
SMART

**Sammlung mathematischer Aufgaben
als Hypertext mit T_EX**

Weiterführende Aufgaben (Gymnasium)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

11. Juni 2010

*Die Aufgaben stehen für private und unterrichtliche Zwecke zur Verfügung. Eine kommerzielle Nutzung bedarf der vorherigen Genehmigung.

Inhaltsverzeichnis

I. Algebra	3
1. Ungleichungen	4
1.1. Ungleichungen vom Typ $(x+a)(x+b)$ kleiner 0	4
1.2. Ungleichungstyp $(x+a)(x+b)$ kleiner 0 erst nach Umformung	5
1.3. Ungleichungen mit Betrag	6
2. Lineare Gleichungssysteme	9
2.1. Gleichungssysteme mit Formvariablen	9
3. Ungleichungen	10
3.1. Ungleichungen vom Typ $(x+a)(x+b)$ kleiner 0	10
3.2. Ungleichungstyp $(x+a)(x+b)$ kleiner 0 erst nach Umformung	11
3.3. Ungleichungen mit Betrag	12
4. Lineare Gleichungssysteme	15
4.1. Gleichungssysteme mit Formvariablen	15
5. Die Wurzelfunktion	16
6. Quadratische Ungleichungen	17
II. Geometrie	20
7. Vierecke	21
7.1. Punktsymmetrische Vierecke	21
7.2. Parallelogramme	21
7.3. Drachenvierecke und Trapeze	21
7.4. Beweise	22
7.5. Vektoren	25
8. Kreise und Geraden	27
8.1. Sehnen- und Tangentenvierecke	27
8.2. Umfangswinkelsatz	29
8.3. Anwendungsaufgaben mit Faßkreisbögen	33

9. Flächenmessung	36
9.1. Verwandlungsaufgaben	36
10. Zentrische Streckung	38
10.1. Reine Konstruktionsaufgaben	38
10.2. Rein rechnerische Aufgaben	39
10.3. Umfangreichere Aufgaben (Zeichnung/Rechnung)	40
11. Kegelschnitte	44
12. Sphärische Trigonometrie	45
12.1. Großkreise	45
12.2. Kleinkreise	46
12.3. Kugelzweieck	47
12.4. Kugeldreieck	48
12.5. Probleme aus der Geographie und Himmelsbeobachtung	52
13. Sphärische Trigonometrie (Anwendungen auf die Erd- und Himmelskugel)	55
13.1. Peilungsaufgaben	55
13.2. Kartenentwürfe	55
13.3. Astronomie	55
13.4. Koordinatensystem	56
13.5. Grundbegriffe der Zeitrechnung	56
III. Analysis	57
14. Definition der Grenzwerte - Epsilon	58
IV. Komplexe Zahlen	61
15. Komplexe Zahlen	62
15.1. Zahlbereichserweiterungen und Strukturen	62
15.2. Konstruktion der komplexen Zahlen	62
15.3. Veranschaulichung komplexer Zahlen	62
15.4. Grundrechenarten	62
15.5. Quadratische Gleichungen	64
15.6. Polarform komplexer Zahlen	65
15.6.1. Ungleichungen	66
15.6.2. Lineare Gleichungssysteme	70
15.7. Geometrische Deutung der Multiplikation	72
15.8. Einheitswurzeln	73
15.9. Fundamentalsatz der Algebra	74

Inhaltsverzeichnis

15.10 Anwendungen in der Physik 74

Teil I.

Algebra

1. Ungleichungen

1.1. Ungleichungen vom Typ $(x+a)(x+b)$ kleiner 0

1. Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung:

$$\frac{-2(2x+1)}{(1-x)(x+3)} \leq 0$$

2. Berechne die Lösungsmenge:

$$(a) \quad (x+5)(x-4) < 0 \quad (b) \quad \frac{x-2}{x+1} \leq 0$$

3. Berechne die Lösungsmenge:

$$(a) \quad \frac{8}{3x+12} < 0 \quad (b) \quad \frac{x+3}{3-x} > 0$$

4. Berechne die Lösungsmenge:

$$(a) \quad \frac{1}{x-1} \geq 0 \quad (b) \quad \frac{x^2}{3-x} \leq 0$$

5. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{x(x+2)}{(x-3)(x+1)} < 0$$

6. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{(x-2)(1-x)(x+2)}{(x+1)(3-x)} \geq 0$$

1.2. Ungleichungstyp $(x+a)(x+b)$ kleiner 0 erst nach Umformung

1. Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{0,5x - 1}{2x - 3} \geq -1$$

2. Berechne die Lösungsmenge:

$$(a) \frac{1}{x} < 1 \quad (b) \frac{1}{x+2} \geq 2$$

3. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{3}{2x+5} \leq 4$$

4. Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{3x-2}{3x-5} > 1$$

5. Bestimme die Lösungsmenge über der Grundmenge \mathbb{Q} :

$$\frac{1,5}{4-2x} \leq \frac{-1,5 + \frac{1}{2}x}{x-2}$$

6. Bestimme die Lösungsmenge und stelle sie am Zahlenstrahl dar:

$$\frac{x-2}{3-x} \leq \frac{2}{3x-9}$$

7. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x+2}$$

1.3 Ungleichungen mit Betrag

8. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{x}{x+6} \geq \frac{x-2}{x}$$

9. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{x+1}{x-1} < \frac{x-2}{x-3}$$

10. Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an!

$$\frac{x-1}{10x-15} > 2 - \frac{9-9x}{6-4x}$$

11. Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an!

$$\frac{x+1}{6x-4} - 2 > \frac{19x-15}{6-9x}$$

1.3. Ungleichungen mit Betrag

1. Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung:

$$|2x+4| \leq x+20$$

2. Bestimme die Lösungsmenge:

$$|2(x-2)+x| < x$$

3. Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung:

$$3x+4 \leq 2 \cdot |x+5|$$

1.3 Ungleichungen mit Betrag

4. Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{4x + 3}{|3x + 2|} \geq 2$$

5. Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{|x| - 2}{2x - 3} > 2$$

6. Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{|-3x - 2|}{x + 10} > -4$$

7. Bestimme die Lösungsmenge folgender Ungleichungen ($G = \mathbb{Q}$):

(a) $-\frac{8x - 16}{7 - 4x} < \frac{4 - x}{-x + \frac{7}{4}}$

(b) $-4x - 1 > |-7 - 5x| + 1$

8. Bestimme die Lösungsmenge folgender Ungleichungen:

(a) $-\frac{10x - 25}{9 - 5x} > \frac{5 - x}{-x + \frac{9}{5}}$

(b) $|-5 - 7x| + 1 < -6x - 7$

9. Gib die Lösungsmenge der Ungleichung an!

$$|6x + 2| - 22 < 10x - 2 \cdot |6x + 2|$$

10. Gib die Lösungsmenge der Ungleichung an!

$$11 - 2 \cdot |2x + 1| - 2x > |2x + 1|$$

1.3 Ungleichungen mit Betrag

11. Gib die Lösungsmenge über der Grundmenge \mathbb{Q} an!

$$|2x + 1| - 5(x + 2) \leq 2(x - |2x + 1|)$$

12. Gib Definitions- und Lösungsmenge über der Grundmenge \mathbb{Q} an!

$$\frac{2}{|x - 3|} > 5$$

13. Gib die Lösungsmenge über der Grundmenge \mathbb{Q} an!

$$|3x + 1| - 2(3x - |3x + 1|) \leq 5(x + 2)$$

14. Gib Definitions- und Lösungsmenge über der Grundmenge \mathbb{Q} an!

$$\frac{3}{|x - 2|} > 4$$

15. Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an!

$$|1 - 4x| \leq 5 \cdot (2x + 3) - |x - 3|$$

16. Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an!

$$|2 - 3x| - 3 \cdot (5 - 2x) \geq |x - 7|$$

2. Lineare Gleichungssysteme

2.1. Gleichungssysteme mit Formvariablen

1. Welche Zahlen können für die Formvariablen a und b gewählt werden, damit das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat?

$$(1) \quad ax + (a + b)y = a + 2b \quad (2) \quad (a + 3b)x + (a + 4b)y = a + 5b$$

2. Gegeben ist das folgende Gleichungssystem, bei dem der Faktor $k \in \mathbb{Q}$ nicht festgelegt ist:

$$(1) \quad 3x + y = -4 \quad (2) \quad 5x + ky = 12$$

Welcher Wert ist für k zu nehmen, damit die Lösung des Gleichungssystems ein Punkt der y -Achse ist? Gib diese Lösung an.

3. Berechne die Lösungsmenge (Fallunterscheidung!):

$$\begin{aligned} x - \frac{y}{a} &= a \\ x + \frac{y}{b} &= -b \end{aligned}$$

3. Ungleichungen

3.1. Ungleichungen vom Typ $(x+a)(x+b)$ kleiner 0

1. Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung:

$$\frac{-2(2x+1)}{(1-x)(x+3)} \leq 0$$

2. Berechne die Lösungsmenge:

$$(a) \quad (x+5)(x-4) < 0 \quad (b) \quad \frac{x-2}{x+1} \leq 0$$

3. Berechne die Lösungsmenge:

$$(a) \quad \frac{8}{3x+12} < 0 \quad (b) \quad \frac{x+3}{3-x} > 0$$

4. Berechne die Lösungsmenge:

$$(a) \quad \frac{1}{x-1} \geq 0 \quad (b) \quad \frac{x^2}{3-x} \leq 0$$

5. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{x(x+2)}{(x-3)(x+1)} < 0$$

6. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{(x-2)(1-x)(x+2)}{(x+1)(3-x)} \geq 0$$

3.2. Ungleichungstyp $(x+a)(x+b)$ kleiner 0 erst nach Umformung

1. Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{0,5x - 1}{2x - 3} \geq -1$$

2. Berechne die Lösungsmenge:

$$(a) \frac{1}{x} < 1 \quad (b) \frac{1}{x+2} \geq 2$$

3. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{3}{2x+5} \leq 4$$

4. Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{3x-2}{3x-5} > 1$$

5. Bestimme die Lösungsmenge über der Grundmenge \mathbb{Q} :

$$\frac{1,5}{4-2x} \leq \frac{-1,5 + \frac{1}{2}x}{x-2}$$

6. Bestimme die Lösungsmenge und stelle sie am Zahlenstrahl dar:

$$\frac{x-2}{3-x} \leq \frac{2}{3x-9}$$

7. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x+2}$$

3.3 Ungleichungen mit Betrag

8. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{x}{x+6} \geq \frac{x-2}{x}$$

9. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{x+1}{x-1} < \frac{x-2}{x-3}$$

10. Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an!

$$\frac{x-1}{10x-15} > 2 - \frac{9-9x}{6-4x}$$

11. Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an!

$$\frac{x+1}{6x-4} - 2 > \frac{19x-15}{6-9x}$$

3.3. Ungleichungen mit Betrag

1. Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung:

$$|2x+4| \leq x+20$$

2. Bestimme die Lösungsmenge:

$$|2(x-2)+x| < x$$

3. Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung:

$$3x+4 \leq 2 \cdot |x+5|$$

3.3 Ungleichungen mit Betrag

4. Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{4x + 3}{|3x + 2|} \geq 2$$

5. Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{|x| - 2}{2x - 3} > 2$$

6. Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{|-3x - 2|}{x + 10} > -4$$

7. Bestimme die Lösungsmenge folgender Ungleichungen ($G = \mathbb{Q}$):

(a) $-\frac{8x - 16}{7 - 4x} < \frac{4 - x}{-x + \frac{7}{4}}$

(b) $-4x - 1 > |-7 - 5x| + 1$

8. Bestimme die Lösungsmenge folgender Ungleichungen:

(a) $-\frac{10x - 25}{9 - 5x} > \frac{5 - x}{-x + \frac{9}{5}}$

(b) $|-5 - 7x| + 1 < -6x - 7$

9. Gib die Lösungsmenge der Ungleichung an!

$$|6x + 2| - 22 < 10x - 2 \cdot |6x + 2|$$

10. Gib die Lösungsmenge der Ungleichung an!

$$11 - 2 \cdot |2x + 1| - 2x > |2x + 1|$$

3.3 Ungleichungen mit Betrag

11. Gib die Lösungsmenge über der Grundmenge \mathbb{Q} an!

$$|2x + 1| - 5(x + 2) \leq 2(x - |2x + 1|)$$

12. Gib Definitions- und Lösungsmenge über der Grundmenge \mathbb{Q} an!

$$\frac{2}{|x - 3|} > 5$$

13. Gib die Lösungsmenge über der Grundmenge \mathbb{Q} an!

$$|3x + 1| - 2(3x - |3x + 1|) \leq 5(x + 2)$$

14. Gib Definitions- und Lösungsmenge über der Grundmenge \mathbb{Q} an!

$$\frac{3}{|x - 2|} > 4$$

15. Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an!

$$|1 - 4x| \leq 5 \cdot (2x + 3) - |x - 3|$$

16. Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an!

$$|2 - 3x| - 3 \cdot (5 - 2x) \geq |x - 7|$$

4. Lineare Gleichungssysteme

4.1. Gleichungssysteme mit Formvariablen

1. Welche Zahlen können für die Formvariablen a und b gewählt werden, damit das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat?

$$(1) \quad ax + (a + b)y = a + 2b \quad (2) \quad (a + 3b)x + (a + 4b)y = a + 5b$$

2. Gegeben ist das folgende Gleichungssystem, bei dem der Faktor $k \in \mathbb{Q}$ nicht festgelegt ist:

$$(1) \quad 3x + y = -4 \quad (2) \quad 5x + ky = 12$$

Welcher Wert ist für k zu nehmen, damit die Lösung des Gleichungssystems ein Punkt der y -Achse ist? Gib diese Lösung an.

3. Berechne die Lösungsmenge (Fallunterscheidung!):

$$\begin{aligned} x - \frac{y}{a} &= a \\ x + \frac{y}{b} &= -b \end{aligned}$$

5. Die Wurzelfunktion

1. Löse die Gleichung $\sqrt{x} = 2x - 3$ auf graphischem Wege unter Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems mit der Längeneinheit 2 cm!
2. Gegeben ist die Funktion $w : y = -\sqrt{x}$.
 - (a) Bestimme die maximale Definitions- und Wertemenge der Funktion.
 - (b) Zeichne den Graphen von w mit Hilfe einer geeigneten Wertetabelle.
(1 Längeneinheit = 1 cm)
 - (c) Bestimme die Gleichung der Tangenten des Graphen von w , die die Steigung -1 hat. Zeichne die Tangente in das Koordinatensystem von b).
3. Gegeben ist die Funktion $w : y = -\sqrt{-x}$.
 - (a) Bestimme die maximale Definitions- und Wertemenge der Funktion.
 - (b) Zeichne den Graphen von w mit Hilfe einer geeigneten Wertetabelle.
(1 Längeneinheit = 1 cm)
 - (c) Bestimme die Gleichung der Tangenten des Graphen von w , die die Steigung 1 hat. Zeichne die Tangente in das Koordinatensystem von b).
4. Berechne die Lösungsmenge:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

6. Quadratische Ungleichungen

1. Berechne die Lösungsmenge und stelle sie graphisch an der Zahlengeraden dar:

$$x^2 > \frac{16}{25}$$

2. Berechne die Lösungsmenge und stelle sie graphisch an der Zahlengeraden dar:

$$x^2 < \frac{25}{4}$$

3. Berechne die Lösungsmenge und stelle sie graphisch an der Zahlengeraden dar:

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 \geq \frac{49}{36}$$

4. Berechne die Lösungsmenge und stelle sie graphisch an der Zahlengeraden dar:

$$(x + 3)^2 \leq \frac{36}{25}$$

5. Berechne die Lösungsmenge und stelle sie graphisch an der Zahlengeraden dar:

$$x^2 + 3x < 0$$

6. Berechne die Lösungsmenge und stelle sie graphisch an der Zahlengeraden dar:

$$9x^2 - 6x \geq 5$$

7. Berechne die Lösungsmenge und stelle sie graphisch an der Zahlengeraden dar:

$$9x^2 - 6x + 1 > 0$$

6. Quadratische Ungleichungen

8. Berechne die Lösungsmenge und stelle sie graphisch an der Zahlengeraden dar:

$$9x^2 - 6x + 1 \leq 0$$

9. Berechne die Lösungsmenge und stelle sie graphisch an der Zahlengeraden dar:

$$49x^2 - 42x + 5 < 0$$

10. Berechne die Lösungsmenge und stelle sie graphisch an der Zahlengeraden dar:

$$49x^2 - 42x + 9 < 0$$

11. Berechne die Lösungsmenge und stelle sie graphisch an der Zahlengeraden dar:

$$49x^2 - 42x + 9 \geq 0$$

12. Bestimme die Lösungsmenge folgender Ungleichung:

$$6x - 24 < -3x^2$$

13. Bestimme die Lösungsmenge folgender Ungleichung:

$$4x^2 < 4x + 24$$

14. Bestimme die Lösungsmenge folgender Ungleichung:

$$22 + 4x^2 \geq 20x$$

15. Bestimme die Lösungsmenge folgender Ungleichung:

$$18 \geq 20x - 4x^2$$

6. Quadratische Ungleichungen

16. Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung $4x^2 + 11x - 3 \geq 0$.

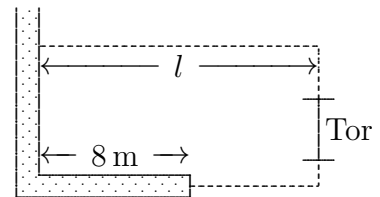
17. Bestimme die Lösungsmenge:

$$|x^2 - 2x| \geq 1$$

18. Mit einem Gitter von 8 m Länge soll auf einer Wiese ein rechteckiger Laufstall für ein Meerschweinchen abgegrenzt werden. Wie sind die Längen der Rechtecksseiten zu wählen, wenn der Flächeninhalt mindestens $3,5 \text{ m}^2$ betragen soll?

19. Eine rechteckige Weidefläche soll so angelegt werden, daß sie von einer rechtwinkligen Mauer und einem 42 m langen Zaun begrenzt wird. Zusätzlich soll an einer Seite ein 2 m breites Tor eingefügt werden (vgl. Abbildung).

Wie muß die Seitenlänge l gewählt werden, damit der Flächeninhalt maximal wird? Wie groß ist dieser?



Teil II.
Geometrie

7. Vierecke

7.1. Punktsymmetrische Vierecke

1. Wir betrachten den Satz: *Wenn ein Viereck zu einer seiner Diagonalen symmetrisch ist, dann halbiert diese die andere Diagonale.*
 - (a) Gib den Kehrsatz an.
 - (b) Welcher der beiden Sätze ist falsch? Begründe deine Antwort.
2. Konstruiere ein punktsymmetrisches Viereck $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ mit $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 5 \text{ cm}$ und $\delta = 75^\circ$.

7.2. Parallelogramme

1. Beweise mit Hilfe eines Kongruenzbeweises:
Zwei beliebige durch den Diagonalschnittpunkt eines Parallelogramms verlaufende Geraden schneiden seine Seiten in vier Punkten, die miteinander verbunden, wiederum ein Parallelogramm bilden.
2. Beweise mit Hilfe eines Kongruenzbeweises:
Trägt man auf einer Diagonalen eines Parallelogramms von den Endpunkten aus gleich lange Strecken nach innen ab und verbindet die beiden entstandenen Punkte mit den Endpunkten der anderen Diagonale, so entsteht wieder ein Parallelogramm.
3. Zeichne zu folgendem Satz eine Planfigur, gib Voraussetzung und Behauptung an und begründe den Satz durch einen Kongruenzbeweis:
Die Lote von beiden Enden einer Diagonale eines Parallelogramms auf die zweite Diagonale sind gleich lang.

7.3. Drachenvierecke und Trapeze

1. In einem Trapez $ABCD$ mit den parallelen Grundlinien $[AB]$ und $[DC]$ werde die Mittellinie des Trapezes von den Diagonalen $[AC]$ bzw. $[BD]$ in zwei verschiedenen Punkten E bzw. F geschnitten.

7.4 Beweise

- (a) Warum ist das Viereck $EFCD$ ebenfalls ein Trapez? Kurze Begründung!
 (b) Berechne die Mittellinienlänge des Trapezes $EFCD$ und drücke diese durch die Grundlinienlängen $a = \overline{AB}$ und $c = \overline{DC}$ des Trapezes $ABCD$ aus!

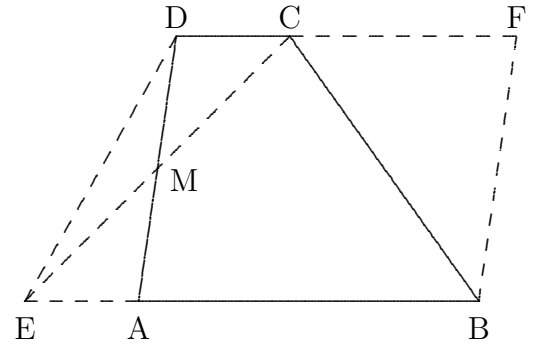
2. Im Trapez $ABCD$ (siehe Zeichnung) sei M die Mitte des Schenkels $[AD]$. Die Gerade CM treffe AB im Punkt E .

- (a) Beweise: $\overline{EA} = \overline{DC}$!

Die Parallele zum Schenkel $[AD]$ durch B treffe DC im Punkt F .

- (b) Zeige ausführlich, daß für die Länge m der Mittellinie des Trapezes $EBFD$ gilt:

$$m = \overline{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overline{DC}$$



3. Von einem Viereck $ABCD$ ist bekannt: $\beta = \gamma = \delta$, $b = c$.

- (a) Begründe kurz, warum das Viereck zwar ein Quadrat aber keine Raute mit $\gamma \neq 90^\circ$ sein kann.
 (b) Welche Werte können die drei gleichen Winkel β , γ und δ besitzen? Um welchen besonderen Viereckstyp handelt es sich?

7.4. Beweise

1. Betrachte folgenden Satz:

„Ein achsensymmetrisches Viereck mit einem 90° -Winkel ist ein Rechteck.“

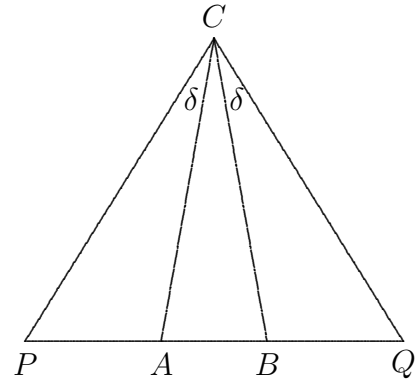
- (a) Gib Satz und Kehrsatz in der Wenn-dann-Form an!
 (b) Ist die Voraussetzung des Satzes notwendig, hinreichend oder notwendig und hinreichend für die Behauptung des Satzes?
 Begründe deine Entscheidung!

2. Zeichnet man in einem gleichschenkligen Dreieck von der Mitte der Basis aus Lote auf die beiden Schenkel, so sind diese gleich lang.
 Fertige eine Skizze und bezeichne sie zweckmäßig. Führe einen Kongruenzbeweis durch (Voraussetzung, Behauptung, Beweis), wobei alle Beweisschritte zu begründen sind.

7.4 Beweise

3. Wenn man auf den Schenkeln eines gleichschenkligen Dreiecks von der Basis aus gleiche Stücke abschneidet und mit den gegenüberliegenden Basisecken verbindet, so sind diese Verbindungsstrecken gleich lang und bilden mit der Basis gleiche Winkel. Beweise diesen Satz!

4. An der Spitze C eines gleichschenkligen Dreiecks ABC werden nach links und rechts gleich große Winkel δ angetragen. Die freien Schenkel schneiden die verlängerte Basis des Dreiecks in den Punkten P und Q (siehe Skizze rechts). Zeige mit Hilfe eines Kongruenzbeweises, daß das Dreieck PQC gleichschenklig ist.



5. In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis $c = [AB]$ wird die Höhe h_c über C hinaus um die Strecke $s = [CD]$ verlängert. Fertige eine Skizze und beschrifte sie. Zeige mittels Kongruenzbeweis (Voraussetzung, Behauptung, Beweis), daß das Dreieck ABD gleichschenklig ist.

6. Gib für den Satz „Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, dann besitzt es zwei gleiche Winkel“.

(a) die Umkehrung,

(b) die Kontraposition an.

(c) Entscheide, ob (1) der Satz, (2) die Umkehrung bzw. (3) die Kontraposition wahr sind.

7. Gib Voraussetzung und Behauptung des Satzes an und beweise ihn durch einen Kongruenzbeweis:

Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn eine Seitenhalbierende zugleich Höhe des Dreiecks ist.

8. Wir betrachten den Satz:

Wenn in einem Dreieck die Summe von zwei Winkeln 80° beträgt, dann ist das Dreieck stumpfwinklig.

(a) Ist die Voraussetzung hinreichend, notwendig, beides oder keines von beiden?

(b) Gib an, ob der Satz oder der Kehrsatz richtig sind, und begründe dies.

7.4 Beweise

9. Beweise mit Hilfe eines Kongruenzbeweises:

Zwei beliebige durch den Diagonalschnittpunkt eines Parallelogramms verlaufende Geraden schneiden seine Seiten in vier Punkten, die miteinander verbunden, wiederum ein Parallelogramm bilden.

10. Beweise mit Hilfe eines Kongruenzbeweises:

Trägt man auf einer Diagonalen eines Parallelogramms von den Endpunkten aus gleich lange Strecken nach innen ab und verbindet die beiden entstandenen Punkte mit den Endpunkten der anderen Diagonale, so entsteht wieder ein Parallelogramm.

11. Zeichne zu folgendem Satz eine Planfigur, gib Voraussetzung und Behauptung an und begründe den Satz durch einen Kongruenzbeweis:

Die Lote von beiden Enden einer Diagonale eines Parallelogramms auf die zweite Diagonale sind gleich lang.

12. Wir betrachten den Satz: *Wenn ein Viereck zu einer seiner Diagonalen symmetrisch ist, dann halbiert diese die andere Diagonale.*

- (a) Gib den Kehrsatz an.
- (b) Welcher der beiden Sätze ist falsch? Begründe deine Antwort.

13. Beweise folgenden Satz:

Wenn man bei einem Quadrat alle vier Seiten im gleichen Umlaufsinn um Strecken gleicher Länge verlängert, so entsteht ein neues Quadrat.

(Gliedere sauber in Voraussetzung, Planfigur, Behauptung und Beweis.)

14. Beweise: *Wenn ein Viereck keinen überstumpfen Innenwinkel besitzt, ist die Summe der Längen seiner Diagonalen kleiner als der Umfang des Vierecks.*

15. „*Wenn ein Viereck drei rechte Winkel hat, dann ist es ein Quadrat.*“

- (a) Prüfe, ob die Voraussetzung dieses Satzes eine notwendige oder hinreichende Bedingung für die Behauptung ist.
- (b) Formuliere den Kehrsatz.
- (c) Sind der Satz bzw. der Kehrsatz richtige Sätze?

16. Gib dafür, daß ein Viereck ein Parallelogramm ist,

- (a) eine notwendige Bedingung an, die nicht hinreichend ist,
- (b) eine hinreichende Bedingung an, die nicht notwendig ist,

- (c) eine Bedingung an, die notwendig und hinreichend ist.
17. *Richtig oder falsch?* – Untersuche folgende Sätze auf ihre Richtigkeit! Zeichne bei falschen Sätzen ein Gegenbeispiel und begründe richtige Sätze kurz (kein vollständiger Beweis nötig)!
- In einem Drachenviereck stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht.
 - In einem Drachenviereck halbieren sich die Diagonalen gegenseitig.
 - Ein mittensymmetrisches Viereck hat zwei gleich lange Seiten.
 - Ist ein Viereck zugleich ein Drachenviereck und ein Trapez, so ist es ein Quadrat.
 - In einem gleichschenkligen Trapez halbieren sich die Diagonalen
 - Ist ein gleichschenkliges Trapez punktsymmetrisch, so ist es ein Rechteck.
18. **Satz:** *Ein Viereck mit zwei gleich langen Gegenseiten ist ein Parallelogramm.*
- Gib den Kehrsatz zu dem gegebenen Satz an!
 - Beurteile die Gültigkeit des Satzes und des Kehrsatzes!
Zeichne bei einem falschen Satz oder Kehrsatz ein Gegenbeispiel!
19. **Satz:** *Ein Viereck mit zwei gleich langen Gegenseiten, in dem eine Diagonale die andere halbiert und auf ihr senkrecht steht, ist sicher ein Parallelogramm.*
- Gib anhand einer Beweisfigur Voraussetzung und Behauptung des Satzes in Kurzform an!
 - Begründe den Satz mit Hilfe eines *Kongruenzbeweises*!

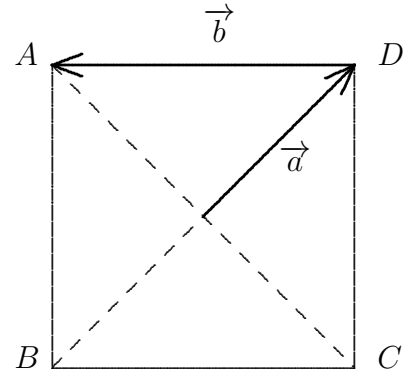
7.5. Vektoren

- Gegeben sind die Punkte $A(-2|4)$ und $B(4|1)$.
 - Zeichne die Ortsvektoren \vec{OA} und \vec{OB} .
 - Konstruiere den Ortsvektor \vec{OC} mit $\vec{OC} = \vec{BA}$.
 - Berechne die Koordinaten von C .
- Zeichne ein beliebiges Fünfeck $ABCDE$. Die Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} und \vec{d} sind festgelegt durch $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{BC}$, $\vec{c} = \vec{CD}$ und $\vec{d} = \vec{DE}$.
Gib einen Repräsentanten der folgenden Vektoren mit Hilfe von zweien der Punkte A , B , C , D und E an:

7.5 Vektoren

- (a) $\vec{a} + \vec{b}$
- (b) $-\vec{b} - \vec{c}$
- (c) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$
- (d) $-\vec{b} - (\vec{a} + \vec{c})$

3. In das Quadrat $ABCD$ sind Repräsentanten der Vektoren \vec{a} und \vec{b} eingezeichnet. Drücke die Vektoren \vec{AB} , \vec{BC} und \vec{AC} durch \vec{a} und \vec{b} aus.



4. In einem Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) sind durch die Punkte $A(1|1)$, $B(-4|3)$, $C(-4|2)$, $D(-1|7)$, $E(-1|8)$, $F(5|5)$ drei Vektoren $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{CD}$ und $\vec{c} = \vec{EF}$ gegeben.

- (a) Zeige in einer sauberen und gut beschrifteten Skizze die Gültigkeit des Assoziativgesetzes der Vektoraddition für die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} !
- (b) Berechne die Koordinaten des Vektors $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$!

5. In einem Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) sind die Punkte $A(1|2)$, $B(2|7)$, $C(3|2)$ und $D(8|1)$ gegeben (Platzbedarf nach oben ca. 15 cm).

- (a) Konstruiere sauber und genau einen Repräsentanten des Vektors \vec{x} , für den gilt

$$\vec{x} + \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \vec{AB} - \vec{CD}$$

- (b) Berechne die Koordinaten des Vektors \vec{x} !

6. Ein Käfer möchte ein Transportband für Gepäck überqueren, das zum Glück langsam nur mit einer Geschwindigkeit von $50 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ läuft. Er selbst erreicht eine Geschwindigkeit von $80 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Stelle anhand einer Konstruktion fest, in welcher Richtung der Käfer loslaufen muß, wenn er genau gegenüber ankommen will.

8. Kreise und Geraden

8.1. Sehnen- und Tangentenvierecke

- Gegeben ist ein Viereck, dessen Seiten a , b , c und d Tangenten an einen Kreis sind. Begründe, warum stets gilt: $a + c = b + d$

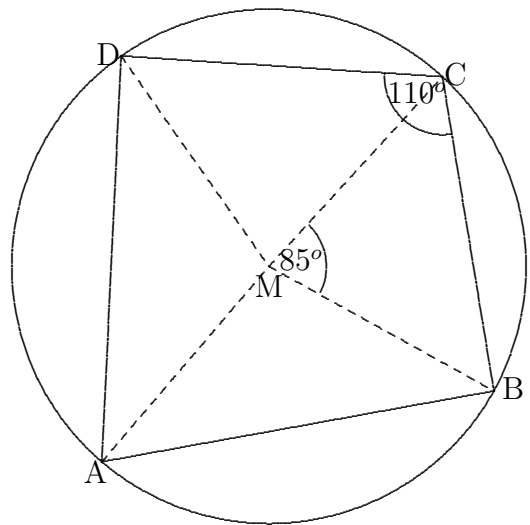
- Im dargestellten Sehnenviereck $ABCD$ sind bekannt:

$$\overline{AB} = \overline{AD}$$

$$\gamma = 110^\circ \text{ und } \sphericalangle BMC = 85^\circ.$$

Berechne α , β und δ !

Begründe deine Rechenschritte!



- Konstruiere ein Tangentenviereck, dessen Inkreis die positiven Koordinatenachsen und die Gerade PQ mit $P(11, 5|0)$ und $Q(0|9, 5)$ berührt und dessen vierte Seite zur x-Achse parallel ist.

Fertige zunächst eine Skizze und beschreibe kurz dein Vorgehen bei der Konstruktion.

- Gegeben sind zwei Geraden g und h , die sich unter einem Winkel von 30° im Punkt S schneiden. A und B sind zwei verschiedene Punkte auf g mit $\overline{AS} = \overline{BS} = 2,5$ cm. Es werden folgende Punktfolgen betrachtet:

$$M_1 = \{Q \mid d(Q; h) < d(Q; g)\}$$

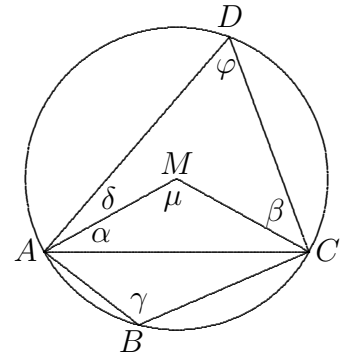
$$M_2 = \{P \mid \text{Jeder Winkel im Dreieck } ABP \text{ beträgt höchstens } 72^\circ\}$$

Kennzeichne mit Farbe in einer sauberen und übersichtlichen Zeichnung die Schnittmenge $M_1 \cap M_2$!

- Im Sehnenviereck $ABCD$ ist M der Mittelpunkt des Umkreises. Es ist $\sphericalangle BMD = 130^\circ$, $CD \parallel BM$ und $\overline{AD} = \overline{BD}$. Berechne alle Innenwinkel des Vierecks.

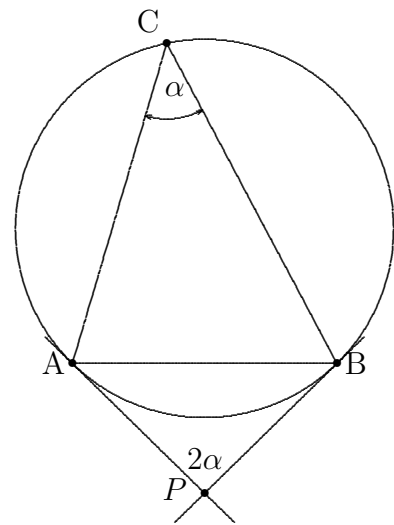
8.1 Sehnen- und Tangentenvierecke

6. In nebenstehender (nicht maßstäblicher) Figur sind die Winkel $\varphi = 40^\circ$ und $\beta = 5^\circ$ gegeben. Berechne die Winkel α , γ , δ und μ und gib jeweils eine kurze Begründung an.



7. Zeichne einen Kreis $k(M; r = 2,5 \text{ cm})$ und eine Sehne $[AB]$ der Länge 4 cm.
- Konstruiere die durch A und B verlaufenden Kreistangenten.
 - Wir definieren: *Zwei Kreise schneiden sich senkrecht, wenn sich in beiden Schnittpunkten die Tangenten an beide Kreise senkrecht schneiden.*
Konstruiere den Kreis K , der k in den Punkten A und B senkrecht schneidet.

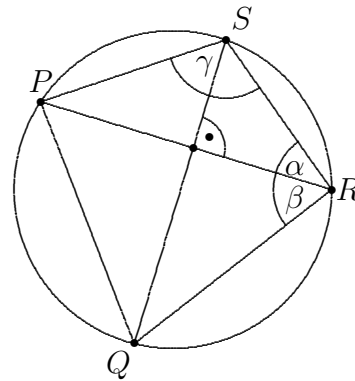
8. Bestimme die Größe des Winkels α in der Zeichnung. Begründe deinen Lösungsweg.



9. Die Diagonalen eines Sehnenvierecks zerlegen dieses in vier Teildreiecke, von denen jeweils zwei in den Winkeln übereinstimmen.
- Skizziere ein Beispiel und bezeichne die Eckpunkte. Gib zwei Dreiecke mit der genannten Eigenschaft an.
 - Beweise, daß die von dir gewählten Dreiecke in den Winkeln übereinstimmen.

8.2 Umfangswinkelsatz

10. Konstruiere ein Trapez ($a \parallel c$), das einen Inkreis besitzt, aus dem Inkreisradius $r = 3\text{cm}$, $\alpha = 80^\circ$ und $\beta = 70^\circ$. Beschreibe schrittweise und knapp die Konstruktion.
11. Konstruiere ein Sehnenviereck aus folgenden Angaben: $\overline{AB} = 7,5\text{ cm}$, $\overline{AD} = 4,5\text{ cm}$, $\overline{BD} = 10\text{ cm}$ und $\beta = 80^\circ$.
12. Konstruiere ein Sehnenviereck $ABCD$ aus folgenden Angaben: $\overline{AB} = 7,5\text{ cm}$, $\overline{AD} = 5,5\text{ cm}$, $\overline{CD} = 8,0\text{ cm}$ und $\beta = 105^\circ$ (Planfigur, Analysis, Konstruktion).
13. Berechne den Winkel γ für $\alpha = 47^\circ$ und $\beta = 61^\circ$:



14. Die Punkte $A(7|0)$, $B(6|4)$ und $C(3|2)$ legen drei Geraden fest. Zeichne diese Geraden und konstruiere alle Punkte, die von allen drei Geraden denselben Abstand haben. (Platzbedarf auf der x -Achse von 0 bis 12, auf der y -Achse von -4 bis 7.)
15. (a) Konstruiere zur Strecke $\overline{AC} = 9\text{ cm}$ einen Fasskreisbogen zum Umfangswinkel $\delta = \sphericalangle ADC = 75^\circ$.
 (b) Konstruiere in dieselbe Zeichnung zwei Sehnenvierecke $ABCD_1$ und $ABCD_2$ mit $\beta = \sphericalangle CBA = 105^\circ$ und $a = \overline{AB} = 5\text{ cm}$
 und der Eigenschaft, dass die Dreiecke ABC , ACD_1 und ACD_2 flächengleich sind. Zeichne zuerst eine Planfigur und begründe deinen Lösungsweg!

8.2. Umfangswinkelsatz

1. Wie groß ist der Umfangswinkel in einem $\frac{2}{5}$ -Kreisbogen? Begründe deine Antwort anhand einer Skizze.

8.2 Umfangswinkelsatz

2. Gegeben ist die Strecke $[AB]$ mit $\overline{AB} = 6$ cm. Konstruiere und schraffiere die Menge der Punkte P , von denen aus man die Strecke $[AB]$ unter mindestens 70° und weniger als 105° sieht und die nicht mehr als 4 cm von B entfernt sind.
3. Gegeben ist die Strecke $[AB]$ mit $\overline{AB} = 8$ cm. Konstruiere und schraffiere die Menge der Punkte P , von denen aus man die Strecke $[AB]$ unter mehr als 60° und höchstens 110° sieht und die von A weiter als von B entfernt sind.
4. Zeichne eine Strecke $[AB]$ der Länge 4 cm in die Mitte einer freien halben Seite. Konstruiere nun die Punktmenge $\{P \mid 60^\circ < \sphericalangle APB \leq 135^\circ\}$ und kennzeichne sie farbig.
5. Zeichne eine Strecke $[AB]$ der Länge 4 cm in die Mitte einer freien halben Seite. Konstruiere nun die Punktmenge $\{P \mid 65^\circ \leq \sphericalangle APB < 130^\circ\}$ und kennzeichne sie farbig.
6. Zeichne ein Dreieck ABC mit den Seiten $a = 7$ cm, $b = 5$ cm und $c = 6$ cm. Kennzeichne farbig die Menge aller Punkte, von denen aus $[AC]$ unter dem Winkel $\alpha < 90^\circ$ und $[BC]$ unter dem Winkel $\beta \geq 130^\circ$ erscheint. (Genauere Konstruktion!)
7. Fertige einen Konstruktionsplan an und konstruiere ein Dreieck ABC aus:
 $b = 5$ cm, $h_a = 3$ cm und $\beta = 70^\circ$
8. Konstruiere unter Verwendung eines Faßkreisbogens ein Dreieck ABC aus $b = 6$ cm, $\beta = 35^\circ$ und $h_b = 3$ cm. (Planfigur, exakte Konstruktion, Konstruktionsbeschreibung)
9. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a = 6$ cm, $\alpha = 70^\circ$ und $s_a = 4$ cm!
10. (a) Konstruiere ein Dreieck aus $c = 6$ cm, $h_c = 6$ cm und $\gamma = 40^\circ$.
(b) Die Schnittpunkte der Geraden AM mit dem Faßkreisbogen über $[AB]$ mit M als Mittelpunkt und $\gamma = 50^\circ$ sind die Punkte A und D . Warum ist das Dreieck ABD rechtwinklig?
(c) Kennzeichne in der Konstruktion von (a) farbig die folgende Punktmenge:
$$\{P \mid d(P; AB) > h_c \text{ und } \sphericalangle APB > 50^\circ\}$$

(d) Ermittle durch Konstruktion, für welche Werte von γ es keine Lösung gibt.

8.2 Umfangswinkelsatz

11. Gegeben sind zwei Geraden g und h , die sich unter einem Winkel von 30° im Punkt S schneiden. A und B sind zwei verschiedene Punkte auf g mit $\overline{AS} = \overline{BS} = 2,5$ cm. Es werden folgende Punktmenge betrachtet:

$$M_1 = \{Q \mid d(Q; h) < d(Q; g)\}$$

$$M_2 = \{P \mid \text{Jeder Winkel im Dreieck } ABP \text{ beträgt höchstens } 72^\circ\}$$

Kennzeichne mit Farbe in einer sauberen und übersichtlichen Zeichnung die Schnittmenge $M_1 \cap M_2$!

12. Konstruiere ein Parallelogramm $ABCD$ aus folgenden gegebenen Stücken:

$$\overline{AB} = 9 \text{ cm}; \quad \overline{MC} = 6,5 \text{ cm}; \quad \sphericalangle ACB = 50^\circ$$

M bezeichne dabei den Mittelpunkt von $[AB]$.

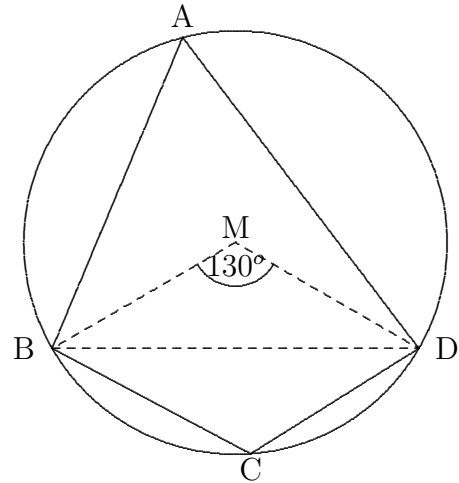
Verlangt sind Planfigur, Konstruktionsbeschreibung und eine saubere und genaue Konstruktion!

13. Konstruiere ein Viereck $ABCD$ aus $a = 8$ cm, $d = 7$ cm, $\overline{BD} = 7,5$ cm, $\gamma = 64^\circ$ und $\overline{AC} = 9,5$ cm. (Planfigur, Konstruktionsbeschreibung, Konstruktion)
14. Konstruiere ein Viereck $ABCD$ aus $a = 8$ cm, $b = 7,5$ cm, $\overline{AC} = 7$ cm, $\delta = 57^\circ$ und $\overline{BD} = 9$ cm. (Planfigur, Konstruktionsbeschreibung, Konstruktion)
15. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $c = 8$ cm, $\gamma = 110^\circ$ und $h_c = 2$ cm!

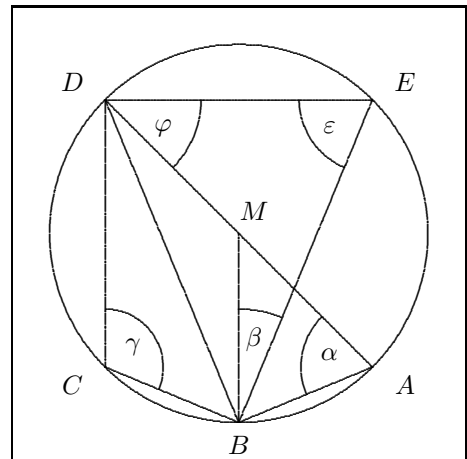
16. Konstruiere das ΔABC aus den Seitenlängen $a = 5$ cm, $b = 6$ cm und $c = 7$ cm! Konstruiere sodann den Punkt P , von dem aus alle Dreiecksseiten unter dem gleichen Winkel erscheinen! Überlege zuerst, ob dieser Punkt im Inneren oder im äußeren des Dreiecks liegt! Erstelle dazu für beide Fälle eine berlegungsfigur und beweise, daß einer der Fälle nicht möglich ist!

8.2 Umfangswinkelsatz

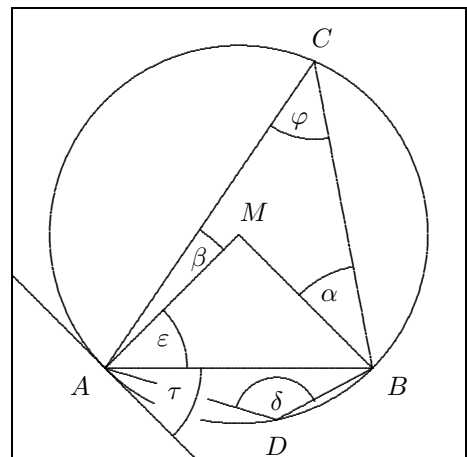
17. In einem Sehnenviereck $ABCD$ mit Umkreismittelpunkt M (vgl. Skizze) gilt:
 $\sphericalangle BMD = 130^\circ$, $BM \parallel CD$ und $\overline{AD} = \overline{BD}$
 Bestimme alle Innenwinkel des Sehnenvierecks. Begründe deine Antworten!



18. In nebenstehender Abbildung (nicht maßstabsgetreu!) ist $\gamma = 140^\circ$ und $\varphi = 25^\circ$.
 Konstruiere die Figur für $r = \overline{MA} = 4,5 \text{ cm}$ und $\overline{DC} = 3 \text{ cm}$!
 Berechne ε , α und β !



19. In nebenstehender Abbildung (nicht maßstabsgetreu!) ist $\tau = 50^\circ$ und $\alpha = 40^\circ$.
 Konstruiere die Figur für $r = \overline{MA} = 4,5 \text{ cm}$ und $\overline{AD} = 3 \text{ cm}$!
 Berechne φ , ε , β und δ !



8.3 Anwendungsaufgaben mit Faßkreisbögen

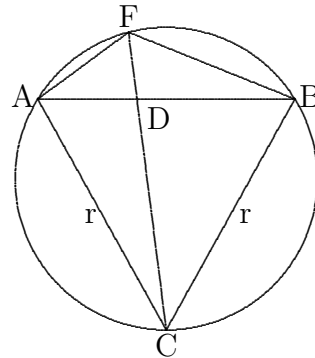
20. Das Dreieck mit den Maßen $b = 7$ cm, $h_c = 5,5$ cm und $\beta = 60^\circ$ soll *konstruiert* werden.

- Fertige eine Planfigur und zeichne die gegebenen Größen farbig ein!
- Konstruiere das Dreieck!
- Fertige eine *kurze* Konstruktionsbeschreibung!

21. In der nebenstehenden Figur gilt:

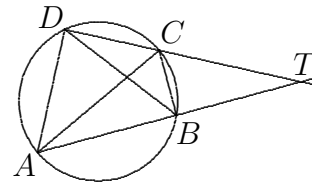
Das Dreieck ABC ist gleichschenkelig,
 F ist ein beliebiger Punkt auf der Kreislinie.

- Zeige: $\triangle CDB \sim \triangle CFB$
- Zeige: $r = \sqrt{CD \cdot CF}$



22. Gegeben ist ein beliebiges Sehnenviereck $ABCD$ (vgl. Skizze).

- Zeige: Die Dreiecke ATC und DBT sind ähnlich.
- Beweise: $\overline{AT} \cdot \overline{BT} = \overline{DT} \cdot \overline{CT}$

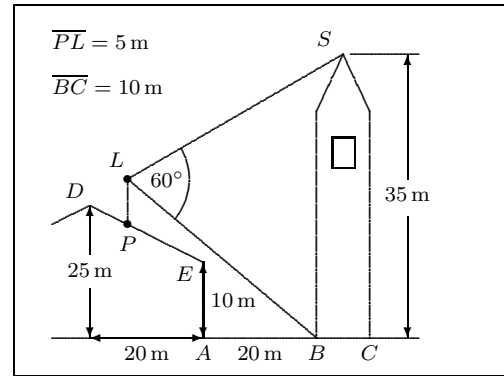


8.3. Anwendungsaufgaben mit Faßkreisbögen

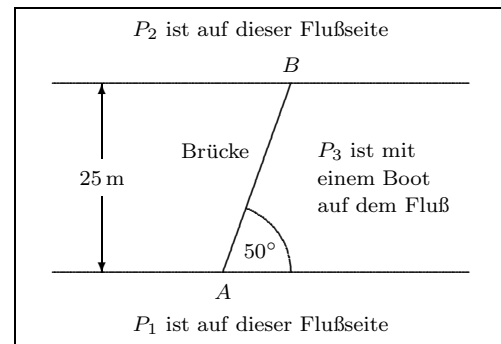
- Auf einem Kreis sind zwei Punkte A und B gegeben. Welches dem Kreis eingeschriebene Dreieck ABC hat den größten Flächeninhalt? Begründe.

8.3 Anwendungsaufgaben mit Faßkreisbögen

2. Auf dem Dach eines Hauses soll ein Scheinwerfer L angebracht werden, der einen benachbarten Kirchturm voll ausleuchtet, der Öffnungswinkel des Lichtkegels beträgt 60° (siehe Abb.). P sei der Befestigungspunkt der Stange des Scheinwerfers auf dem Hausdach. Übertrage nebenstehende Zeichnung mit den angegebenen Größen im Maßstab $1 : 500$ auf dein Blatt und konstruiere P !

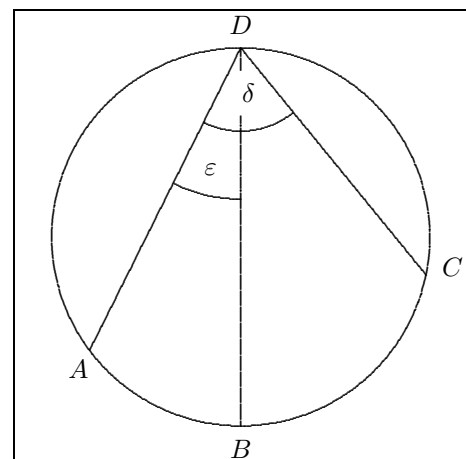


3. Die Photographen P_1 , P_2 und P_3 haben den Auftrag, die Sprengung der von A nach B führenden Brücke aufzunehmen. Jeder der drei Photographen hat seine Kamera mit einem Zoomobjektiv ausgestattet, bei dem der Sehwinkel von 50° bis 110° stetig verändert werden kann. Die Aufnahme soll so gestaltet werden, daß die Punkte A und B gerade die Randpunkte des Bildes sind. Wegen der verschieden starken Sprengladungen für die Brückenköpfe müssen die Sicherheitsabstände 20 m von A und 15 m von B eingehalten werden. Übertrage die (nicht maßstabgetreue) Abbildung mit den richtigen Größen im Maßstab $1 : 500$ auf dein Blatt und konstruiere die möglichen Standorte der drei Photographen, die ganz zum Schluß noch verschiedenfarbig hervorgehoben werden sollen! Verwende dein Arbeitsblatt für die Zeichnung im Querformat!



4. Vier Satelliten A , B , C und D bewegen sich auf derselben kreisförmigen Umlaufbahn um die Erde. Von D aus erscheint $[AC]$ unter dem Winkel $\delta = 70^\circ$, $[AB]$ unter $\varepsilon = 30^\circ$. Unter welchem Winkel erscheint

- $[AC]$ von B aus gesehen?
- $[AB]$ von C aus gesehen?
- $[BC]$ von A aus gesehen?
- $[BC]$ von D aus gesehen?



8.3 Anwendungsaufgaben mit Faßkreisbögen

5. Die Entfernungen eines Schiffes S von drei Leuchttürmen A , B und C sollen bestimmt werden. Zur Positionsbestimmung wurden die Winkel $\sphericalangle BSA = 100^\circ$ und $\sphericalangle CSB = 60^\circ$ gemessen, die Abstände der Leuchttürme zueinander sind bekannt: $\overline{AB} = 13,8$ km, $\overline{BC} = 12,4$ km, $\overline{AC} = 18,6$ km.

Bestimme die Entfernungen mit Hilfe einer sauberen Konstruktion ($1 \text{ km} \hat{=} 0,5 \text{ cm}$).

6. (a) Konstruiere zur Strecke $\overline{AC} = 9$ cm *einen* Fasskreisbogen zum Umfangswinkel $\delta = \sphericalangle ADC = 75^\circ$.
- (b) Konstruiere in dieselbe Zeichnung zwei Sehnenvierecke $ABCD_1$ und $ABCD_2$ mit

$$\beta = \sphericalangle CBA = 105^\circ \text{ und } a = \overline{AB} = 5 \text{ cm}$$

und der Eigenschaft, dass die Dreiecke ABC , ACD_1 und ACD_2 flächengleich sind. Zeiche zuerst eine Planfigur und begründe deinen Lösungsweg!

9. Flächenmessung

9.1. Verwandlungsaufgaben

1. Konstruiere ein zum Dreieck ABC mit $a = 7$ cm, $b = 6$ cm und $c = 8$ cm flächengleiches Dreieck $A'B'C'$ mit $\gamma' = \gamma$ und $a' = 5$ cm!
2. (a) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{AC} = 6$ cm und $\overline{BC} = 5$ cm.
(b) Konstruiere unter Beibehaltung des Winkels β ein flächengleiches Dreieck $A'BC'$ mit $\overline{BC'} = 7$ cm und begründe die Richtigkeit deiner Lösung.
3. Konstruiere zu einem Dreieck ABC ein inhaltsgleiches Dreieck AB_2C_2 mit dem gleichen Winkel α , in dem eine der beiden Seiten, die α einschließen, eine vorgegebene Länge hat.
4. Gegeben ist das Dreieck ABC mit $c = 7$ cm, $\alpha = 60^\circ$ und $\beta = 45^\circ$. Verwandle es per Konstruktion unter Beibehaltung des Winkels γ in ein inhaltsgleiches Dreieck $A_1B_1C_1$ mit einer der folgenden Eigenschaften.
 - (a) $h_b = 3$ cm
 - (b) $a = 5$ cm
 - (c) $b = 7$ cmBeginne für jede Teilaufgabe eine neue Zeichnung und fertige eine Konstruktionsbeschreibung.
5. Das Trapez $ABCD$ ($a \parallel c$) ist durch folgende Angaben festgelegt: $a = 5$ cm, $c = 7$ cm, $h = 4$ cm und $\alpha = 60^\circ$. Zeichne zunächst das Trapez und verwandle es durch Konstruktion in ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite die Länge 3, 5 cm hat.
6. (a) Zeichne ein Parallelogramm $ABCD$ mit der Seitenlänge $a = 7$ cm, der Diagonalen $\overline{AC} = 10$ cm und der Höhe $h_a = 5$ cm.
(b) Berechne den Abstand des Punktes B von AC .
(c) Verwandle das Parallelogramm durch Konstruktion in ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite die Länge 4 cm hat.

9.1 Verwandlungsaufgaben

- (d) Berechne die zweite Seitenlänge dieses Rechtecks.
7. Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 8 cm ist in eine inhaltsgleiche Raute zu verwandeln, bei der der Abstand zweier gegenüberliegender Seiten 4,5 cm beträgt! Saubere und genaue Konstruktion! Die einzelnen Verwandlungsschritte sind stichpunktartig anzugeben!

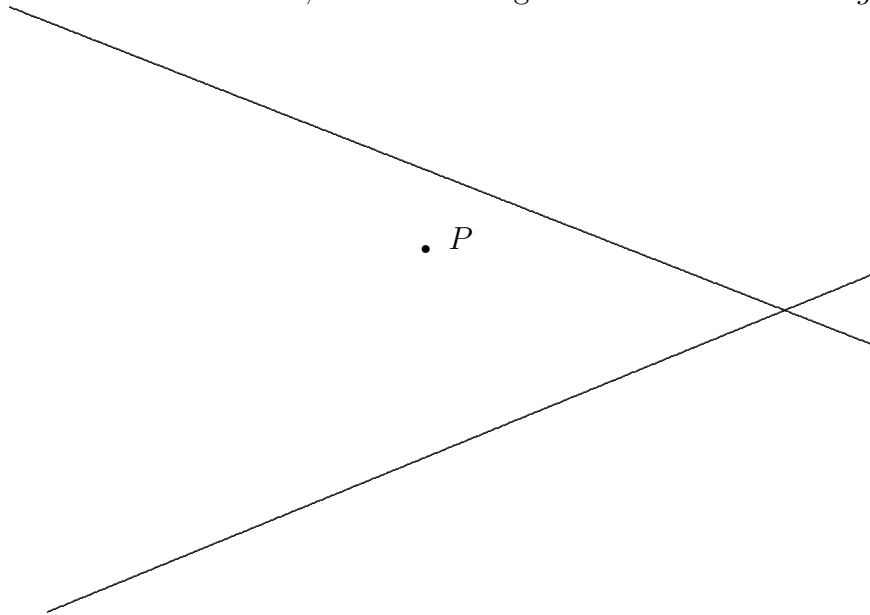
10. Zentrische Streckung

10.1. Reine Konstruktionsaufgaben

1. Zeichne das Dreieck ABC mit $A(0|0)$, $B(4|1)$ und $C(1|5)$ (Platzbedarf: $-4 \leq x \leq 8$, $-3 \leq y \leq 9$).
 - (a) S bezeichne den Schwerpunkt von ABC . Die zentrische Streckung mit Zentrum S und Streckungsfaktor -2 bildet ABC auf $A'B'C'$ ab. Konstruiere das Bild-dreieck und beschreibe dein Konstruktionsverfahren.
 - (b) Begründe, warum C auf $A'B'$ liegen muß.
2.
 - (a) Zeichne die Punkte $A(1|1)$, $B(8|1,5)$ und $C(4|5)$ in ein Koordinatensystem. (Platzbedarf: $0 \leq x \leq 13$; $0 \leq y \leq 20$)
 - (b) Von einer ersten zentrischen Streckung $S_1(Z; \frac{4}{11})$ ist bekannt, daß sie A auf C abbildet. Konstruiere Z . (Ergebnis: $Z(5,75|7,25)$)
 - (c) Mittels einer zweiten zentrischen Streckung $S_2(Z; -\frac{5}{4})$ wird nun das Dreieck ABC auf das Dreieck $A_2B_2C_2$ abgebildet. Konstruiere das Dreieck $A_2B_2C_2$.
3. Gegeben sind die Punkte $A(1|1)$, $B(5|1)$ und $C(5|4)$. Konstruiere das Bild-dreieck bei der Ähnlichkeitsabbildung $S_{A;0,5} \circ S_{BC}$. Ist die Abbildung gleichsinnig oder gegensinnig?
4. In einem kartesischen Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) sind die Punkte $A(5|2)$, $B(1|5)$, $C(6|3)$, $D(4|5)$ gegeben.
 - (a) A ist der Bildpunkt von B unter einer zentrischen Streckung $S(Z_1; 0,45)$. Konstruiere das Zentrum Z_1 !
 - (b) Konstruiere die Zentren Z_2, Z_3 der Streckungen, die die Strecke $[AB]$ auf die dazu parallele Strecke $[CD]$ abbilden!
 - (c) k sei der Kreis um C mit Radius 2 cm. Konstruiere das Bild von k unter der zentrischen Streckung $S(B; -0,75)$!

10.2 Rein rechnerische Aufgaben

5. Der Kreis um $M(4|2, 5)$ mit Radius $r = 2$ cm wird durch eine zentrische Streckung mit dem Streckungsfaktor $m = 1,5$ auf den Kreis mit dem Mittelpunkt $M'(9|5)$ abgebildet. Der Punkt A' sei der Bildpunkt des Kreispunktes $A(5|4, 2)$. Ermittle graphisch die Koordinaten des Punktes A' !
6. Gegeben ist das Dreieck ABC durch $c = 4,5$ cm, $b = 4,2$ cm und $a = 3,3$ cm. Es wird durch die zentrische Streckung $S(A|m)$ mit $m < 0$ auf das Dreieck $A'B'C'$ abgebildet. Vom Bilddreieck $A'B'C'$ kennt man die Länge der Seitenhalbierenden $s'_a = 5,5$ cm. Konstruiere in einer sauberen und genauen Konstruktion das Dreieck $A'B'C'$!
7. Konstruiere zwei Kreise, die durch P gehen und die Geraden g und h berühren:



10.2. Rein rechnerische Aufgaben

1. Ein Dreieck ABC mit $\overline{AC} = 5$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm und $\gamma = 56^\circ$ wird durch die zentrische Streckung $S_{B;m}$ auf das Dreieck $A'BC'$ abgebildet. Bekannt sei ferner, daß $m > 1$ und daß $\overline{CC'} = 1,5$ cm. Fertige eine Skizze und berechne dann m , $\overline{A'C'}$ und γ' .
2. Das Dreieck ABC mit $b = 6$ cm und $h_b = 12$ cm wird durch eine zentrische Streckung auf das Dreieck $A'B'C'$ mit dem Flächeninhalt 49cm^2 abgebildet. Berechne die Länge der Seite b' im Bilddreieck.
3. Gegeben ist eine Raute $ABCD$ vom Flächeninhalt 80cm^2 . S sei der Diagonalschnittpunkt, M der Mittelpunkt der Strecke $[AS]$. Es gelte $\overline{AM} = 3,2$ cm.
 - (a) Zeige durch Rechnung, daß die Raute $ABCD$ kein Quadrat ist!

10.3 Umfangreichere Aufgaben (Zeichnung/Rechnung)

Durch die zentrische Streckung $S(M; k)$ mit negativem Streckfaktor k wird die Raute $ABCD$ auf die Raute $A'B'C'D'$ abgebildet.

- (b) Kann die Raute $A'B'C'D'$ ein Quadrat sein? Begründe deine Antwort kurz!
- (c) Der Flächeninhalt der Raute $A'B'C'D'$ beträgt 245 cm^2 . Berechne den Streckfaktor k ! (Ergebnis: $k = -\frac{7}{4}$)
- (d) Berechne die Streckenlänge AA' !

4. Eine zentrische Streckung mit Zentrum Z und Streckungsfaktor $m = 2,5$ bildet A auf A' und B auf B' ab.

- (a) Berechne aus $\overline{AA'} = 6 \text{ cm}$, $\overline{A'B'} = 10 \text{ cm}$ und $\overline{ZB} = 3 \text{ cm}$ die Abstände $\overline{ZA'}$, \overline{AB} und $\overline{BB'}$.
- (b) Für einen dritten Punkt C gilt $\overline{A'C'} = 5 \text{ cm}$. Begründe unter Zuhilfenahme einer Skizze, warum diese Information nicht genügt, um \overline{ZC} zu berechnen.

10.3. Umfangreichere Aufgaben (Zeichnung/Rechnung)

1. Zeichne zwei parallele Geraden g und g' im Abstand von 2 cm und wähle zwei Punkte $A \in g$ und $A' \in g'$, die einen gegenseitigen Abstand von 3 cm haben. (Hinweis: Fertige zunächst eine Planskizze und berücksichtige den Platzbedarf der folgenden Teilaufgaben.)

- (a) Konstruiere das Zentrum Z einer zentrischen Streckung mit Streckungsfaktor $m = \frac{3}{5}$, die A auf A' abbildet.
- (b) Das gemeinsame Lot von Z auf g und g' schneidet diese in L und L' . Berechne $\overline{ZL'}$ und \overline{ZL} .

2. Ein Dreieck ABC wird durch die zentrische Streckung $S(A; m_1 = 3,5)$ auf das Dreieck $A'B'C'$ abgebildet. Gegeben sind die Streckenlängen $\overline{AC} = 2,7 \text{ cm}$, $\overline{BB'} = 4,0 \text{ cm}$ und $\overline{B'C'} = 6,3 \text{ cm}$.

- (a) Fertige eine sauber beschriftete Skizze und berechne dann \overline{BC} , \overline{AB} und $\overline{CC'}$.
- (b) Berechne den Abbildungsfaktor m_2 der Streckung mit dem Zentrum B' , die A auf B abbildet.

3. g und g' sind zwei parallele Geraden im Abstand 2 cm . Die Gerade l ist ein gemeinsames Lot und schneidet sie in den Punkten A und A' .

10.3 Umfangreichere Aufgaben (Zeichnung/Rechnung)

- (a) Konstruiere das Zentrum Z einer zentrischen Streckung mit Streckungsfaktor $m = \frac{7}{4}$, die A auf A' abbildet.
- (b) Berechne \overline{ZA} .
- (c) B liegt auf g und es ist $\overline{AB} = 3$ cm. Berechne die Flächeninhalte von ZAB , $ZA'B'$ und ZAB' .
4. Gegeben ist eine zentrische Streckung $S(Z; m = \frac{5}{3})$ und eine Strecke $[PQ]$ mit $\overline{PQ} = 3,6$ cm, wobei Z von $[PQ]$ einen Abstand von 3,0 cm hat.
- (a) Zeichne die Strecke $[PQ]$, ein mögliches Zentrum Z und konstruiere dann den Bildpunkt P' von P unter $S(Z; m)$!
- (b) Konstruiere auf möglichst einfache Weise den Bildpunkt Q' von Q ! Beschreibe kurz dein Vorgehen!
- (c) Berechne $\overline{P'Q'}$!
- (d) Berechne die Flächeninhalte der Dreiecke ZPQ und $ZP'Q'$!
- (e) Berechne den Streckfaktor m^* der zentrischen Streckung mit Zentrum P' , die P auf Z abbildet!
5. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC} = 8$ cm.
- (a) Konstruiere das Zentrum Z einer zentrischen Streckung $S(Z; \frac{2}{7})$, die C auf B abbildet. Beschreibe kurz Deine Konstruktion.
(Platzbedarf für die Konstruktion: 1 Seite)
- (b) Nun wird das Dreieck ABC durch eine weitere zentrische Streckung mit unbekanntem Streckungsfaktor auf ein Dreieck $A'B'C'$ abgebildet, das den Flächeninhalt 18 cm^2 besitzt. Berechne diesen Abbildungsfaktor.
(Hier ist keine Konstruktion verlangt!)
6. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei A und den Kathetenlängen $\overline{AC} = 5$ cm und $\overline{AB} = 7$ cm. Durch die zentrische Streckung $S(A; m)$ mit $m < 0$ werde B in B' abgebildet, so daß $\overline{BB'} = 11$ cm.
- (a) Erstelle eine saubere Zeichnung und ergänze diese fortlaufend!
- (b) Berechne den Streckfaktor m !
- (c) Konstruiere möglichst geschickt das Bilddreieck $A'B'C'$ des Dreiecks ABC unter $S(A; m)$! Welche Eigenschaft(en) der zentrischen Streckung werden dabei verwendet?

10.3 Umfangreichere Aufgaben (Zeichnung/Rechnung)

- (d) Berechne zunächst den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und dann, ohne erneute Anwendung der Flächeninhaltsformel für Dreiecke, den Inhalt des Dreiecks $A'B'C'$!
7. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a = 4,0$ cm, $b = 3,0$ cm und $c = 6,0$ cm. Es wird durch eine zentrische Streckung $S(C; k)$ mit negativem Streckungsfaktor k abgebildet. Die Streckenlänge $\overline{AA'}$ beträgt 7 cm.
- (a) Bestimme k und konstruiere das Bilddreieck $A'B'C'$.
(Platzbedarf: Halbe Seite)
- (b) Das Bilddreieck $A'B'C'$ hat den Flächeninhalt $9,6$ cm². Berechne damit die Länge der Höhe h_c des ursprünglichen Dreiecks ABC .
8. Gegeben ist das Dreieck ABC durch $\overline{AB} = 6,4$ cm; $\alpha = 70^\circ$; Höhe $h_{AB} = 3,5$ cm. M sei der Mittelpunkt von $[AB]$.
- (a) Konstruiere das Dreieck ABC !
- (b) Durch eine zentrische Streckung $S(M; k)$ mit negativem Streckfaktor k werde das Dreieck ABC auf das Dreieck $A'B'C'$ abgebildet, wobei der Flächeninhalt des Bilddreiecks $28,672$ cm² beträgt. Berechne den Streckfaktor k !
(Ergebnis: $-1,6$)
- (c) Berechne die Höhe $h_{A'B'}$ des Bilddreiecks $A'B'C'$!
- (d) Konstruiere das Bilddreieck $A'B'C'$, aufbauend auf der Konstruktion in Teilaufgabe (a)!
9. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a = 4,0$ cm, $b = 3,0$ cm und $c = 6,0$ cm. Es wird durch eine zentrische Streckung $S_{C;m}$ mit negativem Streckungsfaktor m abgebildet. Die Streckenlänge $\overline{AA'}$ beträgt 7 cm.
- (a) Konstruiere das Bilddreieck $A'B'C'$ und bestimme m .
(Platzbedarf: halbe Seite, Dreieck ABC darin in der Mitte)
- (b) Das Bilddreieck $A'B'C'$ hat den Flächeninhalt $A' = 9,6$ cm².
Berechne damit die Länge der Höhe h_c des ursprünglichen Dreiecks ABC !
- (c) Konstruiere nun (in der alten Zeichnung) das Bilddreieck $A''B''C''$ bei der zentrischen Streckung $S_{C; \frac{15}{7}}$.
10. In einem Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) ist durch die Punkte $A(0|2)$, $B(4|0)$, $C(4|9)$ und $D(0|5)$ ein Trapez $ABCD$ gegeben.

10.3 Umfangreichere Aufgaben (Zeichnung/Rechnung)

- (a) A ist das Bild des Punktes B unter einer zentrischen Streckung $S(Z; m = 1, 6)$. Konstruiere das Streckzentrum Z !
- (b) Das Trapez $ABCD$ ist das Bild eines Vierecks unter der in Teilaufgabe (a) vorgegebenen Streckung $S(Z; m)$. Konstruiere das Originalviereck!
- (c) Berechne den Flächeninhalt des Originalvierecks in Teilaufgabe (b)!
- (d) Der Diagonalschnittpunkt des Trapezes $ABCD$ ist das Zentrum einer zentrischen Streckung, welche den Punkt A auf den Punkt C abbildet. Berechne den Streckfaktor, ohne irgendwelche Streckenlängen zu messen!
11. Gegeben ist das Dreieck ABC durch $\overline{AB} = 12 \text{ cm}$; $h_{AB} = 7 \text{ cm}$; $\alpha = 40^\circ$. F sei der Fußpunkt der Höhe h_{AB} .
- (a) Konstruiere das Dreieck ABC !
- (b) Der Punkt D teilt die Strecke $[CF]$ außen im Verhältnis $8:3$. Konstruiere D und berechne anschließend \overline{DF} !
(Ergebnis: $\overline{DF} = 4,2 \text{ cm}$)
- (c) D ist der Bildpunkt von C unter einer zentrischen Streckung $S(F; m)$, wobei F der obengenannte Höhenfußpunkt ist. Konstruiere möglichst geschickt das Bilddreieck $A'B'C'$ des Dreiecks ABC unter $S(F; m)$!
- (d) Berechne folgende Größen:
Abbildungsfaktor m , Streckenlänge $\overline{A'B'}$, Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C'$!
- (e) Die Strecke $[BC]$ kann als Bild der Strecke $[B'C']$ unter einer zentrischen Streckung $S(Z; k)$ mit positivem Streckfaktor k aufgefaßt werden. Konstruiere Z und gib den Wert von k an, ohne irgendwelche Streckenlängen zu messen!
- (f) P sei der Schnittpunkt der Geraden ZC und AD . Kann das Dreieck PZD das Bilddreieck von Dreieck PCA unter einer zentrischen Streckung sein? Begründe kurz deine Antwort!
12. Gegeben ist $\triangle ABC$ mit $a = 3 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$ und $c = 5 \text{ cm}$. Eine zentrische Streckung mit dem Zentrum A und dem Faktor $k > 1$ führt $\triangle ABC$ in $\triangle AB'C'$ über. k ist so gewählt, dass $\alpha = \sphericalangle BAC = \sphericalangle BC'B'$ gilt.
- (a) Konstruiere $\triangle ABC$, die Punkte B' und C' und zeichne die Strecke $[BC']$ ein.
- (b) Suche alle ähnlichen Dreiecke in der konstruierten Figur.
- (c) Berechne k und $d = \overline{BC'}$. Rechne zuerst allgemein und setze erst in die Endergebnisse Zahlenwerte ein.

11. Kegelschnitte

1. Wir stellen uns einen Punkt P vor, der sich auf einer Ellipsenbahn (Halbachsen $b \leq a$) um einen der Brennpunkte bewegt. Der kleinste bzw. größte Abstand von diesem wird mit r_{\min} bzw. r_{\max} bezeichnet. Begründen Sie: $\sqrt{r_{\min} \cdot r_{\max}} = b$.
2. Die Achsen einer Ellipse mit dem Scheitelpunkt $A_1(-5|0)$ liegen auf den Koordinatenachsen.
 - (a) Bestimmen Sie die Mittelpunktsleichung der Ellipse, wenn der Punkt $P(3|2)$ auf der Ellipse liegt.
 - (b) Begründen Sie geometrisch, warum der Punkt $Q(3|-2)$ ebenfalls auf der Ellipse liegt.
 - (c) Die Punkte P und Q bilden zusammen mit den beiden Brennpunkten ein Viereck. Bestimmen Sie auf möglichst einfache Art dessen Umfang und begründen Sie Ihre Antwort.

12. Sphärische Trigonometrie

12.1. Großkreise

1. Berechnen Sie für München ($\lambda = 11,5^\circ, \phi = 48,1^\circ$), Leningrad ($\lambda = 30,2^\circ, \phi = 59,6^\circ$) und Sydney ($\lambda = 151,1^\circ, \phi = -33,5^\circ$) jeweils den Abstand zum Nordpol, zum Äquator und zum Südpol.
2. Geben Sie für die folgenden Meridiane die Lage des Links- und Rechtspols an.
 - (a) Nullmeridian (Orientierung von Süd nach Nord)
 - (b) Meridian zu 50° ö. Länge (Orientierung von Süd nach Nord)
 - (c) Meridian zu 130° ö. Länge (Orientierung von Nord nach Süd)
 - (d) Meridian zu 100° w. Länge (Orientierung von Süd nach Nord)
 - (e) Meridian zu 70° ö. Länge (Orientierung von Nord nach Süd)
3. Geben Sie für den Schnittpunkt des angegebenen Meridians mit dem Äquator die zugehörigen Links- und Rechtspolaren an.
 - (a) Meridian zu 30° ost
 - (b) Meridian zu 70° west
 - (c) Meridian zu 130° ost
 - (d) Meridian zu 170° ost
 - (e) Meridian zu 120° west
4. In der Ebene kann eine Parallele folgendermaßen definiert werden:
Zwei Geraden heißen zueinander parallel, wenn es eine dritte Gerade gibt, die auf beiden senkrecht steht.
Läßt sich diese Definition auf die Kugel übertragen?

12.2. Kleinkreise

1. Berechnen Sie den Radius des Breitenkreises durch München ($\lambda = 11,5^\circ$, $\phi = 48,1^\circ$), Leningrad ($\lambda = 30,2^\circ$, $\phi = 59,6^\circ$) und Sydney ($\lambda = 151,1^\circ$, $\phi = -33,5^\circ$).
2. Mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich München ($\lambda = 11,5^\circ$, $\phi = 48,1^\circ$), Leningrad ($\lambda = 30,2^\circ$, $\phi = 59,6^\circ$) und Sydney ($\lambda = 151,1^\circ$, $\phi = -33,5^\circ$) in Folge der Erddrehung?
3. (a) Sie stehen am Nordpol und gehen 100 m nach Süden, 100 m nach Osten und 100 m nach Norden. Wo stehen Sie am Ende?
(b) Sie gehen 1000 km nach Süden, 1000 km nach Osten, 1000 km nach Norden und 1000 km nach Westen und sind dann wieder am Ausgangspunkt. Wo ist der Ausgangspunkt?
4. Ein Pilot fliegt mit seiner Maschine tausend Kilometer nach Süden, dann tausend Kilometer nach Osten und anschließend noch tausend Kilometer nach Norden und landet genau wieder am Startpunkt S.
(a) An welchem Punkt S ist der Pilot gestartet?
(b) Eine andere Lösung von Teilaufgabe (a)!
(c) Noch viele ganz andere Lösungen!

Geben Sie in jedem Fall die Koordinaten von S und den Abstand von S zur Erdachse an!

5. Wo liegen auf der Erde die Punkte, deren sphärischer Abstand vom Nordpol
(a) 7000 km beträgt?
(b) 700 km beträgt?
(c) 70 km beträgt?
(d) Berechnen Sie für die Teilaufgaben (a), (b) und (c) den ebenen Radius des Breitenkreises und vergleichen Sie ihn mit den sphärischen Abständen.

Erdradius: 6370 km

6. Wo liegen auf der Erde die Punkte, deren sphärischer Abstand vom Äquator
(a) 6000 km beträgt?
(b) 3000 km beträgt?

12.3 Kugelzweieck

- (c) 300 km beträgt?
- (d) Berechnen Sie für die Teilaufgaben (a), (b) und (c) jeweils den geradlinigen Abstand und vergleichen Sie ihn mit dem sphärischen Abstand.

7. Berechnen Sie den sphärischen Radius eines Kleinkreises mit Radius r auf einer Kugel mit Radius R für

- (a) $r = 0,4$ und $R = 5$
- (b) $r = 3,3$ und $R = 5$
- (c) $r = 500,0\text{km}$ und $R = 6370\text{km}$
- (d) $r = 2000\text{km}$ und $R = 6370\text{km}$
- (e) $r = 0,5$ und $R = 1$
- (f) $r = 0,8$ und $R = 1$

12.3. Kugelzweieck

1. Wie lange ist eine Seite eines Kugelzweiecks auf

- (a) der Einheitskugel.
- (b) der Erde ($r = 6370\text{km}$)
- (c) einer Kugel mit Radius $r = 12\text{m}$

2. Berechnen Sie die Flächen der folgenden Kugelzweiecke.

- (a) $\alpha = 60^\circ$ und $r = 5\text{m}$
- (b) $\alpha = 27^\circ$ und $r = 700\text{m}$
- (c) $\alpha = 123^\circ$ und $r = 45\text{km}$
- (d) $\alpha = 77^\circ$ und $r = 77\text{km}$

3. Wie verändert sich die Fläche A eines Kugelzweiecks, wenn

- (a) der Kugelradius verdoppelt wird?
- (b) der Winkel verdreifacht wird?
- (c) der Kugelradius verdreifacht und der Winkel verdoppelt wird?
- (d) der Kugelradius halbiert und der Winkel verdreifacht wird?
- (e) der Kugelradius verdreifacht und der Winkel halbiert wird?

12.4 Kugeldreieck

4. Berechnen Sie die Flächen folgender Kugelzweiecke:
- (a) $\alpha = 60^\circ$, $r=1$
 - (b) $\alpha = 120^\circ$, $r=5$
 - (c) $\alpha = 0,700 \cdot \pi$, $r=15,0$
 - (d) $\alpha = 1,23 \cdot \pi$, $r=25,0$
5. Wie verändert sich die Fläche eines Kugelzweiecks, wenn
- (a) der Kugelradius verdoppelt wird?
 - (b) der Winkel durch drei geteilt wird?
 - (c) der Kugelradius verdoppelt und der Winkel halbiert wird?
 - (d) der Kugelradius halbiert und der Winkel halbiert wird?
 - (e) der Kugelradius verdreifacht und der Winkel halbiert wird?
6. Welchen Teil der Kugeloberfläche umfaßt ein Kugelzweieck mit $\alpha = 15^\circ$, 45° , 135° , 165° und $\alpha = 315^\circ$.
7. Die Längengrade durch die angegebenen Städte teilen die Erdoberfläche in vier Kugelzweiecke. Berechnen Sie die Flächen der Kugelzweiecke.
- (a) München ($\lambda = 11,5^\circ$ ost, $\phi = 48,1^\circ$) und New York ($\lambda = 74,0^\circ$ west, $\phi = 40,4^\circ$)
 - (b) Sidney ($\lambda = 151,1^\circ$ ost, $\phi = -33,5^\circ$) und Kapstadt ($\lambda = 18,2^\circ$ ost, $\phi = -33,6^\circ$)
 - (c) Buenos Aires ($\lambda = 58,3^\circ$ west, $\phi = -34,4^\circ$) und Madrid ($\lambda = 3,4^\circ$ west, $\phi = 40,2^\circ$)

12.4. Kugeldreieck

1. Berechnen Sie die Fläche des vom Äquator, vom Nullmeridian und dem Längengrad durch den angegebenen Ort begrenzten Kugeldreiecks. Geben Sie den sphärischen Exzeß des Dreiecks im Grad- und Bogenmaß an.
- (a) München ($\lambda = 11,5^\circ$ ö. L., $\phi = 48,1^\circ$)
 - (b) New York ($\lambda = 74,0^\circ$ w. L., $\phi = 40,4^\circ$)

12.4 Kugeldreieck

- (c) Moskau ($\lambda = 37,4^\circ$ ö. L., $\phi = 55,5^\circ$)
2. Welchen prozentualen Anteil der Kugeloberfläche nimmt ein Kugeldreieck mit
- (a) $\alpha = 113^\circ 12'$, $\beta = 77^\circ 45'$ und $\gamma = 55^\circ 55'$ ein?
 - (b) $\alpha = 123^\circ 43' 13''$, $\beta = 47^\circ 15' 44''$ und $\gamma = 144^\circ 15' 15''$ ein?
3. Welche Winkel hat ein gleichwinkliges Kugeldreieck ($\alpha = \beta = \gamma$), wenn die Fläche
- (a) $\frac{1}{8}$ der Kugeloberfläche beträgt.
 - (b) $\frac{1}{6}$ der Kugeloberfläche beträgt.
 - (c) 15% der Kugeloberfläche beträgt.
 - (d) 20% der Kugeloberfläche beträgt.
4. (a) Was ist die größtmögliche Fläche, die ein Kugeldreieck auf der Kugeloberfläche ($r = 1$) einnehmen kann? Begründen Sie ihre Antwort.
- (b) Zwischen welchen Werten liegt die Winkelsumme im Kugeldreieck?
 - (c) Zwischen welchen Werten liegt die Winkelsumme im Kugelviereck?
 - (d) Zwischen welchen Werten liegt die Winkelsumme im Kugelfünfeck?
 - (e) Zwischen welchen Werten liegt die Winkelsumme im Kugel-n-eck?
5. (a) Gegeben ist folgendes Dreieck auf der Erde ($r = 6370 \text{ km}^2$):
A : Südpol
B : Schnittpunkt des Meridians zu 100° ö. Länge mit dem Äquator
C : Schnittpunkt des Meridians zu 30° w. Länge mit dem Äquator
Wo liegen die Ecken des Linkspolardreiecks $\triangle A'B'C'$ zu $\triangle ABC$
(Orientierung $A \rightarrow B \rightarrow C$)? Bezeichnen Sie die Ecken.
- (b) Berechnen Sie die Fläche des Polardreiecks.
 - (c) Wo liegen die Ecken des Linkspolardreiecks $\triangle A''B''C''$ zu $\triangle A'B'C'$
(Orientierung $A' \rightarrow B' \rightarrow C'$)? Bezeichnen Sie die Ecken.
6. (a) In einem Kugeldreieck beträgt $a = 80^\circ$ und $b = 120^\circ$.
Welche Werte kann c annehmen?
Welche Werte kann die Fläche des Polardreiecks annehmen?
- (b) In einem Kugeldreieck beträgt $a = 100^\circ$ und $c = 110^\circ$.
Welche Werte kann b annehmen?
Welche Werte kann die Fläche des Polardreiecks annehmen?

12.4 Kugeldreieck

- (c) In einem Kugeldreieck beträgt $\alpha = 160^\circ$ und $\beta = 130^\circ$.
Welche Werte kann γ annehmen?
Welche Werte kann die Fläche des Kugeldreiecks annehmen?
- (d) In einem Kugeldreieck beträgt $\alpha = 170^\circ$ und $\gamma = 150^\circ$.
Welche Werte kann β annehmen?
Welche Werte kann die Fläche des Kugeldreiecks annehmen?
7. Berechnen Sie für folgende Kugeldreiecke die fehlenden Seiten und Winkel:
- (a) $\alpha = 90^\circ, b = 60^\circ, c = 100^\circ$
 - (b) $\alpha = 90^\circ, b = 140^\circ, c = 100^\circ$
 - (c) $\alpha = 40^\circ, \beta = 90^\circ, c = 70^\circ$
 - (d) $\alpha = 40^\circ, \beta = 90^\circ, c = 110^\circ$
8. Berechnen Sie für folgende Dreiecke auf der Einheitskugel den Umfang des Polardreiecks:
- (a) $\alpha = 70^\circ, \beta = 120^\circ, \gamma = 100^\circ$
 - (b) $\alpha = 120^\circ, \beta = 80^\circ, A = \frac{2}{3}\pi$
 - (c) $\alpha = 110^\circ, \gamma = 150^\circ, A = \frac{8}{9}\pi$
9. Berechnen Sie die Flächen folgender Sehnenvierecke $P_1P_2P_3P_4$ auf der Einheitskugel:
- (a) $\alpha_1 = 100^\circ, \alpha_3 = 130^\circ$
 - (b) $\alpha_2 = 80^\circ, \alpha_4 = 170^\circ$
10. Was kann über die Winkel in folgenden Sehnenvierecken $P_1P_2P_3P_4$ auf der Einheitskugel ausgesagt werden:
- (a) $\alpha_1 = 80^\circ$, Fläche $A = \frac{5}{9}\pi$
 - (b) $\alpha_2 = 130^\circ$, Fläche $A = \frac{4}{9}\pi$
 - (c) $P_1P_2 = 30^\circ, P_2P_3 = 90^\circ$, Radius des Umkreises $r = 50^\circ$, Fläche $\frac{2}{3}\pi$
 - (d) $P_2P_3 = 60^\circ, P_3P_4 = 30^\circ$, Radius des Umkreises $r = 60^\circ$, Fläche $\frac{4}{9}\pi$
11. Berechnen Sie die Flächen folgender Sehnenvierecke $P_1P_2P_3P_4$:
- (a) $\alpha_1 = 120^\circ, P_2P_3 = P_3P_4 = 40^\circ$, Radius des Umkreises $r = 50^\circ$
 - (b) $\alpha_2 = 50^\circ, P_3P_4 = P_4P_1 = 30^\circ$, Radius des Umkreises $r = 70^\circ$

12.4 Kugeldreieck

12. Gegeben ist ein Kugeldreieck $\triangle P_1P_2P_3$ mit $a_2 = 100^\circ$, $a_1 = 60^\circ$ und $a_3 = 120^\circ$. Berechnen Sie α_1 , a_3 , α_3 , die Länge der Seitenhalbierenden s_1 und der Höhe h_2 .

13. Berechnen Sie die fehlenden Stücke des Kugeldreiecks!

	a	b	c	α	β	γ
a)	$62,83^\circ$	$61,43^\circ$	$96,60^\circ$			
b)	$74,53^\circ$	$80,62^\circ$	$98,87^\circ$			
c)				$43,03^\circ$	$21,17^\circ$	$135,32^\circ$
d)				$81,98^\circ$	$53,12^\circ$	$85,52^\circ$
e)		$51,89^\circ$	$109,88^\circ$	$146,13^\circ$		
f)	$30,23^\circ$	$67,91^\circ$				$58,69^\circ$
g)			$87,57^\circ$	$115,81^\circ$	$82,17^\circ$	
h)		$132,02^\circ$		$86,98^\circ$		$92,54^\circ$

14. Aus der sphärischen Geometrie erhält man als Grenzfall für $R \rightarrow \infty$ (R : Kugelradius) und gleichbleibende Längen die ebene Geometrie.

- (a) Was wird aus $\sin a$, $\tan a$ und $\cos a$ (a : Mittelpunktswinkel eines Großkreisbogens im Bogenmaß) beim Übergang zur ebenen Geometrie.
- (b) Was erhält man aus den Formeln $\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$, $\cos \alpha = \frac{\tan b}{\tan c}$ und $\tan \alpha = \frac{\tan a}{\sin b}$ für rechtwinklige Dreiecke mit $\gamma = 90^\circ$ beim Übergang zur Ebene?
- (c) Was erhält man aus der Formel $\cos a \cdot \cos b = \cos c$ für rechtwinklige Dreiecke mit $\gamma = 90^\circ$ beim Übergang zur Ebene?
- (d) Was erhält man aus der Formel $\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ für Dreiecke beim Übergang zur Ebene?
- (e) Was erhält man aus der Formel $\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma$ für Dreiecke beim Übergang zur Ebene?

15. Beweisen Sie den folgenden Satz:

Ist in einem Kugeldreieck $\triangle ABC$ der Winkel $\gamma = 90^\circ$, so liegt die Länge der Hypotenuse c zwischen a und $\pi - a$ bzw. zwischen b und $\pi - b$.

16. Leiten Sie durch Übergang zum Polardreieck aus der Neperschen Regel eine neue Regel her.

12.5 Probleme aus der Geographie und Himmelsbeobachtung

17. In ebenen rechtwinkligen Dreiecken mit $\gamma = 90^\circ$ gilt der Kathetensatz:

$$a^2 = cq \quad \text{und} \quad b^2 = cp$$

Suchen Sie nach einem analogen Satz für sphärische rechtwinklige Dreiecke.

18. Zeigen Sie, dass in einem rechtwinkligen Kugeldreieck die Winkelsumme zwischen π und 2π liegt.

19. (a) In einem Kugeldreieck $\triangle ABC$ wird ein beliebiger Punkt T auf der Seite c ergänzt. Zeigen Sie, dass mit $\widehat{CT} = t$, $\widehat{AT} = p$ und $\widehat{TB} = q$ gilt:

$$\sin c \cdot \cos t = \sin p \cdot \cos a + \sin q \cdot \cos b$$

- (b) Berechnen Sie mit diesem Zusammenhang allgemein die Länge einer Seitenhalbierenden im Kugeldreieck.
- (c) Welchen Zusammenhang erhält man durch analoge Rechnung in der ebenen Geometrie?
- (d) Zeigen Sie, dass man den Zusammenhang aus Teilaufgabe (c) auch aus dem Zusammenhang aus Teilaufgabe (a) durch Übergang zur ebenen Geometrie erhält.
20. (a) Wie sieht das Polardreieck zu einem gleichschenkligen Kugeldreieck mit $\alpha = \beta$ und $\gamma = 90^\circ$ aus?
- (b) Wie sieht das Polardreieck zu einem gleichschenkligen Kugeldreieck mit $\alpha = \beta = 90^\circ$ aus?
- (c) Wie sieht das Polardreieck zu einem rechtwinkligen Kugeldreieck mit $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ aus?

12.5. Probleme aus der Geographie und Himmelsbeobachtung

1. Berechnen Sie den sphärischen Abstand folgender Orte:
- (a) München ($\lambda = 11,5^\circ$ ost, $\phi = 48,1^\circ$) und
New York ($\lambda = 74,0^\circ$ west, $\phi = 40,4^\circ$)
- (b) München ($\lambda = 11,5^\circ$ ost, $\phi = 48,1^\circ$) und
Sidney ($\lambda = 151,1^\circ$ ost, $\phi = -33,5^\circ$)

12.5 Probleme aus der Geographie und Himmelsbeobachtung

- (c) München ($\lambda = 11,5^\circ$ ost, $\phi = 48,1^\circ$) und
Buenos Aires ($\lambda = 58,3^\circ$ west, $\phi = -34,4^\circ$)
- (d) München ($\lambda = 11,5^\circ$ ost, $\phi = 48,1^\circ$) und
Kapstadt ($\lambda = 18,2^\circ$ ost, $\phi = -33,6^\circ$)
2. (a) Sie stehen am Nordpol und gehen 100 km nach Süden, 100 km nach Osten und
100 km nach Norden. Wo stehen Sie am Ende?
- (b) Sie gehen 100 km nach Süden, 100 km nach Osten, 100 km nach Norden und
100 km nach Westen und stehen wieder am Ausgangspunkt. Wo ist der Aus-
gangspunkt?
- (c) Von München ($\lambda = 11,5^\circ$ ost, $\phi = 48,1^\circ$) aus gehen Sie 100 km nach Süden, 100
km nach Osten, 100 km nach Norden und 100 km nach Westen. Wo stehen Sie
am nun?
3. Sydney ($\lambda = 151,1^\circ$, $\phi = -33,5^\circ$) und Kapstadt ($\lambda = 18,2^\circ$, $\phi = -33,5^\circ$) liegen auf
dem gleichen Breitenkreis.
Wie lang ist die geradlinige Verbindung der beiden Städte?
Wie lang ist die kürzeste Verbindung der beiden Städte auf der Erdoberfläche?
4. Berechnen Sie die kürzeste Entfernung folgender Orte:
- (a) München ($\lambda = 11,5^\circ$ ost, $\phi = 48,1^\circ$) und Rostock ($\lambda = 12,1^\circ$ ost, $\phi = 54,1^\circ$)
- (b) München ($\lambda = 11,5^\circ$ ost, $\phi = 48,1^\circ$) und Leningrad ($\lambda = 30,2^\circ$ ost, $\phi = 59,6^\circ$)
- (c) München ($\lambda = 11,5^\circ$ ost, $\phi = 48,1^\circ$) und Kairo ($\lambda = 31,2^\circ$ ost, $\phi = 30,0^\circ$)
- (d) München ($\lambda = 11,5^\circ$ ost, $\phi = 48,1^\circ$) und Montreal ($\lambda = 73,3^\circ$ west, $\phi = 45,3^\circ$)
- (e) München ($\lambda = 11,5^\circ$ ost, $\phi = 48,1^\circ$) und Rio de Janeiro ($\lambda = 43,2^\circ$ west,
 $\phi = -22,5^\circ$)
5. Berechnen Sie den Winkelabstand folgender Sterne:
- (a) Sirrah ($\alpha = 0,14^\circ$, $\delta = 29,1^\circ$, Sternbild Andromeda) und Algenib ($\alpha = 3,4^\circ$,
 $\delta = 49,9^\circ$, Sternbild Perseus)
- (b) Schedir ($\alpha = 0,68^\circ$, $\delta = 56,3^\circ$, Sternbild Cassiopeia) und Regulus ($\alpha = 10,1^\circ$,
 $\delta = 12,0^\circ$, Sternbild Löwe)
- (c) Zuben Elgenubi ($\alpha = 14,8^\circ$, $\delta = -16,0^\circ$, Sternbild Waage) und Aldebaran
($\alpha = 4,6^\circ$, $\delta = 16,5^\circ$, Sternbild Stier)
- (d) Castor ($\alpha = 7,6^\circ$, $\delta = 31,9^\circ$, Sternbild Zwillinge) und Antares ($\alpha = 16,5^\circ$,
 $\delta = -26,5^\circ$, Sternbild Skorpion)

12.5 Probleme aus der Geographie und Himmelsbeobachtung

6. Die Längengrade durch die angegebenen Städte teilen die Erdoberfläche in vier Kugelzweiecke. Berechnen Sie die Flächen der Kugelzweiecke.
- (a) München ($\lambda = 11,5^\circ$ ost, $\phi = 48,1^\circ$) und
New York ($\lambda = 74,0^\circ$ west, $\phi = 40,4^\circ$)
 - (b) Sidney ($\lambda = 151,1^\circ$ ost, $\phi = -33,5^\circ$) und
Kapstadt ($\lambda = 18,2^\circ$ ost, $\phi = -33,6^\circ$)
 - (c) Buenos Aires ($\lambda = 58,3^\circ$ west, $\phi = -34,4^\circ$) und
Madrid ($\lambda = 3,4^\circ$ west, $\phi = 40,2^\circ$)

13. Sphärische Trigonometrie (Anwendungen auf die Erd- und Himmelskugel)

13.1. Peilungsaufgaben

13.2. Kartenentwürfe

13.3. Astronomie

1. Berechnen Sie für München ($\lambda = 11,5^\circ$ ost, $\varphi = 48,1^\circ$), New York ($\lambda = 74,0^\circ$ west, $\varphi = 40,4^\circ$) und Moskau ($\lambda = 37,4^\circ$ ost, $\varphi = 55,5^\circ$) die Zenitdistanz des Himmelsnordpols.

2. Berechnen Sie für die Sterne Sirrah ($\alpha = 0,14^h$, $\delta = 29,1^\circ$) und Aldebaran ($\alpha = 4,6^h$, $\delta = 16,5^\circ$) die obere und untere Kulminationshöhe

(a) in München ($\lambda = 11,5^\circ$ ost, $\varphi = 48,1^\circ$).

(b) in Sydney ($\lambda = 151,5^\circ$ ost, $\varphi = -33,5^\circ$).

(c) in Helsinki ($\lambda = 24,6^\circ$ ost, $\varphi = 60,1^\circ$).

Sirrah ist der hellste Stern im Sternbild Andromeda und Aldebaran der hellste Stern im Sternbild Stier.

3. In welchen Breiten sind die Sterne Sirrah ($\alpha = 0,14^h$, $\delta = 29,1^\circ$), Aldebaran ($\alpha = 4,6^h$, $\delta = 16,5^\circ$) und Riegel ($\alpha = 5,2^h$, $\delta = -8,2^\circ$) zirkumpolar?

Sirrah ist der hellste Stern im Sternbild Andromeda, Aldebaran der hellste Stern im Sternbild Stier und Riegel ist der zweithellste Stern im Sternbild Orion.

4. Das Dreieck mit den Ecken Nordpol P, Zenit Z und Sternort S heißt nautisches Dreieck.

(a) Fertigen Sie eine Skizze an und geben Sie soweit möglich allgemein die Seiten und Winkel des nautischen Dreiecks an.

13.4 Koordinatensystem

- (b) Leiten Sie allgemein eine Formel zur Berechnung der Zenitdistanz z und des Azimuts a eines Sterns aus den Äquatorkoordinaten (t, δ) und der geographischen Breite φ des Beobachtungsortes her.
 - (c) Berechnen Sie für den Stern Sirrah mit $(t = 30,0^\circ, \delta = 29,1^\circ)$ die Zenitdistanz und den Azimut für München ($\lambda = 11,5^\circ$ ost, $\varphi = 48,1^\circ$).
 - (d) Leiten Sie allgemein eine Formel zur Berechnung der Deklination δ und des Stundenwinkels t eines Sterns aus der Zenitdistanz z , der geographischen Breite φ des Beobachtungsortes und dem Azimut a her.
 - (e) Berechnen Sie für einen Stern mit $z = 20,0^\circ$ und $a = 30,0^\circ$ die Deklination und den Stundenwinkel für München ($\lambda = 11,5^\circ$ ost, $\varphi = 48,1^\circ$).
5. (a) Skizzieren Sie die Himmelskugel mit Horizont, Zenit, Himmelsäquator und Himmelspolen für München ($\lambda = 11,5^\circ$ ost, $\varphi = 48,1^\circ$), den Äquator und den Nordpol.
Wählen Sie dazu die Blickrichtung senkrecht zum Himmelsäquator.
- (b) Tragen Sie in die Skizzen jeweils die scheinbaren täglichen Bahnen je eines Sterns der nördlichen und südlichen Hemisphäre ein.
 - (c) Leiten Sie eine Bedingung für Zirkumpolarsterne an einem Ort mit geographischer Länge λ und geographischer Breite φ her.

13.4. Koordinatensystem

13.5. Grundbegriffe der Zeitrechnung

Teil III.

Analysis

14. Definition der Grenzwerte - Epsilontik

1. Erstellen Sie für die folgende Funktion eine Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen:

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

Für welche x ist $|f(x)| < \varepsilon = 10^{-5}$? Rechnen Sie zuerst allgemein!

2. (a) Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{4 \cdot x^2 + 5}}{x}; \quad x \in]0; +\infty[$$

Berechnen Sie mit dem Taschenrechner $f(x)$ für selbstgewählte x -Werte und äußern Sie eine sinnvolle Vermutung über $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

- (b) Für die Funktion

$$f : x \mapsto 5 + 0,7^x; \quad x \in \mathbb{R}$$

gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$.

Bestimmen Sie den Wert für x , ab dem die Abweichung der Funktionswerte $f(x)$ vom Grenzwert 5 weniger als $\varepsilon = 0,1$ beträgt. (Ergebnis runden.)

3. Für welche x ist $|f(x) - \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)| < \varepsilon$?

$$(a) f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \quad ; \quad \varepsilon = 10^{-3} \qquad (b) f(x) = \frac{2^x - 2}{2^{x+1}} \quad ; \quad \varepsilon = 10^{-4}$$

4. Berechnen Sie ein möglichst kleines x_0 mit $f(x) > b$ für alle $x > x_0$!

$$(a) f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x + 4} \quad ; \quad b = 10^5 \qquad (b) f(x) = \frac{5^{\frac{x}{2}}}{2^x} \quad ; \quad b = 10^6$$

5. Erforschen Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$ durch Einsatz des Taschenrechners! Für welche x_0 ist $f(x) > 10^{10}$?

$$(a) f(x) = \frac{2^x}{x} \qquad (b) f(x) = \frac{2^x}{x^2} \qquad (c) f(x) = \frac{10^x}{x^{10}}$$

14. Definition der Grenzwerte - Epsilontik

6. Erforschen Sie das Verhalten von

$$f(x) = \frac{2^x}{x^{1000}} \quad \text{für } x \rightarrow \infty$$

durch Einsatz des Taschenrechners! Für welche x ist $f(x) > 10^{100}$? Wo liegt das Minimum von $f(x)$?

Wegen der beschränkten Kapazität des Taschenrechners ist es zweckmäßig, die Funktion $g(x) = \lg(f(x))$ zu betrachten.

7. Berechnen Sie $\varepsilon_1 > 0$ so, dass $\frac{x}{x-2} > b > 0$ ist für $2 < x < 2 + \varepsilon_1$.

Berechnen Sie $\varepsilon_2 > 0$ so, dass $\frac{x}{x-2} < -c < 0$ ist für $2 - \varepsilon_2 < x < 2$.

Zeichnung für $b = 5$ und $c = 3$. Was bedeuten die Ergebnisse für den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{x}{x-2}$?

8. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$. Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Berechnen Sie δ so, dass $|f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)| < \varepsilon$ für $0 < x < \delta$. Wie groß ist δ speziell für $\varepsilon = 0,001$? Zeichnen Sie den Graphen von f mit der Einheit 2 cm auf beiden Achsen.

9. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{3 \cdot 2^x - 4}{4 - 2^x}$.

(a) Schreiben Sie die Definition für $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ hin.

(b) Berechnen Sie $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Untersuchen Sie auch, von welcher Seite sich f an den Grenzwert annähert.

(c) Für welche $x > 2$ ist $|f(x) - a| < \varepsilon$?

Rechnen Sie zuerst allgemein und geben Sie dann das Ergebnis für $\varepsilon = 10^{-20}$ an.

10. (a) Schreiben Sie die Definition für $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ hin.

(b) Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1}$. Berechnen Sie $a = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Für welches b gilt ($\varepsilon > 0$)

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } x > b$$

14. Definition der Grenzwerte - Epsilontik

Berechnen Sie b konkret für $\varepsilon = 10^{-6}$.

Teil IV.
Komplexe Zahlen

15. Komplexe Zahlen

15.1. Zahlbereichserweiterungen und Strukturen

1. Untersuchen sie, ob die komplexen Zahlen ohne Null ($\mathbb{C} \setminus \{(0|0)\}$) mit der Verknüpfung

$$z_1 \circ z_2 = (a_1|b_1) \circ (a_2|b_2) = (a_1 \cdot a_2 | b_1 \cdot b_2)$$

eine Gruppe bilden.

2. Untersuchen sie, ob die komplexen Zahlen (ohne 0) mit der Verknüpfung

$$z_1 \circ z_2 = (a_1|b_1) \circ (a_2|b_2) = (a_1b_2 + a_2b_1 | a_1a_2 + b_1b_2)$$

eine Gruppe bilden.

15.2. Konstruktion der komplexen Zahlen

15.3. Veranschaulichung komplexer Zahlen

1. Zeichnen sie für die Zahlen $z = 1 + 2i$ und $z = 2 - 4i$ die Zahl z selbst, die Konjugierte z^* und z^2 in die Gaußsche Zahlenebene ein.

15.4. Grundrechenarten

1. Vereinfachen Sie: (a) $\frac{1-i}{-i}$, (b) $\frac{i}{1-i}$, (c) $(-i)^{1003}$, (d) $\frac{3-4i}{12-5i}$

2. Vereinfachen Sie: (a) $\frac{1+i}{i}$, (b) $\frac{i}{1+i}$, (c) i^{73} , (d) $\frac{5+12i}{-3+4i}$

3. Berechnen sie für folgende Zahlen z^2 , z^3 , z^4 , $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^2}$, $z + z^2$, $z - z^3$.

(a) $z = i$

15.4 Grundrechenarten

- (b) $z = 1 + i$
- (c) $z = 2 + 3i$
- (d) $z = 3 - 2i$

4. Berechnen sie den Betrag der Zahlen $1 + 2i$, $2 - 3i$, $7 + 8i$ und $9 - i$.

5. Fassen Sie so weit wie möglich zusammen!

- (a) $4i \cdot 5i$
- (b) $i^7 + i^6$
- (c) $(5 + 4i) + (3 - 7i)$
- (d) $(5 + 4i) - (3 - 7i)$
- (e) $(3 - 7i) - (5 + 4i)$

6. Berechnen Sie für $z_1 = -2 + 3i$ und $z_2 = 4 - 5i$ die Werte für $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_2 - z_1$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ und $\frac{z_2}{z_1}$

7. In einer Reihe erhält man jeweils die auf z_n folgende Zahl z_{n+1} durch die Zuordnung:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad (z, c \in \mathbb{C})$$

- (a) Berechnen Sie für $z_1 = 0$ und $c = -i$ die Werte von z_i für $i = 2, 3, 4, 5, 6$.
- (b) Berechnen Sie für $z_1 = 0$ und $c = 1$ die Werte von z_i für $i = 2, 3, 4, 5, 6$.
- (c) Berechnen Sie für $z_1 = 0$ und $c = -0,5 + 0,2i$ die Werte von z_i für $i = 2, 3, 4, 5, 6$.
- (d) Berechnen Sie für $z_1 = 0$ und $c = -0,1 + i$ die Werte von z_i für $i = 2, 3, 4, 5, 6$.

8. Berechnen Sie $\frac{2z^4 + 85\bar{z}^2}{2z - 4\bar{z}}$ für $z = 5 - 2i$.

9. Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + bi$ mit $b \neq 0$ und $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}$. Drücken Sie den Realteil und den Imaginärteil des Quotienten $q = \frac{z_1}{z_2}$ durch a und b aus.

15.5 Quadratische Gleichungen

10. Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = a + ai$ und $z_2 = a - bi$. Berechnen Sie $z = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ in der Form $z = x + yi$.

11. (a) $\frac{1}{i}$ (b) $i^2 - \frac{1}{i^3}$ (c) $\left(i + \frac{1}{i}\right)^2$ (d) $(i^9 - i^{14})^2$
 (e) $(-i)^2 + \frac{1}{i^2}$ (f) $(-2i)^3 + \frac{2}{i^3}$ (g) $(-i)^{-3} + 3i^3$ (h) $i^{-7} + (-i)^5$

12. (a) $\frac{3+2i}{4-i}$ (b) $\frac{-2-3i}{-2+3i}$ (c) $\frac{1}{3+4i}$ (d) $\frac{3+i}{1+3i}$ (e) $\frac{1+i}{1-i}$

13. Beweisen Sie:

(a) $|\bar{z}| = |z|$ (b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ (c) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ (d) $|z^n| = |z|^n$

14. Beweisen Sie:

(a) $\overline{\bar{z}} = z$ (b) $\overline{(-z)} = -\bar{z}$ (c) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ (d) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
 (e) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ (f) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ (g) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ (h) $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

15. Berechnen Sie für $z = a + bi$:

(a) $z + \bar{z}$ (b) $z - \bar{z}$ (c) $z \cdot \bar{z}$ (d) $\frac{z \cdot \bar{z}}{z + \bar{z}}$
 (e) $(\bar{z})^2 + z^2$ (f) $(\bar{z})^2 - z^2$ (g) $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$ (h) $\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}$

16. Welche der folgenden Zahlen sind gleich: z^2 , $|z|^2$, $|z^2|$, $|\bar{z}|^2$, $|z \cdot \bar{z}|$ und $z \cdot \bar{z}$?

17. Berechnen Sie $\frac{5z^5 + 30\bar{z}^2}{4z - 8\bar{z}}$ für $z = -2 + 2i$.

15.5. Quadratische Gleichungen

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen. Bestimmen Sie jeweils die Koordinaten des Scheitels der zugehörigen Parabel.

(a) $x^2 - 4x + 7 = 0$

15.6 Polarform komplexer Zahlen

- (b) $-x^2 + 6x - 10 = 0$
- (c) $2x^2 + 4x + 3 = 0$
- (d) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} = 0$
- (e) $-2x^2 - 12x - 23 = 0$

2. Lösen Sie die folgende Gleichung ($D = \mathbb{C}$):

$$z^2 + (2 + 4i)z - 3 - 4i = 0$$

3. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$i \cdot z^2 + (3 - 2i)z - 6 = 0$$

4. Berechnen Sie die Lösungsmenge in der Menge der komplexen Zahlen:

$$x^2 + (1 + i)x + i = 0$$

15.6. Polarform komplexer Zahlen

1. Gegeben sind die Zahlen $z_1 = 6 \operatorname{E}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ und $z_2 = 1 - \sqrt{3} \cdot i$. Berechnen Sie

$$z = \frac{z_1^2 - z_2^2}{(z_1 + z_2)^2}.$$

Versuchen Sie exakt (mit Wurzeln und Brüchen) zu rechnen und geben Sie das Ergebnis in der Polar- und der Normalform an.

2. Wir rechnen mit den Zahlen $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ und $z_2 = 3 \operatorname{E}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

- (a) Beweisen Sie: $z_1 = 2 \operatorname{E}(60^\circ)$. Zeichnen Sie z_1 und z_2 in die gaußsche Ebene ein (Einheit 2 cm). Der Gebrauch des Zirkels ist nicht verboten! Ermitteln Sie zeichnerisch in nachvollziehbarer Weise (geeignete Hilfslinien!) $z_2 + z_1$ und $z_2 - z_1$.
- (b) Berechnen Sie $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$ in der Polarform und schreiben Sie die Ergebnisse auch in der Normalform hin.
- (c) Berechnen Sie $(z_1)^8$. Geben Sie das Ergebnis in der Polar- und in der Normalform an.
- (d) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $(z_2)^n \in \mathbb{R}$?

15.6.1. Ungleichungen

Ungleichungen vom Typ $(x+a)(x+b)$ kleiner 0

(a) Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung:

$$\frac{-2(2x+1)}{(1-x)(x+3)} \leq 0$$

(b) Berechne die Lösungsmenge:

$$(a) \quad (x+5)(x-4) < 0 \quad (b) \quad \frac{x-2}{x+1} \leq 0$$

(c) Berechne die Lösungsmenge:

$$(a) \quad \frac{8}{3x+12} < 0 \quad (b) \quad \frac{x+3}{3-x} > 0$$

(d) Berechne die Lösungsmenge:

$$(a) \quad \frac{1}{x-1} \geq 0 \quad (b) \quad \frac{x^2}{3-x} \leq 0$$

(e) Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{x(x+2)}{(x-3)(x+1)} < 0$$

(f) Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{(x-2)(1-x)(x+2)}{(x+1)(3-x)} \geq 0$$

Ungleichungstyp $(x+a)(x+b)$ kleiner 0 erst nach Umformung

(a) Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{0,5x-1}{2x-3} \geq -1$$

(b) Berechne die Lösungsmenge:

$$(a) \quad \frac{1}{x} < 1 \quad (b) \quad \frac{1}{x+2} \geq 2$$

15.6 Polarform komplexer Zahlen

(c) Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{3}{2x+5} \leq 4$$

(d) Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{3x-2}{3x-5} > 1$$

(e) Bestimme die Lösungsmenge über der Grundmenge \mathbb{Q} :

$$\frac{1,5}{4-2x} \leq \frac{-1,5 + \frac{1}{2}x}{x-2}$$

(f) Bestimme die Lösungsmenge und stelle sie am Zahlenstrahl dar:

$$\frac{x-2}{3-x} \leq \frac{2}{3x-9}$$

(g) Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x+2}$$

(h) Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{x}{x+6} \geq \frac{x-2}{x}$$

(i) Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{x+1}{x-1} < \frac{x-2}{x-3}$$

(j) Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an!

$$\frac{x-1}{10x-15} > 2 - \frac{9-9x}{6-4x}$$

(k) Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an!

$$\frac{x+1}{6x-4} - 2 > \frac{19x-15}{6-9x}$$

Ungleichungen mit Betrag

- (a) Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung:

$$|2x + 4| \leq x + 20$$

- (b) Bestimme die Lösungsmenge:

$$|2(x - 2) + x| < x$$

- (c) Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung:

$$3x + 4 \leq 2 \cdot |x + 5|$$

- (d) Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{4x + 3}{|3x + 2|} \geq 2$$

- (e) Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{|x| - 2}{2x - 3} > 2$$

- (f) Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{|-3x - 2|}{x + 10} > -4$$

- (g) Bestimme die Lösungsmenge folgender Ungleichungen ($G = \mathbb{Q}$):

i. $-\frac{8x - 16}{7 - 4x} < \frac{4 - x}{-x + \frac{7}{4}}$

ii. $-4x - 1 > |-7 - 5x| + 1$

- (h) Bestimme die Lösungsmenge folgender Ungleichungen:

15.6 Polarform komplexer Zahlen

- i. $-\frac{10x - 25}{9 - 5x} > \frac{5 - x}{-x + \frac{9}{5}}$
ii. $|-5 - 7x| + 1 < -6x - 7$

(i) Gib die Lösungsmenge der Ungleichung an!

$$|6x + 2| - 22 < 10x - 2 \cdot |6x + 2|$$

(j) Gib die Lösungsmenge der Ungleichung an!

$$11 - 2 \cdot |2x + 1| - 2x > |2x + 1|$$

(k) Gib die Lösungsmenge über der Grundmenge \mathbb{Q} an!

$$|2x + 1| - 5(x + 2) \leq 2(x - |2x + 1|)$$

(l) Gib Definitions- und Lösungsmenge über der Grundmenge \mathbb{Q} an!

$$\frac{2}{|x - 3|} > 5$$

(m) Gib die Lösungsmenge über der Grundmenge \mathbb{Q} an!

$$|3x + 1| - 2(3x - |3x + 1|) \leq 5(x + 2)$$

(n) Gib Definitions- und Lösungsmenge über der Grundmenge \mathbb{Q} an!

$$\frac{3}{|x - 2|} > 4$$

15.6 Polarform komplexer Zahlen

(o) Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an!

$$|1 - 4x| \leq 5 \cdot (2x + 3) - |x - 3|$$

(p) Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an!

$$|2 - 3x| - 3 \cdot (5 - 2x) \geq |x - 7|$$

15.6.2. Lineare Gleichungssysteme

Gleichungssysteme mit Formvariablen

(a) Welche Zahlen können für die Formvariablen a und b gewählt werden, damit das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat?

$$(1) \quad ax + (a + b)y = a + 2b \quad (2) \quad (a + 3b)x + (a + 4b)y = a + 5b$$

(b) Gegeben ist das folgende Gleichungssystem, bei dem der Faktor $k \in \mathbb{Q}$ nicht festgelegt ist:

$$(1) \quad 3x + y = -4 \quad (2) \quad 5x + ky = 12$$

Welcher Wert ist für k zu nehmen, damit die Lösung des Gleichungssystems ein Punkt der y -Achse ist? Gib diese Lösung an.

(c) Berechne die Lösungsmenge (Fallunterscheidung!):

$$\begin{aligned} x - \frac{y}{a} &= a \\ x + \frac{y}{b} &= -b \end{aligned}$$

3. Es ist $a = 2 \operatorname{E}(35^\circ)$. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist a^n rein imaginär, d.h. der Realteil von a^n gleich null?

15.6 Polarform komplexer Zahlen

4. Geben Sie folgende komplexe Zahlen in Polarform an.

- (a) $2 + 3i$ (b) $3 + 4i$ (c) $4 - 5i$
 (d) $5 - 6i$ (e) $-6 + 7i$ (f) $-7 + 8i$
 (g) $-8 - 9i$ (h) $-9 - 10i$ (i) $-10 + 11i$

5. Eine komplexe Zahl in Polarkoordinaten wird durch ein tiefgestelltes p gekennzeichnet. Stellen Sie die Ergebnisse in Polar- und in Normalform dar.

- (a) $(3 | 40^\circ)_p \cdot (4 | 130^\circ)_p$ (b) $\left(\frac{2}{7} \left| \frac{\pi}{6} \right.\right)_p \cdot (14 | 60^\circ)_p$ (c) $(\sqrt{3} + i) \cdot \left(2 \left| \frac{2\pi}{3} \right.\right)_p$
 (d) $(3 | 40^\circ)_p^2 \cdot \left(\frac{1}{3} \left| 140^\circ \right.\right)_p^2$ (e) $\left(\frac{2}{7} \left| \frac{7\pi}{6} \right.\right)_p \cdot (14 | 60^\circ)_p^2$ (f) $(\sqrt{3} - i)^2 \cdot (-1 + i)^2$

6. Eine komplexe Zahl in Polarkoordinaten wird durch ein tiefgestelltes p gekennzeichnet. Stellen Sie die Ergebnisse in Polar- und in Normalform dar.

- (a) $(3 | 40^\circ)_p : (4 | 130^\circ)_p$ (b) $\left(\frac{2}{7} \left| \frac{\pi}{6} \right.\right)_p : (14 | 60^\circ)_p$ (c) $(\sqrt{3} + i) : \left(2 \left| \frac{2\pi}{3} \right.\right)_p$

7. Das Produkt zweier beliebiger komplexer Zahlen mit den Polardarstellungen $z_1 = (r_1 | \varphi_1)_p$ und $z_2 = (r_2 | \varphi_2)_p$ ist definiert durch

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2 | \varphi_1 + \varphi_2)_p}$$

- (a) Berechnen Sie das Produkt von $z_1 = (2\sqrt{3} | 2)$ und $z_2 = (-1 | \sqrt{3})$. Stellen Sie das Ergebnis in der Polar- und in der Normalform dar.
 (b) Das neutrale Element der Multiplikation sei $E = (r_e | \varphi_e)_p$. Ermitteln Sie die Koordinaten von E in der Polar- und in der Normaldarstellung.
 Für welche komplexe Zahl I gilt $I^2 = -E$?

8. (a) $((2 | \frac{\pi}{12})_p)^{10}$ (b) $(\sqrt{3} + i)^{20}$ (c) $(-i)^{4n-3}$ mit $n \in \mathbb{N}$

9. Zeichnen Sie die beiden Zahlen $z_1 = 2 + \frac{3}{2}i$ und $z_2 = \frac{3}{2} + 2i$ in die Gauß'sche Zahlenebene ein. Berechnen Sie das Produkt $z_3 = z_1 \cdot z_2$ in nachvollziehbarer Weise einmal in der Normal- und einmal in der Polarform.

15.7 Geometrische Deutung der Multiplikation

10. Verwandeln Sie $z = \sqrt{3} + i$ in die Polarform. Berechnen Sie z^2 , $\frac{1}{z}$ und z^{13} . Alle Ergebnisse in Polar- und Normalform!

11. Gegeben sind die komplexen Zahlen $x = -2 + 2i$ und $y = 5 - 12i$. Berechnen Sie

$$z = \frac{338}{y} - \frac{384}{x^2}$$

Stellen Sie das Ergebnis in der Polar- und Normalform dar.

12. Berechnen Sie Formeln für $\sin 3\alpha$ und $\cos 3\alpha$. Hinweis: $(1 | \alpha)_p^3$.

13. Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $z^{100} = i$, deren Realteil zwischen 0,60 und 0,65 liegt. Lösungen in Polar- und in Normalform.

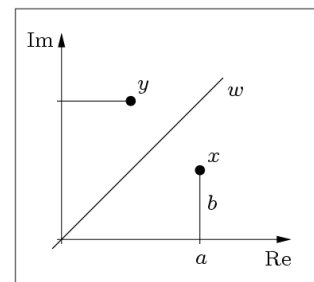
15.7. Geometrische Deutung der Multiplikation

1. In der komplexen Zahlenebene ist ein Dreieck mit den Ecken $z_1 = -1 - i$, $z_2 = -5 - i$ und $z_3 = -3 - 2i$ gegeben. Berechne und zeichne das Dreieck mit den Ecken z'_1 , z'_2 und z'_3 , wenn sich z'_i ($i = 1, 2, 3$) nach

- (a) $z'_i = \sqrt{2}(1 + i) \cdot z_i$ berechnet. Was fällt auf?
- (b) $z'_i = -i \cdot z_i$ berechnet. Was fällt auf?
- (c) $z'_i = (-1 + i) \cdot z_i$ berechnet. Was fällt auf?

2. w sei die Winkelhalbierende der reellen und imaginären Achse in der Gauß'schen Ebene (siehe Abb.), y ist der Spiegelpunkt von $x = a + bi$ an w .

Wo in der Gauß'schen Ebene liegt das Produkt $z = x \cdot y$?



3. Das Dreieck ABC mit $A(2/3)$, $B(4/4)$ und $C(5/7)$ wird um A soweit gedreht, dass B' auf AC liegt. Berechnen Sie die Koordinaten des gedrehten Dreiecks A'B'C'.

4. (a) Welche Vektoren stehen senkrecht auf $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$?
- (b) Welche Vektoren der Länge 1 stehen senkrecht auf $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2,5 \end{pmatrix}$?
5. Die Schatzkarte des Piraten Enterfix ist mit einem Koordinatensystem überzogen und enthält folgenden Text: „Start in A (300 m | 0); 500 m nach NNO; Dreitelkreis mit $r = 200$ m nach links; in gerader Richtung 200 m.“ Berechnen Sie die Koordinaten des Schatzes und zeichnen Sie die Schatzkarte.
6. Berechnen Sie den kleineren der beiden Winkel zwischen $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
7. Welche Drehstreckung, ausgedrückt durch eine komplexe Zahl $s = x + i \cdot y$, führt den Punkt A (3|4) in B (-2| - 1,5) über? Zeichnung! Rechnen Sie in der Polarform!

15.8. Einheitswurzeln

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen ($D = \mathbb{C}$). Geben Sie die Lösungen in Polar- und in Summenschreibweise an.
- (a) $z^3 = 8$
- (b) $z^3 = -\frac{1}{27}$
- (c) $z^4 = -4$
- (d) $z^6 = 729$
2. Berechnen sie die Lösungen folgender Gleichung ($D = \mathbb{C}$). Geben sie die Lösungen in Polarkoordinaten an!

$$z^4 = -4 + 2i$$

3. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$z^4 = w \quad \text{mit} \quad w = -8 + 8\sqrt{3}i$$

Stellen Sie die Ergebnisse in der Polarform $r \cdot E(\varphi)$, in der Normalform $a + bi$ und graphisch in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

15.9 Fundamentalsatz der Algebra

Berechnen Sie das Produkt aller Elemente der Lösungsmenge und vergleichen Sie es mit w .

4. Die folgenden Aufgaben sind unter Zuhilfenahme der Polardarstellung zu lösen, die Ergebnisse sind aber wieder in der kartesischen Form anzugeben. Stellen Sie den Sachverhalt auch in der Gauß'schen Ebene dar.

(a) $z \cdot (-1 - i) = -i$, $z = ?$

(b) Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $z^3 = 4\sqrt{2} \cdot (-1 + i)$.

15.9. Fundamentalsatz der Algebra

1. Ermitteln Sie ein Polynom möglichst kleinen Grades, das die Wertepaare $(0|1)$, $(1|1)$ und $(-i|-i)$ enthält.
2. Von einem Polynom P ist bekannt: $\text{Grad}(P) = 5$; $a_1 = -i$; $a_2 = a_3 = 0$
 $(2i|0) \in P$
Für $z = 0$ nimmt P den Wert -2 an.
 $P(-3) = 160 - 240i$

Stellen Sie die Gleichung von P auf und zerlegen Sie P vollständig in Linearfaktoren.

15.10. Anwendungen in der Physik

1. In der Elektrotechnik werden Widerstände von Spulen und Kondensatoren durch komplexe Zahlen ausgedrückt, um der Phasenverschiebung von Strom und Spannung in diesen Bauteilen Rechnung zu tragen.

Der Widerstand eines Kondensators mit der Kapazität C berechnet sich nach der Formel

$$R_C = \frac{1}{i\omega C} .$$

Der Widerstand einer Spule mit der Induktivität L berechnet sich nach der Formel

$$R_L = i\omega L .$$

$\omega = 2\pi f$, wobei f die Frequenz der angelegten Spannung ist.

Werden ohmsche Widerstände, Spulen und Kondensatoren in Serie geschaltet, lässt sich der Ersatzwiderstand durch Addition der Einzelwiderstände berechnen. Der Betrag des Ersatzwiderstandes gibt das Verhältnis von Spannung und Stromstärke im

15.10 Anwendungen in der Physik

Kreis an ($|R_{\text{ges}}| = \frac{U}{I}$).

Bei den folgenden Aufgaben kann ohne Einheiten gerechnet werden.

Berechnen sie den Ersatzwiderstand einer Serienschaltung aus

- (a) einem ohmschen Widerstand mit $5\ \Omega$ und einer Spule mit der Induktivität $L = 0,01\ \text{H}$ bei einer Frequenz von $50\ \text{Hz}$.
- (b) einem ohmschen Widerstand mit $5\ \Omega$ und einem Kondensator mit der Kapazität $C = 0,001\ \text{F}$ bei einer Frequenz von $50\ \text{Hz}$.
- (c) einem ohmschen Widerstand mit $5\ \Omega$, einem Kondensator mit der Kapazität $C = 0,001\ \text{F}$ und einer Spule mit der Induktivität $L = 0,01\ \text{H}$ bei einer Frequenz von $50\ \text{Hz}$.

2. Berechnen sie für folgende Schaltungen allgemein den Ersatzwiderstand und diskutieren sie die Abhängigkeit des Ersatzwiderstands von der Kreisfrequenz ω .

- (a) Serienschaltung eines ohmschen Widerstands und einer Spule.
- (b) Serienschaltung eines ohmschen Widerstands und eines Kondensators.
- (c) Serienschaltung eines ohmschen Widerstands, einer Spule und eines Kondensators.

3. Werden ohmsche Widerstände, Spulen und Kondensatoren parallel geschaltet, lässt sich der Kehrwert des Ersatzwiderstandes durch Addition der Kehrwerte der Einzelwiderstände berechnen. Der Betrag des Ersatzwiderstandes gibt das Verhältnis von Spannung und Stromstärke im Kreis an ($|R_{\text{ges}}| = \frac{U}{I}$).

Bei den folgenden Aufgaben kann ohne Einheiten gerechnet werden.

Berechnen sie den Ersatzwiderstand einer Parallelschaltung aus

- (a) einem ohmschen Widerstand mit $5\ \Omega$ und einer Spule mit der Induktivität $L = 0,01\ \text{H}$ bei einer Frequenz von $50\ \text{Hz}$.
- (b) einem ohmschen Widerstand mit $5\ \Omega$ und einem Kondensator mit der Kapazität $C = 0,001\ \text{F}$ bei einer Frequenz von $50\ \text{Hz}$.
- (c) einem Kondensator mit der Kapazität $C = 0,001\ \text{F}$ und einer Spule mit der Induktivität $L = 0,01\ \text{H}$ bei einer Frequenz von $50\ \text{Hz}$.

4. Berechnen sie für folgende Schaltungen allgemein den Ersatzwiderstand und diskutieren sie die Abhängigkeit des Ersatzwiderstands von der Kreisfrequenz ω .

- (a) Parallelschaltung eines ohmschen Widerstands und einer Spule.
- (b) Parallelschaltung eines ohmschen Widerstands und eines Kondensators.

15.10 Anwendungen in der Physik

(c) Parallelschaltung einer Spule und eines Kondensators.