20$

12. Sphärische Trigonometrie

12.1. Großkreise

1. München: $d_{\ddot{A}} = 5348\,\text{km}$, $d_N = 4658\,\text{km}$, $d_S = 15354\,\text{km}$;
   Leningrad: $d_{\ddot{A}} = 6626\,\text{km}$, $d_N = 3380\,\text{km}$, $d_S = 16632\,\text{km}$
   Sydney: $d_{\ddot{A}} = 3724\,\text{km}$, $d_N = 13730\,\text{km}$, $d_S = 6282\,\text{km}$

2. (a) Linkspol: geogr. Breite $\phi = 0°$, geogr. Länge $\lambda = 90°$ ost
   Rechtspol: $\phi = 0°$, $\lambda = 90°$ west
   (b) Linkspol: $\phi = 0°$, $\lambda = 140°$ ost
   Rechtspol: $\phi = 0°$, $\lambda = 40°$ west
   (c) Linkspol: $\phi = 0°$, $\lambda = 40°$ ost
   Rechtspol: $\phi = 0°$, $\lambda = 140°$ west
   (d) Linkspol: $\phi = 0°$, $\lambda = 10°$ west
   Rechtspol: $\phi = 0°$, $\lambda = 170°$ ost
   (e) Linkspol: $\phi = 0°$, $\lambda = 20°$ west
   Rechtspol: $\phi = 0°$, $\lambda = 160°$ ost

3. (a) Linkspolare: Meridian zu 120° ost
   Rechtspolare: Meridian zu 60° west
   (b) Linkspolare: Meridian zu 20° ost
   Rechtspolare: Meridian zu 160° west
   (c) Linkspolare: Meridian zu 140° west
   Rechtspolare: Meridian zu 40° ost
   (d) Linkspolare: Meridian zu 100° west
   Rechtspolare: Meridian zu 80° ost
   (e) Linkspolare: Meridian zu 30° west
   Rechtspolare: Meridian zu 150° west

4. Den Geraden entsprechen auf der Kugel Großkreise (kürzester Verbindung zweier Punkte)! Steht ein Großkreis auf zwei anderen Großkreisen senkrecht, so schneiden sich diese in seinem Pol. Also läßt sich die Definition nicht auf die Kugel übertragen.

12.2. Kleinkreise

1. München: $4254km$, Leningrad: $3223km$, Sydney: $5312km$

2. $v = \frac{2r\pi}{24h} \Rightarrow v_M = 1114\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_L = 844\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_S = 1391\frac{\text{km}}{\text{h}}$

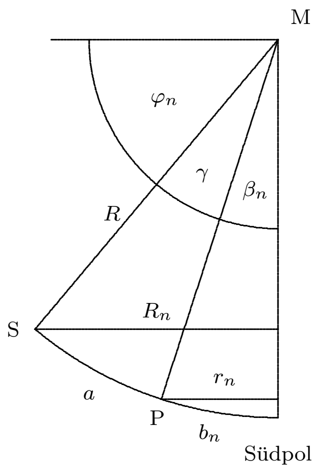
3. (a) Am Nordpol
   (b) 500 km nördlich des Äquators

4. (a) S $(\lambda|90°)$ (Nordpol)
   (b) Siehe Lösung zu (c) mit $n = 1$.
   (c) Der Pilot fliegt $a = 1000$ km nach Süden, umrundet dann den Südpol n-mal auf einem Kreis mit dem Umfang $\frac{a}{n}$ und fliegt anschließend 1000 km nach Norden zu S. Der Radius des Kreises ist

$$r_n = \frac{a}{2\,n\,\pi}$$

$$\beta_n = \arcsin\frac{r_n}{R}$$

$$b_n = R\cdot\arcsin\frac{r_n}{R}$$



$$\gamma = \frac{a}{R} = \frac{1000}{6370} = 0{,}157 = 8{,}99°$$

$$\text{S}\,(\lambda|\varphi_n) \quad \text{mit} \quad \varphi_n = \gamma + \beta_n - \frac{\pi}{2}$$

$$R_n = R\cdot\sin(\gamma+\beta_n)$$

n	1	2	3	...	∞
φ_n	−79,57°	−80,29°	−80,53°	...	81,01°
R_n	1153 km	1074 km	1048 km	...	996 km

5. (a) $\frac{\alpha}{360°}\cdot 2r\pi = d \Rightarrow \alpha = \frac{d\cdot 360°}{2r\pi} = 63° \Rightarrow$ Ort liegen am dem Breitenkreis mit 27,0° nördlicher Breite.
   (b) $\alpha = 6{,}3° \Rightarrow$ Ort liegen am dem Breitenkreis mit 83,7° nördlicher Breite.
   (c) $\alpha = 0{,}63° \Rightarrow$ Ort liegen am dem Breitenkreis mit 89,37° nördlicher Breite.

(d) $r_a = r_{\text{Erde}} \cos\phi = 5674\,\text{km}$, $r_b = 699\,\text{km}$, $r_c = 70{,}0\,\text{km}$
Je kleiner der sphärische Abstand zum Pol, umso besser stimmt er mit dem Radius des Breitenkreises überein (Krümmung spielt eine immer geringere Rolle).

6. (a) $\phi = \frac{d \cdot 360°}{2r\pi} = 54°$
   (b) $\phi = 27°$
   (c) $\phi = 2{,}7°$
   (d) $r_a = 5781\,\text{km}$, $r_b = 2972\,\text{km}$, $r_c = 299{,}97\,\text{km} \approx 300\,\text{km}$
   Je kürzer der Weg, umso weniger macht sich die Krümmung bemerkbar.

7. (a) $\sin\alpha = \frac{r}{R} = 0{,}08 \Rightarrow \alpha = 4{,}59° \Rightarrow r_s = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2R\pi = 0{,}4$
   (b) $r_s = 3{,}6$
   (c) $r_s = 500{,}5\text{km}$
   (d) $r_s = 2034\text{km}$
   (e) $r_s = 0{,}5236$
   (f) $r_s = 0{,}9273$

12.3. Kugelzweieck

1. (a) π
   (b) 20012km
   (c) 38m

2. (a) $A = 52\text{m}^2$
   (b) $A = 461814\text{m}^2 = 0{,}46\text{km}^2$
   (c) $A = 8{,}69 \cdot 10^3\text{km}^2$
   (d) $A = 16 \cdot 10^3\text{km}^2$

3. (a) $A' = 4A$
   (b) $A' = 3A$
   (c) $A' = 18A$
   (d) $A' = \frac{3}{4}A$
   (e) $A' = \frac{9}{2}A$

4. (a) $A = \frac{60}{360} \cdot 4\pi = 2{,}1$
   (b) $A = \frac{120}{360} \cdot 4 \cdot 5^2\pi = 105$
   (c) $A = \frac{0{,}7\pi}{2\pi} \cdot 4 \cdot 15^2\pi = 990$
   (d) $A = \frac{1{,}23\pi}{2\pi} \cdot 4 \cdot 25^2\pi = 4{,}83 \cdot 10^3$

5. (a) $A' = 4A$
   (b) $A' = \frac{1}{3}A$
   (c) $A' = 2A$
   (d) $A' = \frac{1}{8}A$
   (e) $A' = 4\frac{1}{2}A$

6. $\frac{1}{24}$A, $\frac{1}{8}$A, $\frac{3}{8}$A, $\frac{11}{24}$A und $\frac{7}{8}$A.

7. (a) $A_1 = \frac{85{,}5}{360} \cdot 4\pi \cdot (6368\text{km})^2 = 1{,}21 \cdot 10^8\text{km}^2$
   $A_2 = 2\pi \cdot (6368\text{km})^2 - A_1 = 1{,}34 \cdot 10^8\text{km}^2$
   (b) $A_1 = \frac{132{,}9}{360} \cdot 4\pi \cdot (6368\text{km})^2 = 1{,}88 \cdot 10^8\text{km}^2,\ A_2 = 6{,}67 \cdot 10^7\text{km}^2$
   (c) $A_1 = \frac{54{,}9}{360} \cdot 4\pi \cdot (6368\text{km})^2 = 7{,}77 \cdot 10^7\text{km}^2,\ A_2 = 1{,}77 \cdot 10^8\text{km}^2$

12.4. Kugeldreieck

1. (a) $A_\triangle = 0{,}81 \cdot 10^7\,\text{km}^2, \varepsilon = 11{,}5° = 0{,}2$
   (b) $A_\triangle = 5{,}2 \cdot 10^7\,\text{km}^2, \varepsilon = 74° = 1{,}29$
   (c) $A_\triangle = 2{,}6 \cdot 10^7\,\text{km}^2, \varepsilon = 37{,}4° = 0{,}65$

2. (a) 9,3%
   (b) 19%

3. (a) 90°
   (b) 100°
   (c) 96°
   (d) 108°

4. (a) $2\,\pi$

(b) $180° < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 3 \cdot 180°$

(c) $2 \cdot 180° < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 4 \cdot 180°$

(d) $3 \cdot 180° < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 5 \cdot 180°$

(e) $(n-2) \cdot 180° < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < n \cdot 180°$

5. (a) A': Nordpol
B': Schnittpunkt des Meridians zu 120° w. Länge mit Äquator
C': Schnittpunkt des Meridians zu 170° w. Länge mit Äquator

(b) Im Dreieck $\triangle ABC$ ist $a = 130°$, $b = c = 90° \Rightarrow \alpha' = 50°$, $\beta' = \gamma' = 90° \Rightarrow$ $A = \frac{50°+90°+90°-180°}{180°} \cdot (6370\,\mathrm{km})^2\pi = 3{,}5 \cdot 10^7\,\mathrm{km}^2$

(c) A'': Nordpol
B'': Schnittpunkt des Meridians zu 80° w. Länge mit Äquator
C'': Schnittpunkt des Meridians zu 150° ö. Länge mit Äquator

6. (a) $a + b + c = 80° + 120° + c = 200° + c < 360° \Rightarrow c < 160°$
$\alpha' = 100°$, $\beta' = 60°$, $20° < \gamma' < 180°$
$\Rightarrow A = \frac{100°+60°+\gamma'-180°}{180°} \cdot r^2\pi \Rightarrow 0 < A < \frac{8}{9} \cdot r^2\pi$

(b) $a + b + c = 100° + b + 110° = 210° + b < 360° \Rightarrow b < 150°$
$\alpha' = 80°$, $\gamma' = 70°$, $30° < \beta' < 180°$
$\Rightarrow A = \frac{80°+\beta'+70°-180°}{180°} \cdot r^2\pi \Rightarrow 0 < A < \frac{5}{6} \cdot r^2\pi$

(c) $\alpha + \beta - 180° < \gamma \Rightarrow 110° < \gamma < 180° \Rightarrow 1\frac{2}{9}r^2\pi < A_\triangle < 1\frac{11}{18}r^2\pi$

(d) $\alpha + \gamma - 180° < \beta \Rightarrow 140° < \beta < 180° \Rightarrow 1\frac{5}{9}r^2\pi < A_\triangle < 1\frac{7}{9}r^2\pi$

7. (a) $\beta = 60{,}38°$, $\gamma = 98{,}68°$, $a = 94{,}98°$

(b) $\beta = 139{,}57°$, $\gamma = 96{,}47°$, $a = 82{,}36°$

(c) $\gamma = 77{,}30°$, $a = 38{,}26°$, $b = 74{,}42°$

(d) $\gamma = 102{,}70°$, $a = 38{,}26°$, $b = 105{,}58°$

8. (a) $U = 250°$

(b) $\gamma = 100° \Rightarrow U = 240°$

(c) $\beta = 80° \Rightarrow U = 200°$

9. (a) $A = \frac{2(\alpha_1+\alpha_3)-360°}{180°} \cdot \pi = \frac{5}{9}\pi$

(b) $A = \frac{2(\alpha_2+\alpha_4)-360°}{180°} \cdot \pi = \frac{7}{9}\pi$

10. (a) $A = \frac{2(\alpha_1+\alpha_3)-360°}{180°} \cdot \pi = \frac{5}{9}\pi \Rightarrow$
$\alpha_3 = (\frac{5}{9} \cdot 180° + 360°) : 2 - \alpha_1 = 150°$
$\alpha_2 + \alpha_4 = 230°$

(b) $A = \frac{2(\alpha_2+\alpha_4)-360°}{180°} \cdot \pi = \frac{4}{9}\pi \Rightarrow$
$\alpha_4 = (\frac{4}{9} \cdot 180° + 360°) : 2 - \alpha_2 = 90°$
$\alpha_2 + \alpha_4 = 220°$

(c) Vom sphärischen Mittelpunkt Lot auf die Seiten P_1P_2 und P_2P_3 fällen.
$\cos\alpha_{21} = \frac{\tan 15°}{\tan 50°} \Rightarrow \alpha_{21} = 77°$
$\cos\alpha_{22} = \frac{\tan 45°}{\tan 50°} \Rightarrow \alpha_{22} = 33° \Rightarrow \alpha_2 = 110°$
$A = \frac{2(\alpha_2+\alpha_4)-360°}{180°}\pi = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow \alpha_4 = 130°$
$\alpha_1 + \alpha_3 = 240°$

(d) Vom sphärischen Mittelpunkt Lot auf die Seiten P_2P_3 und P_3P_4 fällen.
$\cos\alpha_{31} = \frac{\tan 30°}{\tan 60°} \Rightarrow \alpha_{21} = 70{,}53°$
$\cos\alpha_{32} = \frac{\tan 15°}{\tan 60°} \Rightarrow \alpha_{22} = 81{,}10° \Rightarrow \alpha_3 = 151{,}63°$
$A = \frac{2(\alpha_1+\alpha_3)-360°}{180°}\pi = \frac{4}{9}\pi \Rightarrow \alpha_1 = 68{,}37°$
$\alpha_2 + \alpha_4 = 220°$

11. (a) Vom sphärischen Mittelpunkt Lot auf die Seite P_2P_3 fällen.
$\cos\frac{\alpha_3}{2} = \frac{\tan 20°}{\tan 50°} \Rightarrow \alpha_3 = 144{,}43°$
$\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_3 = 264{,}43° \Rightarrow A = \frac{2(\alpha_1+\alpha_3)-360°}{180°}\pi = 2{,}95$

(b) Vom sphärischen Mittelpunkt Lot auf die Seite P_3P_4 fällen.
$\cos\frac{\alpha_4}{2} = \frac{\tan 15°}{\tan 70°} \Rightarrow \alpha_4 = 168{,}81°$
$\Rightarrow \alpha_2 + \alpha_4 = 218{,}81° \Rightarrow A = \frac{2(\alpha_2+\alpha_4)-360°}{180°}\pi = 1{,}35$

12. $\alpha_1 = 49{,}6°$, $a_3 = 64{,}3°$, $\alpha_3 = 52{,}4°$, $s_1 = 81{,}4°$, $h_2 = 43{,}3°$.

13.

	a	b	c	α	β	γ
a)	62,83°	61,43°	96,60°	54,10°	53,09°	115,25°
b)	74,53°	80,62°	98,87°	72,58°	77,62°	102,00°
c)	74,48°	30,66°	96,85°	43,03°	21,17°	135,32°
d)	76,48°	51,76°	78,21°	81,98°	53,12°	85,52°
e)	145,51°	51,89°	109,88°	146,13°	50,75°	67,76°
f)	30,23°	67,91°	55,43°	31,49°	105,98°	58,69°
g)	115,35°	83,98°	87,57°	115,81°	82,17°	84,43°
h)	83,67°	132,02°	96,11°	86,98°	131,72°	92,54°

14. (a) $a = \frac{a'}{R}$ (a': Länge des Großkreisbogens) wird für große Kugelradien R sehr klein. Also wird $\sin a$ zu a, $\tan a$ zu a und $\cos a$ zu $1 - \frac{1}{2}a^2$.

(b) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\tan\alpha = \frac{a}{b}$

(c) Satz des Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$

(d) Sinussatz: $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

(e) Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

15. $\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c} \Rightarrow \sin a = \sin\alpha \sin c$
Es gilt also: $|\sin a| \leq |\sin c|$, was mit der Behauptung äquivalent ist.

$\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c} \Rightarrow \sin b = \sin\beta \sin c$
Es gilt also: $|\sin b| \leq |\sin c|$, was mit der Behauptung äquivalent ist.

16. Geht man bei einem rechtwinkligen Kugeldreieck zum Polardreieck über, erhält man ein rechtsseitiges Kugeldreieck. In der Neperschen Regel ergeben sich dabei die folgenden Ersetzungen:
$c \to 180° - \gamma$, $\alpha \to 180° - a$, $\beta \to 180° - b$, $90° - b \to \beta - 90°$ und $90° - a \to \alpha - 90°$
Nun schreibt man sich die zehn zugehörigen Formeln entsprechend der Neperschen Regel auf und nutzt die Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen. Man erkennt, dass die Formeln bei den folgenden Ersetzungen richtig bleiben:
$180° - b \to b$, $180° - a \to a$, $\beta - 90° \to 90° - \beta$ und $\alpha - 90° \to 90° - \alpha$.
Im Neperschen Kreis stehen also der Reihe nach die Größen:
$180° - \gamma$, b, $90° - \alpha$, $90° - \beta$ und a.

17. $\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c} = \frac{\sin q}{\sin a} \Rightarrow \sin^2 a = \sin c \cdot \sin q$.

Analog folgt $sin^2 b = \sin c \cdot \sin p$.

18. In jedem Kugeldreieck gilt $\alpha + \beta + \gamma > \pi$, da die Fläche eines Kugeldreiecks $\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{\pi}\ r^2\pi$ stets positiv ist.
Die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks ist offensichtlich kleiner als $r^2\pi \Rightarrow$
$\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{\pi} < 1 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma < 2 \cdot \pi$

19. (a) Wendet man den Kosinussatz auf die Teildreiecke an, erhält man
$\cos b = \cos p \cdot \cos t + \sin p \sin t \cos\mu$ und
$\cos a = \cos q \cdot \cos t + \sin q \sin t \cos(\pi - \mu)$.
Durch Ersetzung von $\cos\mu$ erhält man daraus
$\cos a \cdot \sin p + \sin q \cdot \cos b = \cos t(\cos q \cdot \sin p + \cos p \cdot \sin q) = \cos t \cdot \sin c$

(b) $\sin c \cdot \cos t = \sin\frac{c}{2} \cdot \cos a + \sin\frac{c}{2} \cdot \cos b = \sin\frac{c}{2} \cdot (\cos a + \cos b)$
Wegen $\sin c = 2\sin\frac{c}{2} \cdot \cos\frac{c}{2}$ folgt
$2\cos\frac{c}{2} \cdot \cos t = \cos a + \cos b \Rightarrow \cos t = \frac{\cos a + \cos b}{2\cos\frac{c}{2}}$

(c) $ct^2 + cpq = a^2p + b^2q$

(d) Berücksichtigt man Terme bis zur dritten Potenz, erhält man aus dem Zusammenhang aus (a):
$(c - \frac{1}{6}c^3)(1 - \frac{1}{2}t^2) = (p - \frac{1}{6}p^3)(1 - \frac{1}{2}a^2) + (q - \frac{1}{6}q^6)(1 - \frac{1}{2}b^2)$
$\Rightarrow ct^2 + cpq = a^2p + b^2q$

20. (a) gleichschenkliges Kugeldreieck mit $c = 90°$
    (b) gleichschenkliges Kugeldreieck mit $a = b = 90°$
    (c) Kugeldreieck mit $a = b = c = 90°$, also Kugeloktant

12.5. Probleme aus der Geographie und Himmelsbeobachtung

1. (a) $6{,}51 \cdot 10^3$km
   (b) $16{,}3 \cdot 10^3$km
   (c) $11{,}5 \cdot 10^3$km
   (d) $9{,}11 \cdot 10^3$km

2. (a) Nordpol
   (b) 50 km nördlich des Äquators
   (c) Nach den 100 km nach Süden befindet man sich auf dem Breitenkreis zu $\phi = 48{,}1° - 0.8995°$. Geht man nun 100 km nach Osten befindet man sich auf dem Längenkreis zu $\lambda = 11{,}5° + 1{,}324°$ ost. Am Ende steht man dann auf dem Längenkreis zu $\lambda = 11{,}5° + 1{,}324° - 1{,}347°$. Am Ende befindet man sich dann 1,7 km westlich vom Ausgangspunkt.

3. Radius des Breitenkreises zu $\phi = -33{,}5°$ beträgt 5311,8km
   $\Rightarrow$ geradlinige Verbindung: 9738,78km
   Mittelpunktswinkel des Großkreises (kürzeste Verbindung!): 99,71°
   $\Rightarrow$ Länge des Großkreisbogens beträgt $11{,}1 \cdot 10^3$km

4. (a) 668 km
   (b) 1760 km
   (c) 2619 km
   (d) 6130 km
   (e) 9549 km

5. (a) 20,95°
   (b) 44,90°
   (c) 34,02°
   (d) 59,01°

6. (a) $A_1 = \frac{85{,}5}{360} \cdot 4\pi \cdot (6368\text{km})^2 = 1{,}21 \cdot 10^8\text{km}^2$
$A_2 = 2\pi \cdot (6368\text{km})^2 - A_1 = 1{,}34 \cdot 10^8\text{km}^2$
(b) $A_1 = \frac{132{,}9}{360} \cdot 4\pi \cdot (6368\text{km})^2 = 1{,}88 \cdot 10^8\text{km}^2,\ A_2 = 6{,}67 \cdot 10^7\text{km}^2$
(c) $A_1 = \frac{54{,}9}{360} \cdot 4\pi \cdot (6368\text{km})^2 = 7{,}77 \cdot 10^7\text{km}^2,\ A_2 = 1{,}77 \cdot 10^8\text{km}^2$

13. Sphärische Trigonometrie (Anwendungen auf die Erd- und Himmelskugel)

13.1. Peilungsaufgaben

13.2. Kartenentwürfe

13.3. Astronomie

1. Zenitdistanz des Himmelsnordpols: $z_p = 90° - \varphi \Rightarrow$
   München: $z_P = 41{,}9°$, New York: $z_P = 49{,}6°$, Moskau: $z_P = 34{,}5°$

2. (a) Sirrah: $h_u = -12{,}8°$, $h_o = 71°$,
   Aldebaran: $h_u = -25{,}4°$, $h_o = 58{,}4°$

   (b) Sirrah: $h_o = 27{,}4°$, $h_u = -85{,}6°$,
   Aldebaran: $h_o = 40°$, $h_u = -73{,}0°$

   (c) Sirrah: $h_u = -0{,}8°$, $h_o = 59{,}0°$,
   Aldebaran: $h_u = -13{,}4°$, $h_o = 46{,}4°$

3. Sirrah: $\varphi > 60{,}9°$, Aldebaran: $\varphi > 73{,}5°$, Riegel: $\varphi < -81{,}8°$

4. (a) $\mathrm{PZ} = 90° - \varphi$, $\mathrm{ZS} = z = 90° - h$, $\mathrm{SP} = 90° - \delta$
   $\sphericalangle \mathrm{SPZ} = t$, $\sphericalangle \mathrm{PZS} = 180° - a$

   (b) $\cos z = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos t, \qquad \sin a = \dfrac{\cos\delta \sin t}{\sin z}$

   (c) $z = 29{,}8°$, $a = 61{,}4°$

   (d) $\sin\delta = \cos z \sin\varphi - \sin z \cos\varphi \cos a, \qquad \sin t = \dfrac{\sin z \sin a}{\cos\delta}$

   (e) $\delta = 30{,}1°$, $t = 11{,}4°$

5. (a)

   (b)

(c) Stern ist zirkumpolar, wenn die untere Kulminationshöhe
$h_u > 0$ ist. $\Longrightarrow$
Für Nordhalbkugel: $\varphi > 90° - \delta$, für Südhalbkugel $\varphi < -90° - \delta$

13.4. Koordinatensystem

13.5. Grundbegriffe der Zeitrechnung

Teil III.

Analysis

14. Definition der Grenzwerte - Epsilontik

1. $\left|\dfrac{1}{x-2}\right| = \dfrac{1}{|x-2|} < \varepsilon \quad , \quad x < 2 - \dfrac{1}{\varepsilon} \lor x > 2 + \dfrac{1}{\varepsilon} \quad , \quad x < -99\,998 \lor x > 100\,002$

2. (a) $f(100) = 2{,}00000125$; $f(10000) = 2{,}000000012$;
   Vermutung: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$

   (b) $x > 6{,}5$

3. (a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, $x > \left(\dfrac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 = 3\,996\,001$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$, $x > \dfrac{4}{\lg 2} = 13{,}29$

4. (a) $x > 2\,b + 2 = 200\,002$ (b) $x > \dfrac{2 \lg b}{\lg 1{,}25} = 123{,}83$

5. (a)

x	1	10	38	38,485524	38,485525	39	100
$f(x)$	2	102,4	$7{,}23 \cdot 10^9$	9999993524	10000000196	$1{,}41 \cdot 10^{10}$	$1{,}27 \cdot 10^{28}$

   (b)

x	1	10	44	44,147821	44,147822	45	100
$f(x)$	2	10,24	$9{,}09 \cdot 10^9$	9999995814	10000002292	$1{,}74 \cdot 10^{10}$	$1{,}27 \cdot 10^{26}$

   (c)

x	1	10	23	23,7581208	23,7581209	24	100
$f(x)$	10	1	$2{,}41 \cdot 10^9$	9999998571	10000000453	$1{,}58 \cdot 10^{10}$	$1 \cdot 10^{80}$

6. $g(x) = \lg(f(x)) = x \lg 2 - 1000 \lg x$
   Beispiel: $x = 1000$, $g(x) = -2698{,}970004 = 0{,}029996 - 2699$
   $f(x) = 10^{0{,}029996-2699} = 1{,}0715 \cdot 10^{-2699}$

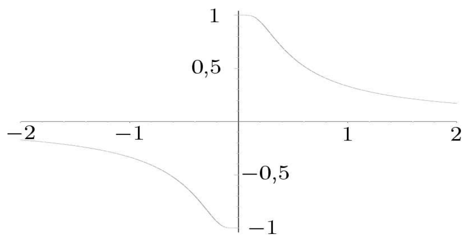
x	1	10	100	1000	1442,6
$g(x)$	0,301	$-996{,}990$	$-1969{,}897$	$-2698{,}970004$	$-2724{,}880056$
$f(x)$	2	$1{,}024 \cdot 10^{-997}$	$1{,}268 \cdot 10^{-1970}$	$1{,}0715 \cdot 10^{-2699}$	$1{,}318086 \cdot 10^{-2725}$

x	1442,7	1442,8	2000	10000
$g(x)$	$-2724{,}880057$	$-2724{,}880056$	$-2698{,}970004$	$-989{,}70004$
$f(x)$	$1{,}318084 \cdot 10^{-2725}$	$1{,}318087 \cdot 10^{-2725}$	$1{,}0715 \cdot 10^{-2699}$	$1{,}9950 \cdot 10^{-990}$

x	14117,37727	14117,37728	15000	20000
$g(x)$	99,9999975	100,0000002	339,3587	1719,5699
$f(x)$	$9{,}9999426 \cdot 10^{99}$	$1{,}00000048 \cdot 10^{100}$	$2{,}2839 \cdot 10^{339}$	$3{,}7146 \cdot 10^{1719}$

7. $\varepsilon_1 = \dfrac{2}{b-1} = 0{,}5, \quad \varepsilon_2 = \dfrac{2}{c+1} = 0{,}5, \quad \lim\limits_{x\to 2^\pm} \dfrac{x}{x-2} = \pm\infty$

8. $\delta = \dfrac{\lg 2}{\lg\left(\frac{2}{\varepsilon}-1\right)} \approx 0{,}0912$



9. (a) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $b \in \mathbb{R}$ mit $|f(x) - a| < \varepsilon$ für alle $x > b$.

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3 - 4\cdot 2^{-x}}{4\cdot 2^{-x} - 1} = -3$

   $f(x) - (-3) = \dfrac{8}{4 - 2^x} < 0$ für $x > 2 \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = (-3)^-$

   (c) $|f(x) - (-3)| = \left|\dfrac{8}{4 - 2^x}\right| < \varepsilon$

   Für $x > 2$ fallen die Betragsstriche weg und es folgt $x > \dfrac{\lg\left(4 + \frac{8}{\varepsilon}\right)}{\lg 2} = 69{,}44$

10. (a) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein x_0 mit $|f(x) - a| < \varepsilon$ für alle $x > x_0$.

    (b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1^-, \quad b = \dfrac{\lg\left(\frac{2}{\varepsilon}-1\right)}{\lg 3} = 13{,}206$

Teil IV.

Komplexe Zahlen

15. Komplexe Zahlen

15.1. Zahlbereichserweiterungen und Strukturen

1. $(1|1)$ ist offensichtlich das neutrale Element der Verknüpfung. Es haben jedoch nicht alle Zahlen ein inverses Element:
   Annahme: $(x|y)$ ist das inverse Element zu $(1|0) \Rightarrow$
   $(1|0) \circ (x|y) = (x|0) \neq (1|1)$ für alle x und y.

2. Abgeschlossenheit der Menge bezüglich der Verknüpfung ist klar.
   Das Kommutativgesetz gilt:
   $z_2 \circ z_1 = (a_2|b_2) \circ (a_1|b_1) = (a_2b_1 + a_1b_2|a_2a_1 + b_2b_1) = z_1 \circ z_2$
   Das Assoziativgesetz gilt:
   $(z_1 \circ z_2) \circ z_3 = (a_1b_2b_3 + a_1a_2a_3 + b_1a_2b_3 + b_1b_2a_3|(a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3 + b_1b_2b_3)$
   $(0|1)$ ist das neutrale Element der Verknüpfung.
   $\left(-\dfrac{a_1}{b_1^2 - a_1^2}\middle|\dfrac{b_1}{b_1^2 - a_1^2}\right)$ wäre das inverse Element von $z_1 = (a_1|b_1)$, es existiert jedoch nur für $a_1^2 \neq b_1^2$. Die Menge der Komplexen Zahlen ohne 0 ist bezüglich der angegebenen Verknüpfung keine Gruppe.

15.2. Konstruktion der komplexen Zahlen

15.3. Veranschaulichung komplexer Zahlen

1. $z_1 = 1 + 2i$, $z_1^* = 1 - 2i$, $z_1^2 = -3 + 4i$
   $z_1 = 2 - 4i$, $z_2^* = 2 + 4i$, $z_2^2 = -12 - 16i$

15.4. Grundrechenarten

1. (a) $\dfrac{1-i}{-i} = \dfrac{(1-i)i}{-i^2} = \dfrac{1+i}{1} = 1 + i$

   (b) $\dfrac{i}{1-i} = \dfrac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{-1+i}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

   (c) $(-i)^{1003} = -i^{1000} \cdot i^3 = -1 \cdot (-i) = i$

   (d) $\dfrac{(3-4i)(12+5i)}{(12-5i)(12+5i)} = \dfrac{36 + 20 + (-48 + 15)i}{144 + 25} = \dfrac{56}{169} - \dfrac{33}{169}i$

2. (a) $\dfrac{1+i}{i} = \dfrac{(1+i)i}{i^2} = \dfrac{-1+i}{-1} = 1-i$

   (b) $\dfrac{i}{1+i} = \dfrac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1+i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

   (c) $i^{73} = i^{72} \cdot i = 1 \cdot i = i$

   (d) $\dfrac{(5+12i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)} = \dfrac{-15+48+(-36-20)i}{9+16} = \dfrac{33}{25} - \dfrac{56}{25}i = 1{,}32 - 2{,}24\,i$

3. (a) $-1, -i, 1, -i, -1, -1+i, 2i$

   (b) $2i, -2+2i, -4, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}i, 1+3i, 3-i$

   (c) $-5+12i, -46+9i, -119-120i, \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i, -\frac{5}{169} - \frac{12}{169}i, -3+15i,$
   $48-6i$

   (d) $5-12i, -9-46i, -119-120i, \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i, \frac{5}{169} + \frac{12}{169}i, 8-14i, 12+44i$

4. $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{113}$, $\sqrt{82}$

5. (a) -20

   (b) $-i-1$

   (c) $8-3i$

   (d) $2+11i$

   (e) $-2-11i$

6. $2-2i$, $-6+8i$, $6-8i$, $7+22i$, $-\dfrac{23}{41} + \dfrac{2}{41}i$, $-\dfrac{23}{13} - \dfrac{2}{13}i$

7. (a) $z_2 = -i$, $z_3 = -1-i$, $z_4 = i$, $z_5 = -1-i$, $z_6 = i$

   (b) $z_2 = 1$, $z_3 = 2$, $z_4 = 5$, $z_5 = 26$, $z_6 = 677$

   (c) $z_2 = -0{,}5 + 0{,}2i$, $z_3 = -0{,}29$, $z_4 = -0{,}4159 + 0{,}2i$,
   $z_5 = -0{,}3670272 + 0{,}03364i$, $z_6 = -0{,}3664227 + 0{,}1753064i$

   (d) $z_2 = -0{,}1 + i$, $z_3 = -1{,}09 + 0{,}8i$, $z_4 = 0{,}4481 - 0{,}744i$,
   $z_5 = -0{,}45274239 + 0{,}3332272i$, $z_6 = -0{,}00606469512 + 0{,}6982678421i$

   Anmerkung:
   Berechnet man nach der Vorschrift $z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad (z, c \in \mathbb{C})$ für ein festes z_1 und verschiedene Werte von c die Reihe, so divergiert für gewisse Werte (für c, $z_1 = 0$) der Betrag der z_n, für andere Werte (für c, $z_1 = 0$) bleibt der Betrag von z_n endlich.
   Markiert man nun in einer komplexen Zahlenebene die Punkte (c-Werte), bei denen der Betrag von z_n endlich bleibt, erhält man eine Mandelbrotmenge. Die bekannteste Mandelbrotmenge ist das Apfelmännchen.

8. $-77{,}5 + 91\,i$

9. $z_1\,z_2 = a\,c - b^2 + b\,(a+c)\cdot i \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad c = -a$

   $q = \dfrac{a+b\,i}{-a+b\,i} = \dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2} - \dfrac{2ab}{a^2+b^2}\cdot i$

10. $z = \left(\dfrac{a+a\,i}{a-b\,i}\right)^2 = \left(\dfrac{a^2-ab}{a^2+b^2} + \dfrac{a^2+ab}{a^2+b^2}\cdot i\right)^2 = \dfrac{-4\,a^3b}{(a^2+b^2)^2} + \dfrac{2a^2(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}\cdot i$

11. (a) $-i$ (b) $-1-i$ (c) 0 (d) $2\,i$ (e) -2 (f) $10\,i$ (g) $-4\,i$ (h) 0

12. (a) $\dfrac{10+11\,i}{17}$ (b) $\dfrac{-5+12\,i}{13}$ (c) $\dfrac{3-4\,i}{25}$ (d) $0{,}6 - 0{,}8\,i$ (e) i

13.

14.

15. (a) $2\,a$ (b) $2\,b\,i$ (c) a^2+b^2 (d) $\dfrac{a^2+b^2}{2\,a}$

    (e) $2\,(a^2-b^2)$ (f) $-4\,a\,b\,i$ (g) $\dfrac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$ (h) $\dfrac{4\,a\,b\,i}{a^2+b^2}$

16. $z = a+b\,i \quad \Longrightarrow \quad |z|^2 = \left|z^2\right| = |\overline{z}|^2 = |z\cdot\overline{z}| = z\cdot\overline{z} = a^2+b^2, \quad z^2 = a^2-b^2+2\,a\,b\,i$

17. $-7-29\,i$

15.5. Quadratische Gleichungen

1. (a) $x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{3}i,\ S(2|3)$
   (b) $x_{1/2} = 3 \pm i,\ S(3|-1)$
   (c) $x_{1/2} = -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}i,\ S(-1|1)$
   (d) $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{3}i,\ S(1|1)$
   (e) $x_{1/2} = -3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{10}i,\ S(-3|-5)$

2. $z_1 = 1,\ z_2 = -3-4i$

3. $z_1 = 3\,i,\ z_2 = 2$

4. $L = \{-1\,;\,-i\}$

15.6. Polarform komplexer Zahlen

1. $z_1 = 6\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot 6\sin\frac{\pi}{3} = 3 + 3\sqrt{3}\,i$

$$z = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} = \frac{(2+4\sqrt{3}\,i)(4-2\sqrt{3}\,i)}{(4+2\sqrt{3}\,i)(4-2\sqrt{3}\,i)} = \frac{32+12\sqrt{3}\,i}{28} = \frac{8}{7} + \frac{3\sqrt{3}}{7}\,i$$

$$z = r\mathrm{E}(\varphi) \text{ mit } r = \sqrt{\left(\frac{8}{7}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{91}}{7}, \quad \tan\varphi = \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad\Longrightarrow\quad \varphi = 33{,}0^\circ$$

2. (a) $|z_1| = \sqrt{1+3} = 2$

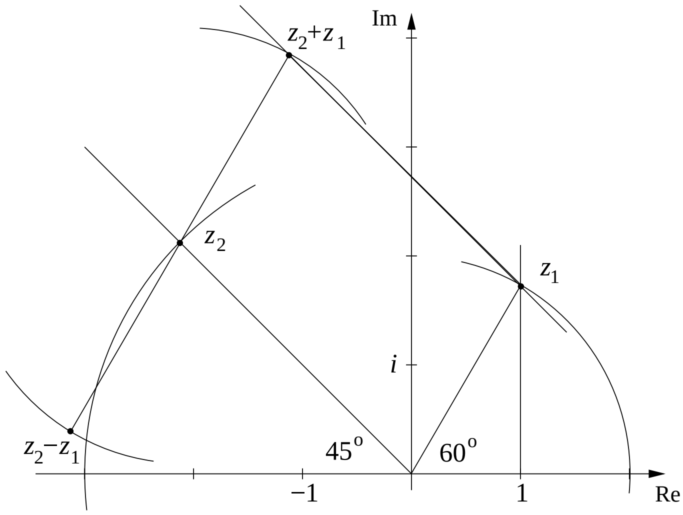
$\tan\varphi_1 = \sqrt{3}$

$\varphi_1 = 60^\circ$

$z_1 = 2\,\mathrm{E}(60^\circ) = 2\,\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\varphi_2 = 135^\circ$

$z_2 = 3\,\mathrm{E}(135^\circ)$



(b) $z_1 z_2 = 2\cdot 3\,\mathrm{E}(60^\circ + 135^\circ) = 6\,\mathrm{E}(195^\circ) = \underbrace{6\cos 195^\circ}_{-5{,}795555} + i\cdot\underbrace{6\sin 195^\circ}_{-1{,}5529}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\,\mathrm{E}(60^\circ - 135^\circ) = \frac{2}{3}\,\mathrm{E}(-75^\circ) = \frac{2}{3}\,\mathrm{E}(285^\circ) = \underbrace{\frac{2}{3}\cos 285^\circ}_{0{,}17255} + i\cdot\underbrace{\frac{2}{3}\sin 285^\circ}_{-0{,}64395}$$

(c) $(z_1)^8 = 2^8\,\mathrm{E}(8\cdot 60^\circ) = 256\,\mathrm{E}(480^\circ) = 256\,\mathrm{E}(120^\circ) = -128 + 128\sqrt{3}\,i = -128 + 221{,}7\,i$

(d) $(z_2)^n = 3^n\,\mathrm{E}(n\cdot 135^\circ) \in \mathbb{R} \quad\Longleftrightarrow\quad n\cdot 135^\circ = m\cdot 180^\circ$ mit $m \in \mathbb{N}$

$3n = 4m$ ist erfüllt, wenn $n = 4k$ mit $k \in \mathbb{N}$

15.6.1. Ungleichungen

Ungleichungen vom Typ (x+a)(x+b) kleiner 0

(a) $]-\infty; -3[\,\cup\,[-\frac{1}{2}; 1[$

(b) (a) $L =]-5\,;\,4[$ (b) $L =]-1\,;\,2]$

(c) (a) $L =]-\infty\,;\,-4[$ (b) $L =]-3\,;\,3[$

(d) (a) $L =]1\,;\,+\infty[$ (b) $L = \{0\} \cup]3\,;\,+\infty[$

(e) $L =]-2\,;\,-1[\cup]0\,;\,3[$

(f) $L = [-2\,;\,-1[\cup[1\,;\,2]\cup]3\,;\,+\infty[$

Ungleichungstyp (x+a)(x+b) kleiner 0 erst nach Umformung

(a) $L = \mathbb{Q} \setminus [\frac{3}{2}; \frac{8}{5}[$

(b) (a) $\dfrac{1-x}{x} < 0 \quad \Longrightarrow \quad L =]-\infty\,;\,0[\cup]1\,;\,+\infty[$

(b) $\dfrac{2\,x+3}{x+2} \leqq 0 \quad \Longrightarrow \quad L =]-2\,;\,-\frac{3}{2}]$

(c) $\dfrac{8\,x+17}{2\,x+5} \geqq 0 \Longrightarrow L =]-\infty\,;\,-2,5[\cup[-2,125\,;\,+\infty[$

(d) $L =]\frac{5}{3}; \infty[$

(e) $]-\infty; 1,5] \cup]2; \infty[$

(f) $]-\infty; \frac{4}{3}] \quad \cup \quad]3; \infty[$

(g) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} < 0 \Longrightarrow L =]-2\,;\,-1[$

(h) $\dfrac{4\,(3-x)}{x(x+6)} \geqq 0 \Longrightarrow L =]-\infty\,;\,-6[\cup]0\,;\,3]$

(i) $\dfrac{x-5}{(x-1)(x-3)} < 0 \Longrightarrow L =]-\infty\,;\,1[\cup]3\,;\,5[$

(j) $D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{3}{2}\}$, $L =]-\infty; -2[\cup]\frac{3}{2}; \infty[$

(k) $D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{2}{3}\}$, $L =]-\infty; \frac{3}{5}[\cup]\frac{2}{3}; \infty[$

Ungleichungen mit Betrag

(a) $[-8; 16]$

(b) $]1; 2[$

(c) $L =]-\infty; 6]$

(d) $L = [-\frac{7}{10}; -\frac{1}{2}] \setminus \{-\frac{2}{3}\}$

(e) $L =]\frac{4}{3}; \frac{3}{2}[$

(f) $L = \mathbb{Q} \setminus [-38; -10]$

(g) (a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{1\frac{3}{4}\}$, $L =]0; 1\frac{3}{4}[$
(b) $L =]-5; -1[$

(h) (a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{1\frac{4}{5}\}$, $L =]-\infty; 0[\cup]1\frac{4}{5}; \infty]$
(b) $L = \{\ \}$

(i) $L =]-1; 2[$

(j) $]-3{,}5; 1[$

(k) $[-\frac{1}{2}; \infty[$

(l) $D = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$, $L =]2{,}6; 3[\cup]3; 3{,}4[$

(m) $[-\frac{1}{3}; \infty[$

(n) $D = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$, $L =]1{,}25; 2[\cup]2; 2{,}75[$

(o) $D = \mathbb{Q}$, $L =]-\frac{11}{15}; \infty[$

(p) $D = \mathbb{Q}$, $L =]2{,}4; \infty[$

15.6.2. Lineare Gleichungssysteme

Gleichungssysteme mit Formvariablen

(a) a beliebig, $b \neq 0$

(b) Für $k = -3$ ist die Lösung $(0|-4)$

(c) $$L = \begin{cases} \{(a-b|-ab)\} & \text{für} \quad a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq -b \\ \left\{(x|y) \mid x + \frac{y}{b} = -b\right\} & \text{für} \quad a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a = -b \\ \{\} & \text{für} \quad a = 0 \vee b = 0 \end{cases}$$

3.

$$\begin{aligned} a^n = 3^n \,\mathrm{E}(n \cdot 35^\circ) \text{ rein imaginär} \quad &\Longleftrightarrow \quad n \cdot 35^\circ = 90^\circ + m \cdot 180^\circ \text{ mit } m \in \mathbb{N} \\ &\Longleftrightarrow \quad n \cdot 7 = 18 + m \cdot 36 = 18(1 + 2m) \end{aligned}$$

Da $1 + 2m$ ungerade ist, muss n ein ungerades Vielfaches von 18 sein:

n	18	$3\cdot 18$	$5\cdot 18$	$7\cdot 18$
m	3	10	17	24
$\varphi = n\cdot 35°$	$630°$	$1890°$	$3150°$	$4410°$
$\mathrm{E}(\varphi)$	$\mathrm{E}(270°)$	$\mathrm{E}(90°)$	$\mathrm{E}(270°)$	$\mathrm{E}(90°)$
a^n	$-3^{18}\,i$	$3^{54}\,i$	$-3^{90}\,i$	$3^{126}\,i$

4. (a) $(\sqrt{13}|56{,}3°)$ (b) $(5|53{,}1°)$ (c) $(\sqrt{41}|308{,}7°)$

   (d) $(\sqrt{61}|309{,}8°)$ (e) $(\sqrt{85}|130{,}6°)$ (f) $(\sqrt{113}|131{,}2°)$

   (g) $(\sqrt{145}|228{,}4°)$ (h) $(\sqrt{181}|228{,}0°)$ (i) $(\sqrt{221}|132{,}3°)$

5. (a) $(\,12\,|\,170°\,)_{\mathrm{p}} = -12\cos 10° + 12\,i\sin 10°$ (b) $(\,4\,|\,90°\,)_{\mathrm{p}} = 4\,i$

   (c) $(\,4\,|\,150°\,)_{\mathrm{p}} = -2\sqrt{3} + 2\,i$ (d) 1

   (e) $(\,56\,|\,330°\,)_{\mathrm{p}} = 28\sqrt{3} - 28\,i$ (f) $(\,8\,|\,210°\,)_{\mathrm{p}} = -4\sqrt{3} - 4\,i$

6. (a) $\left(\frac{3}{4}\middle|270°\right)_{\mathrm{p}} = -\frac{3}{4}\,i$ (b) $\left(\frac{1}{49}\middle|330°\right)_{\mathrm{p}} = \frac{\sqrt{3}}{98} - \frac{i}{98}$ (c) $-i$

7. (a) $z_1 = (\,4\,|\,30°\,)_{\mathrm{p}}, \quad z_2 = (\,2\,|\,120°\,)_{\mathrm{p}}, \quad z_1\cdot z_2 = (\,8\,|\,150°\,)_{\mathrm{p}} = (\,-4\sqrt{3}\,|\,4\,)$

   (b) $E = (\,1\,|\,0\,)_{\mathrm{p}} = (\,1\,|\,0\,)$

   $I_1 = (\,1\,|\,90°\,)_{\mathrm{p}} = (\,0\,|\,1\,), \quad I_2 = -I_1 = (\,1\,|\,270°\,)_{\mathrm{p}} = (\,0\,|\,-1\,)$

8. (a) $\left(1024\,\middle|\,\frac{5\pi}{6}\right)_{\mathrm{p}} = -512\sqrt{3} + 512\,i$

   (b) $\left(2\,\middle|\,\frac{\pi}{6}\right)_{\mathrm{p}}^{20} = \left(1\,048\,576\,\middle|\,\frac{4\pi}{3}\right)_{\mathrm{p}} = -524\,288 - 524\,288\sqrt{3}\,i$

   (c) $\left[(-i)^4\right]^n \cdot (-i)^{-3} = (-i)^{-3} = -i$

9. $z_1\cdot z_2 = \frac{25}{4}\,i = \left(\frac{25}{4}\middle|90°\right)_{\mathrm{p}}$

10. $z = (\,2\,|\,30°\,)_{\mathrm{p}}$, $z^2 = (\,4\,|\,60°\,)_{\mathrm{p}} = 2 + 2\sqrt{3}\,i$, $\frac{1}{z} = \left(\frac{1}{2}\middle|330°\right)_{\mathrm{p}} = \frac{\sqrt{3}-i}{4}$

    $z^{13} = (\,8192\,|\,30°\,)_{\mathrm{p}} = 4096(\sqrt{3}+i)$

11. $z = 10 - 24i = (\,26\,|\,292{,}62°\,)_{\mathrm{p}}$

12. $$(\,1\,|\,\alpha\,)_{\mathrm{p}}^3 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \underbrace{\cos^3\alpha - 3\,\sin^2\alpha\cos\alpha}_{\cos 3\alpha} + \underbrace{i\,(3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha)}_{i\,\sin 3\alpha}$$
    $$(\,1\,|\,\alpha\,)_{\mathrm{p}}^3 = (\,1\,|\,3\,\alpha\,)_{\mathrm{p}} = \cos 3\,\alpha + i\,\sin 3\,\alpha$$

13. $z = \mathrm{E}(\varphi) \quad \Longrightarrow \quad z^{100} = \mathrm{E}(100\varphi) = \mathrm{E}(90°)) \quad \Longrightarrow \quad 100\varphi = 90° + k \cdot 360°, \quad k \in \mathbb{Z}$

    $\varphi_k = 0{,}9° + k \cdot 3{,}6°, \quad \mathrm{Re}(z_k) = \cos\varphi_k, \quad 0{,}60 < \cos\varphi_k < 0{,}65 \quad \Longrightarrow$

    $53{,}13° > \varphi_k > 49{,}46° \quad \Longrightarrow \quad 14{,}5 > k > 13{,}5 \quad \Longrightarrow \quad k = 14, \quad \varphi_{14} = 51{,}3°$

    $306{,}87° < \varphi_k < 310{,}54° \quad \Longrightarrow \quad 84{,}99 < k < 86{,}01 \quad \Longrightarrow \quad \varphi_{85} = 306{,}9°,\ \varphi_{86} = 310{,}5°$

    $z_{14} = \mathrm{E}(51{,}3°) = 0{,}6252 + 0{,}7804\,i$

    $z_{85} = \mathrm{E}(306{,}9°) = 0{,}6004 - 0{,}7997\,i$

    $z_{86} = \mathrm{E}(310{,}5°) = 0{,}6494 - 0{,}7604\,i$

15.7. Geometrische Deutung der Multiplikation

1. (a) $z_1' = \sqrt{2}(1+i)(-1-i) = -2\sqrt{2}i$
       $z_2' = \sqrt{2}(1+i)(-5-i) = -4\sqrt{2} - 6\sqrt{2}i$
       $z_3' = \sqrt{2}(1+i)(-3-2i) = -\sqrt{2} - 5\sqrt{2}i$
       Dreieck wird um 45° ($\tan 45° = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$) gegen den Uhrzeigersinn gedreht und mit dem Faktor $2 = |\sqrt{2}(1+i)|$ gestreckt.

   (b) $z_1' = -i \cdot (-1-i) = -1+i$
       $z_2' = -i \cdot (-5-i) = -1+5i$
       $z_3' = -i \cdot (-3-2i) = -2+3i$
       Dreieck wird um 270° gegen den Uhrzeigersinn gedreht.

   (c) $z_1' = (-1+i)(-1-i) = 2$
       $z_2' = (-1+i)(-5-i) = 6-4i$
       $z_3' = (-1+i)(-3-2i) = 5-i$
       Dreieck wird um 135° ($\tan 135° = \frac{1}{-1}$) gegen den Uhrzeigersinn gedreht und mit dem Faktor $\sqrt{2} = |-1+i|$ gestreckt.

   Multiplikation mit einer Zahl $z = x + yi = (r, \phi)$ entspricht in der komplexen Zahlenebene einer Drehung um den Winkel ϕ gegen den Uhrzeigersinn und einer Streckung mit dem Faktor r.

2. $z = (a+bi)(b+ai) = (a^2+b^2)\,i$, d.h. z auf der imaginären Achse.

3. $|B' - A| = |B - A| = \sqrt{5}, \quad B' - A = \dfrac{C - A}{|C - A|} \cdot |B - A| = (C - A) \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

    $$B' = A + (C - A) \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = 2 + \frac{3\sqrt{5}}{5} + \left(3 + \frac{4\sqrt{5}}{5}\right) i \approx 3{,}34 + 4{,}79\,i$$

    Drehfaktor: $D = \dfrac{B' - A}{B - A} = \dfrac{2+i}{\sqrt{5}}$

    $$C' = D \cdot (C - A) + A = 2 + \frac{2\sqrt{5}}{5} + \left(3 + \frac{11\sqrt{5}}{5}\right) i \approx 2{,}89 + 7{,}92\,i$$

4. (a) Drehung von $\vec{x}$ um 90°, d.h. Multiplikation mit $D = (\,1\,|\,90°\,)_{\mathrm{p}} = i$:

$$(a+b\,i)\cdot i = -b + a\,i \quad \Longrightarrow \quad k\cdot\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix} \text{ mit } k\in\mathbb{R}$$

(b) $\pm\dfrac{(6+2{,}5\,i)\cdot i}{|6+2{,}5\,i|} = \dfrac{-5+12\,i}{13} \quad \Longrightarrow \quad \pm\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix}-5\\ 12\end{pmatrix}$

5. $A = 300$

   $B = 300 + 500\cos 67{,}5° + i\cdot 500\sin 67{,}5° \approx$

   $\approx 491{,}34 + 461{,}94\,i$

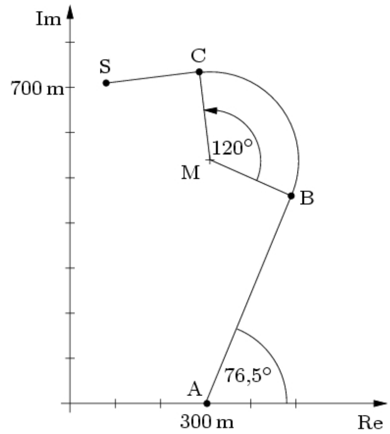
   $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = B - A$ um 90° drehen und mit $\frac{200}{500}$ multiplizieren ergibt

   $\overrightarrow{\mathrm{BM}} = M - B = \dfrac{2}{5}\cdot(B-A)\cdot i \approx -184{,}78 + 76{,}54\,i.$

   $C = M + (B-M)\cdot(\,1\,|\,120°\,)_{\mathrm{p}} \approx 280{,}46 + 736{,}77\,i$

   $\overrightarrow{\mathrm{CS}} = S - C = (C - M)\cdot i \approx -198{,}29 - 26{,}10\,i$

   $S = C + (S - C) \approx 82{,}2 + 710{,}7\,i$



6. $3 - 4\,i = D\cdot(-2-3\,i) \quad \Longrightarrow \quad D = \dfrac{3-4\,i}{-2-3\,i} = \dfrac{6+17\,i}{13}$

   $\varphi = \arctan\dfrac{17}{6} \approx 70{,}56°$

7. $s = \left(\,\frac{1}{2}\,\middle|\,-90°\,\right)_{\mathrm{p}} = -\frac{i}{2}$

15.8. Einheitswurzeln

1. (a) $z_1 = (2|0°) = 2$, $z_2 = (2|120°) = -1 + \sqrt{3}i$,
   $z_3 = (2|240°) = -1 - \sqrt{3}i$

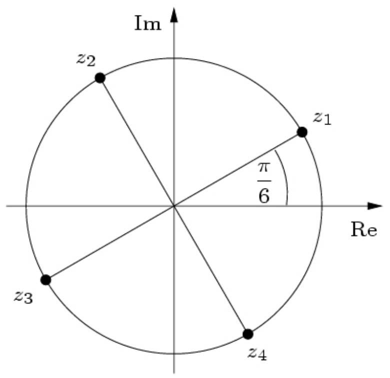
   (b) $z_1 = (\frac{1}{3}|180°) = -\frac{1}{3}$, $z_2 = (\frac{1}{3}|60°) = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$,
   $z_3 = (2|300°) = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$

   (c) $z_1 = (\sqrt{2}|45°) = 1 + i$, $z_2 = (\sqrt{2}|135°) = -1 + i$,
   $z_3 = (\sqrt{2}|225°) = -1 - i$, $z_4 = (\sqrt{2}|315°) = 1 - i$,

   (d) $z_1 = (3|0°) = 3$, $z_2 = (3|60°) = 1\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}i$,
   $z_3 = (3|120°) = -1\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}i$, $z_4 = (3|180°) = -3$.
   $z_5 = (3|240°) = -1\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i$, $z_6 = (3|300°) = +1\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i$

2. $z_1 = (\sqrt[8]{20}|38{,}4°)$, $z_2 = (\sqrt[8]{20}|128{,}4°)$, $z_3 = (\sqrt[8]{20}|218{,}4°)$, $z_4 = (\sqrt[8]{20}|308{,}4°)$

3. $w = -8 + 8\sqrt{3}\, i = 16 \cdot \mathrm{E}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$



$$z_1 = 2 \cdot \mathrm{E}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2 \cdot \mathrm{E}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + \sqrt{3}\, i$$

$$z_3 = 2 \cdot \mathrm{E}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$z_4 = 2 \cdot \mathrm{E}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}\, i$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = 8 - 8\sqrt{3}\, i = -w$$

4. (a) $z \cdot \left(\sqrt{2}\,\middle|\,225^\circ\right)_{\mathrm{p}} = (1\,|\,270^\circ)_{\mathrm{p}} \quad \Longrightarrow \quad z = \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\middle|\,45^\circ\right)_{\mathrm{p}} = \frac{1+i}{2}$

   (b) $z^3 = (8\,|\,135^\circ)_{\mathrm{p}}, \quad z_k = (2\,|\,45^\circ + k \cdot 120^\circ)_{\mathrm{p}}$

$$z_1 = (2\,|\,45^\circ)_{\mathrm{p}} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$$

$$z_2 = (2\,|\,165^\circ)_{\mathrm{p}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{6} + \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{6}\right) i \approx -1{,}93 + 0{,}518\, i$$

$$z_3 = (2\,|\,285^\circ)_{\mathrm{p}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{6} - \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{6}\right) i \approx 0{,}518 - 1{,}93\, i$$

15.9. Fundamentalsatz der Algebra

1. $P(x) = i\, x^2 - i\, x + 1$
2. $P(z) = i\, z^5 + 2\, z^4 - i\, z - 2 = i\,(z - 2\,i)\,(z-1)\,(z+1)\,(z-i)\,(z+i)$

15.10. Anwendungen in der Physik

1. (a) $R_{\mathrm{ges}} = 5 + i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}01 = 5 + \pi i,\ |R_{\mathrm{ges}}| \approx 5{,}9$

   (b) $R_{\mathrm{ges}} = 5 + \dfrac{1}{i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}001} = 5 - \dfrac{10}{\pi} i,\ |R_{\mathrm{ges}}| \approx 5{,}9$

   (c) $R_{\mathrm{ges}} = 5 + \dfrac{1}{i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}001} + i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}01 = 5 + \left(\pi - \dfrac{10}{\pi}\right) i,\ |R_{\mathrm{ges}}| \approx 5{,}0$

2. (a) $R_{\mathrm{ges}} = R + i\omega L \quad \Longrightarrow \quad |R_{\mathrm{ges}}| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$.
   Mit steigendem ω nimmt der Widerstand der Schaltung zu. $\lim\limits_{\omega \to 0} R_{\mathrm{ges}} = R$ und $\lim\limits_{\omega \to \infty} R_{\mathrm{ges}} = \infty$.

   (b) $R_{\mathrm{ges}} = R + \dfrac{1}{i\omega C} \quad \Longrightarrow \quad |R_{\mathrm{ges}}| = \sqrt{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}$.
   Mit steigendem ω nimmt der Widerstand der Schaltung ab. $\lim\limits_{\omega \to 0} R_{\mathrm{ges}} = \infty$ und $\lim\limits_{\omega \to \infty} R_{\mathrm{ges}} = R$.

(c) $R_{\text{ges}} = R + i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C} = R + (\omega L - \dfrac{1}{\omega C})i \quad \Longrightarrow$

$|R_{\text{ges}}| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \dfrac{1}{\omega C})^2}.$

Der Widerstand hat für $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ ein Minimum. Der Widerstand hat dann den Wert R.

$\lim\limits_{\omega\to 0} R_{\text{ges}} = \lim\limits_{\omega\to\infty} R_{\text{ges}} = R.$

3. (a) $\dfrac{1}{R_{\text{ges}}} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}01} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{\pi i} \quad \Longrightarrow R_{\text{ges}} = \dfrac{5\pi^2 + 25\pi i}{\pi^2 + 25}$, $|R_{\text{ges}}| \approx 2{,}7$

   (b) $\dfrac{1}{R_{\text{ges}}} = \dfrac{1}{5} + i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}001 = \dfrac{1}{5} + 0{,}1\pi i \quad \Longrightarrow R_{\text{ges}} = \dfrac{\frac{1}{5} - 0{,}1\pi i}{0{,}04 + 0{,}01\pi^2}$,

   $|R_{\text{ges}}| \approx 2{,}7$

   (c) $\dfrac{1}{R_{\text{ges}}} = i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}001 + \dfrac{1}{i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}01} = \left(\dfrac{\pi}{10} - \dfrac{1}{\pi}\right) i$, $|R_{\text{ges}}| \approx 241$

4. (a) $\dfrac{1}{R_{\text{ges}}} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{i\omega L} \quad \Longrightarrow \quad |R_{\text{ges}}| = \dfrac{\omega L R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$

   Mit steigendem ω nimmt der Widerstand der Schaltung zu.

   $\lim\limits_{\omega\to 0} R_{\text{ges}} = 0$ und $\lim\limits_{\omega\to\infty} R_{\text{ges}} = R.$

   (b) $\dfrac{1}{R_{\text{ges}}} = \dfrac{1}{R} + i\omega C = \dfrac{1}{R}(1 + RC\omega i) \quad \Longrightarrow$

   $R_{\text{ges}} = \dfrac{R}{1 + RC\omega i} \quad \Longrightarrow \quad |R_{\text{ges}}| = \dfrac{R}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}.$

   Mit steigendem ω nimmt der Widerstand der Schaltung ab.

   $\lim\limits_{\omega\to 0} R_{\text{ges}} = R$ und $\lim\limits_{\omega\to\infty} R_{\text{ges}} = 0.$

   (c) $\dfrac{1}{R_{\text{ges}}} = \dfrac{1}{i\omega L} + i\omega C = (\omega C - \dfrac{1}{\omega L})i \quad \Longrightarrow \quad |R_{\text{ges}}| = \dfrac{\omega L}{|\omega^2 CL - 1|}.$

   $\lim\limits_{\omega\to\infty} R_{\text{ges}} = 0 = \lim\limits_{\omega\to 0} R_{\text{ges}}$ und $\lim\limits_{\omega\to \frac{1}{\sqrt{LC}}} R_{\text{ges}} = \infty.$