SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit $\TeX$

Weiterführende Aufgaben (Gymnasium)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

11. Juni 2010

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Algebra

1. Ungleichungen

1.1. Ungleichungen vom Typ (x+a)(x+b) kleiner 0

1. Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung:

$$\frac{-2(2x+1)}{(1-x)(x+3)} \leqq 0$$

Lösung: $]-\infty;-3[\cup[-\frac{1}{2};1[$

2. Berechne die Lösungsmenge:

$$\text{(a)}\quad (x+5)\,(x-4)\;<\;0 \qquad \text{(b)}\quad \frac{x-2}{x+1} \leqq 0$$

Lösung: (a) $L =]-5\,;\,4[$ (b) $L =]-1\,;\,2]$

3. Berechne die Lösungsmenge:

$$\text{(a)}\quad \frac{8}{3\,x+12} < 0 \qquad \text{(b)}\quad \frac{x+3}{3-x} > 0$$

Lösung: (a) $L =]-\infty\,;\,-4[$ (b) $L =]-3\,;\,3[$

4. Berechne die Lösungsmenge:

$$\text{(a)}\quad \frac{1}{x-1} \geqq 0 \qquad \text{(b)}\quad \frac{x^2}{3-x} \leqq 0$$

Lösung: (a) $L =]1\,;\,+\infty[$ (b) $L = \{0\} \cup]3\,;\,+\infty[$

5. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{x\,(x+2)}{(x-3)\,(x+1)} < 0$$

Lösung: $L =]-2\,;\,-1[\cup]0\,;\,3[$

6. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{(x-2)\,(1-x)\,(x+2)}{(x+1)\,(3-x)} \geqq 0$$

Lösung: $L = [-2\,;\,-1[\cup[1\,;\,2]\cup]3\,;\,+\infty[$

1.2. Ungleichungstyp (x+a)(x+b) kleiner 0 erst nach Umformung

1. Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{0,5x-1}{2x-3} \geqq -1$$

Lösung: $L = \mathbb{Q} \setminus [\frac{3}{2}; \frac{8}{5}[$

2. Berechne die Lösungsmenge:

(a) $\dfrac{1}{x} < 1$ (b) $\dfrac{1}{x+2} \geqq 2$

Lösung: (a) $\dfrac{1-x}{x} < 0 \quad \Longrightarrow \quad L =]-\infty\,;\,0[\cup]1\,;\,+\infty[$

(b) $\dfrac{2\,x+3}{x+2} \leqq 0 \quad \Longrightarrow \quad L =]-2\,;\,-\frac{3}{2}]$

3. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{3}{2\,x+5} \leqq 4$$

Lösung: $\dfrac{8\,x+17}{2\,x+5} \geqq 0 \Longrightarrow L =]-\infty\,;\,-2,5[\cup[-2,125\,;\,+\infty[$

4. Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{3x-2}{3x-5} > 1$$

Lösung: $L =]\frac{5}{3}; \infty[$

5. Bestimme die Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{Q}$:

$$\frac{1,5}{4-2x} \leqq \frac{-1,5+\frac{1}{2}x}{x-2}$$

Lösung: $]-\infty;1,5]\cup]2;\infty[$

6. Bestimme die Lösungsmenge und stelle sie am Zahlenstrahl dar:

$$\frac{x-2}{3-x} \leqq \frac{2}{3x-9}$$

Lösung: $]-\infty;\frac{4}{3}] \quad \cup \quad]3;\infty[$

7. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x+2}$$

Lösung: $\frac{1}{(x+1)(x+2)} < 0 \Longrightarrow L =]-2\,;\,-1[$

8. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{x}{x+6} \geqq \frac{x-2}{x}$$

Lösung: $\frac{4\,(3-x)}{x(x+6)} \geqq 0 \Longrightarrow L =]-\infty\,;\,-6[\cup]0\,;\,3]$

9. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{x+1}{x-1} < \frac{x-2}{x-3}$$

Lösung: $\frac{x-5}{(x-1)(x-3)} < 0 \Longrightarrow L =]-\infty\,;\,1[\cup]3\,;\,5[$

10. Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an!

$$\frac{x-1}{10x-15} > 2 - \frac{9-9x}{6-4x}$$

Lösung: $D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{3}{2}\}$, $L =]-\infty;-2[\cup]\frac{3}{2};\infty[$

11. Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an!

$$\frac{x+1}{6x-4} - 2 > \frac{19x-15}{6-9x}$$

Lösung: $D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{2}{3}\}$, $L =]-\infty; \frac{3}{5}[\cup]\frac{2}{3}; \infty[$

1.3. Ungleichungen mit Betrag

1. Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung:

$$|2x+4| \leqq x + 20$$

Lösung: $[-8; 16]$

2. Bestimme die Lösungsmenge:

$$|2(x-2)+x| < x$$

Lösung: $]1; 2[$

3. Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung:

$$3x + 4 \leqq 2 \cdot |x+5|$$

Lösung: $L =]-\infty; 6]$

4. Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{4x+3}{|3x+2|} \geqq 2$$

Lösung: $L = [-\frac{7}{10}; -\frac{1}{2}] \setminus \{-\frac{2}{3}\}$

5. Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{|x|-2}{2x-3} > 2$$

Lösung: $L =]\frac{4}{3}; \frac{3}{2}[$

6. Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{|-3x-2|}{x+10} > -4$$

Lösung: $L = \mathbb{Q} \setminus [-38; -10]$

7. Bestimme die Lösungsmenge folgender Ungleichungen ($G = \mathbb{Q}$):
   (a) $-\dfrac{8x-16}{7-4x} < \dfrac{4-x}{-x+\frac{7}{4}}$
   (b) $-4x - 1 > |-7-5x| + 1$

Lösung: (a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{1\frac{3}{4}\}$, $L =]0; 1\frac{3}{4}[$
(b) $L =]-5; -1[$

8. Bestimme die Lösungsmenge folgender Ungleichungen:
   (a) $-\dfrac{10x-25}{9-5x} > \dfrac{5-x}{-x+\frac{9}{5}}$
   (b) $|-5-7x| + 1 < -6x - 7$

Lösung: (a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{1\frac{4}{5}\}$, $L =]-\infty; 0[\cup]1\frac{4}{5}; \infty]$
(b) $L = \{\ \}$

9. Gib die Lösungsmenge der Ungleichung an!

$$|6x+2| - 22 < 10x - 2 \cdot |6x+2|$$

Lösung: $L =]-1; 2[$

10. Gib die Lösungsmenge der Ungleichung an!

$$11 - 2 \cdot |2x+1| - 2x > |2x+1|$$

Lösung: $]-3{,}5;1[$

11. Gib die Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ an!

$$|2x+1|-5(x+2)\leq 2(x-|2x+1|)$$

Lösung: $[-\frac{1}{2};\infty[$

12. Gib Definitions- und Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ an!

$$\frac{2}{|x-3|}>5$$

Lösung: $D=\mathbb{Q}\setminus\{3\}$, $L=]2{,}6;3[\cup]3;3{,}4[$

13. Gib die Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ an!

$$|3x+1|-2(3x-|3x+1|)\leq 5(x+2)$$

Lösung: $[-\frac{1}{3};\infty[$

14. Gib Definitions- und Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ an!

$$\frac{3}{|x-2|}>4$$

Lösung: $D=\mathbb{Q}\setminus\{2\}$, $L=]1{,}25;2[\cup]2;2{,}75[$

15. Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an!

$$|1-4x|\leq 5\cdot(2x+3)-|x-3|$$

Lösung: $D=\mathbb{Q}$, $L=]-\frac{11}{15};\infty[$

16. Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an!

$$|2 - 3x| - 3 \cdot (5 - 2x) \geq |x - 7|$$

Lösung: $D = \mathbb{Q}$, $L =]2{,}4; \infty[$

2. Lineare Gleichungssysteme

2.1. Gleichungssysteme mit Formvariablen

1. Welche Zahlen können für die Formvariablen a und b gewählt werden, damit das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat?

$$(1) \quad ax + (a+b)y \;=\; a + 2b \qquad (2) \quad (a+3b)x + (a+4b)y \;=\; a + 5b$$

Lösung: a beliebig, $b \neq 0$

2. Gegeben ist das folgende Gleichungssystem, bei dem der Faktor $k \in \mathbb{Q}$ nicht festgelegt ist:

$$(1) \quad 3x + y = -4 \qquad\qquad (2) \quad 5x + ky = 12$$

Welcher Wert ist für k zu nehmen, damit die Lösung des Gleichungssystems ein Punkt der y-Achse ist? Gib diese Lösung an.

Lösung: Für $k = -3$ ist die Lösung $(0|-4)$

3. Berechne die Lösungsmenge (Fallunterscheidung!):

$$\begin{aligned} x \;-\; \frac{y}{a} &= a \\ x \;+\; \frac{y}{b} &= -b \end{aligned}$$

Lösung: $L = \begin{cases} \{(a-b|-ab)\} & \text{für } \; a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq -b \\ \left\{(x|y) \,|\, x + \frac{y}{b} = -b\right\} & \text{für } \; a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a = -b \\ \{\} & \text{für } \; a = 0 \vee b = 0 \end{cases}$

3. Ungleichungen

3.1. Ungleichungen vom Typ (x+a)(x+b) kleiner 0

1. Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung:

$$\frac{-2(2x+1)}{(1-x)(x+3)} \leqq 0$$

Lösung: $]-\infty; -3[\cup [-\frac{1}{2}; 1[$

2. Berechne die Lösungsmenge:

$$\text{(a)} \quad (x+5)\,(x-4) \, < \, 0 \qquad \text{(b)} \quad \frac{x-2}{x+1} \leqq 0$$

Lösung: (a) $L =]-5\,;\,4[$ (b) $L =]-1\,;\,2]$

3. Berechne die Lösungsmenge:

$$\text{(a)} \quad \frac{8}{3\,x+12} < 0 \qquad \text{(b)} \quad \frac{x+3}{3-x} > 0$$

Lösung: (a) $L =]-\infty\,;\,-4[$ (b) $L =]-3\,;\,3[$

4. Berechne die Lösungsmenge:

$$\text{(a)} \quad \frac{1}{x-1} \geqq 0 \qquad \text{(b)} \quad \frac{x^2}{3-x} \leqq 0$$

Lösung: (a) $L =]1\,;\,+\infty[$ (b) $L = \{0\} \cup]3\,;\,+\infty[$

5. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{x\,(x+2)}{(x-3)\,(x+1)} < 0$$

Lösung: $L =]-2\,;\,-1[\cup]0\,;\,3[$

6. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{(x-2)\,(1-x)\,(x+2)}{(x+1)\,(3-x)} \geqq 0$$

Lösung: $L = [-2\,;\,-1[\cup[1\,;\,2]\cup]3\,;\,+\infty[$

3.2. Ungleichungstyp (x+a)(x+b) kleiner 0 erst nach Umformung

1. Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{0,5x-1}{2x-3} \geqq -1$$

Lösung: $L = \mathbb{Q} \setminus [\frac{3}{2}; \frac{8}{5}[$

2. Berechne die Lösungsmenge:

$$\text{(a)}\quad \frac{1}{x} < 1 \qquad \text{(b)}\quad \frac{1}{x+2} \geqq 2$$

Lösung: (a) $\frac{1-x}{x} < 0 \quad \Longrightarrow \quad L =]-\infty\,;\,0[\cup]1\,;\,+\infty[$

(b) $\frac{2\,x+3}{x+2} \leqq 0 \quad \Longrightarrow \quad L =]-2\,;\,-\frac{3}{2}]$

3. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{3}{2\,x+5} \leqq 4$$

Lösung: $\frac{8\,x+17}{2\,x+5} \geqq 0 \Longrightarrow L =]-\infty\,;\,-2,5[\cup[-2,125\,;\,+\infty[$

4. Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{3x-2}{3x-5} > 1$$

Lösung: $L =]\frac{5}{3}; \infty[$

5. Bestimme die Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{Q}$:

$$\frac{1,5}{4-2x} \leqq \frac{-1,5+\frac{1}{2}x}{x-2}$$

Lösung: $]-\infty;1,5]\cup]2;\infty[$

6. Bestimme die Lösungsmenge und stelle sie am Zahlenstrahl dar:

$$\frac{x-2}{3-x} \leqq \frac{2}{3x-9}$$

Lösung: $]-\infty;\frac{4}{3}] \quad \cup \quad]3;\infty[$

7. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x+2}$$

Lösung: $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} < 0 \Longrightarrow L =]-2\,;\,-1[$

8. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{x}{x+6} \geqq \frac{x-2}{x}$$

Lösung: $\dfrac{4\,(3-x)}{x(x+6)} \geqq 0 \Longrightarrow L =]-\infty\,;\,-6[\cup]0\,;\,3]$

9. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{x+1}{x-1} < \frac{x-2}{x-3}$$

Lösung: $\dfrac{x-5}{(x-1)(x-3)} < 0 \Longrightarrow L =]-\infty\,;\,1[\cup]3\,;\,5[$

10. Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an!

$$\frac{x-1}{10x-15} > 2 - \frac{9-9x}{6-4x}$$

Lösung: $D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{3}{2}\}$, $L =]-\infty;-2[\cup]\frac{3}{2};\infty[$

11. Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an!

$$\frac{x+1}{6x-4} - 2 > \frac{19x-15}{6-9x}$$

Lösung: $D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{2}{3}\}$, $L =]-\infty; \frac{3}{5}[\cup]\frac{2}{3}; \infty[$

3.3. Ungleichungen mit Betrag

1. Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung:

$$|2x+4| \leqq x+20$$

Lösung: $[-8; 16]$

2. Bestimme die Lösungsmenge:

$$|2(x-2)+x| < x$$

Lösung: $]1; 2[$

3. Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung:

$$3x+4 \leqq 2 \cdot |x+5|$$

Lösung: $L =]-\infty; 6]$

4. Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{4x+3}{|3x+2|} \geqq 2$$

Lösung: $L = [-\frac{7}{10}; -\frac{1}{2}] \setminus \{-\frac{2}{3}\}$

5. Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{|x|-2}{2x-3} > 2$$

Lösung: $L =]\frac{4}{3}; \frac{3}{2}[$

6. Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{|-3x-2|}{x+10} > -4$$

Lösung: $L = \mathbb{Q} \setminus [-38; -10]$

7. Bestimme die Lösungsmenge folgender Ungleichungen ($G = \mathbb{Q}$):

   (a) $-\dfrac{8x-16}{7-4x} < \dfrac{4-x}{-x+\frac{7}{4}}$

   (b) $-4x-1 > |-7-5x|+1$

Lösung: (a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{1\frac{3}{4}\}$, $L =]0; 1\frac{3}{4}[$
(b) $L =]-5; -1[$

8. Bestimme die Lösungsmenge folgender Ungleichungen:

   (a) $-\dfrac{10x-25}{9-5x} > \dfrac{5-x}{-x+\frac{9}{5}}$

   (b) $|-5-7x|+1 < -6x-7$

Lösung: (a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{1\frac{4}{5}\}$, $L =]-\infty; 0[\cup]1\frac{4}{5}; \infty]$
(b) $L = \{ \}$

9. Gib die Lösungsmenge der Ungleichung an!

$$|6x+2| - 22 < 10x - 2 \cdot |6x+2|$$

Lösung: $L =]-1; 2[$

10. Gib die Lösungsmenge der Ungleichung an!

$$11 - 2 \cdot |2x+1| - 2x > |2x+1|$$

Lösung: $]-3{,}5;1[$

11. Gib die Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ an!

$$|2x+1|-5(x+2)\leq 2(x-|2x+1|)$$

Lösung: $[-\frac{1}{2};\infty[$

12. Gib Definitions- und Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ an!

$$\frac{2}{|x-3|}>5$$

Lösung: $D=\mathbb{Q}\setminus\{3\}$, $L=]2{,}6;3[\cup]3;3{,}4[$

13. Gib die Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ an!

$$|3x+1|-2(3x-|3x+1|)\leq 5(x+2)$$

Lösung: $[-\frac{1}{3};\infty[$

14. Gib Definitions- und Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ an!

$$\frac{3}{|x-2|}>4$$

Lösung: $D=\mathbb{Q}\setminus\{2\}$, $L=]1{,}25;2[\cup]2;2{,}75[$

15. Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an!

$$|1-4x|\leq 5\cdot(2x+3)-|x-3|$$

Lösung: $D=\mathbb{Q}$, $L=]-\frac{11}{15};\infty[$

16. Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an!

$$|2 - 3x| - 3 \cdot (5 - 2x) \geq |x - 7|$$

Lösung: $D = \mathbb{Q}$, $L =]2{,}4; \infty[$

4. Lineare Gleichungssysteme

4.1. Gleichungssysteme mit Formvariablen

1. Welche Zahlen können für die Formvariablen a und b gewählt werden, damit das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat?

$$(1) \quad ax + (a+b)y \;=\; a + 2b \qquad (2) \quad (a+3b)x + (a+4b)y \;=\; a + 5b$$

Lösung: a beliebig, $b \neq 0$

2. Gegeben ist das folgende Gleichungssystem, bei dem der Faktor $k \in \mathbb{Q}$ nicht festgelegt ist:

$$(1) \quad 3x + y = -4 \qquad\qquad (2) \quad 5x + ky = 12$$

Welcher Wert ist für k zu nehmen, damit die Lösung des Gleichungssystems ein Punkt der y-Achse ist? Gib diese Lösung an.

Lösung: Für $k = -3$ ist die Lösung $(0| - 4)$

3. Berechne die Lösungsmenge (Fallunterscheidung!):

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & \dfrac{y}{a} & = & a \\ x & + & \dfrac{y}{b} & = & -b \end{array}$$

Lösung: $L = \begin{cases} \{(a-b| - ab)\} & \text{für} \quad a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq -b \\ \left\{(x|y) \,|\, x + \frac{y}{b} = -b\right\} & \text{für} \quad a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a = -b \\ \{\} & \text{für} \quad a = 0 \vee b = 0 \end{cases}$

5. Die Wurzelfunktion

1. Löse die Gleichung $\sqrt{x} = 2x - 3$ auf graphischem Wege unter Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems mit der Längeneinheit 2 cm!

Lösung: $x = 2,25$

2. Gegeben ist die Funktion $w : y = -\sqrt{x}$.
   (a) Bestimme die maximale Definitions- und Wertemenge der Funktion.
   (b) Zeichne den Graphen von w mit Hilfe einer geeigneten Wertetabelle. (1 Längeneinheit = 1 cm)
   (c) Bestimme die Gleichung der Tangenten des Graphen von w, die die Steigung -1 hat. Zeichne die Tangente in das Koordinatensystem von b).

Lösung: $D = \mathbb{R}_0^+$; $W = \mathbb{R}_0^-$; $y = -x - 0,25$

3. Gegeben ist die Funktion $w : y = -\sqrt{-x}$.
   (a) Bestimme die maximale Definitions- und Wertemenge der Funktion.
   (b) Zeichne den Graphen von w mit Hilfe einer geeigneten Wertetabelle. (1 Längeneinheit = 1 cm)
   (c) Bestimme die Gleichung der Tangenten des Graphen von w, die die Steigung 1 hat. Zeichne die Tangente in das Koordinatensystem von b).

Lösung: $D = \mathbb{R}_0^-$; $W = \mathbb{R}_0^-$; $y = x - 0,25$

4. Berechne die Lösungsmenge:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

Lösung: $L = \left\{0\,;\,\frac{16}{9}\right\}$

6. Quadratische Ungleichungen

1. Berechne die Lösungsmenge und stelle sie graphisch an der Zahlengeraden dar:

$$x^2 > \frac{16}{25}$$

Lösung: $L = \left]-\infty\,;\,-\frac{4}{5}\right[\cup \left]\frac{4}{5}\,;\,\infty\right[$

2. Berechne die Lösungsmenge und stelle sie graphisch an der Zahlengeraden dar:

$$x^2 < \frac{25}{4}$$

Lösung: $L = \left]-\frac{5}{2}\,;\,\frac{5}{2}\right[$

3. Berechne die Lösungsmenge und stelle sie graphisch an der Zahlengeraden dar:

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 \geqq \frac{49}{36}$$

Lösung: $L = \left]-\infty\,;\,-\frac{1}{3}\right] \cup [2\,;\,\infty[$

4. Berechne die Lösungsmenge und stelle sie graphisch an der Zahlengeraden dar:

$$(x+3)^2 \leqq \frac{36}{25}$$

Lösung: $L = \left[-\frac{21}{5}\,;\,-\frac{9}{5}\right]$

5. Berechne die Lösungsmenge und stelle sie graphisch an der Zahlengeraden dar:

$$x^2 + 3\,x < 0$$

Lösung: $L = \left]-3\,;\,0\right[$

6. Berechne die Lösungsmenge und stelle sie graphisch an der Zahlengeraden dar:

$$9\,x^2 - 6\,x \geqq 5$$

Lösung: $L = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{3}\right] \cup \left[1\,;\,\infty\right[$

7. Berechne die Lösungsmenge und stelle sie graphisch an der Zahlengeraden dar:

$$9\,x^2 - 6\,x + 1 > 0$$

Lösung: $L = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

8. Berechne die Lösungsmenge und stelle sie graphisch an der Zahlengeraden dar:

$$9\,x^2 - 6\,x + 1 \leqq 0$$

Lösung: $L = \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

9. Berechne die Lösungsmenge und stelle sie graphisch an der Zahlengeraden dar:

$$49\,x^2 - 42\,x + 5 < 0$$

Lösung: $L = \left]\dfrac{1}{7}; \dfrac{5}{7}\right[$

10. Berechne die Lösungsmenge und stelle sie graphisch an der Zahlengeraden dar:

$$49\,x^2 - 42\,x + 9 < 0$$

Lösung: $L = \{\}$

11. Berechne die Lösungsmenge und stelle sie graphisch an der Zahlengeraden dar:

$$49\,x^2 - 42\,x + 9 \geqq 0$$

Lösung: $L = \mathbb{R}$

12. Bestimme die Lösungsmenge folgender Ungleichung:

$$6x - 24 < -3x^2$$

Lösung: $L =]-4; 2[$

13. Bestimme die Lösungsmenge folgender Ungleichung:

$$4x^2 < 4x + 24$$

Lösung: $L =]-2; 3[$

14. Bestimme die Lösungsmenge folgender Ungleichung:

$$22 + 4x^2 \geq 20x$$

Lösung: $L =]-\infty; \frac{5-\sqrt{3}}{2}] \cup [\frac{5+\sqrt{3}}{2}; \infty[$

15. Bestimme die Lösungsmenge folgender Ungleichung:

$$18 \geq 20x - 4x^2$$

Lösung: $L =]-\infty; \frac{5-\sqrt{7}}{2}] \cup [\frac{5+\sqrt{7}}{2}; \infty[$

16. Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung $4x^2 + 11x - 3 \geq 0$.

Lösung: $L = \mathbb{R} \setminus]-3; 0,25[$

17. Bestimme die Lösungsmenge:

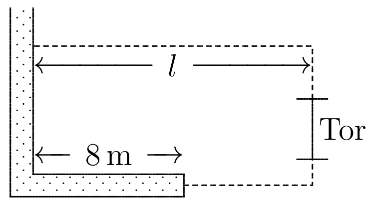
$$|x^2 - 2x| \geqq 1$$

Lösung: $L =]-\infty; 1-\sqrt{2}] \cup \{1\} \cup [1+\sqrt{2}; \infty[$

18. Mit einem Gitter von 8 m Länge soll auf einer Wiese ein rechteckiger Laufstall für ein Meerschweinchen abgegrenzt werden. Wie sind die Längen der Rechtecksseiten zu wählen, wenn der Flächeninhalt mindestens $3,5\ \mathrm{m}^2$ betragen soll?

Lösung: Man erhält für die Seitenlänge x (gemessen in m) die Beziehung $2 - 0,5\sqrt{2} \leqq x \leqq 2 + 0,5\sqrt{2}$. D. h., eine Seitenlänge des Rechtecks darf ca. $2,71$ m nicht überschreiten, die andere beträgt dann mindestens $1,29$ m.

19. Eine rechteckige Weidefläche soll so angelegt werden, daß sie von einer rechtwinkligen Mauer und einem 42 m langen Zaun begrenzt wird. Zusätzlich soll an einer Seite ein 2 m breites Tor eingefügt werden (vgl. Abbildung).
Wie muß die Seitenlänge l gewählt werden, damit der Flächeninhalt maximal wird? Wie groß ist dieser?



Lösung: $l = 13\,\mathrm{m}$; $A = 338\,\mathrm{m}^2$

Teil II.
Geometrie

7. Vierecke

7.1. Punktsymmetrische Vierecke

1. Wir betrachten den Satz: *Wenn ein Viereck zu einer seiner Diagonalen symmetrisch ist, dann halbiert diese die andere Diagonale.*
   (a) Gib den Kehrsatz an.
   (b) Welcher der beiden Sätze ist falsch? Begründe deine Antwort.

Lösung: Der Kehrsatz ist falsch, weil die Diagonalen in diesem Fall nicht notwendigerweise orthogonal sind.

2. Konstruiere ein punktsymmetrisches Viereck $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ mit $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 5\,\text{cm}$ und $\delta = 75°$.

Lösung:

7.2. Parallelogramme

1. Beweise mit Hilfe eines Kongruenzbeweises:

   Zwei beliebige durch den Diagonalenschnittpunkt eines Parallelogramms verlaufende Geraden schneiden seine Seiten in vier Punkten, die miteinander verbunden, wiederum ein Parallelogramm bilden.

Lösung:

2. Beweise mit Hilfe eines Kongruenzbeweises:

   Trägt man auf einer Diagonalen eines Parallelogramms von den Endpunkten aus gleich lange Strecken nach innen ab und verbindet die beiden entstandenen Punkte mit den Endpunkten der anderen Diagonale, so entsteht wieder ein Parallelogramm.

Lösung:

3. Zeichne zu folgendem Satz eine Planfigur, gib Voraussetzung und Behauptung an und begründe den Satz durch einen Kongruenzbeweis:

   Die Lote von beiden Enden einer Diagonale eines Parallelogramms auf die zweite Diagonale sind gleich lang.

Lösung:

7.3. Drachenvierecke und Trapeze

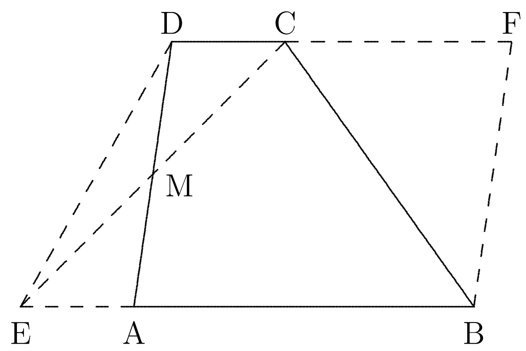
1. In einem Trapez $ABCD$ mit den parallelen Grundlinien $[AB]$ und $[DC]$ werde die Mittellinie des Trapezes von den Diagonalen $[AC]$ bzw. $[BD]$ in zwei verschiedenen Punkten E bzw. F geschnitten.
   (a) Warum ist das Viereck $EFCD$ ebenfalls ein Trapez? Kurze Begründung!
   (b) Berechne die Mittellinienlänge des Trapezes $EFCD$ und drücke diese durch die Grundlinienlängen $a = \overline{AB}$ und $c = \overline{DC}$ des Trapezes $ABCD$ aus!

Lösung: (a): Parallelität der Mittellinie zu den Grundseiten
(b): $m = \frac{1}{4} \cdot (a + c)$

2. Im Trapez $ABCD$ (siehe Zeichnung) sei M die Mitte des Schenkels $[AD]$. Die Gerade CM treffe AB im Punkt E.
   (a) Beweise: $\overline{EA} = \overline{DC}$!

   Die Parallele zum Schenkel $[AD]$ durch B treffe DC im Punkt F.

   (b) Zeige ausführlich, daß für die Länge m der Mittellinie des Trapezes $EBFD$ gilt:
   $m = \overline{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overline{DC}$



Lösung:

3. Von einem Viereck $ABCD$ ist bekannt: $\beta = \gamma = \delta$, $b = c$.
   (a) Begründe kurz, warum das Viereck zwar ein Quadrat aber keine Raute mit $\gamma \neq 90^0$ sein kann.
   (b) Welche Werte können die drei gleichen Winkel β, γ und δ besitzen? Um welchen besonderen Viereckstyp handelt es sich?

Lösung: (b) Geht man von einem konvexen Viereck aus, so gilt $60^0 < \beta < 120^0$, sonst $\beta < 120^0$. Es handelt sich um ein (spezielles) Drachenviereck: Aus $b = c$ ergibt sich, daß BCD ein gleichschenkliges Dreieck ist. Daraus folgt wegen $\beta = \delta$, daß auch ABD gleichschenklig sein muß.

7.4. Beweise

1. Betrachte folgenden Satz:

   „Ein achsensymmetrisches Viereck mit einem 90°-Winkel ist ein Rechteck.“

   (a) Gib Satz und Kehrsatz in der Wenn-dann-Form an!

   (b) Ist die Voraussetzung des Satzes notwendig, hinreichend oder notwendig und hinreichend für die Behauptung des Satzes?
   Begründe deine Entscheidung!

Lösung: (a) Wenn ein Viereck achsensymmetrisch ist und einen 90°-Winkel hat, dann ist es ein Rechteck.

(b) Die Voraussetzung ist notwendig für den Satz.
Die Voraussetzung ist aber nicht hinreichend für den Satz.
Ein Gegenbeispiel ist z. B. ein Drachenviereck mit Symmetrieachse AC und $\beta = \delta = 90°$.

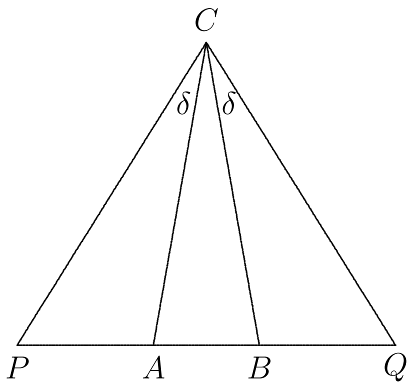
2. Zeichnet man in einem gleichschenkligen Dreieck von der Mitte der Basis aus Lote auf die beiden Schenkel, so sind diese gleich lang.
   Fertige eine Skizze und bezeichne sie zweckmäßig. Führe einen Kongruenzbeweis durch (Voraussetzung, Behauptung, Beweis), wobei alle Beweisschritte zu begründen sind.

Lösung:

3. Wenn man auf den Schenkeln eines gleichschenkligen Dreiecks von der Basis aus gleiche Stücke abschneidet und mit den gegenüberliegenden Basisecken verbindet, so sind diese Verbindungsstrecken gleich lang und bilden mit der Basis gleiche Winkel.
   Beweise diesen Satz!

Lösung:

4. An der Spitze C eines gleichschenkligen Dreieckes ABC werden nach links und rechts gleich große Winkel δ angetragen. Die freien Schenkel schneiden die verlängerte Basis des Dreieckes in den Punkten P und Q (siehe Skizze rechts).
   Zeige mit Hilfe eines Kongruenzbeweises, daß das Dreieck PQC gleichschenklig ist.



Lösung:

5. In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis $c = [AB]$ wird die Höhe h_c über C hinaus um die Strecke $s = [CD]$ verlängert.
   Fertige eine Skizze und beschrifte sie. Zeige mittels Kongruenzbeweis (Voraussetzung, Behauptung, Beweis), daß das Dreieck ABD gleichschenklig ist.

Lösung:

6. Gib für den Satz *„Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, dann besitzt es zwei gleiche Winkel“.*
   (a) die Umkehrung,
   (b) die Kontraposition an.
   (c) Entscheide, ob (1) der Satz, (2) die Umkehrung bzw. (3) die Kontraposition wahr sind.

Lösung: (a) „Wenn ein Dreieck zwei gleiche Winkel besitzt, ist es gleichseitig.“
(b) „Wenn ein Dreieck keine zwei gleichen Winkel besitzt, dann ist es nicht gleichseitig.“
(c) Satz und (äquivalent) Kontraposition sind wahr, der Kehrsatz ist falsch.

7. Gib Voraussetzung und Behauptung des Satzes an und beweise ihn durch einen Kongruenzbeweis:
   Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn eine Seitenhalbierende zugleich Höhe des Dreiecks ist.

Lösung: Die Seitenhalbierende zerlegt das Dreieck in zwei Teildreiecke, die in zwei Seiten und einem rechten Winkel übereinstimmen.

8. Wir betrachten den Satz:

   Wenn in einem Dreieck die Summe von zwei Winkeln 80^0 *beträgt, dann ist das Dreieck stumpfwinklig.*

   (a) Ist die Voraussetzung hinreichend, notwendig, beides oder keines von beiden?

   (b) Gib an, ob der Satz oder der Kehrsatz richtig sind, und begründe dies.

Lösung: Die Voraussetzung ist hinreichend aber nicht notwendig. Deswegen ist nur der Satz wahr.

9. Beweise mit Hilfe eines Kongruenzbeweises:

   Zwei beliebige durch den Diagonalenschnittpunkt eines Parallelogramms verlaufende Geraden schneiden seine Seiten in vier Punkten, die miteinander verbunden, wiederum ein Parallelogramm bilden.

Lösung:

10. Beweise mit Hilfe eines Kongruenzbeweises:

    Trägt man auf einer Diagonalen eines Parallelogramms von den Endpunkten aus gleich lange Strecken nach innen ab und verbindet die beiden entstandenen Punkte mit den Endpunkten der anderen Diagonale, so entsteht wieder ein Parallelogramm.

Lösung:

11. Zeichne zu folgendem Satz eine Planfigur, gib Voraussetzung und Behauptung an und begründe den Satz durch einen Kongruenzbeweis:

    Die Lote von beiden Enden einer Diagonale eines Parallelogramms auf die zweite Diagonale sind gleich lang.

Lösung:

12. Wir betrachten den Satz: *Wenn ein Viereck zu einer seiner Diagonalen symmetrisch ist, dann halbiert diese die andere Diagonale.*

    (a) Gib den Kehrsatz an.

    (b) Welcher der beiden Sätze ist falsch? Begründe deine Antwort.

Lösung: Der Kehrsatz ist falsch, weil die Diagonalen in diesem Fall nicht notwendigerweise orthogonal sind.

13. Beweise folgenden Satz:

    Wenn man bei einem Quadrat alle vier Seiten im gleichen Umlaufsinn um Strecken gleicher Länge verlängert, so entsteht ein neues Quadrat.

    (Gliedere sauber in Voraussetzung, Planfigur, Behauptung und Beweis.)

Lösung: Man zeigt: Die vier rechtwinkligen Dreiecke sind kongruent, also ist das neuentstandene Viereck eine Raute. Die Innenwinkel der Raute sind so groß wie die Summe der beiden von 90^0 verschiedenen Winkel der Dreiecke, also sind sie rechte Winkel.

14. Beweise: *Wenn ein Viereck keinen überstumpfen Innenwinkel besitzt, ist die Summe der Längen seiner Diagonalen kleiner als der Umfang des Vierecks.*

Lösung: Man bezeichne wie üblich die Seiten mit $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$, $d = \overline{DA}$, und die Diagonalen mit $e = \overline{AC}$ bzw. $f = \overline{BD}$. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung:

$$\begin{array}{rrl} & e & \leqq a + b \\ & e & \leqq d + c \\ & f & \leqq a + d \\ & f & \leqq b + c \\ \text{Summation ergibt:} & 2(e+f) & \leqq 2(a+b+c+d) \end{array}$$

15. *„Wenn ein Viereck drei rechte Winkel hat, dann ist es ein Quadrat.“*

    (a) Prüfe, ob die Voraussetzung dieses Satzes eine notwendige oder hinreichende Bedingung für die Behauptung ist.

    (b) Formuliere den Kehrsatz.

    (c) Sind der Satz bzw. der Kehrsatz richtige Sätze?

Lösung:

16. Gib dafür, daß ein Viereck ein Parallelogramm ist,

    (a) eine notwendige Bedingung an, die nicht hinreichend ist,

    (b) eine hinreichende Bedingung an, die nicht notwendig ist,

    (c) eine Bedingung an, die notwendig und hinreichend ist.

Lösung: (a) z.B. „zwei Seiten sind parallel “

(b) z.B. „alle Seiten gleich lang “

(c) z.B. „je zwei Gegenseiten gleich lang “

17. *Richtig oder falsch?* – Untersuche folgende Sätze auf ihre Richtigkeit! Zeichne bei falschen Sätzen ein Gegenbeispiel und begründe richtige Sätze kurz (kein vollständiger Beweis nötig)!
    (a) In einem Drachenviereck stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht.
    (b) In einem Drachenviereck halbieren sich die Diagonalen gegenseitig.
    (c) Ein mittensymmetrisches Viereck hat zwei gleich lange Seiten.
    (d) Ist ein Viereck zugleich ein Drachenviereck und ein Trapez, so ist es ein Quadrat.
    (e) In einem gleichschenkligen Trapez halbieren sich die Diagonalen
    (f) Ist ein gleichschenkliges Trapez punktsymmetrisch, so ist es ein Rechteck.

Lösung:

18. **Satz:** *Ein Viereck mit zwei gleich langen Gegenseiten ist ein Parallelogramm.*
    (a) Gib den Kehrsatz zu dem gegebenen Satz an!
    (b) Beurteile die Gültigkeit des Satzes und des Kehrsatzes!
    Zeichne bei einem falschen Satz oder Kehrsatz ein Gegenbeispiel!

Lösung:

19. **Satz:** *Ein Viereck mit zwei gleich langen Gegenseiten, in dem eine Diagonale die andere halbiert und auf ihr senkrecht steht, ist sicher ein Parallelogramm.*
    (a) Gib anhand einer Beweisfigur Voraussetzung und Behauptung des Satzes in Kurzform an!
    (b) Begründe den Satz mit Hilfe eines *Kongruenzbeweises*!

Lösung:

7.5. Vektoren

1. Gegeben sind die Punkte $A(-2|4)$ und $B(4|1)$.
    (a) Zeichne die Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$.
    (b) Konstruiere den Ortsvektor $\overrightarrow{OC}$ mit $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA}$.
    (c) Berechne die Koordinaten von C.

Lösung: $C(-6|3)$

2. Zeichne ein beliebiges Fünfeck $ABCDE$. Die Vektoren $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ und $\overrightarrow{d}$ sind festgelegt durch $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{DE}$.

   Gib einen Repräsentanten der folgenden Vektoren mit Hilfe von zweien der Punkte A, B, C, D und E an:

   (a) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$

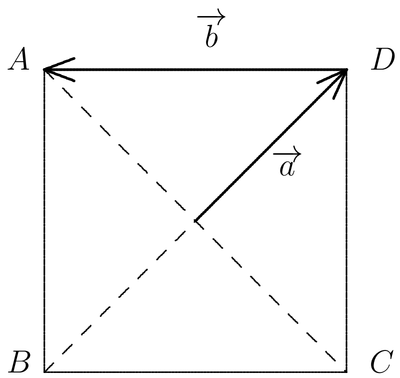
   (b) $-\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$

   (c) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}$

   (d) $-\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c})$

Lösung: $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{DA}$

3. In das Quadrat $ABCD$ sind Repräsentanten der Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ eingezeichnet. Drücke die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AC}$ durch $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ aus.



Lösung: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{a}$

4. In einem Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) sind durch die Punkte $A(1|1)$, $B(-4|3)$, $C(-4|2)$, $D(-1|7)$, $E(-1|8)$, $F(5|5)$ drei Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{EF}$ gegeben.

   (a) Zeige in einer sauberen und gut beschrifteten Skizze die Gültigkeit des Assoziativgesetzes der Vektoraddition für die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$!

   (b) Berechne die Koordinaten des Vektors $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$!

Lösung: (b): $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

5. In einem Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) sind die Punkte $A(1|2)$, $B(2|7)$, $C(3|2)$ und $D(8|1)$ gegeben (Platzbedarf nach oben ca. 15 cm).

(a) Konstruiere sauber und genau einen Repräsentanten des Vektors $\vec{x}$, für den gilt

$$\vec{x} + \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$$

(b) Berechne die Koordinaten des Vektors $\vec{x}$!

Lösung: (b): $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$

6. Ein Käfer möchte ein Transportband für Gepäck überqueren, das zum Glück langsam nur mit einer Geschwindigkeit von $50\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$ läuft. Er selbst erreicht eine Geschwindigkeit von $80\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$. Stelle anhand einer Konstruktion fest, in welcher Richtung der Käfer loslaufen muß, wenn er genau gegenüber ankommen will.

Lösung: Er muß um $38,7^0$ „vorhalten “.

8. Kreise und Geraden

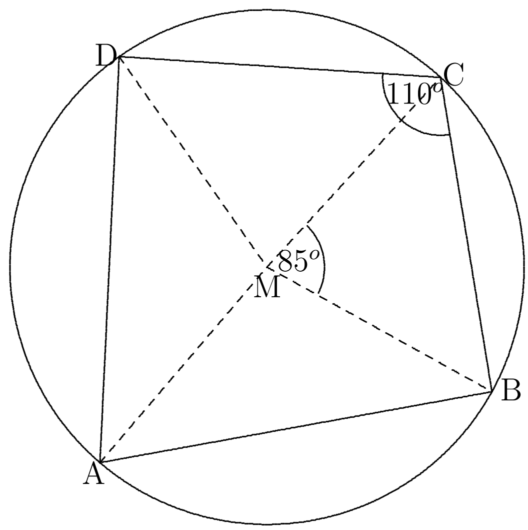
8.1. Sehnen- und Tangentenvierecke

1. Gegeben ist ein Viereck, dessen Seiten a, b, c und d Tangenten an einen Kreis sind. Begründe, warum stets gilt: $a + c = b + d$

Lösung: Die vier Lote vom Inkreismittelpunkt auf die Vierecksseiten a, b, c und d schneiden diese in den Punkten X, Y, Z und W. Es gilt $\overline{AW} = \overline{AX}$, $\overline{BX} = \overline{BY}$, $\overline{CY} = \overline{CZ}$ und $\overline{DZ} = \overline{DW}$. Daraus folgt:

$$a + c = (\overline{AX} + \overline{XB}) + (\overline{CZ} + \overline{ZD}) = (\overline{AW} + \overline{WD}) + (\overline{BY} + \overline{YC}) = b + d$$

2. Im dargestellten Sehnenviereck $ABCD$ sind bekannt:
$\overline{AB} = \overline{AD}$
$\gamma = 110°$ und $\sphericalangle BMC = 85°$.
Berechne α, β und δ!
Begründe deine Rechenschritte!



Lösung: $\alpha = 70^o$; $\beta = 82,5^o$; $\delta = 97,5^o$

3. Konstruiere ein Tangentenviereck, dessen Inkreis die positiven Koordinatenachsen und die Gerade PQ mit $P(11,5|0)$ und $Q(0|9,5)$ berührt und dessen vierte Seite zur x-Achse parallel ist.
Fertige zunächst eine Skizze und beschreibe kurz dein Vorgehen bei der Konstruktion.

Lösung:

4. Gegeben sind zwei Geraden g und h, die sich unter einem Winkel von $30°$ im Punkt S schneiden. A und B sind zwei verschiedene Punkte auf g mit $\overline{AS} = \overline{BS} = 2{,}5\,\text{cm}$. Es werden folgende Punktmengen betrachtet:

   $M_1 = \{Q \mid d(Q;h) < d(Q;g)\}$

   $M_2 = \{P \mid \text{Jeder Winkel im Dreieck } ABP \text{ beträgt höchstens } 72°\}$

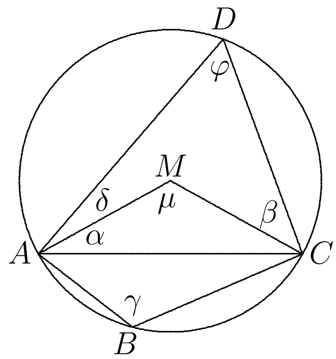
   Kennzeichne mit Farbe in einer sauberen und übersichtlichen Zeichnung die Schnittmenge $M_1 \cap M_2$!

Lösung:

5. Im Sehnenviereck $ABCD$ ist M der Mittelpunkt des Umkreises. Es ist $\sphericalangle BMD = 130^0$, $CD \parallel BM$ und $\overline{AD} = \overline{BD}$. Berechne alle Innenwinkel des Vierecks.

Lösung: $\alpha = 65^0$, $\beta = 105^0$, $\gamma = 115^0$ und $\delta = 75^0$

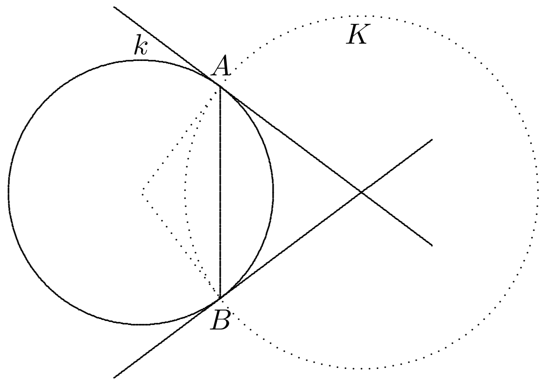
6. In nebenstehender (nicht maßstäblicher) Figur sind die Winkel $\varphi = 40^0$ und $\beta = 5^0$ gegeben. Berechne die Winkel α, γ, δ und μ und gib jeweils eine kurze Begründung an.



Lösung: $\mu = 80^0$, $\alpha = 50^0$, $\delta = 35^0$, $\gamma = 140^0$

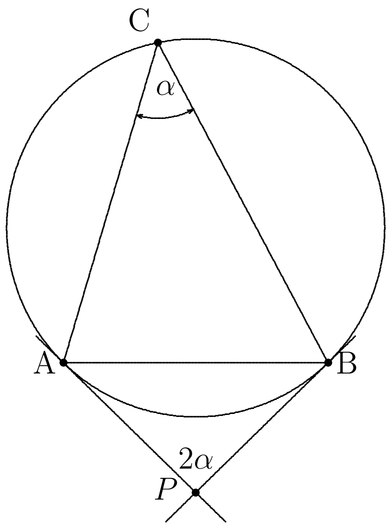
7. Zeichne einen Kreis $k(M; r = 2{,}5\,\text{cm})$ und eine Sehne $[AB]$ der Länge 4 cm.
   (a) Konstruiere die durch A und B verlaufenden Kreistangenten.
   (b) Wir definieren: *Zwei Kreise schneiden sich senkrecht, wenn sich in beiden Schnittpunkten die Tangenten an beide Kreise senkrecht schneiden.*

   Konstruiere den Kreis K, der k in den Punkten A und B senkrecht schneidet.



Lösung:

8. Bestimme die Größe des Winkels α in der Zeichnung. Begründe deinen Lösungsweg.



Lösung: Das (gleichschenklige) Dreieck ABP enthält zwei Sehnen-Tangentenwinkel und nach Voraussetzung den Scheitelwinkel 2α. Also ist $4\alpha = 180^0$.

9. Die Diagonalen eines Sehnenvierecks zerlegen dieses in vier Teildreiecke, von denen jeweils zwei in den Winkeln übereinstimmen.
   (a) Skizziere ein Beispiel und bezeichne die Eckpunkte. Gib zwei Dreiecke mit der genannten Eigenschaft an.
   (b) Beweise, daß die von dir gewählten Dreiecke in den Winkeln übereinstimmen.

Lösung: Jeweils gegenüberliegende Dreiecke sind winkelgleich (Scheitelwinkel, Umfangswinkel über einer außerhalb liegenden Sehne, Winkelsumme im Dreieck)

10. Konstruiere ein Trapez ($a \parallel c$), das einen Inkreis besitzt, aus dem Inkreisradius $r = 3\text{cm}$, $\alpha = 80^0$ und $\beta = 70^0$. Beschreibe schrittweise und knapp die Konstruktion.

Lösung: Man zeichnet den Inkreis und ein Paar paralleler Tangenten AB und CD. Die beiden anderen Seiten sind ebenfalls Tangenten. Die Kreisradien zu den Berührpunkten schließen jeweils Winkel ein, die sich mit den korrespondierenden Innenwinkeln des Trapezes zu 180^0 ergänzen. Durch Konstruktion der Radien erhält man die gesuchten Tangenten.

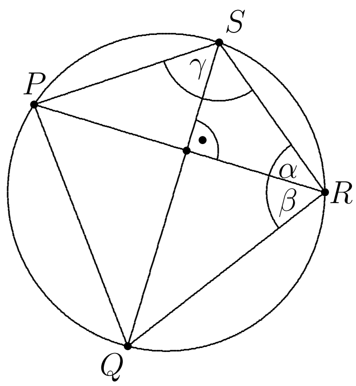
11. Konstruiere ein Sehnenviereck aus folgenden Angaben: $\overline{AB} = 7,5\,\text{cm}$, $\overline{AD} = 4,5\,\text{cm}$, $\overline{BD} = 10\,\text{cm}$ und $\beta = 80^0$.

Lösung: Konstruktion des Dreiecks ABD und seines Umkreises. Antragen von β an $[AB]$, der freie Schenkel schneidet den Umkreis im vierten Eckpunkt C.

12. Konstruiere ein Sehnenviereck $ABCD$ aus folgenden Angaben: $\overline{AB} = 7,5\,\text{cm}$, $\overline{AD} = 5,5\,\text{cm}$, $\overline{CD} = 8,0\,\text{cm}$ und $\beta = 105^0$ (Planfigur, Analysis, Konstruktion).

Lösung: ACD ist nach SWS eindeutig bestimmt ($\delta = 75^0$). B liegt auf dem Umkreis von ACD und hat von A den Abstand $7,5\,\text{cm}$. Von den zwei möglichen Punkten auf dem Umkreis liefert nur einer ein überschneidungsfreies Viereck $ABCD$.

13. Berechne den Winkel γ für $\alpha = 47^0$ und $\beta = 61^0$:



Lösung: $\gamma = 104^0$

14. Die Punkte $A(7|0)$, $B(6|4)$ und $C(3|2)$ legen drei Geraden fest. Zeichne diese Geraden und konstruiere alle Punkte, die von allen drei Geraden denselben Abstand haben. (Platzbedarf auf der x-Achse von 0 bis 12, auf der y-Achse von -4 bis 7.)

Lösung: Es handelt sich um die Mittelpunkte des Inkreises und der drei Ankreise.

15. (a) Konstruiere zur Strecke $\overline{AC} = 9$ cm *einen* Fasskreisbogen zum Umfangswinkel $\delta = \sphericalangle\ ADC = 75°$.

    (b) Konstruiere in dieselbe Zeichnung zwei Sehnenvierecke $ABCD_1$ und $ABCD_2$ mit

$$\beta = \sphericalangle\ CBA = 105° \text{ und } a = \overline{AB} = 5 \text{ cm}$$

    und der Eigenschaft, dass die Dreiecke ABC, ACD_1 und ACD_2 flächengleich sind. Zeiche zuerst eine Planfigur und begründe deinen Lösungsweg!

Lösung:

8.2. Umfangswinkelsatz

1. Wie groß ist der Umfangswinkel in einem $\frac{2}{5}$−Kreisbogen? Begründe deine Antwort anhand einer Skizze.

Lösung: 108°, Zusammenhang zwischen Mittelpunkts- und Umfangwinkel

2. Gegeben ist die Strecke [AB] mit $\overline{AB} = 6$ cm. Konstruiere und schraffiere die Menge der Punkte P, von denen aus man die Strecke [AB] unter mindestens 70^o und weniger als 105^o sieht und die nicht mehr als 4 cm von B entfernt sind.

Lösung:

3. Gegeben ist die Strecke [AB] mit $\overline{AB} = 8$ cm. Konstruiere und schraffiere die Menge der Punkte P, von denen aus man die Strecke [AB] unter mehr als 60^o und höchstens 110^o sieht und die von A weiter als von B entfernt sind.

Lösung:

4. Zeichne eine Strecke [AB] der Länge 4 cm in die Mitte einer freien halben Seite. Konstruiere nun die Punktmenge $\{P | 60^o < \sphericalangle APB \leq 135^o\}$ und kennzeichne sie farbig.

Lösung:

5. Zeichne eine Strecke [AB] der Länge 4 cm in die Mitte einer freien halben Seite. Konstruiere nun die Punktmenge $\{P | 65^o \leq \sphericalangle APB < 130^o\}$ und kennzeichne sie farbig.

Lösung:

6. Zeichne ein Dreieck ABC mit den Seiten $a = 7\,\text{cm}$, $b = 5\,\text{cm}$ und $c = 6\,\text{cm}$. Kennzeichne farbig die Menge aller Punkte, von denen aus $[AC]$ unter dem Winkel $\alpha < 90°$ und $[BC]$ unter dem Winkel $\beta \geqq 130°$ erscheint. (Genaue Konstruktion!)

Lösung:

7. Fertige einen Konstruktionsplan an und konstruiere ein Dreieck ABC aus:
$b = 5\,\text{cm}$, $h_a = 3\,\text{cm}$ und $\beta = 70^o$

Lösung:

8. Konstruiere unter Verwendung eines Faßkreisbogens ein Dreieck ABC aus $b = 6\,\text{cm}$, $\beta = 35°$ und $h_b = 3\,\text{cm}$. (Planfigur, exakte Konstruktion, Konstruktionsbeschreibung)

Lösung:

9. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 70°$ und $s_a = 4\,\text{cm}$!

Lösung: $M =$ Mittelpunkt von $[BC]$
$\{A\} =$ Faßkreisbogen über $[BC]$ $\cap$ $k(M\,;\, r = s_a)$

10. (a) Konstruiere ein Dreieck aus $c = 6\,\text{cm}$, $h_c = 6\,\text{cm}$ und $\gamma = 40°$.
    (b) Die Schnittpunkte der Geraden AM mit dem Faßkreisbogen über $[AB]$ mit M als Mittelpunkt und $\gamma = 50°$ sind die Punkte A und D. Warum ist das Dreieck ABD rechtwinklig?
    (c) Kennzeichne in der Konstruktion von (a) farbig die folgende Punktmenge:

$$\{P|\; d(P;\, AB) > h_c \;\; und \;\; \sphericalangle APB > 50°\}$$

    (d) Ermittle durch Konstruktion, für welche Werte von γ es keine Lösung gibt.

Lösung: (b) Thaleskreis (d) keine Lösung für $\gamma > 52°$

11. Gegeben sind zwei Geraden g und h, die sich unter einem Winkel von $30°$ im Punkt S schneiden. A und B sind zwei verschiedene Punkte auf g mit $\overline{AS} = \overline{BS} = 2,5\,\text{cm}$. Es werden folgende Punktmengen betrachtet:
$M_1 = \{Q \;\big|\; d(Q;h) < d(Q;g)\}$

$M_2 = \{P \mid \text{Jeder Winkel im Dreieck } ABP \text{ beträgt höchstens } 72°\}$

Kennzeichne mit Farbe in einer <u>sauberen</u> und übersichtlichen Zeichnung die Schnittmenge $M_1 \cap M_2$!

Lösung:

12. Konstruiere ein Parallelogramm $ABCD$ aus folgenden gegebenen Stücken:

$$\overline{AB} = 9\,\text{cm}; \quad \overline{MC} = 6,5\,\text{cm}; \quad \sphericalangle ACB = 50°$$

M bezeichne dabei den Mittelpunkt von $[AB]$.

Verlangt sind Planfigur, Konstruktionsbeschreibung und eine saubere und genaue Konstruktion!

Lösung:

13. Konstruiere ein Viereck $ABCD$ aus $a = 8\,\text{cm}$, $d = 7\,\text{cm}$, $\overline{BD} = 7{,}5\,\text{cm}$, $\gamma = 64°$ und $\overline{AC} = 9{,}5\,\text{cm}$. (Planfigur, Konstruktionsbeschreibung, Konstruktion)

Lösung:

14. Konstruiere ein Viereck $ABCD$ aus $a = 8\,\text{cm}$, $b = 7{,}5\,\text{cm}$, $\overline{AC} = 7\,\text{cm}$, $\delta = 57°$ und $\overline{BD} = 9\,\text{cm}$. (Planfigur, Konstruktionsbeschreibung, Konstruktion)

Lösung:

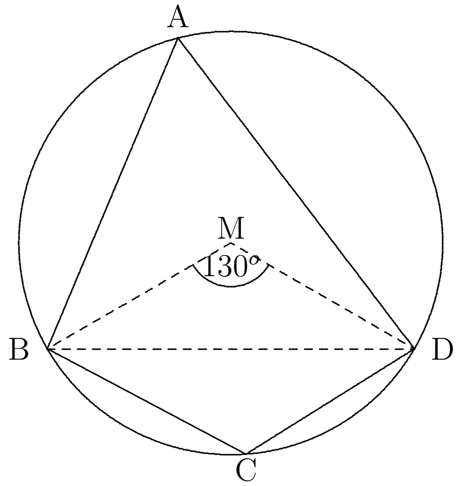
15. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $c = 8\,\text{cm}$, $\gamma = 110°$ und $h_c = 2\,\text{cm}$!

Lösung: $\{C\} =$ Faßkreisbogen über $[AB]$ $\cap$ Parallele zu AB

16. Konstruiere das $\Delta\, ABC$ aus den Seitenlängen $a = 5\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$ und $c = 7\,\text{cm}$! Konstruiere sodann den Punkt P, von dem aus alle Dreiecksseiten unter dem gleichen Winkel erscheinen! Überlege zuerst, ob dieser Punkt im Inneren oder im Äußeren des Dreiecks liegt! Erstelle dazu für beide Fälle eine Überlegungsfigur und beweise, daß einer der Fälle nicht möglich ist!

Lösung: $P =$ Faßkreisbogen (120°) über $[AB]$ $\cap$ Faßkreisbogen (120°) über $[BC]$

17. In einem Sehnenviereck $ABCD$ mit Umkreismittelpunkt M (vgl. Skizze) gilt:
$\sphericalangle BMD = 130^o$, $BM \parallel CD$ und $\overline{AD} = \overline{BD}$
Bestimme alle Innenwinkel des Sehnenvierecks. Begründe deine Antworten!

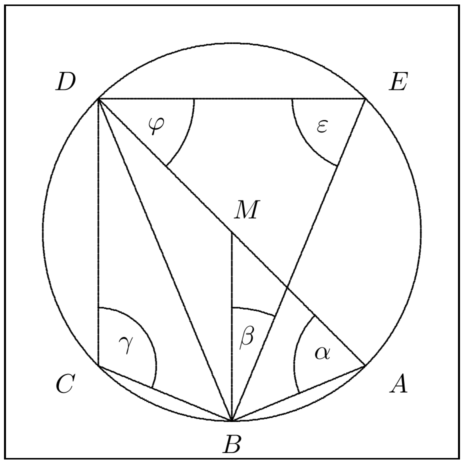


Lösung: $\alpha = 65^o$; $\gamma = 115^o$; $\delta = 75^o$; $\beta = 105^o$

18. In nebenstehender Abbildung (nicht maßstabsgetreu!) ist $\gamma = 140°$ und $\varphi = 25°$.

    Konstruiere die Figur für $r = \overline{MA} = 4,5\,\text{cm}$ und $\overline{DC} = 3\,\text{cm}$!

    Berechne ε, α und β!

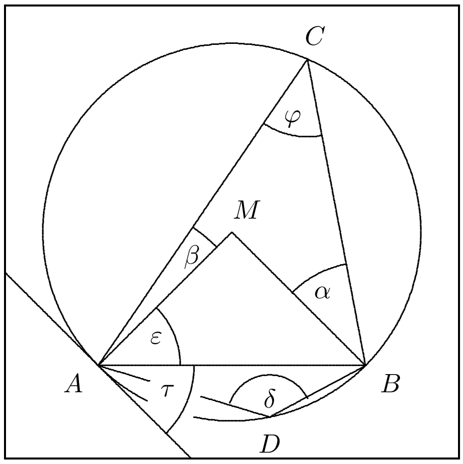


Lösung: $\varepsilon = \alpha = 180° - \gamma = 40°$; $\beta = 15°$

19. In nebenstehender Abbildung (nicht maßstabsgetreu!) ist $\tau = 50°$ und $\alpha = 40°$.

    Konstruiere die Figur für $r = \overline{MA} = 4,5\,\text{cm}$ und $\overline{AD} = 3\,\text{cm}$!

    Berechne φ, ε, β und δ!

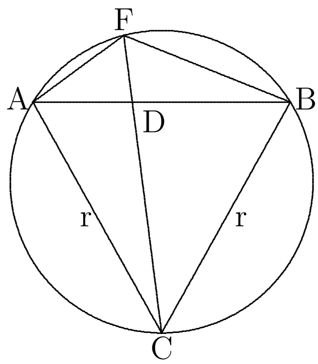


Lösung: $\varphi = \tau = 50°$; $\varepsilon = 40°$; $\beta = 10°$; $\delta = 130°$

20. Das Dreieck mit den Maßen $b = 7$ cm, $h_c = 5{,}5$ cm und $\beta = 60°$ soll *konstruiert* werden.
    (a) Fertige eine Planfigur und zeichne die gegebenen Größen farbig ein!
    (b) Konstruiere das Dreieck!
    (c) Fertige eine *kurze* Konstruktionsbeschreibung!

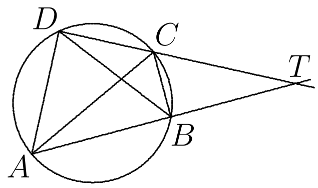
Lösung:

21. In der nebenstehenden Figur gilt:
    Das Dreieck ABC ist gleichschenklig,
    F ist ein beliebiger Punkt auf der Kreislinie.
    (a) Zeige: $\triangle CDB \sim \triangle CFB$
    (b) Zeige: $r = \sqrt{\overline{CD} \cdot \overline{CF}}$



Lösung: (a) WW-Satz, $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BCF$ und $\sphericalangle DBC = \sphericalangle CAB = \sphericalangle CFB$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck und Umfangswinkelsatz)
(b) Folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CDB und CFB.

22. Gegeben ist ein beliebiges Sehnenviereck $ABCD$ (vgl. Skizze).



(a) Zeige: Die Dreiecke ATC und DBT sind ähnlich.

(b) Beweise: $\overline{AT} \cdot \overline{BT} = \overline{DT} \cdot \overline{CT}$

Lösung: (a) Die Winkel der beiden Dreieecke bei A und D sind nach dem Umfangswinkelsatz gleich, den Winkel bei T haben beide gemeinsam.

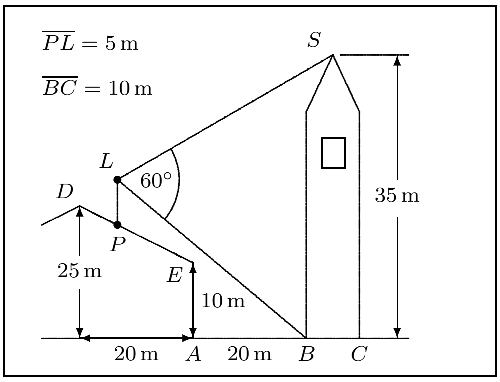
(b) Wegen der Ähnlichkeit gilt $\frac{\overline{AT}}{\overline{DT}} = \frac{\overline{CT}}{\overline{BT}}$

8.3. Anwendungaufgaben mit Faßkreisbögen

1. Auf einem Kreis sind zwei Punkte A und B gegeben. Welches dem Kreis einbeschriebene Dreieck ABC hat den größten Flächeninhalt? Begründe.

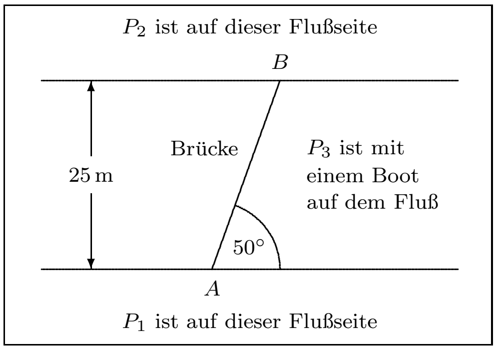
Lösung: Die beiden zu AB parallelen Kreistangenten berühren den Kreis in zwei Punkten C und C'. C ist der Punkt der von AB den größeren Abstand hat (zwei Lösungen, falls AB Zentrale ist).

2. Auf dem Dach eines Hauses soll ein Scheinwerfer L angebracht werden, der einen benachbarten Kirchturm voll ausleuchtet, der Öffnungswinkel des Lichtkegels beträgt 60° (siehe Abb.). P sei der Befestigungspunkt der Stange des Scheinwerfers auf dem Hausdach. Übertrage nebenstehende Zeichnung mit den angegebenen Größen im Maßstab 1 : 500 auf dein Blatt und konstruiere P!



Lösung: $L =$ Faßkreisbogen über $[BS]$ $\cap$ Parallele zu DE

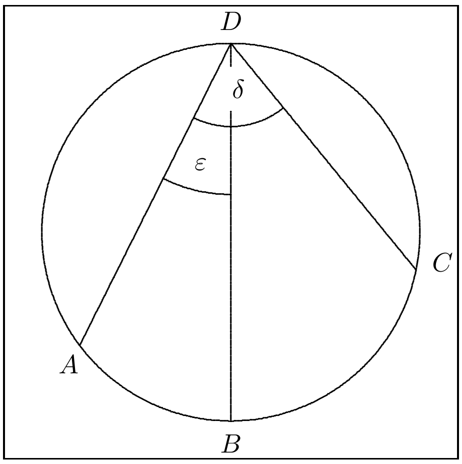
3. Die Fotographen P_1, P_2 und P_3 haben den Auftrag, die Sprengung der von A nach B führenden Brücke aufzunehmen. Jeder der drei Fotographen hat seine Kamera mit einem Zoomobjektiv ausgestattet, bei dem der Sehwinkel von 50° bis 110° stetig verändert werden kann. Die Aufnahme soll so gestaltet werden, daß die Punkte A und B gerade die Randpunkte des Bildes sind.



Wegen der verschieden starken Sprengladungen für die Brückenköpfe müssen die Sicherheitsabstände 20 m von A und 15 m von B eingehalten werden. Übertrage die (nicht maßstabsgetreue) Abbildung mit den richtigen Größen im Maßstab 1 : 500 auf dein Blatt und konstruiere die möglichen Standorte der drei Fotographen, die ganz zum Schluß noch verschiedenfarbig hervorgehoben werden sollen! Verwende dein Arbeitsblatt für die Zeichnung im Querformat!

Lösung: $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} 6\,\text{cm}$
$M_1 =$ Äußeres des Faßkreisbogenpaares über $[AB]$ zum Winkel 110°
$M_2 =$ Inneres des Faßkreisbogenpaares über $[AB]$ zum Winkel 40°
$M_3 =$ Äußeres des Kreises um A mit Radius 3 cm
$M_4 =$ Äußeres des Kreises um B mit Radius 7 cm
Lösung $= M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap$ jeweilige Flußseite

4. Vier Satelliten A, B, C und D bewegen sich auf derselben kreisförmigen Umlaufbahn um die Erde. Von D aus erscheint $[AC]$ unter dem Winkel $\delta = 70°$, $[AB]$ unter $\varepsilon = 30°$. Unter welchem Winkel erscheint
   (a) $[AC]$ von B aus gesehen?
   (b) $[AB]$ von C aus gesehen?
   (c) $[BC]$ von A aus gesehen?
   (d) $[BC]$ von D aus gesehen?



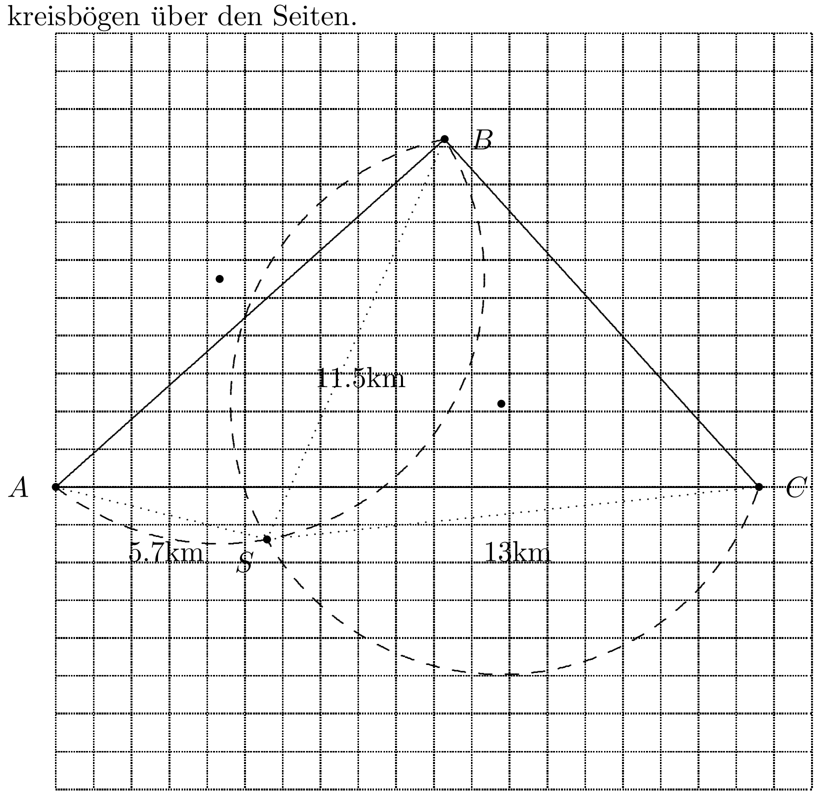
Lösung: (a) 110° ; (b) 30° ; (c) 40° ; (d) 40°

5. Die Entfernungen eines Schiffes S von drei Leuchttürmen A, B und C sollen bestimmt werden. Zur Positionsbestimmung wurden die Winkel $\sphericalangle BSA = 100^0$ und

$\sphericalangle CSB = 60^0$ gemessen, die Abstände der Leuchttürme zueinander sind bekannt: $\overline{AB} = 13,8\,\text{km}$, $\overline{BC} = 12,4\,\text{km}$, $\overline{AC} = 18,6\,\text{km}$.

Bestimme die Entfernungen mit Hilfe einer sauberen Konstruktion ($1\,\text{km} \mathrel{\widehat{=}} 0,5\,\text{cm}$).

Lösung: Konstruktion von ABC aus den drei Seitenlängen und die Konstruktion von zwei Faßkreisbögen über den Seiten.



6. (a) Konstruiere zur Strecke $\overline{AC} = 9$ cm *einen* Fasskreisbogen zum Umfangswinkel $\delta = \sphericalangle\ ADC = 75°$.

   (b) Konstruiere in dieselbe Zeichnung zwei Sehnenvierecke $ABCD_1$ und $ABCD_2$ mit

$$\beta = \sphericalangle\ CBA = 105° \text{ und } a = \overline{AB} = 5 \text{ cm}$$

   und der Eigenschaft, dass die Dreiecke ABC, ACD_1 und ACD_2 flächengleich sind. Zeiche zuerst eine Planfigur und begründe deinen Lösungsweg!

Lösung:

9. Flächenmessung

9.1. Verwandlungsaufgaben

1. Konstruiere ein zum Dreieck ABC mit $a = 7\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$ und $c = 8\,\text{cm}$ flächengleiches Dreieck $A'B'C'$ mit $\gamma' = \gamma$ und $a' = 5\,\text{cm}$!

Lösung: $C' = C$; B' liegt auf CB im Abstand a' von C; A' liegt auf CA und auf der Parallelen zu AB' durch B.

2. (a) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{AC} = 6$ cm und $\overline{BC} = 5$ cm.
   (b) Konstruiere unter Beibehaltung des Winkels β ein flächengleiches Dreieck $A'BC'$ mit $\overline{BC'} = 7$ cm und begründe die Richtigkeit deiner Lösung.

Lösung: $AC' \| A'C$

3. Konstruiere zu einem Dreieck ABC ein inhaltsgleiches Dreieck AB_2C_2 mit dem gleichen Winkel α, in dem eine der beiden Seiten, die α einschließen, eine vorgegebene Länge hat.

Lösung: $B_2C \parallel BC_2$

4. Gegeben ist das Dreieck ABC mit $c = 7$ cm, $\alpha = 60°$ und $\beta = 45°$. Verwandle es per Konstruktion unter Beibehaltung des Winkels γ in ein inhaltsgleiches Dreieck $A_1B_1C_1$ mit einer der folgenden Eigenschaften.
   (a) $h_b = 3$ cm
   (b) $a = 5$ cm
   (c) $b = 7$ cm

   Beginne für jede Teilaufgabe eine neue Zeichnung und fertige eine Konstruktionsbeschreibung.

Lösung:

5. Das Trapez $ABCD$ ($a \parallel c$) ist durch folgende Angaben festgelegt: $a = 5\,\text{cm}$, $c = 7\,\text{cm}$, $h = 4\,\text{cm}$ und $\alpha = 60^0$. Zeichne zunächst das Trapez und verwandle es durch Konstruktion in ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite die Länge $3,5\,\text{cm}$ hat.

Lösung: Das Trapez kann zunächst in ein Parallelogramm verwandelt werden. Mit einer ersten Scherung erreicht man, daß eine Höhe die gewünschte Länge hat, eine zweite verwandelt das Parallelogramm in ein Rechteck.

6. (a) Zeichne ein Parallelogramm $ABCD$ mit der Seitenlänge $a = 7\,\text{cm}$, der Diagonalen $\overline{AC} = 10\,\text{cm}$ und der Höhe $h_a = 5\,\text{cm}$.
   (b) Berechne den Abstand des Punktes B von AC.
   (c) Verwandle das Parallelogramm durch Konstruktion in ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite die Länge $4\,\text{cm}$ hat.
   (d) Berechne die zweite Seitenlänge dieses Rechtecks.

Lösung: (b) Abstand $3,5\,\text{cm}$, (c) $b = \frac{35}{4}\,\text{cm}$

7. Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 8 cm ist in eine inhaltsgleiche Raute zu verwandeln, bei der der Abstand zweier gegenüberliegender Seiten 4,5 cm beträgt! Saubere und genaue Konstruktion! Die einzelnen Verwandlungsschritte sind stichpunktartig anzugeben!

Lösung:

10. Zentrische Streckung

10.1. Reine Konstruktionsaufgaben

1. Zeichne das Dreieck ABC mit $A(0|0)$, $B(4|1)$ und $C(1|5)$ (Platzbedarf: $-4 \leqq x \leqq 8$, $-3 \leqq y \leqq 9$).
   (a) S bezeichne den Schwerpunkt von ABC. Die zentrische Streckung mit Zentrum S und Streckungsfaktor -2 bildet ABC auf $A'B'C'$ ab. Konstruiere das Bilddreieck und beschreibe dein Konstruktionsverfahren.
   (b) Begründe, warum C auf $A'B'$ liegen muß.

Lösung:

2. (a) Zeichne die Punkte $A(1|1)$, $B(8|1,5)$ und $C(4|5)$ in ein Koordinatensystem.
   (*Platzbedarf:* $0 \leq x \leq 13$; $0 \leq y \leq 20$)
   (b) Von einer ersten zentrischen Streckung $S_1(Z; \frac{4}{11})$ ist bekannt, daß sie A auf C abbildet. Konstruiere Z.
   (*Ergebnis:* $Z(5,75|7,25)$)
   (c) Mittels einer zweiten zentrischen Streckung $S_2(Z; -\frac{5}{4})$ wird nun das Dreieck ABC auf das Dreieck $A_2B_2C_2$ abgebildet.
   Konstruiere das Dreieck $A_2B_2C_2$.

Lösung:

3. Gegeben sind die Punkte $A(1|1)$, $B(5|1)$ und $C(5|4)$. Konstruiere das Bilddreieck bei der Ähnlichkeitsabbildung $S_{A;0,5} \circ S_{BC}$. Ist die Abbildung gleichsinnig oder gegensinnig?

Lösung: Sie ist gegensinnig.

4. In einem kartesischen Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) sind die Punkte $A(5|2)$, $B(1|5)$, $C(6|3)$, $D(4|5)$ gegeben.
   (a) A ist der Bildpunkt von B unter einer zentrischen Streckung $S(Z_1; 0,45)$. Konstruiere das Zentrum Z_1!

(b) Konstruiere die Zentren Z_2, Z_3 der Streckungen, die die Strecke $[AB]$ auf die dazu parallele Strecke $[CD]$ abbilden!

(c) k sei der Kreis um C mit Radius 2 cm. Konstruiere das Bild von k unter der zentrischen Streckung $S(B; -0,75)$!

Lösung:

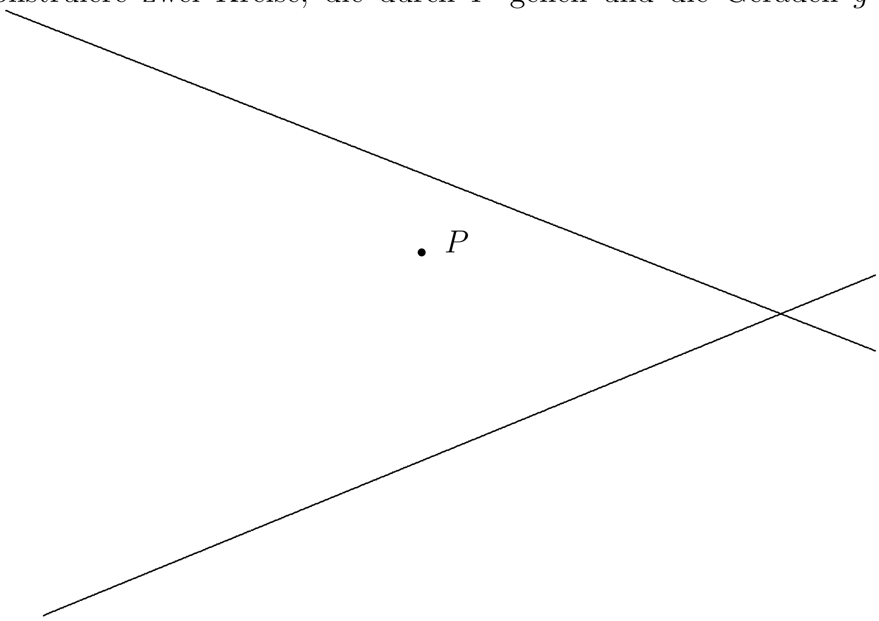
5. Der Kreis um $M(4|2,5)$ mit Radius $r = 2\,\text{cm}$ wird durch eine zentrische Streckung mit dem Streckungsfaktor $m = 1,5$ auf den Kreis mit dem Mittelpunkt $M'(9|5)$ abgebildet. Der Punkt A' sei der Bildpunkt des Kreispunktes $A(5|4,2)$. Ermittle graphisch die Koordinaten des Punktes A'!

Lösung: $A'(10,5|7,5)$

6. Gegeben ist das Dreieck ABC durch $c = 4,5\,\text{cm}$, $b = 4,2\,\text{cm}$ und $a = 3,3\,\text{cm}$. Es wird durch die zentrische Streckung $S(A|m)$ mit $m < 0$ auf das Dreieck $A'B'C'$ abgebildet. Vom Bilddreieck $A'B'C'$ kennt man die Länge der Seitenhalbierenden $s'_a = 5,5\,\text{cm}$. Konstruiere in einer sauberen und genauen Konstruktion das Dreieck $A'B'C'$!

Lösung:

7. Konstruiere zwei Kreise, die durch P gehen und die Geraden g und h berühren:



Lösung:

10.2. Rein rechnerische Aufgaben

1. Ein Dreieck ABC mit $\overline{AC} = 5\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 6\,\text{cm}$ und $\gamma = 56^o$ wird durch die zentrische Streckung $S_{B;m}$ auf das Dreieck A'BC' abgebildet. Bekannt sei ferner, daß $m > 1$ und daß $\overline{CC'} = 1,5\,\text{cm}$. Fertige eine Skizze und berechne dann m, $\overline{A'C'}$ und $\gamma\,'$.

Lösung: $m = 1,25$; $\overline{A'C'} = 6,25\,\text{cm}$; $\gamma\,' = 56^o$

2. Das Dreieck ABC mit $b = 6\,\text{cm}$ und $h_b = 12\,\text{cm}$ wird durch eine zentrische Streckung auf das Dreieck A'B'C' mit dem Flächeninhalt 49cm^2 abgebildet. Berechne die Länge der Seite b' im Bilddreieck.

Lösung: $b' = 7\,\text{cm}$

3. Gegeben ist eine Raute $ABCD$ vom Flächeninhalt $80\,\text{cm}^2$. S sei der Diagonalenschnittpunkt, M der Mittelpunkt der Strecke $[AS]$. Es gelte $\overline{AM} = 3,2\,\text{cm}$.
   (a) Zeige durch Rechnung, daß die Raute $ABCD$ kein Quadrat ist!

   Durch die zentrische Streckung $S(M;k)$ mit negativem Streckfaktor k wird die Raute $ABCD$ auf die Raute $A'B'C'D'$ abgebildet.

   (b) Kann die Raute $A'B'C'D'$ ein Quadrat sein? Begründe deine Antwort kurz!
   (c) Der Flächeninhalt der Raute $A'B'C'D'$ beträgt $245\,\text{cm}^2$. Berechne den Streckfaktor k! (Ergebnis: $k = -\frac{7}{4}$)
   (d) Berechne die Streckenlänge AA'!

Lösung: (a): $\overline{AC} = 12,8\,cm \neq 12,5\,cm = \overline{BD}$ (d): $\overline{AA'} = 8,8\,cm$

4. Eine zentrische Streckung mit Zentrum Z und Streckungsfaktor $m = 2,5$ bildet A auf A' und B auf B' ab.
   (a) Berechne aus $\overline{AA'} = 6\,\text{cm}$, $\overline{A'B'} = 10\,\text{cm}$ und $\overline{ZB} = 3\,\text{cm}$ die Abstände $\overline{ZA'}$, $\overline{AB}$ und $\overline{BB'}$.
   (b) Für einen dritten Punkt C gilt $\overline{A'C'} = 5\,\text{cm}$. Begründe unter Zuhilfenahme einer Skizze, warum diese Information nicht genügt, um $\overline{ZC}$ zu berechnen.

Lösung: (a) $\overline{ZA'} = 10\,\text{cm}$, $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$, $\overline{BB'} = 4,5\,\text{cm}$.
(b) Der Abstand $\overline{ZC'}$ ist nicht festgelegt.

10.3. Umfangreichere Aufgaben (Zeichnung/Rechnung)

1. Zeichne zwei parallele Geraden g und g' im Abstand von 2 cm und wähle zwei Punkte $A \in g$ und $A' \in g'$, die einen gegenseitigen Abstand von 3 cm haben. (Hinweis: Fertige zunächst eine Planskizze und berücksichtige den Platzbedarf der folgenen Teilaufgaben.)
   (a) Konstruiere das Zentrum Z einer zentrischen Streckung mit Streckungsfaktor $m = \frac{3}{5}$, die A auf A' abbildet.
   (b) Das gemeinsame Lot von Z auf g und g' schneidet diese in L und L'. Berechne $\overline{ZL'}$ und $\overline{ZL}$.

Lösung: $\overline{ZL} = 3\,\text{cm}$, $\overline{ZL'} = 5\,\text{cm}$,

2. Ein Dreieck ABC wird durch die zentrische Streckung $S(A; m_1 = 3,5)$ auf das Dreieck $A'B'C'$ abgebildet. Gegeben sind die Streckenlängen $\overline{AC} = 2,7\,\text{cm}$, $\overline{BB'} = 4,0\,\text{cm}$ und $\overline{B'C'} = 6,3\,\text{cm}$.
   (a) Fertige eine sauber beschriftete Skizze und berechne dann $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ und $\overline{CC'}$.
   (b) Berechne den Abbildungsfaktor m_2 der Streckung mit dem Zentrum B', die A auf B abbildet.

Lösung: (a) $\overline{BC} = 1,8\,\text{cm}$; $\overline{AB} = 1,6\,\text{cm}$; $\overline{CC'} = 6,75\,\text{cm}$ (b) $m_2 \approx 0,7$

3. g und g' sind zwei parallele Geraden im Abstand 2 cm. Die Gerade l ist ein gemeinsames Lot und schneidet sie in den Punkten A und A'.
   (a) Konstruiere das Zentrum Z einer zentrischen Streckung mit Streckungsfaktor $m = \frac{7}{4}$, die A auf A' abbildet.
   (b) Berechne $\overline{ZA}$.
   (c) B liegt auf g und es ist $\overline{AB} = 3\,\text{cm}$. Berechne die Flächeninhalte von ZAB, $ZA'B'$ und ZAB'.

Lösung: $\overline{ZA} = \frac{8}{3}\,\text{cm}$, $A_{ZAB} = 4\,\text{cm}^2$, $A_{ZA'B'} = \frac{49}{4}\,\text{cm}^2$, $A_{ZA'B} = 7\,\text{cm}^2$

4. Gegeben ist eine zentrische Streckung $S\left(Z; m = \frac{5}{3}\right)$ und eine Strecke $[PQ]$ mit $\overline{PQ} = 3,6\,\text{cm}$, wobei Z von $[PQ]$ einen Abstand von 3,0 cm hat.
   (a) Zeichne die Strecke $[PQ]$, ein mögliches Zentrum Z und konstruiere dann den Bildpunkt P' von P unter $S(Z; m)$!
   (b) Konstruiere auf möglichst einfache Weise den Bildpunkt Q' von Q! Beschreibe kurz dein Vorgehen!

(c) Berechne $\overline{P'Q'}$!

(d) Berechne die Flächeninhalte der Dreiecke ZPQ und $ZP'Q'$!

(e) Berechne den Streckfaktor m^* der zentrischen Streckung mit Zentrum P', die P auf Z abbildet!

Lösung: (b): Parallele zu $[PQ]$ durch P' schneidet ZQ in Q'
(c): $6,0\,cm$
(d): $A_{ZPQ} = 5,4\,cm^2$; $A_{ZP'Q'} = 15\,cm^2$
(e): $m^* = 2,5$

5. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC} = 8\,\text{cm}$.

   (a) Konstruiere das Zentrum Z einer zentrischen Streckung $S(Z; \frac{2}{7})$, die C auf B abbildet. Beschreibe kurz Deine Konstruktion.
   (*Platzbedarf für die Konstruktion: 1 Seite*)

   (b) Nun wird das Dreieck ABC durch eine weitere zentrische Streckung mit unbekanntem Streckungsfaktor auf ein Dreieck $A'B'C'$ abgebildet, das den Flächeninhalt $18\,\text{cm}^2$ besitzt. Berechne diesen Abbildungsfaktor.
   (*Hier ist keine Konstruktion verlangt!*)

Lösung: $m = \pm\frac{3}{4}$

6. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei A und den Kathetenlängen $\overline{AC} = 5\,\text{cm}$ und $\overline{AB} = 7\,\text{cm}$. Durch die zentrische Streckung $S(A; m)$ mit $m < 0$ werde B in B' abgebildet, so daß $\overline{BB'} = 11\,\text{cm}$.

   (a) Erstelle eine saubere Zeichnung und ergänze diese fortlaufend!

   (b) Berechne den Streckfaktor m!

   (c) Konstruiere möglichst geschickt das Bilddreieck $A'B'C'$ des Dreiecks ABC unter $S(A; m)$! Welche Eigenschaft(en) der zentrischen Streckung werden dabei verwendet?

   (d) Berechne zunächst den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und dann, ohne erneute Anwendung der Flächeninhaltsformel für Dreiecke, den Inhalt des Dreiecks $A'B'C'$!

Lösung: (b): $-\frac{4}{7}$ (d): $A_{ABC} = 17,5\,cm^2$; $A_{A'B'C'} = \frac{40}{7}\,cm^2$

7. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a = 4,0\,\text{cm}$, $b = 3,0\,\text{cm}$ und $c = 6,0\,\text{cm}$. Es wird durch eine zentrische Streckung $S(C; k)$ mit negativem Streckungsfaktor k abgebildet. Die Streckenlänge $\overline{AA'}$ beträgt $7\,\text{cm}$.

(a) Bestimme k und konstruiere das Bilddreieck $A'B'C'$.
(*Platzbedarf: Halbe Seite*)

(b) Das Bilddreieck $A'B'C'$ hat den Flächeninhalt $9,6\,\text{cm}^2$. Berechne damit die Länge der Höhe h_c des ursprünglichen Dreiecks ABC.

Lösung: $k = -\frac{4}{3}$; $h_c = 1,8\,\text{cm}$

8. Gegeben ist das Dreieck ABC durch $\overline{AB} = 6,4\,\text{cm}$; $\alpha = 70°$; Höhe $h_{AB} = 3,5\,\text{cm}$. M sei der Mittelpunkt von $[AB]$.

   (a) Konstruiere das Dreieck ABC!

   (b) Durch eine zentrische Streckung $S(M;k)$ mit negativem Streckfaktor k werde das Dreieck ABC auf das Dreieck $A'B'C'$ abgebildet, wobei der Flächeninhalt des Bilddreiecks $28,672\,\text{cm}^2$ beträgt. Berechne den Streckfaktor k!
   (Ergebnis: $-1,6$)

   (c) Berechne die Höhe $h_{A'B'}$ des Bilddreiecks $A'B'C'$!

   (d) Konstruiere das Bilddreieck $A'B'C'$, aufbauend auf der Konstruktion in Teilaufgabe (a)!

Lösung: (c): $5,6\,cm$

9. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a = 4,0\,\text{cm}$, $b = 3,0\,\text{cm}$ und $c = 6,0\,\text{cm}$. Es wird durch eine zentrische Streckung $S_{C;m}$ mit negativem Streckungsfaktor m abgebildet. Die Streckenlänge $\overline{AA'}$ beträgt 7 cm.

   (a) Konstruiere das Bilddreieck A'B'C' und bestimme m.
   (Platzbedarf: halbe Seite, Dreieck ABC darin in der Mitte)

   (b) Das Bilddreieck A'B'C' hat den Flächeninhalt $A' = 9,6\,\text{cm}^2$.
   Berechne damit die Länge der Höhe h_c des ursprünglichen Dreiecks ABC!

   (c) Konstruiere nun (in der alten Zeichnung) das Bilddreieck A"B"C" bei der zentrischen Streckung $S_{C;\frac{15}{7}}$.

Lösung: (a) $m = -\frac{4}{3}$ (b) $h_c = 1,8\,\text{cm}$

10. In einem Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) ist durch die Punkte $A(0|2)$, $B(4|0)$, $C(4|9)$ und $D(0|5)$ ein Trapez $ABCD$ gegeben.

    (a) A ist das Bild des Punktes B unter einer zentrischen Streckung $S(Z; m = 1,6)$. Konstruiere das Streckzentrum Z!

    (b) Das Trapez $ABCD$ ist das Bild eines Vierecks unter der in Teilaufgabe (a) vorgegebenen Streckung $S(Z;m)$. Konstruiere das Originalviereck!

(c) Berechne den Flächeninhalt des Originalvierecks in Teilaufgabe (b)!

(d) Der Diagonalenschnittpunkt des Trapezes $ABCD$ ist das Zentrum einer zentrischen Streckung, welche den Punkt A auf den Punkt C abbildet. Berechne den Streckfaktor, ohne irgendwelche Streckenlängen zu messen!

Lösung: (c): $\frac{75}{8}\,cm^2$
(d): Streckfaktor: -3

11. Gegeben ist das Dreieck ABC durch $\overline{AB} = 12\,\text{cm}$; $h_{AB} = 7\,\text{cm}$; $\alpha = 40°$. F sei der Fußpunkt der Höhe h_{AB}.

(a) Konstruiere das Dreieck ABC!

(b) Der Punkt D teilt die Strecke $[CF]$ außen im Verhältnis $8:3$. Konstruiere D und berechne anschließend $\overline{DF}$!
(Ergebnis: $\overline{DF} = 4,2\,\text{cm}$)

(c) D ist der Bildpunkt von C unter einer zentrischen Streckung $S(F;m)$, wobei F der obengenannte Höhenfußpunkt ist. Konstruiere möglichst geschickt das Bilddreieck $A'B'C'$ des Dreiecks ABC unter $S(F;m)$!

(d) Berechne folgende Größen:
Abbildungsfaktor m, Streckenlänge $\overline{A'B'}$, Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C'$!

(e) Die Strecke $[BC]$ kann als Bild der Strecke $[B'C']$ unter einer zentrischen Streckung $S(Z;k)$ mit positivem Streckfaktor k aufgefaßt werden. Konstruiere Z und gib den Wert von k an, ohne irgendwelche Streckenlängen zu messen!

(f) P sei der Schnittpunkt der Geraden ZC und AD. Kann das Dreieck PZD das Bilddreieck von Dreieck PCA unter einer zentrischen Streckung sein? Begründe kurz deine Antwort!

Lösung: (d): $m = -0,6$; $A_{A'B'C'} = 15,12\,cm^2$; $\overline{A'B'} = 7,2\,cm$
(e): $k = \frac{5}{3}$
(f): nein, da $AC \nparallel ZD$

12. Gegeben ist ΔABC mit $a = 3\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$ und $c = 5\,\text{cm}$. Eine zentrische Streckung mit dem Zentrum A und dem Faktor $k > 1$ führt ΔABC in ΔAB′C′ über. k ist so gewählt, dass $\alpha = \sphericalangle \text{BAC} = \sphericalangle \text{BC'B'}$ gilt.

(a) Konstruiere ΔABC, die Punkte B′ und C′ und zeichne die Strecke [BC′] ein.

(b) Suche alle ähnlichen Dreiecke in der konstruierten Figur.

(c) Berechne k und $d = \overline{\text{BC'}}$. Rechne zuerst allgemein und setzte erst in die Endergebnisse Zahlenwerte ein.

Lösung: (a) $\sphericalangle C'BC = \alpha$

(b) $\Delta ABC \sim \Delta AB'C' \sim \Delta C'B'B \;\;,\;\; \Delta ABC' \sim \Delta BCC'$

(c) $x = \overline{BB'} = (k-1)\,c\;,\;\; \dfrac{x}{k\,a} = \dfrac{a}{c} \quad\Longrightarrow\quad k = \dfrac{c^2}{c^2 - a^2} = \dfrac{25}{16}$

$\dfrac{d}{k\,a} = \dfrac{b}{c} \;\;,\;\; d = \dfrac{a\,b\,c}{c^2 - a^2} = \dfrac{45}{8}$

11. Kegelschnitte

1. Wir stellen uns einen Punkt P vor, der sich auf einer Ellipsenbahn (Halbachsen $b \leqq a$) um einen der Brennpunkte bewegt. Der kleinste bzw. größte Abstand von diesem wird mit $r_{\min}$ bzw. $r_{\max}$ bezeichnet. Begründen Sie: $\sqrt{r_{\min} \cdot r_{\max}} = b$.

Lösung:

2. Die Achsen einer Ellipse mit dem Scheitelpunkt $A_1(-5|0)$ liegen auf den Koordinatenachsen.
   (a) Bestimmen Sie die Mittelpunktsgleichung der Ellipse, wenn der Punkt $P(3|2)$ auf der Ellipse liegt.
   (b) Begründen Sie geometrisch, warum der Punkt $Q(3|-2)$ ebenfalls auf der Ellipse liegt.
   (c) Die Punkte P und Q bilden zusammen mit den beiden Brennpunkten ein Viereck. Bestimmen Sie auf möglichst einfache Art dessen Umfang und begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: (a) $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{(2{,}5)^2} = 1$

(b) Symmetrie zur x-Achse

(c) $4 \cdot a = 20$

12. Sphärische Trigonometrie

12.1. Großkreise

1. Berechnen Sie für München ($\lambda = 11{,}5°$,$\phi = 48{,}1°$), Leningrad ($\lambda = 30{,}2°$,$\phi = 59{,}6°$) und Sydney ($\lambda = 151{,}1°$,$\phi = -33{,}5°$) jeweils den Abstand zum Nordpol, zum Äquator und zum Südpol.

Lösung:

München:	$d_{Ä} = 5348\,\text{km}$, $d_N = 4658\,\text{km}$, $d_S = 15354\,\text{km}$;
Leningrad:	$d_{Ä} = 6626\,\text{km}$, $d_N = 3380\,\text{km}$, $d_S = 16632\,\text{km}$
Sydney:	$d_{Ä} = 3724\,\text{km}$, $d_N = 13730\,\text{km}$, $d_S = 6282\,\text{km}$

2. Geben Sie für die folgenden Meridiane die Lage des Links- und Rechtspols an.
   (a) Nullmeridian (Orientierung von Süd nach Nord)
   (b) Meridian zu 50° ö. Länge (Orientierung von Süd nach Nord)
   (c) Meridian zu 130° ö. Länge (Orientierung von Nord nach Süd)
   (d) Meridian zu 100° w. Länge (Orientierung von Süd nach Nord)
   (e) Meridian zu 70° ö. Länge (Orientierung von Nord nach Süd)

Lösung:
(a) Linkspol: geogr. Breite $\phi = 0°$, geogr. Länge $\lambda = 90°$ ost
Rechtspol: $\phi = 0°$, $\lambda = 90°$ west
(b) Linkspol: $\phi = 0°$, $\lambda = 140°$ ost
Rechtspol: $\phi = 0°$, $\lambda = 40°$ west
(c) Linkspol: $\phi = 0°$, $\lambda = 40°$ ost
Rechtspol: $\phi = 0°$, $\lambda = 140°$ west
(d) Linkspol: $\phi = 0°$, $\lambda = 10°$ west
Rechtspol: $\phi = 0°$, $\lambda = 170°$ ost
(e) Linkspol: $\phi = 0°$, $\lambda = 20°$ west
Rechtspol: $\phi = 0°$, $\lambda = 160°$ ost

3. Geben Sie für den Schnittpunkt des angegebenen Meridians mit dem Äquator die zugehörigen Links- und Rechtspolaren an.
   (a) Meridian zu 30° ost
   (b) Meridian zu 70° west

(c) Meridian zu 130° ost

(d) Meridian zu 170° ost

(e) Meridian zu 120° west

Lösung:
(a) Linkspolare: Meridian zu 120° ost
Rechtspolare: Meridian zu 60° west

(b) Linkspolare: Meridian zu 20° ost
Rechtspolare: Meridian zu 160° west

(c) Linkspolare: Meridian zu 140° west
Rechtspolare: Meridian zu 40° ost

(d) Linkspolare: Meridian zu 100° west
Rechtspolare: Meridian zu 80° ost

(e) Linkspolare: Meridian zu 30° west
Rechtspolare: Meridian zu 150° west

4. In der Ebene kann eine Parallele folgendermaßen definiert weren:
Zwei Geraden heißen zueinander parallel, wenn es eine dritte Gerade gibt, die auf beiden senkrecht steht.
Läßt sich diese Definition auf die Kugel übertragen?

Lösung: Den Geraden entsprechen auf der Kugel Großkreise (kürzester Verbindung zweier Punkte)! Steht ein Großkreis auf zwei anderen Großkreisen senkrecht, so schneiden sich diese in seinem Pol. Also läßt sich die Definition nicht auf die Kugel übertragen.

12.2. Kleinkreise

1. Berechnen Sie den Radius des Breitenkreises durch München ($\lambda = 11{,}5°$, $\phi = 48{,}1°$), Leningrad ($\lambda = 30{,}2°$, $\phi = 59{,}6°$) und Sydney ($\lambda = 151{,}1°$, $\phi = -33{,}5°$).

Lösung: München: $4254km$, Leningrad: $3223km$, Sydney: $5312km$

2. Mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich München ($\lambda = 11{,}5°$, $\phi = 48{,}1°$), Leningrad ($\lambda = 30{,}2°$, $\phi = 59{,}6°$) und Sydney ($\lambda = 151{,}1°$, $\phi = -33{,}5°$) in Folge der Erddrehung?

Lösung: $v = \frac{2r\pi}{24h} \Rightarrow v_M = 1114\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_L = 844\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_S = 1391\frac{\text{km}}{\text{h}}$

3. (a) Sie stehen am Nordpol und gehen 100 m nach Süden, 100 m nach Osten und 100 m nach Norden. Wo stehen Sie am Ende?
   (b) Sie gehen 1000 km nach Süden, 1000 km nach Osten, 1000 km nach Norden und 1000 km nach Westen und sind dann wieder am Ausgangspunkt. Wo ist der Ausgangspunkt?

Lösung: (a) Am Nordpol
(b) 500 km nördlich des Äquators

4. Ein Pilot fliegt mit seiner Maschine tausend Kilometer nach Süden, dann tausend Kilometer nach Osten und anschließend noch tausend Kilometer nach Norden und landet genau wieder am Startpunkt S.
   (a) An welchem Punkt S ist der Pilot gestartet?
   (b) Eine andere Lösung von Teilaufgabe (a)!
   (c) Noch viele ganz andere Lösungen!

   Geben Sie in jedem Fall die Koordinaten von S und den Abstand von S zur Erdachse an!

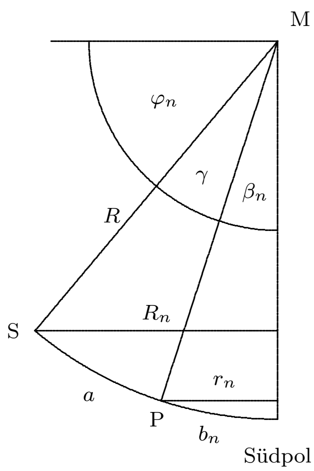
Lösung: (a) S (λ|90°) (Nordpol)
(b) Siehe Lösung zu (c) mit $n = 1$.

(c) Der Pilot fliegt $a = 1000\,\text{km}$ nach Süden, umrundet dann den Südpol n-mal auf einem Kreis mit dem Umfang $\frac{a}{n}$ und fliegt anschließend 1000 km nach Norden zu S. Der Radius des Kreises ist

$$r_n = \frac{a}{2\,n\,\pi}$$

$$\beta_n = \arcsin\frac{r_n}{R}$$

$$b_n = R \cdot \arcsin\frac{r_n}{R}$$



$$\gamma = \frac{a}{R} = \frac{1000}{6370} = 0{,}157 = 8{,}99°$$

$$\text{S}\,(\lambda|\varphi_n) \quad \text{mit} \quad \varphi_n = \gamma + \beta_n - \frac{\pi}{2}$$

$$R_n = R \cdot \sin(\gamma + \beta_n)$$

n	1	2	3	...	∞
φ_n	−79,57°	−80,29°	−80,53°	...	81,01°
R_n	1153 km	1074 km	1048 km	...	996 km

5. Wo liegen auf der Erde die Punkte, deren sphärischer Abstand vom Nordpol
   (a) 7000 km beträgt?
   (b) 700 km beträgt?
   (c) 70 km beträgt?
   (d) Berechnen Sie für die Teilaufgaben (a), (b) und (c) den ebenen Radius des Breitenkreises und vergleichen Sie ihn mit den sphärischen Abständen.

   Erdradius: 6370 km

Lösung: (a) $\frac{\alpha}{360°} \cdot 2r\pi = d \Rightarrow \alpha = \frac{d \cdot 360°}{2r\pi} = 63° \Rightarrow$ Ort liegen am dem Breitenkreis mit 27,0° nördlicher Breite.
(b) $\alpha = 6{,}3° \Rightarrow$ Ort liegen am dem Breitenkreis mit 83,7° nördlicher Breite.
(c) $\alpha = 0{,}63° \Rightarrow$ Ort liegen am dem Breitenkreis mit 89,37° nördlicher Breite.
(d) $r_a = r_{\text{Erde}} \cos\phi = 5674\,\text{km}$, $r_b = 699\,\text{km}$, $r_c = 70{,}0\,\text{km}$
Je kleiner der sphärische Abstand zum Pol, umso besser stimmt er mit dem Radius des Breitenkreises überein (Krümmung spielt eine immer geringere Rolle).

6. Wo liegen auf der Erde die Punkte, deren sphärischer Abstand vom Äquator
   (a) 6000 km beträgt?
   (b) 3000 km beträgt?
   (c) 300 km beträgt?
   (d) Berechnen Sie für die Teilaufgaben (a), (b) und (c) jeweils den geradlinigen Abstand und vergleichen Sie ihn mit dem sphärischen Abstand.

Lösung: (a) $\phi = \frac{d \cdot 360°}{2r\pi} = 54°$
(b) $\phi = 27°$
(c) $\phi = 2{,}7°$
(d) $r_a = 5781\,\text{km}$, $r_b = 2972\,\text{km}$, $r_c = 299{,}97\,\text{km} \approx 300\,\text{km}$
Je kürzer der Weg, umso weniger macht sich die Krümmung bemerkbar.

7. Berechnen Sie den sphärischen Radius eines Kleinkreises mit Radius r auf einer Kugel mit Radius R für
   (a) $r = 0{,}4$ und $R = 5$
   (b) $r = 3{,}3$ und $R = 5$
   (c) $r = 500{,}0\text{km}$ und $R = 6370\text{km}$
   (d) $r = 2000\text{km}$ und $R = 6370\text{km}$

(e) $r = 0{,}5$ und $R = 1$

(f) $r = 0{,}8$ und $R = 1$

Lösung: (a) $\sin\alpha = \frac{r}{R} = 0{,}08 \Rightarrow \alpha = 4{,}59° \Rightarrow r_s = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2R\pi = 0{,}4$

(b) $r_s = 3{,}6$

(c) $r_s = 500{,}5\text{km}$

(d) $r_s = 2034\text{km}$

(e) $r_s = 0{,}5236$

(f) $r_s = 0{,}9273$

12.3. Kugelzweieck

1. Wie lange ist eine Seite eines Kugelzweiecks auf
   (a) der Einheitskugel.
   (b) der Erde ($r = 6370\text{km}$)
   (c) einer Kugel mit Radius $r = 12\text{m}$

Lösung: (a) π

(b) 20012km

(c) 38m

2. Berechnen Sie die Flächen der folgenden Kugelzweiecke.
   (a) $\alpha = 60°$ und $r = 5\text{m}$
   (b) $\alpha = 27°$ und $r = 700\text{m}$
   (c) $\alpha = 123°$ und $r = 45\text{km}$
   (d) $\alpha = 77°$ und $r = 77\text{km}$

Lösung: (a) $A = 52\text{m}^2$

(b) $A = 461814\text{m}^2 = 0{,}46\text{km}^2$

(c) $A = 8{,}69 \cdot 10^3\text{km}^2$

(d) $A = 16 \cdot 10^3\text{km}^2$

3. Wie verändert sich die Fläche A eines Kugelzweiecks, wenn
   (a) der Kugelradius verdoppelt wird?
   (b) der Winkel verdreifacht wird?

(c) der Kugelradius verdreifacht und der Winkel verdoppelt wird?
(d) der Kugelradius halbiert und der Winkel verdreifacht wird?
(e) der Kugelradius verdreifacht und der Winkel halbiert wird?

Lösung: (a) $A' = 4A$
(b) $A' = 3A$
(c) $A' = 18A$
(d) $A' = \frac{3}{4}A$
(e) $A' = \frac{9}{2}A$

4. Berechnen Sie die Flächen folgender Kugelzweiecke:
   (a) $\alpha = 60°$, r=1
   (b) $\alpha = 120°$, r=5
   (c) $\alpha = 0{,}700 \cdot \pi$, r=15,0
   (d) $\alpha = 1{,}23 \cdot \pi$, r=25,0

Lösung: (a) $A = \frac{60}{360} \cdot 4\pi = 2{,}1$
(b) $A = \frac{120}{360} \cdot 4 \cdot 5^2\pi = 105$
(c) $A = \frac{0{,}7\pi}{2\pi} \cdot 4 \cdot 15^2\pi = 990$
(d) $A = \frac{1{,}23\pi}{2\pi} \cdot 4 \cdot 25^2\pi = 4{,}83 \cdot 10^3$

5. Wie verändert sich die Fläche eines Kugelzweiecks, wenn
   (a) der Kugelradius verdoppelt wird?
   (b) der Winkel durch drei geteilt wird?
   (c) der Kugelradius verdoppelt und der Winkel halbiert wird?
   (d) der Kugelradius halbiert und der Winkel halbiert wird?
   (e) der Kugelradius verdreifacht und der Winkel halbiert wird?

Lösung: (a) $A' = 4A$
(b) $A' = \frac{1}{3}A$
(c) $A' = 2A$
(d) $A' = \frac{1}{8}A$
(e) $A' = 4\frac{1}{2}A$

6. Welchen Teil der Kugeloberfläche umfaßt ein Kugelzweieck mit $\alpha = 15°$, $45°$, $135°$, $165°$ und $\alpha = 315°$.

Lösung: $\frac{1}{24}$A, $\frac{1}{8}$A, $\frac{3}{8}$A, $\frac{11}{24}$A und $\frac{7}{8}$A.

7. Die Längenkreise durch die angegebenen Städte teilen die Erdoberfläche in vier Kugelzweiecke. Berechnen Sie die Flächen der Kugelzweiecke.
   (a) München ($\lambda = 11{,}5°$ ost, $\phi = 48{,}1°$) und
   New York ($\lambda = 74{,}0°$ west, $\phi = 40{,}4°$)
   (b) Sidney ($\lambda = 151{,}1°$ ost, $\phi = -33{,}5°$) und
   Kapstadt ($\lambda = 18{,}2°$ ost, $\phi = -33{,}6°$)
   (c) Buenoe Aires ($\lambda = 58{,}3°$ west, $\phi = -34{,}4°$) und
   Madrid ($\lambda = 3{,}4°$ west, $\phi = 40{,}2°$)

Lösung: (a) $A_1 = \frac{85{,}5}{360} \cdot 4\pi \cdot (6368\text{km})^2 = 1{,}21 \cdot 10^8\text{km}^2$
$A_2 = 2\pi \cdot (6368\text{km})^2 - A_1 = 1{,}34 \cdot 10^8\text{km}^2$
(b) $A_1 = \frac{132{,}9}{360} \cdot 4\pi \cdot (6368\text{km})^2 = 1{,}88 \cdot 10^8\text{km}^2$, $A_2 = 6{,}67 \cdot 10^7\text{km}^2$
(c) $A_1 = \frac{54{,}9}{360} \cdot 4\pi \cdot (6368\text{km})^2 = 7{,}77 \cdot 10^7\text{km}^2$, $A_2 = 1{,}77 \cdot 10^8\text{km}^2$

12.4. Kugeldreieck

1. Berechnen Sie die Fläche des vom Äquator, vom Nullmeridian und dem Längenkreis durch den angegebenen Ort begrenzten Kugeldreiecks. Geben Sie den sphärischen Exzeß des Dreiecks im Grad- und Bogenmaß an.
   (a) München ($\lambda = 11{,}5°$ ö. L., $\phi = 48{,}1°$)
   (b) New York ($\lambda = 74{,}0°$ w. L., $\phi = 40{,}4°$)
   (c) Moskau ($\lambda = 37{,}4°$ ö. L., $\phi = 55{,}5°$)

Lösung: (a) $A_\triangle = 0{,}81 \cdot 10^7\,\text{km}^2, \varepsilon = 11{,}5° = 0{,}2$
(b) $A_\triangle = 5{,}2 \cdot 10^7\,\text{km}^2, \varepsilon = 74° = 1{,}29$
(c) $A_\triangle = 2{,}6 \cdot 10^7\,\text{km}^2, \varepsilon = 37{,}4° = 0{,}65$

2. Welchen prozentualen Anteil der Kugeloberfläche nimmt ein Kugeldreieck mit
   (a) $\alpha = 113°12', \beta = 77°45'$ und $\gamma = 55°55'$ ein?
   (b) $\alpha = 123°43'13'', \beta = 47°15'44''$ und $\gamma = 144°15'15''$ ein?

Lösung: (a) 9,3%

(b) 19%

3. Welche Winkel hat ein gleichwinkliges Kugeldreieck ($\alpha = \beta = \gamma$), wenn die Fläche
   (a) $\frac{1}{8}$ der Kugeloberfläche beträgt.
   (b) $\frac{1}{6}$ der Kugeloberfläche beträgt.
   (c) 15% der Kugeloberfläche beträgt.
   (d) 20% der Kugeloberfläche beträgt.

Lösung: (a) $90°$
(b) $100°$
(c) $96°$
(d) $108°$

4. (a) Was ist die größtmögliche Fläche, die ein Kugeldreieck auf der Kugeloberfläche ($r = 1$) einnehmen kann? Begründen Sie ihre Antwort.
   (b) Zwischen welchen Werten liegt die Winkelsumme im Kugeldreieck?
   (c) Zwischen welchen Werten liegt die Winkelsumme im Kugelviereck?
   (d) Zwischen welchen Werten liegt die Winkelsumme im Kugelfünfeck?
   (e) Zwischen welchen Werten liegt die Winkelsumme im Kugel-n-eck?

Lösung: (a) $2\,\pi$
(b) $180° < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 3 \cdot 180°$
(c) $2 \cdot 180° < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 4 \cdot 180°$
(d) $3 \cdot 180° < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 5 \cdot 180°$
(e) $(n-2) \cdot 180° < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < n \cdot 180°$

5. (a) Gegeben ist folgendes Dreieck auf der Erde ($r = 6370km^2$):
   A : Südpol
   B : Schnittpunkt des Meridians zu $100°$ ö. Länge mit dem Äquator
   C : Schnittpunkt des Meridians zu $30°$ w. Länge mit dem Äquator
   Wo liegen die Ecken des Linkspolardreiecks $\triangle A'B'C'$ zu $\triangle ABC$ (Orientierung $A \to B \to C$)? Bezeichnen Sie die Ecken.
   (b) Berechnen Sie die Fläche des Polardreiecks.
   (c) Wo liegen die Ecken des Linkspolardreiecks $\triangle A''B''C''$ zu $\triangle A'B'C'$ (Orientierung $A' \to B' \to C'$)? Bezeichnen Sie die Ecken.

Lösung: (a) A': Nordpol
B': Schnittpunkt des Meridians zu 120° w. Länge mit Äquator
C': Schnittpunkt des Meridians zu 170° w. Länge mit Äquator

(b) Im Dreieck $\triangle ABC$ ist $a = 130°$, $b = c = 90° \Rightarrow \alpha' = 50°$, $\beta' = \gamma' = 90° \Rightarrow$ $A = \frac{50°+90°+90°-180°}{180°} \cdot (6370\,\mathrm{km})^2\pi = 3{,}5 \cdot 10^7\,\mathrm{km}^2$

(c) A'': Nordpol
B'': Schnittpunkt des Meridians zu 80° w. Länge mit Äquator
C'': Schnittpunkt des Meridians zu 150° ö. Länge mit Äquator

6. (a) In einem Kugeldreieck beträgt $a = 80°$ und $b = 120°$.
Welche Werte kann c annehmen?
Welche Werte kann die Fläche des Polardreiecks annehmen?

(b) In einem Kugeldreieck beträgt $a = 100°$ und $c = 110°$.
Welche Werte kann b annehmen?
Welche Werte kann die Fläche des Polardreiecks annehmen?

(c) In einem Kugeldreieck beträgt $\alpha = 160°$ und $\beta = 130°$.
Welche Werte kann γ annehmen?
Welche Werte kann die Fläche des Kugeldreiecks annehmen?

(d) In einem Kugeldreieck beträgt $\alpha = 170°$ und $\gamma = 150°$.
Welche Werte kann β annehmen?
Welche Werte kann die Fläche des Kugeldreiecks annehmen?

Lösung: (a) $a + b + c = 80° + 120° + c = 200° + c < 360° \Rightarrow c < 160°$
$\alpha' = 100°$, $\beta' = 60°$, $20° < \gamma' < 180°$
$\Rightarrow A = \frac{100°+60°+\gamma'-180°}{180°} \cdot r^2\pi \Rightarrow 0 < A < \frac{8}{9} \cdot r^2\pi$

(b) $a + b + c = 100° + b + 110° = 210° + b < 360° \Rightarrow b < 150°$
$\alpha' = 80°$, $\gamma' = 70°$, $30° < \beta' < 180°$
$\Rightarrow A = \frac{80°+\beta'+70°-180°}{180°} \cdot r^2\pi \Rightarrow 0 < A < \frac{5}{6} \cdot r^2\pi$

(c) $\alpha + \beta - 180° < \gamma \Rightarrow 110° < \gamma < 180° \Rightarrow 1\frac{2}{9}r^2\pi < A_\triangle < 1\frac{11}{18}r^2\pi$

(d) $\alpha + \gamma - 180° < \beta \Rightarrow 140° < \beta < 180° \Rightarrow 1\frac{5}{9}r^2\pi < A_\triangle < 1\frac{7}{9}r^2\pi$

7. Berechnen Sie für folgende Kugeldreiecke die fehlenden Seiten und Winkel:

(a) $\alpha = 90°$, $b = 60°$, $c = 100°$

(b) $\alpha = 90°$, $b = 140°$, $c = 100°$

(c) $\alpha = 40°$, $\beta = 90°$, $c = 70°$

(d) $\alpha = 40°$, $\beta = 90°$, $c = 110°$

Lösung: (a) $\beta = 60{,}38°$, $\gamma = 98{,}68°$, $a = 94{,}98°$

(b) $\beta = 139{,}57°$, $\gamma = 96{,}47°$, $a = 82{,}36°$

(c) $\gamma = 77{,}30°$, $a = 38{,}26°$, $b = 74{,}42°$

(d) $\gamma = 102{,}70°$, $a = 38{,}26°$, $b = 105{,}58°$

8. Berechnen Sie für folgende Dreiecke auf der Einheitskugel den Umfang des Polardreiecks:
   (a) $\alpha = 70°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 100°$
   (b) $\alpha = 120°$, $\beta = 80°$, $A = \frac{2}{3}\pi$
   (c) $\alpha = 110°$, $\gamma = 150°$, $A = \frac{8}{9}\pi$

Lösung: (a) $U = 250°$

(b) $\gamma = 100° \Rightarrow U = 240°$

(c) $\beta = 80° \Rightarrow U = 200°$

9. Berechnen Sie die Flächen folgender Sehnenvierecke $P_1P_2P_3P_4$ auf der Einheitskugel:
   (a) $\alpha_1 = 100°$, $\alpha_3 = 130°$
   (b) $\alpha_2 = 80°$, $\alpha_4 = 170°$

Lösung: (a) $A = \frac{2(\alpha_1+\alpha_3)-360°}{180°} \cdot \pi = \frac{5}{9}\pi$

(b) $A = \frac{2(\alpha_2+\alpha_4)-360°}{180°} \cdot \pi = \frac{7}{9}\pi$

10. Was kann über die Winkel in folgenden Sehnenvierecken $P_1P_2P_3P_4$ auf der Einheitskugel ausgesagt werden:
    (a) $\alpha_1 = 80°$, Fläche $A = \frac{5}{9}\pi$
    (b) $\alpha_2 = 130°$, Fläche $A = \frac{4}{9}\pi$
    (c) $P_1P_2 = 30°$, $P_2P_3 = 90°$, Radius des Umkreises $r = 50°$, Fläche $\frac{2}{3}\pi$
    (d) $P_2P_3 = 60°$, $P_3P_4 = 30°$, Radius des Umkreises $r = 60°$, Fläche $\frac{4}{9}\pi$

Lösung: (a) $A = \frac{2(\alpha_1+\alpha_3)-360°}{180°} \cdot \pi = \frac{5}{9}\pi \Rightarrow$
$\alpha_3 = (\frac{5}{9} \cdot 180° + 360°) : 2 - \alpha_1 = 150°$
$\alpha_2 + \alpha_4 = 230°$

(b) $A = \frac{2(\alpha_2+\alpha_4)-360°}{180°} \cdot \pi = \frac{4}{9}\pi \Rightarrow$
$\alpha_4 = (\frac{4}{9} \cdot 180° + 360°) : 2 - \alpha_2 = 90°$
$\alpha_2 + \alpha_4 = 220°$

(c) Vom sphärischen Mittelpunkt Lot auf die Seiten P_1P_2 und P_2P_3 fällen.
$\cos\alpha_{21} = \frac{\tan 15°}{\tan 50°} \Rightarrow \alpha_{21} = 77°$
$\cos\alpha_{22} = \frac{\tan 45°}{\tan 50°} \Rightarrow \alpha_{22} = 33° \Rightarrow \alpha_2 = 110°$
$A = \frac{2(\alpha_2+\alpha_4)-360°}{180°}\pi = \frac{2}{3}\pi \Rightarrow \alpha_4 = 130°$
$\alpha_1 + \alpha_3 = 240°$

(d) Vom sphärischen Mittelpunkt Lot auf die Seiten P_2P_3 und P_3P_4 fällen.
$\cos\alpha_{31} = \frac{\tan 30°}{\tan 60°} \Rightarrow \alpha_{21} = 70{,}53°$
$\cos\alpha_{32} = \frac{\tan 15°}{\tan 60°} \Rightarrow \alpha_{22} = 81{,}10° \Rightarrow \alpha_3 = 151{,}63°$
$A = \frac{2(\alpha_1+\alpha_3)-360°}{180°}\pi = \frac{4}{9}\pi \Rightarrow \alpha_1 = 68{,}37°$
$\alpha_2 + \alpha_4 = 220°$

11. Berechnen Sie die Flächen folgender Sehnenvierecke $P_1P_2P_3P_4$:
    (a) $\alpha_1 = 120°$, $P_2P_3 = P_3P_4 = 40°$, Radius des Umkreises $r = 50°$
    (b) $\alpha_2 = 50°$, $P_3P_4 = P_4P_1 = 30°$, Radius des Umkreises $r = 70°$

Lösung: (a) Vom sphärischen Mittelpunkt Lot auf die Seite P_2P_3 fällen.
$\cos\frac{\alpha_3}{2} = \frac{\tan 20°}{\tan 50°} \Rightarrow \alpha_3 = 144{,}43°$
$\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_3 = 264{,}43° \Rightarrow A = \frac{2(\alpha_1+\alpha_3)-360°}{180°}\pi = 2{,}95$

(b) Vom sphärischen Mittelpunkt Lot auf die Seite P_3P_4 fällen.
$\cos\frac{\alpha_4}{2} = \frac{\tan 15°}{\tan 70°} \Rightarrow \alpha_4 = 168{,}81°$
$\Rightarrow \alpha_2 + \alpha_4 = 218{,}81° \Rightarrow A = \frac{2(\alpha_2+\alpha_4)-360°}{180°}\pi = 1{,}35$

12. Gegeben ist ein Kugeldreieck $\triangle P_1P_2P_3$ mit $a_2 = 100°$, $a_1 = 60°$ und $\alpha_2 = 120°$. Berechnen Sie α_1, a_3, α_3, die Länge der Seitenhalbierenden s_1 und der Höhe h_2.

Lösung: $\alpha_1 = 49{,}6°$, $a_3 = 64{,}3°$, $\alpha_3 = 52{,}4°$, $s_1 = 81{,}4°$, $h_2 = 43{,}3°$.

13. Berechnen Sie die fehlenden Stücke des Kugeldreiecks!

	a	b	c	α	β	γ
a)	62,83°	61,43°	96,60°			
b)	74,53°	80,62°	98,87°			
c)				43,03°	21,17°	135,32°
d)				81,98°	53,12°	85,52°
e)		51,89°	109,88°	146,13°		
f)	30,23°	67,91°				58,69°
g)			87,57°	115,81°	82,17°	
h)		132,02°		86,98°		92,54°

Lösung:

	a	b	c	α	β	γ
a)	62,83°	61,43°	96,60°	54,10°	53,09°	115,25°
b)	74,53°	80,62°	98,87°	72,58°	77,62°	102,00°
c)	74,48°	30,66°	96,85°	43,03°	21,17°	135,32°
d)	76,48°	51,76°	78,21°	81,98°	53,12°	85,52°
e)	145,51°	51,89°	109,88°	146,13°	50,75°	67,76°
f)	30,23°	67,91°	55,43°	31,49°	105,98°	58,69°
g)	115,35°	83,98°	87,57°	115,81°	82,17°	84,43°
h)	83,67°	132,02°	96,11°	86,98°	131,72°	92,54°

14. Aus der sphärischen Geometrie erhält man als Grenzfall für $R \to \infty$ (R: Kugelradius) und gleichbleibende Längen die ebene Geometrie.

    (a) Was wird aus $\sin a$, $\tan a$ und $\cos a$ (a: Mittelpunktswinkel eines Großkreisbogens im Bogenmaß) beim Übergang zur ebenen Geometrie.

    (b) Was erhält man aus den Formeln $\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$, $\cos\alpha = \frac{\tan b}{\tan c}$ und $\tan\alpha = \frac{\tan a}{\sin b}$ für rechtwinklige Dreiecke mit $\gamma = 90°$ beim Übergang zur Ebene?

    (c) Was erhält man aus der Formel $\cos a \cdot \cos b = \cos c$ für rechtwinklige Dreiecke mit $\gamma = 90°$ beim Übergang zur Ebene?

    (d) Was erhält man aus der Formel $\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ für Dreiecke beim Übergang zur Ebene?

    (e) Was erhält man aus der Formel $\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma$ für Dreiecke beim Übergang zur Ebene?

Lösung: (a) $a = \frac{a'}{R}$ (a': Länge des Großkreisbogens) wird für große Kugelradien R sehr klein. Also wird $\sin a$ zu a, $\tan a$ zu a und $\cos a$ zu $1 - \frac{1}{2}a^2$.

(b) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\tan\alpha = \frac{a}{b}$

(c) Satz des Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$

(d) Sinussatz: $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

(e) Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

15. Beweisen Sie den folgenden Satz:
    Ist in einem Kugeldreieck $\triangle ABC$ der Winkel $\gamma = 90°$, so liegt die Länge der Hypothenuse c zwischen a und $\pi - a$ bzw. zwischen b und $\pi - b$.

Lösung: $\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c} \Rightarrow \sin a = \sin\alpha \sin c$
Es gilt also: $|\sin a| \leq |\sin c|$, was mit der Behauptung äquivalent ist.

$\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c} \Rightarrow \sin b = \sin\beta \sin c$
Es gilt also: $|\sin b| \leq |\sin c|$, was mit der Behauptung äquivalent ist.

16. Leiten Sie durch Übergang zum Polardreieck aus der Neperschen Regel eine neue Regel her.

Lösung: Geht man bei einem rechtwinkligen Kugeldreieck zum Polardreieck über, erhält man ein rechtsseitiges Kugeldreieck. In der Neperschen Regel ergeben sich dabei die folgenden Ersetzungen:
$c \to 180° - \gamma$, $\alpha \to 180° - a$, $\beta \to 180° - b$, $90° - b \to \beta - 90°$ und $90° - a \to \alpha - 90°$
Nun schreibt man sich die zehn zugehörigen Formeln entsprechend der Neperschen Regel auf und nutzt die Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen. Man erkennt, dass die Formeln bei den folgenden Ersetzungen richtig bleiben:
$180° - b \to b$, $180° - a \to a$, $\beta - 90° \to 90° - \beta$ und $\alpha - 90° \to 90° - \alpha$.
Im Neperschen Kreis stehen also der Reihe nach die Größen:
$180° - \gamma$, b, $90° - \alpha$, $90° - \beta$ und a.

17. In ebenen rechtwinkligen Dreiecken mit $\gamma = 90°$ gilt der Kathetensatz:

$$a^2 = cq \qquad \text{und} \qquad b^2 = cp$$

Suchen Sie nach einem analogen Satz für sphärische rechtwinklige Dreiecke.

Lösung: $\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c} = \frac{\sin q}{\sin a} \Rightarrow \sin^2 a = \sin c \cdot \sin q$.
Analog folgt $sin^2 b = \sin c \cdot \sin p$.

18. Zeigen Sie, dass in einem rechtwinkligen Kugeldreieck die Winkelsumme zwischen π und 2π liegt.

Lösung: In jedem Kugeldreieck gilt $\alpha + \beta + \gamma > \pi$, da die Fläche eines Kugeldreiecks $\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{\pi}\, r^2\pi$ stets positiv ist.
Die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks ist offensichtlich kleiner als $r^2\pi \Rightarrow$
$\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{\pi} < 1 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma < 2 \cdot \pi$

19. (a) In einem Kugeldreieck $\triangle$ABC wird ein beliebiger Punkt T auf der Seite c ergänzt. Zeigen Sie, dass mit $\overset{\frown}{\mathrm{CT}} = t$, $\overset{\frown}{\mathrm{AT}} = p$ und $\overset{\frown}{\mathrm{TB}} = q$ gilt:

$$\sin c \cdot \cos t = \sin p \cdot \cos a + \sin q \cdot \cos b$$

(b) Berechnen Sie mit diesem Zusammenhang allgemein die Länge einer Seitenhalbierenden im Kugeldreieck.

(c) Welchen Zusammenhang erhält man durch analoge Rechnung in der ebenen Geometrie?

(d) Zeigen Sie, dass man den Zusammenhang aus Teilaufgabe (c) auch aus dem Zusammenhang aus Teilaufgabe (a) durch Übergang zur ebenen Geometrie erhält.

Lösung: (a) Wendet man den Kosinussatz auf die Teildreiecke an, erhält man
$\cos b = \cos p \cdot \cos t + \sin p \sin t \cos \mu$ und
$\cos a = \cos q \cdot \cos t + \sin q \sin t \cos(\pi - \mu)$.
Durch Ersetzung von $\cos \mu$ erhält man daraus
$\cos a \cdot \sin p + \sin q \cdot \cos b = \cos t(\cos q \cdot \sin p + \cos p \cdot \sin q) = \cos t \cdot \sin c$

(b) $\sin c \cdot \cos t = \sin \frac{c}{2} \cdot \cos a + \sin \frac{c}{2} \cdot \cos b = \sin \frac{c}{2} \cdot (\cos a + \cos b)$
Wegen $\sin c = 2 \sin \frac{c}{2} \cdot \cos \frac{c}{2}$ folgt
$2 \cos \frac{c}{2} \cdot \cos t = \cos a + \cos b \Rightarrow \cos t = \frac{\cos a + \cos b}{2 \cos \frac{c}{2}}$

(c) $ct^2 + cpq = a^2 p + b^2 q$

(d) Berücksichtigt man Terme bis zur dritten Potenz, erhält man aus dem Zusammenhang aus (a):
$(c - \frac{1}{6}c^3)(1 - \frac{1}{2}t^2) = (p - \frac{1}{6}p^3)(1 - \frac{1}{2}a^2) + (q - \frac{1}{6}q^6)(1 - \frac{1}{2}b^2)$
$\Rightarrow ct^2 + cpq = a^2 p + b^2 q$

20. (a) Wie sieht das Polardreieck zu einem gleichschenkligen Kugeldreieck mit $\alpha = \beta$ und $\gamma = 90°$ aus?

(b) Wie sieht das Polardreieck zu einem gleichschenkligen Kugeldreieck mit $\alpha = \beta = 90°$ aus?

(c) Wie sieht das Polardreieck zu einem rechtwinkligen Kugeldreieck mit $\alpha = \beta = \gamma = 90°$ aus?

Lösung: (a) gleichschenkliges Kugeldreieck mit $c = 90°$

(b) gleichschenkliges Kugeldreieck mit $a = b = 90°$

(c) Kugeldreieck mit $a = b = c = 90°$, also Kugeloktant

12.5. Probleme aus der Geographie und Himmelsbeobachtung

1. Berechnen Sie den sphärischen Abstand folgender Orte:

(a) München ($\lambda = 11{,}5°$ ost, $\phi = 48{,}1°$) und
New York ($\lambda = 74{,}0°$ west, $\phi = 40{,}4°$)

(b) München ($\lambda = 11{,}5°$ ost, $\phi = 48{,}1°$) und
Sidney ($\lambda = 151{,}1°$ ost, $\phi = -33{,}5°$)

(c) München ($\lambda = 11{,}5°$ ost, $\phi = 48{,}1°$) und
Buenoe Aires ($\lambda = 58{,}3°$ west, $\phi = -34{,}4°$)

(d) München ($\lambda = 11{,}5°$ ost, $\phi = 48{,}1°$) und
Kapstadt ($\lambda = 18{,}2°$ ost, $\phi = -33{,}6°$)

Lösung: (a) $6{,}51 \cdot 10^3$km

(b) $16{,}3 \cdot 10^3$km

(c) $11{,}5 \cdot 10^3$km

(d) $9{,}11 \cdot 10^3$km

2. (a) Sie stehen am Nordpol und gehen 100 km nach Süden, 100 km nach Osten und 100 km nach Norden. Wo stehen Sie am Ende?

(b) Sie gehen 100 km nach Süden, 100 km nach Osten, 100 km nach Norden und 100 km nach Westen und stehen wieder am Ausgangspunkt. Wo ist der Ausgangspunkt?

(c) Von München ($\lambda = 11{,}5°$ ost, $\phi = 48{,}1°$) aus gehen Sie 100 km nach Süden, 100 km nach Osten, 100 km nach Norden und 100 km nach Westen. Wo stehen Sie am nun?

Lösung: (a) Nordpol

(b) 50 km nördlich des Äquators

(c) Nach den 100 km nach Süden befindet man sich auf dem Breitenkreis zu $\phi = 48{,}1° - 0.8995°$. Geht man nun 100 km nach Osten befindet man sich auf dem Längenkreis zu $\lambda = 11{,}5° + 1{,}324°$ ost. Am Ende steht man dann auf dem Längenkreis zu $\lambda = 11{,}5° + 1{,}324° - 1{,}347°$. Am Ende befindet man sich dann 1,7 km westlich vom Ausgangspunkt.

3. Sydney ($\lambda = 151{,}1°$, $\phi = -33{,}5°$) und Kapstadt ($\lambda = 18{,}2°$, $\phi = -33{,}5°$) liegen auf dem gleichen Breitenkreis.
Wie lang ist die geradlinige Verbindung der beiden Städte?
Wie lang ist die kürzeste Verbindung der beiden Städte auf der Erdoberfläche?

Lösung: Radius des Breitenkreises zu $\phi = -33{,}5°$ beträgt 5311,8km
$\Rightarrow$ geradlinige Verbindung: 9738,78km
Mittelpunktswinkel des Großkreises (kürzeste Verbindung!): 99,71°
$\Rightarrow$ Länge des Großkreisbogens beträgt $11{,}1 \cdot 10^3$km

4. Berechnen Sie die kürzeste Entfernung folgender Orte:

(a) München ($\lambda = 11{,}5°$ ost, $\phi = 48{,}1°$) und Rostock ($\lambda = 12{,}1°$ ost, $\phi = 54{,}1°$)

(b) München ($\lambda = 11{,}5°$ ost, $\phi = 48{,}1°$) und Leningrad ($\lambda = 30{,}2°$ ost, $\phi = 59{,}6°$)

(c) München ($\lambda = 11{,}5°$ ost, $\phi = 48{,}1°$) und Kairo ($\lambda = 31{,}2°$ ost, $\phi = 30{,}0°$)

(d) München ($\lambda = 11{,}5°$ ost, $\phi = 48{,}1°$) und Montreal ($\lambda = 73{,}3°$ west, $\phi = 45{,}3°$)

(e) München ($\lambda = 11{,}5°$ ost, $\phi = 48{,}1°$) und Rio de Janeiro ($\lambda = 43{,}2°$ west, $\phi = -22{,}5°$)

Lösung: (a) 668 km

(b) 1760 km

(c) 2619 km

(d) 6130 km

(e) 9549 km

5. Berechnen Sie den Winkelabstand folgender Sterne:
   (a) Sirrah ($\alpha = 0{,}14°$, $\delta = 29{,}1°$, Sternbild Andromeda) und Algenib ($\alpha = 3{,}4°$, $\delta = 49{,}9°$, Sternbild Perseus)
   (b) Schedir ($\alpha = 0{,}68°$, $\delta = 56{,}3°$, Sternbild Cassiopeia) und Regulus ($\alpha = 10{,}1°$, $\delta = 12{,}0°$, Sternbild Löwe)
   (c) Zuben Elgenubi ($\alpha = 14{,}8°$, $\delta = -16{,}0°$, Sternbild Waage) und Aldebaran ($\alpha = 4{,}6°$, $\delta = 16{,}5°$, Sternbild Stier)
   (d) Castor ($\alpha = 7{,}6°$, $\delta = 31{,}9°$, Sternbild Zwillinge) und Antares ($\alpha = 16{,}5°$, $\delta = -26{,}5°$, Sternbild Skorpion)

Lösung: (a) 20,95°

(b) 44,90°

(c) 34,02°

(d) 59,01°

6. Die Längenkreise durch die angegebenen Städte teilen die Erdoberfläche in vier Kugelzweiecke. Berechnen Sie die Flächen der Kugelzweiecke.
   (a) München ($\lambda = 11{,}5°$ ost, $\phi = 48{,}1°$) und
   New York ($\lambda = 74{,}0°$ west, $\phi = 40{,}4°$)
   (b) Sidney ($\lambda = 151{,}1°$ ost, $\phi = -33{,}5°$) und
   Kapstadt ($\lambda = 18{,}2°$ ost, $\phi = -33{,}6°$)
   (c) Buenoe Aires ($\lambda = 58{,}3°$ west, $\phi = -34{,}4°$) und
   Madrid ($\lambda = 3{,}4°$ west, $\phi = 40{,}2°$)

Lösung: (a) $A_1 = \frac{85{,}5}{360} \cdot 4\pi \cdot (6368\text{km})^2 = 1{,}21 \cdot 10^8\text{km}^2$
$A_2 = 2\pi \cdot (6368\text{km})^2 - A_1 = 1{,}34 \cdot 10^8\text{km}^2$

(b) $A_1 = \frac{132{,}9}{360} \cdot 4\pi \cdot (6368\text{km})^2 = 1{,}88 \cdot 10^8\text{km}^2$, $A_2 = 6{,}67 \cdot 10^7\text{km}^2$

(c) $A_1 = \frac{54{,}9}{360} \cdot 4\pi \cdot (6368\text{km})^2 = 7{,}77 \cdot 10^7\text{km}^2$, $A_2 = 1{,}77 \cdot 10^8\text{km}^2$

13. Sphärische Trigonometrie (Anwendungen auf die Erd- und Himmelskugel)

13.1. Peilungsaufgaben

13.2. Kartenentwürfe

13.3. Astronomie

1. Berechnen Sie für München ($\lambda = 11{,}5°$ ost, $\varphi = 48{,}1°$), New York ($\lambda = 74{,}0°$ west, $\varphi = 40{,}4°$) und Moskau ($\lambda = 37{,}4°$ ost, $\varphi = 55{,}5°$) die Zenitdistanz des Himmelsnordpols.

Lösung: Zenitdistanz des Himmelsnordpols: $z_p = 90° - \varphi \Rightarrow$
München: $z_P = 41{,}9°$, New York: $z_P = 49{,}6°$, Moskau: $z_P = 34{,}5°$

2. Berechnen Sie für die Sterne Sirrah ($\alpha = 0{,}14^h$, $\delta = 29{,}1°$) und Aldebaran ($\alpha = 4{,}6^h$, $\delta = 16{,}5°$) die obere und untere Kulminationshöhe
   (a) in München ($\lambda = 11{,}5°$ ost, $\varphi = 48{,}1°$).
   (b) in Sydney ($\lambda = 151{,}5°$ ost, $\varphi = -33{,}5°$).
   (c) in Helsinki ($\lambda = 24{,}6°$ ost, $\varphi = 60{,}1°$).

   Sirrah ist der hellste Stern im Sternbild Andromeda und Aldebaran der hellste Stern im Sternbild Stier.

Lösung: (a) Sirrah: $h_u = -12{,}8°$, $h_o = 71°$,
Aldebaran: $h_u = -25{,}4°$, $h_o = 58{,}4°$

(b) Sirrah: $h_o = 27{,}4°$, $h_u = -85{,}6°$,
Aldebaran: $h_o = 40°$, $h_u = -73{,}0°$

(c) Sirrah: $h_u = -0{,}8°$, $h_o = 59{,}0°$,
Aldebaran: $h_u = -13{,}4°$, $h_o = 46{,}4°$

3. In welchen Breiten sind die Sterne Sirrah ($\alpha = 0{,}14^h$, $\delta = 29{,}1°$), Aldebaran ($\alpha = 4{,}6^h$, $\delta = 16{,}5°$) und Riegel ($\alpha = 5{,}2^h$, $\delta = -8{,}2°$) zirkumpolar?

   Sirrah ist der hellste Stern im Sternbild Andromeda, Aldebaran der hellste Stern im Sternbild Stier und Riegel ist der zweithellste Stern im Sternbild Orion.

Lösung: Sirrah: $\varphi > 60{,}9°$, Aldebaran: $\varphi > 73{,}5°$, Riegel: $\varphi < -81{,}8°$

4. Das Dreieck mit den Ecken Nordpol P, Zenit Z und Sternort S heißt nautisches Dreieck.

   (a) Fertigen Sie eine Skizze an und geben Sie soweit möglich allgemein die Seiten und Winkel des nautischen Dreiecks an.

   (b) Leiten Sie allgemein eine Formel zur Berechnung der Zenitdistanz z und des Azimuts a eines Sterns aus den Äquatorkoordinaten (t, δ) und der geographischen Breite φ des Beobachtungsortes her.

   (c) Berechnen Sie für den Stern Sirrah mit ($t = 30{,}0°$, $\delta = 29{,}1°$) die Zenitdistanz und den Azimut für München ($\lambda = 11{,}5°$ ost, $\varphi = 48{,}1°$).

   (d) Leiten Sie allgemein eine Formel zur Berechnung der Deklination δ und des Stundenwinkels t eines Sterns aus der Zenitdistanz z, der geographischen Breite φ des Beobachtungsortes und dem Azimut a her.

   (e) Berechnen Sie für einen Stern mit $z = 20{,}0°$ und $a = 30{,}0°$) die Deklination und den Stundenwinkel für München ($\lambda = 11{,}5°$ ost, $\varphi = 48{,}1°$).

Lösung: (a) $\mathrm{PZ} = 90° - \varphi$, $\mathrm{ZS} = z = 90° - h$, $\mathrm{SP} = 90° - \delta$
$\sphericalangle \mathrm{SPZ} = t$, $\sphericalangle \mathrm{PZS} = 180° - a$

(b) $\cos z = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos t$, $\qquad \sin a = \dfrac{\cos\delta\sin t}{\sin z}$

(c) $z = 29{,}8°$, $a = 61{,}4°$

(d) $\sin\delta = \cos z\sin\varphi - \sin z\cos\varphi\cos a$, $\qquad \sin t = \dfrac{\sin z\sin a}{\cos\delta}$

(e) $\delta = 30{,}1°$, $t = 11{,}4°$

5. (a) Skizzieren Sie die Himmelskugel mit Horizont, Zenit, Himmelsäquator und Himmelspolen für München ($\lambda = 11{,}5°$ ost, $\varphi = 48{,}1°$), den Äquator und den Nordpol.
   Wählen Sie dazu die Blickrichtung senkrecht zum Himmelsäquator.

   (b) Tragen Sie in die Skizzen jeweils die scheinbaren täglichen Bahnen je eines Sterns der nördlichen und südlichen Hemisphäre ein.

   (c) Leiten Sie eine Bedingung für Zirkumpolarsterne an einem Ort mit geographischer Länge λ und geographischer Breite φ her.

Lösung: (a)

(b)

(c) Stern ist zirkumpolar, wenn die untere Kulminationshöhe
$h_u > 0$ ist. $\Longrightarrow$
Für Nordhalbkugel: $\varphi > 90° - \delta$, für Südhalbkugel $\varphi < -90° - \delta$

13.4. Koordinatensystem

13.5. Grundbegriffe der Zeitrechnung

Teil III.

Analysis

14. Definition der Grenzwerte - Epsilontik

1. Erstellen Sie für die folgende Funktion eine Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen:
$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$
Für welche x ist $|f(x)| < \varepsilon = 10^{-5}$? Rechnen Sie zuerst allgemein!

Lösung: $\left|\frac{1}{x-2}\right| = \frac{1}{|x-2|} < \varepsilon \quad , \quad x < 2 - \frac{1}{\varepsilon} \vee x > 2 + \frac{1}{\varepsilon} \quad , \quad x < -99\,998 \vee x > 100\,002$

2. (a) Gegeben ist die Funktion
$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{4 \cdot x^2 + 5}}{x}; \quad x \in]\,0\,; +\infty\,[$$
Berechnen Sie mit dem Taschenrechner $f(x)$ für selbstgewählte x-Werte und äußern Sie eine sinnvolle Vermutung über $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

   (b) Für die Funktion
$$f : x \mapsto 5 + 0{,}7^x; \quad x \in \mathbb{R}$$
gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 5$.

   Bestimmen Sie den Wert für x, ab dem die Abweichung der Funktionswerte $f(x)$ vom Grenzwert 5 weniger als $\varepsilon = 0{,}1$ beträgt. (Ergebnis runden.)

Lösung: (a) $f(100) = 2{,}00000125$; $f(10000) = 2{,}000000012$;
Vermutung: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$

(b) $x > 6{,}5$

3. Für welche x ist $\quad |f(x) - \lim\limits_{x\to\infty} f(x)| < \varepsilon$?

   (a) $f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \quad ; \quad \varepsilon = 10^{-3}$ (b) $f(x) = \frac{2^x - 2}{2^{x+1}} \quad ; \quad \varepsilon = 10^{-4}$

Lösung: (a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, $x > \left(\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 = 3\,996\,001$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{2}$, $x > \frac{4}{\lg 2} = 13{,}29$

4. Berechnen Sie ein möglichst kleines x_0 mit $f(x) > b$ für alle $x > x_0$!

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{2x+4} \quad ; \quad b = 10^5$ (b) $f(x) = \dfrac{5^{\frac{x}{2}}}{2^x} \quad ; \quad b = 10^6$

Lösung: (a) $x > 2\,b + 2 = 200\,002$ (b) $x > \dfrac{2\lg b}{\lg 1{,}25} = 123{,}83$

5. Erforschen Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \to \infty$ durch Einsatz des Taschenrechners! Für welche x_0 ist $f(x) > 10^{10}$?

   (a) $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$ (b) $f(x) = \dfrac{2^x}{x^2}$ (c) $f(x) = \dfrac{10^x}{x^{10}}$

Lösung: (a)

x	1	10	38	38,485524	38,485525	39	100
$f(x)$	2	102,4	$7{,}23 \cdot 10^9$	9999993524	10000000196	$1{,}41 \cdot 10^{10}$	$1{,}27 \cdot 10^{28}$

(b)

x	1	10	44	44,147821	44,147822	45	100
$f(x)$	2	10,24	$9{,}09 \cdot 10^9$	9999995814	10000002292	$1{,}74 \cdot 10^{10}$	$1{,}27 \cdot 10^{26}$

(c)

x	1	10	23	23,7581208	23,7581209	24	100
$f(x)$	10	1	$2{,}41 \cdot 10^9$	9999998571	10000000453	$1{,}58 \cdot 10^{10}$	$1 \cdot 10^{80}$

6. Erforschen Sie das Verhalten von

$$f(x) = \frac{2^x}{x^{1000}} \quad \text{für} \quad x \to \infty$$

durch Einsatz des Taschenrechners! Für welche x ist $f(x) > 10^{100}$? Wo liegt das Minimum von $f(x)$?
Wegen der beschränkten Kapazität des Taschenrechners ist es zweckmäßig, die Funktion $g(x) = \lg(f(x))$ zu betrachten.

Lösung: $g(x) = \lg(f(x)) = x\,\lg 2 - 1000\,\lg x$
Beispiel: $x = 1000$, $g(x) = -2698{,}970004 = 0{,}029996 - 2699$
$f(x) = 10^{0{,}029996-2699} = 1{,}0715 \cdot 10^{-2699}$

x	1	10	100	1000	1442,6
$g(x)$	0,301	−996,990	−1969,897	−2698,970004	−2724,880056
$f(x)$	2	$1{,}024 \cdot 10^{-997}$	$1{,}268 \cdot 10^{-1970}$	$1{,}0715 \cdot 10^{-2699}$	$1{,}318086 \cdot 10^{-2725}$

x	1442,7	1442,8	2000	10000
$g(x)$	−2724,880057	−2724,880056	−2698,970004	−989,70004
$f(x)$	$1{,}318084 \cdot 10^{-2725}$	$1{,}318087 \cdot 10^{-2725}$	$1{,}0715 \cdot 10^{-2699}$	$1{,}9950 \cdot 10^{-990}$

x	14117,37727	14117,37728	15000	20000
$g(x)$	99,9999975	100,0000002	339,3587	1719,5699
$f(x)$	$9{,}9999426 \cdot 10^{99}$	$1{,}00000048 \cdot 10^{100}$	$2{,}2839 \cdot 10^{339}$	$3{,}7146 \cdot 10^{1719}$

7. Berechnen Sie $\varepsilon_1 > 0$ so, dass $\dfrac{x}{x-2} > b > 0$ ist für $2 < x < 2 + \varepsilon_1$.

   Berechnen Sie $\varepsilon_2 > 0$ so, dass $\dfrac{x}{x-2} < -c < 0$ ist für $2 - \varepsilon_2 < x < 2$.

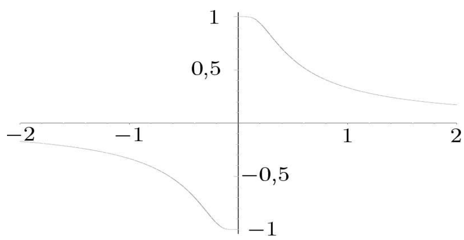
   Zeichnung für $b = 5$ und $c = 3$. Was bedeuten die Ergebnisse für den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 2^\pm} \dfrac{x}{x-2}$?

Lösung: $\varepsilon_1 = \dfrac{2}{b-1} = 0{,}5, \quad \varepsilon_2 = \dfrac{2}{c+1} = 0{,}5, \quad \lim\limits_{x\to 2^\pm} \dfrac{x}{x-2} = \pm\infty$

8. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$. Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

   Berechnen Sie δ so, dass $|f(x) - \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)| < \varepsilon$ für $0 < x < \delta$. Wie groß ist δ speziell für $\varepsilon = 0{,}001$? Zeichnen Sie den Graphen von f mit der Einheit 2 cm auf beiden Achsen.

Lösung: $\delta = \dfrac{\lg 2}{\lg\left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right)} \approx 0{,}0912$



9. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \dfrac{3 \cdot 2^x - 4}{4 - 2^x}$.
   (a) Schreiben Sie die Definition für $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = a$ hin.
   (b) Berechnen Sie $a = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

   Untersuchen Sie auch, von welcher Seite sich f an den Grenzwert annähert.
   (c) Für welche $x > 2$ ist $|f(x) - a| < \varepsilon$?

   Rechnen Sie zuerst allgemein und geben Sie dann das Ergebnis für $\varepsilon = 10^{-20}$ an.

Lösung: (a) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $b \in \mathbb{R}$ mit $|f(x) - a| < \varepsilon$ für alle $x > b$.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3 - 4 \cdot 2^{-x}}{4 \cdot 2^{-x} - 1} = -3$

$f(x) - (-3) = \dfrac{8}{4 - 2^x} < 0$ für $x > 2 \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = (-3)^-$

(c) $|f(x) - (-3)| = \left|\dfrac{8}{4 - 2^x}\right| < \varepsilon$

Für $x > 2$ fallen die Betragsstriche weg und es folgt $x > \dfrac{\lg\left(4 + \frac{8}{\varepsilon}\right)}{\lg 2} = 69{,}44$

10. (a) Schreiben Sie die Definition für $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ hin.

    (b) Wir betrachten die Funktion $f(x) = \dfrac{3^x - 1}{3^x + 1}$. Berechnen Sie $a = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Für welches b gilt ($\varepsilon > 0$)

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x > b$$

    Berechnen Sie b konkret für $\varepsilon = 10^{-6}$.

Lösung: (a) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein x_0 mit $|f(x) - a| < \varepsilon$ für alle $x > x_0$.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1^-, \quad b = \dfrac{\lg\left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right)}{\lg 3} = 13{,}206$

Teil IV.

Komplexe Zahlen

15. Komplexe Zahlen

15.1. Zahlbereichserweiterungen und Strukturen

1. Untersuchen sie, ob die komplexen Zahlen ohne Null ($\mathbb{C}\backslash\{(0|0)\}$) mit der Verknüpfung

$$z_1 \circ z_2 = (a_1|b_1) \circ (a_2|b_2) = (a_1 \cdot a_2|b_1 \cdot b_2)$$

eine Gruppe bilden.

Lösung: $(1|1)$ ist offensichtlich das neutrale Element der Verknüpfung. Es haben jedoch nicht alle Zahlen ein inverses Element:
Annahme: $(x|y)$ ist das inverse Element zu $(1|0) \Rightarrow$
$(1|0) \circ (x|y) = (x|0) \neq (1|1)$ für alle x und y.

2. Untersuchen sie, ob die komplexen Zahlen (ohne 0) mit der Verknüpfung

$$z_1 \circ z_2 = (a_1|b_1) \circ (a_2|b_2) = (a_1 b_2 + a_2 b_1|a_1 a_2 + b_1 b_2)$$

eine Gruppe bilden.

Lösung: Abgeschlossenheit der Menge bezüglich der Verknüpfung ist klar.
Das Kommutativgesetz gilt:
$z_2 \circ z_1 = (a_2|b_2) \circ (a_1|b_1) = (a_2 b_1 + a_1 b_2|a_2 a_1 + b_2 b_1) = z_1 \circ z_2$
Das Assoziativgesetz gilt:
$(z_1 \circ z_2) \circ z_3 = (a_1 b_2 b_3 + a_1 a_2 a_3 + b_1 a_2 b_3 + b_1 b_2 a_3|(a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 a_3 + b_1 b_2 b_3)$
$(0|1)$ ist das neutrale Element der Verknüpfung.
$\left(-\frac{a_1}{b_1^2 - a_1^2}\middle|\frac{b_1}{b_1^2 - a_1^2}\right)$ wäre das inverse Element von $z_1 = (a_1|b_1)$, es existiert jedoch nur für $a_1^2 \neq b_1^2$. Die Menge der Komplexen Zahlen ohne 0 ist bezüglich der angegebenen Verknüpfung keine Gruppe.

15.2. Konstruktion der komplexen Zahlen

15.3. Veranschaulichung komplexer Zahlen

1. Zeichnen sie für die Zahlen $z = 1+2i$ und $z = 2-4i$ die Zahl z selbst, die Konjugierte z^* und z^2 in die Gaußsche Zahlenebene ein.

Lösung: $z_1 = 1 + 2i,\ z_1^* = 1 - 2i,\ z_1^2 = -3 + 4i$
$z_1 = 2 - 4i,\ z_2^* = 2 + 4i,\ z_2^2 = -12 - 16i$

15.4. Grundrechenarten

1. Vereinfachen Sie: (a) $\dfrac{1-i}{-i}$, (b) $\dfrac{i}{1-i}$, (c) $(-i)^{1003}$, (d) $\dfrac{3-4i}{12-5i}$

Lösung: (a) $\dfrac{1-i}{-i} = \dfrac{(1-i)i}{-i^2} = \dfrac{1+i}{1} = 1 + i$

(b) $\dfrac{i}{1-i} = \dfrac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{-1+i}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

(c) $(-i)^{1003} = -i^{1000} \cdot i^3 = -1 \cdot (-i) = i$

(d) $\dfrac{(3-4i)(12+5i)}{(12-5i)(12+5i)} = \dfrac{36 + 20 + (-48+15)i}{144+25} = \dfrac{56}{169} - \dfrac{33}{169}\,i$

2. Vereinfachen Sie: (a) $\dfrac{1+i}{i}$, (b) $\dfrac{i}{1+i}$, (c) i^{73}, (d) $\dfrac{5+12i}{-3+4i}$

Lösung: (a) $\dfrac{1+i}{i} = \dfrac{(1+i)i}{i^2} = \dfrac{-1+i}{-1} = 1 - i$

(b) $\dfrac{i}{1+i} = \dfrac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1+i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

(c) $i^{73} = i^{72} \cdot i = 1 \cdot i = i$

(d) $\dfrac{(5+12i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)} = \dfrac{-15 + 48 + (-36-20)i}{9+16} = \dfrac{33}{25} - \dfrac{56}{25}\,i = 1{,}32 - 2{,}24\,i$

3. Berechnen sie für folgende Zahlen z^2, z^3, z^4, $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^2}$, $z + z^2$, $z - z^3$.
   (a) $z = i$
   (b) $z = 1 + i$
   (c) $z = 2 + 3i$
   (d) $z = 3 - 2i$

Lösung: (a) $-1, -i, 1, -i, -1, -1 + i, 2i$

(b) $2i, -2 + 2i, -4, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}i, 1 + 3i, 3 - i$

(c) $-5 + 12i, -46 + 9i, -119 - 120i, \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i, -\frac{5}{169} - \frac{12}{169}i, -3 + 15i,$
$48 - 6i$

(d) $5 - 12i, -9 - 46i, -119 - 120i, \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i, \frac{5}{169} + \frac{12}{169}i, 8 - 14i, 12 + 44i$

4. Berechnen sie den Betrag der Zahlen $1+2i$, $2-3i$, $7+8i$ und $9-i$.

Lösung: $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{113}$, $\sqrt{82}$

5. Fassen Sie so weit wie möglich zusammen!
   (a) $4i \cdot 5i$
   (b) $i^7 + i^6$
   (c) $(5+4i)+(3-7i)$
   (d) $(5+4i)-(3-7i)$
   (e) $(3-7i)-(5+4i)$

Lösung: (a) -20
(b) $-i-1$
(c) $8-3i$
(d) $2+11i$
(e) $-2-11i$

6. Berechnen Sie für $z_1 = -2+3i$ und $z_2 = 4-5i$ die Werte für z_1+z_2, z_1-z_2, z_2-z_1, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ und $\frac{z_2}{z_1}$

Lösung: $2-2i$, $-6+8i$, $6-8i$, $7+22i$, $-\frac{23}{41}+\frac{2}{41}i$, $-\frac{23}{13}-\frac{2}{13}i$

7. In einer Reihe erhält man jeweils die auf z_n folgende Zahl z_{n+1} durch die Zuordnung:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad (z, c \in \mathbb{C})$$

   (a) Berechnen Sie für $z_1 = 0$ und $c = -i$ die Werte von z_i für $i = 2, 3, 4, 5, 6$.
   (b) Berechnen Sie für $z_1 = 0$ und $c = 1$ die Werte von z_i für $i = 2, 3, 4, 5, 6$.
   (c) Berechnen Sie für $z_1 = 0$ und $c = -0{,}5+0{,}2i$ die Werte von z_i für $i = 2, 3, 4, 5, 6$.
   (d) Berechnen Sie für $z_1 = 0$ und $c = -0{,}1+i$ die Werte von z_i für $i = 2, 3, 4, 5, 6$.

Lösung: (a) $z_2 = -i$, $z_3 = -1-i$, $z_4 = i$, $z_5 = -1-i$, $z_6 = i$
(b) $z_2 = 1$, $z_3 = 2$, $z_4 = 5$, $z_5 = 26$, $z_6 = 677$
(c) $z_2 = -0{,}5+0{,}2i$, $z_3 = -0{,}29$, $z_4 = -0{,}4159+0{,}2i$,
$z_5 = -0{,}3670272+0{,}03364i$, $z_6 = -0{,}3664227+0{,}1753064i$

(d) $z_2 = -0{,}1 + i$, $z_3 = -1{,}09 + 0{,}8i$, $z_4 = 0{,}4481 - 0{,}744i$,
$z_5 = -0{,}45274239 + 0{,}3332272i$, $z_6 = -0{,}00606469512 + 0{,}6982678421i$

Anmerkung:
Berechnet man nach der Vorschrift $z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad (z, c \in \mathbb{C})$ für ein festes z_1 und verschiedene Werte von c die Reihe, so divergiert für gewisse Werte (für c, $z_1 = 0$) der Betrag der z_n, für andere Werte (für c, $z_1 = 0$) bleibt der Betrag von z_n endlich.
Markiert man nun in einer komplexen Zahlenebene die Punkte (c-Werte), bei denen der Betrag von z_n endlich bleibt, erhält man eine Mandelbrotmenge. Die bekannteste Mandelbrotmenge ist das Apfelmännchen.

8. Berechnen Sie $\dfrac{2\,z^4 + 85\,\overline{z}^2}{2\,z - 4\overline{z}}$ für $z = 5 - 2\,i$.

Lösung: $-77{,}5 + 91\,i$

9. Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = a + b\,i$ und $z_2 = c + b\,i$ mit $b \neq 0$ und $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}$. Drücken Sie den Realteil und den Imaginärteil des Quotienten $q = \dfrac{z_1}{z_2}$ durch a und b aus.

Lösung: $z_1\,z_2 = a\,c - b^2 + b\,(a + c) \cdot i \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad c = -a$

$$q = \frac{a + b\,i}{-a + b\,i} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} - \frac{2ab}{a^2 + b^2} \cdot i$$

10. Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = a + a\,i$ und $z_2 = a - b\,i$. Berechnen Sie $z = \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$ in der Form $z = x + y\,i$.

Lösung: $z = \left(\dfrac{a + a\,i}{a - b\,i}\right)^2 = \left(\dfrac{a^2 - ab}{a^2 + b^2} + \dfrac{a^2 + ab}{a^2 + b^2} \cdot i\right)^2 = \dfrac{-4\,a^3 b}{(a^2 + b^2)^2} + \dfrac{2a^2(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^2} \cdot i$

11. (a) $\dfrac{1}{i}$ (b) $i^2 - \dfrac{1}{i^3}$ (c) $\left(i + \dfrac{1}{i}\right)^2$ (d) $(i^9 - i^{14})^2$

(e) $(-i)^2 + \dfrac{1}{i^2}$ (f) $(-2\,i)^3 + \dfrac{2}{i^3}$ (g) $(-i)^{-3} + 3\,i^3$ (h) $i^{-7} + (-i)^5$

Lösung: (a) $-i$ (b) $-1 - i$ (c) 0 (d) $2\,i$ (e) -2 (f) $10\,i$ (g) $-4\,i$ (h) 0

12. (a) $\dfrac{3 + 2i}{4 - i}$ (b) $\dfrac{-2 - 3i}{-2 + 3i}$ (c) $\dfrac{1}{3 + 4i}$ (d) $\dfrac{3 + i}{1 + 3i}$ (e) $\dfrac{1 + i}{1 - i}$

Lösung: (a) $\dfrac{10 + 11\,i}{17}$ (b) $\dfrac{-5 + 12\,i}{13}$ (c) $\dfrac{3 - 4\,i}{25}$ (d) $0{,}6 - 0{,}8\,i$ (e) i

13. Beweisen Sie:

(a) $|\overline{z}| = |z|$ (b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ (c) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ (d) $|z^n| = |z|^n$

Lösung:

14. Beweisen Sie:

(a) $\overline{\overline{z}} = z$ (b) $\overline{(-z)} = -\overline{z}$ (c) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$ (d) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(e) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (f) $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ (g) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ (h) $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$

Lösung:

15. Berechnen Sie für $z = a + bi$:

(a) $z + \overline{z}$ (b) $z - \overline{z}$ (c) $z \cdot \overline{z}$ (d) $\frac{z \cdot \overline{z}}{z + \overline{z}}$

(e) $(\overline{z})^2 + z^2$ (f) $(\overline{z})^2 - z^2$ (g) $\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}$ (h) $\frac{z}{\overline{z}} - \frac{\overline{z}}{z}$

Lösung: (a) $2\,a$ (b) $2\,b\,i$ (c) $a^2 + b^2$ (d) $\frac{a^2 + b^2}{2\,a}$

(e) $2\,(a^2 - b^2)$ (f) $-4\,a\,b\,i$ (g) $\frac{2(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}$ (h) $\frac{4\,a\,b\,i}{a^2 + b^2}$

16. Welche der folgenden Zahlen sind gleich: z^2, $|z|^2$, $|z^2|$, $|\overline{z}|^2$, $|z \cdot \overline{z}|$ und $z \cdot \overline{z}$?

Lösung: $z = a + b\,i \quad \Longrightarrow \quad |z|^2 = \left|z^2\right| = |\overline{z}|^2 = |z \cdot \overline{z}| = z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2, \quad z^2 = a^2 - b^2 + 2\,a\,b\,i$

17. Berechnen Sie $\frac{5z^5 + 30\overline{z}^2}{4z - 8\overline{z}}$ für $z = -2 + 2\,i$.

Lösung: $-7 - 29\,i$

15.5. Quadratische Gleichungen

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen. Bestimmen Sie jeweils die Koordinaten des Scheitels der zugehörigen Parabel.
   (a) $x^2 - 4x + 7 = 0$
   (b) $-x^2 + 6x - 10 = 0$
   (c) $2x^2 + 4x + 3 = 0$
   (d) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} = 0$
   (e) $-2x^2 - 12x - 23 = 0$

Lösung: (a) $x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{3}i$, $S(2|3)$
(b) $x_{1/2} = 3 \pm i$, $S(3|-1)$
(c) $x_{1/2} = -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}i$, $S(-1|1)$
(d) $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{3}i$, $S(1|1)$
(e) $x_{1/2} = -3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{10}i$, $S(-3|-5)$

2. Lösen Sie die folgende Gleichung ($D = \mathbb{C}$):

$$z^2 + (2 + 4i)z - 3 - 4i = 0$$

Lösung: $z_1 = 1$, $z_2 = -3 - 4i$

3. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$i \cdot z^2 + (3 - 2\,i)\,z - 6 = 0$$

Lösung: $z_1 = 3\,i$, $z_2 = 2$

4. Berechnen Sie die Lösungsmenge in der Menge der komplexen Zahlen:

$$x^2 + (1 + i)x + i = 0$$

Lösung: $L = \{-1\,;\,-i\}$

15.6. Polarform komplexer Zahlen

1. Gegeben sind die Zahlen $z_1 = 6\,\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ und $z_2 = 1 - \sqrt{3} \cdot i$. Berechnen Sie

$$z = \frac{z_1^2 - z_2^2}{(z_1 + z_2)^2}.$$

Versuchen Sie exakt (mit Wurzeln und Brüchen) zu rechnen und geben Sie das Ergebnis in der Polar- und der Normalform an.

Lösung: $z_1 = 6\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot 6\sin\frac{\pi}{3} = 3 + 3\sqrt{3}\,i$

$$z = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} = \frac{(2 + 4\sqrt{3}\,i)(4 - 2\sqrt{3}\,i)}{(4 + 2\sqrt{3}\,i)(4 - 2\sqrt{3}\,i)} = \frac{32 + 12\sqrt{3}\,i}{28} = \frac{8}{7} + \frac{3\sqrt{3}}{7}\,i$$

$$z = r\mathrm{E}(\varphi) \text{ mit } r = \sqrt{\left(\frac{8}{7}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{91}}{7}, \quad \tan\varphi = \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 33{,}0^\circ$$

2. Wir rechnen mit den Zahlen $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ und $z_2 = 3\,\mathrm{E}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.
   (a) Beweisen Sie: $z_1 = 2\,\mathrm{E}(60^\circ)$. Zeichnen Sie z_1 und z_2 in die gaußsche Ebene ein (Einheit 2 cm). Der Gebrauch des Zirkels ist nicht verboten! Ermitteln Sie zeichnerisch in nachvollziehbarer Weise (geeignete Hilfslinien!) $z_2 + z_1$ und $z_2 - z_1$.
   (b) Berechnen Sie $z_1 \cdot z_2$ und $\dfrac{z_1}{z_2}$ in der Polarform und schreiben Sie die Ergebnisse auch in der Normalform hin.
   (c) Berechnen Sie $(z_1)^8$. Geben Sie das Ergebnis in der Polar- und in der Normalform an.
   (d) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $(z_2)^n \in \mathbb{R}$?

Lösung: (a) $|z_1| = \sqrt{1+3} = 2$

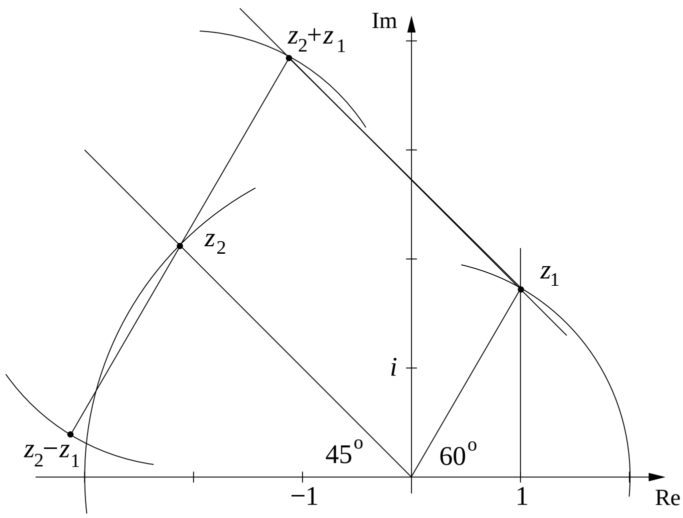
$\tan\varphi_1 = \sqrt{3}$

$\varphi_1 = 60^\circ$

$z_1 = 2\,\mathrm{E}(60^\circ) = 2\,\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\varphi_2 = 135^\circ$

$z_2 = 3\,\mathrm{E}(135^\circ)$



(b) $z_1 z_2 = 2 \cdot 3\,\mathrm{E}(60^\circ + 135^\circ) = 6\,\mathrm{E}(195^\circ) = \underbrace{6\cos 195^\circ}_{-5{,}795555} + i \cdot \underbrace{6\sin 195^\circ}_{-1{,}5529}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\,\mathrm{E}(60^\circ - 135^\circ) = \frac{2}{3}\,\mathrm{E}(-75^\circ) = \frac{2}{3}\,\mathrm{E}(285^\circ) = \underbrace{\frac{2}{3}\cos 285^\circ}_{0{,}17255} + i \cdot \underbrace{\frac{2}{3}\sin 285^\circ}_{-0{,}64395}$$

(c) $(z_1)^8 = 2^8\,\mathrm{E}(8 \cdot 60^\circ) = 256\,\mathrm{E}(480^\circ) = 256\,\mathrm{E}(120^\circ) = -128 + 128\sqrt{3}\,i = -128 + 221{,}7\,i$

(d) $(z_2)^n = 3^n\,\mathrm{E}(n \cdot 135^\circ) \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad n \cdot 135^\circ = m \cdot 180^\circ$ mit $m \in \mathbb{N}$

$3n = 4m$ ist erfüllt, wenn $n = 4k$ mit $k \in \mathbb{N}$

15.6.1. Ungleichungen

Ungleichungen vom Typ (x+a)(x+b) kleiner 0

(a) Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung:

$$\frac{-2(2x+1)}{(1-x)(x+3)} \leqq 0$$

Lösung: $]-\infty; -3[\cup [-\frac{1}{2}; 1[$

(b) Berechne die Lösungsmenge:

$$\text{(a)} \quad (x+5)\,(x-4) \;<\; 0 \qquad \text{(b)} \quad \frac{x-2}{x+1} \leqq 0$$

Lösung: (a) $L =]-5\,;\,4[$ (b) $L =]-1\,;\,2]$

(c) Berechne die Lösungsmenge:

$$\text{(a)} \quad \frac{8}{3\,x+12} < 0 \qquad \text{(b)} \quad \frac{x+3}{3-x} > 0$$

Lösung: (a) $L =]-\infty\,;\,-4[$ (b) $L =]-3\,;\,3[$

(d) Berechne die Lösungsmenge:

$$\text{(a)} \quad \frac{1}{x-1} \geqq 0 \qquad \text{(b)} \quad \frac{x^2}{3-x} \leqq 0$$

Lösung: (a) $L =]1\,;\,+\infty[$ (b) $L = \{0\} \cup]3\,;\,+\infty[$

(e) Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{x\,(x+2)}{(x-3)\,(x+1)} < 0$$

Lösung: $L =]-2\,;\,-1[\,\cup\,]0\,;\,3[$

(f) Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{(x-2)\,(1-x)\,(x+2)}{(x+1)\,(3-x)} \geqq 0$$

Lösung: $L = \ [-2\,;\,-1[\,\cup\,[1\,;\,2]\,\cup\,]3\,;\,+\infty[$

Ungleichungstyp (x+a)(x+b) kleiner 0 erst nach Umformung

(a) Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{0,5x-1}{2x-3} \geqq -1$$

Lösung: $L = \mathbb{Q} \setminus [\frac{3}{2}; \frac{8}{5}[$

(b) Berechne die Lösungsmenge:

$$\text{(a)} \quad \frac{1}{x} < 1 \qquad \text{(b)} \quad \frac{1}{x+2} \geqq 2$$

Lösung: (a) $\dfrac{1-x}{x} < 0 \quad \Longrightarrow \quad L =]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$

(b) $\dfrac{2\,x+3}{x+2} \leqq 0 \quad \Longrightarrow \quad L =]-2\,;\,-\frac{3}{2}]$

(c) Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{3}{2\,x+5} \leqq 4$$

Lösung: $\dfrac{8\,x+17}{2\,x+5} \geqq 0 \Longrightarrow L =]-\infty\,;\,-2,5[\,\cup\,[-2,125\,;\,+\infty[$

(d) Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{3x-2}{3x-5} > 1$$

Lösung: $L =]\frac{5}{3}; \infty[$

(e) Bestimme die Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{Q}$:

$$\frac{1,5}{4-2x} \leqq \frac{-1,5+\frac{1}{2}x}{x-2}$$

Lösung: $]-\infty;1,5]\cup]2;\infty[$

(f) Bestimme die Lösungsmenge und stelle sie am Zahlenstrahl dar:

$$\frac{x-2}{3-x} \leqq \frac{2}{3x-9}$$

Lösung: $]-\infty;\frac{4}{3}] \quad \cup \quad]3;\infty[$

(g) Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x+2}$$

Lösung: $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} < 0 \Longrightarrow L =]-2\,;\,-1[$

(h) Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{x}{x+6} \geqq \frac{x-2}{x}$$

Lösung: $\dfrac{4\,(3-x)}{x(x+6)} \geqq 0 \Longrightarrow L =]-\infty\,;\,-6[\cup]0\,;\,3]$

(i) Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{x+1}{x-1} < \frac{x-2}{x-3}$$

Lösung: $\dfrac{x-5}{(x-1)(x-3)} < 0 \Longrightarrow L =]-\infty\,;\,1[\cup]3\,;\,5[$

(j) Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an!

$$\frac{x-1}{10x-15} > 2 - \frac{9-9x}{6-4x}$$

Lösung: $D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{3}{2}\}$, $L =]-\infty;-2[\cup]\frac{3}{2};\infty[$

(k) Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an!

$$\frac{x+1}{6x-4} - 2 > \frac{19x-15}{6-9x}$$

Lösung: $D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{2}{3}\}$, $L =]-\infty; \frac{3}{5}[\cup]\frac{2}{3}; \infty[$

Ungleichungen mit Betrag

(a) Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung:

$$|2x+4| \leqq x+20$$

Lösung: $[-8; 16]$

(b) Bestimme die Lösungsmenge:

$$|2(x-2)+x| < x$$

Lösung: $]1; 2[$

(c) Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung:

$$3x+4 \leqq 2 \cdot |x+5|$$

Lösung: $L =]-\infty; 6]$

(d) Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{4x+3}{|3x+2|} \geqq 2$$

Lösung: $L = [-\frac{7}{10}; -\frac{1}{2}] \setminus \{-\frac{2}{3}\}$

(e) Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{|x|-2}{2x-3} > 2$$

Lösung: $L =]\frac{4}{3}; \frac{3}{2}[$

(f) Löse folgende Bruchungleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

$$\frac{|-3x-2|}{x+10} > -4$$

Lösung: $L = \mathbb{Q} \setminus [-38; -10]$

(g) Bestimme die Lösungsmenge folgender Ungleichungen ($G = \mathbb{Q}$):

i. $-\frac{8x-16}{7-4x} < \frac{4-x}{-x+\frac{7}{4}}$

ii. $-4x-1 > |-7-5x|+1$

Lösung: (a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{1\frac{3}{4}\}$, $L =]0; 1\frac{3}{4}[$
(b) $L =]-5; -1[$

(h) Bestimme die Lösungsmenge folgender Ungleichungen:

i. $-\frac{10x-25}{9-5x} > \frac{5-x}{-x+\frac{9}{5}}$

ii. $|-5-7x|+1 < -6x-7$

Lösung: (a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{1\frac{4}{5}\}$, $L =]-\infty; 0[\cup]1\frac{4}{5}; \infty]$
(b) $L = \{\ \}$

(i) Gib die Lösungsmenge der Ungleichung an!

$$|6x+2| - 22 < 10x - 2 \cdot |6x+2|$$

Lösung: $L =]-1; 2[$

(j) Gib die Lösungsmenge der Ungleichung an!

$$11 - 2 \cdot |2x+1| - 2x > |2x+1|$$

Lösung: $]-3{,}5; 1[$

(k) Gib die Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ an!

$$|2x+1| - 5(x+2) \leq 2(x - |2x+1|)$$

Lösung: $[-\frac{1}{2}; \infty[$

(l) Gib Definitions- und Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ an!

$$\frac{2}{|x-3|} > 5$$

Lösung: $D = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$, $L =]2{,}6; 3[\cup]3; 3{,}4[$

(m) Gib die Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ an!

$$|3x+1| - 2(3x - |3x+1|) \leq 5(x+2)$$

Lösung: $[-\frac{1}{3}; \infty[$

(n) Gib Definitions- und Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ an!

$$\frac{3}{|x-2|} > 4$$

Lösung: $D = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$, $L =]1{,}25; 2[\cup]2; 2{,}75[$

(o) Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an!

$$|1-4x| \leq 5 \cdot (2x+3) - |x-3|$$

Lösung: $D = \mathbb{Q}$, $L =]-\frac{11}{15}; \infty[$

(p) Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an!

$$|2-3x| - 3 \cdot (5-2x) \geq |x-7|$$

Lösung: $D = \mathbb{Q}$, $L =]2{,}4; \infty[$

15.6.2. Lineare Gleichungssysteme

Gleichungssysteme mit Formvariablen

(a) Welche Zahlen können für die Formvariablen a und b gewählt werden, damit das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat?

$$(1) \quad ax + (a+b)y \ = \ a + 2b \qquad (2) \quad (a+3b)x + (a+4b)y \ = \ a + 5b$$

Lösung: a beliebig, $b \neq 0$

(b) Gegeben ist das folgende Gleichungssystem, bei dem der Faktor $k \in \mathbb{Q}$ nicht festgelegt ist:

$$(1) \quad 3x + y = -4 \qquad\qquad (2) \quad 5x + ky = 12$$

Welcher Wert ist für k zu nehmen, damit die Lösung des Gleichungssystems ein Punkt der y-Achse ist? Gib diese Lösung an.

Lösung: Für $k = -3$ ist die Lösung $(0|-4)$

(c) Berechne die Lösungsmenge (Fallunterscheidung!):

$$\begin{aligned} x - \frac{y}{a} &= a \\ x + \frac{y}{b} &= -b \end{aligned}$$

Lösung: $L = \begin{cases} \{(a-b|-ab)\} & \text{für } a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq -b \\ \left\{(x|y) \,|\, x + \frac{y}{b} = -b\right\} & \text{für } a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a = -b \\ \{\} & \text{für } a = 0 \vee b = 0 \end{cases}$

3. Es ist $a = 2\,\mathrm{E}(35°)$. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist a^n rein imaginär, d.h. der Realteil von a^n gleich null?

Lösung:

$$\begin{aligned} a^n = 3^n\,\mathrm{E}(n \cdot 35°) \text{ rein imaginär} \quad &\Longleftrightarrow \quad n \cdot 35° = 90° + m \cdot 180° \text{ mit } m \in \mathbb{N} \\ &\Longleftrightarrow \quad n \cdot 7 = 18 + m \cdot 36 = 18(1+2m) \end{aligned}$$

Da $1 + 2m$ ungerade ist, muss n ein ungerades Vielfaches von 18 sein:

n	18	$3 \cdot 18$	$5 \cdot 18$	$7 \cdot 18$
m	3	10	17	24
$\varphi = n \cdot 35°$	630°	1890°	3150°	4410°
$\mathrm{E}(\varphi)$	E(270°)	E(90°)	E(270°)	E(90°)
a^n	$-3^{18}\,i$	$3^{54}\,i$	$-3^{90}\,i$	$3^{126}\,i$

4. Geben Sie folgende komplexe Zahlen in Polarform an.

(a) $2+3i$ (b) $3+4i$ (c) $4-5i$

(d) $5-6i$ (e) $-6+7i$ (f) $-7+8i$

(g) $-8-9i$ (h) $-9-10i$ (i) $-10+11i$

Lösung: (a) $(\sqrt{13}|56{,}3°)$ (b) $(5|53{,}1°)$ (c) $(\sqrt{41}|308{,}7°)$

(d) $(\sqrt{61}|309{,}8°)$ (e) $(\sqrt{85}|130{,}6°)$ (f) $(\sqrt{113}|131{,}2°)$

(g) $(\sqrt{145}|228{,}4°)$ (h) $(\sqrt{181}|228{,}0°)$ (i) $(\sqrt{221}|132{,}3°)$

5. Eine komplexe Zahl in Polarkoordinaten wird durch ein tiefgestelltes p gekennzeichnet. Stellen Sie die Ergebnisse in Polar- und in Normalform dar.

(a) $(\,3\,|\,40°\,)_{\mathrm{p}}\cdot(\,4\,|\,130°\,)_{\mathrm{p}}$ (b) $\left(\frac{2}{7}\,\middle|\,\frac{\pi}{6}\right)_{\mathrm{p}}\cdot(\,14\,|\,60°\,)_{\mathrm{p}}$ (c) $(\sqrt{3}+i)\cdot\left(2\,\middle|\,\frac{2\pi}{3}\right)_{\mathrm{p}}$

(d) $(\,3\,|\,40°\,)_{\mathrm{p}}^2\cdot\left(\frac{1}{3}\,\middle|\,140°\right)_{\mathrm{p}}^2$ (e) $\left(\frac{2}{7}\,\middle|\,\frac{7\pi}{6}\right)_{\mathrm{p}}\cdot(\,14\,|\,60°\,)_{\mathrm{p}}^2$ (f) $(\sqrt{3}-i)^2\cdot(-1+i)^2$

Lösung: (a) $(\,12\,|\,170°\,)_{\mathrm{p}}=-12\cos 10°+12\,i\sin 10°$ (b) $(\,4\,|\,90°\,)_{\mathrm{p}}=4\,i$

(c) $(\,4\,|\,150°\,)_{\mathrm{p}}=-2\sqrt{3}+2\,i$ (d) 1

(e) $(\,56\,|\,330°\,)_{\mathrm{p}}=28\sqrt{3}-28\,i$ (f) $(\,8\,|\,210°\,)_{\mathrm{p}}=-4\sqrt{3}-4\,i$

6. Eine komplexe Zahl in Polarkoordinaten wird durch ein tiefgestelltes p gekennzeichnet. Stellen Sie die Ergebnisse in Polar- und in Normalform dar.

(a) $(\,3\,|\,40°\,)_{\mathrm{p}}:(\,4\,|\,130°\,)_{\mathrm{p}}$ (b) $\left(\frac{2}{7}\,\middle|\,\frac{\pi}{6}\right)_{\mathrm{p}}:(\,14\,|\,60°\,)_{\mathrm{p}}$ (c) $(\sqrt{3}+i):\left(2\,\middle|\,\frac{2\pi}{3}\right)_{\mathrm{p}}$

Lösung: (a) $\left(\frac{3}{4}\,\middle|\,270°\right)_{\mathrm{p}}=-\frac{3}{4}\,i$ (b) $\left(\frac{1}{49}\,\middle|\,330°\right)_{\mathrm{p}}=\frac{\sqrt{3}}{98}-\frac{i}{98}$ (c) $-i$

7. Das Produkt zweier beliebiger komplexer Zahlen mit den Polardarstellungen $z_1=(\,r_1\,|\,\varphi_1\,)_{\mathrm{p}}$ und $z_2=(\,r_2\,|\,\varphi_2\,)_{\mathrm{p}}$ ist definiert durch

$$\boxed{z_1\cdot z_2=(\,r_1\cdot r_2\,|\,\varphi_1+\varphi_2\,)_{\mathrm{p}}}$$

(a) Berechnen Sie das Produkt von $z_1 = (\,2\sqrt{3}\,|\,2\,)$ und $z_2 = (\,-1\,|\,\sqrt{3}\,)$. Stellen Sie das Ergebnis in der Polar- und in der Normalform dar.

(b) Das neutrale Element der Multiplikation sei $E = (\,r_\mathrm{e}\,|\,\varphi_\mathrm{e}\,)_\mathrm{p}$. Ermitteln Sie die Koordinaten von E in der Polar- und in der Normaldarstellung.
Für welche komplexe Zahl I gilt $I^2 = -E$?

Lösung: (a) $z_1 = (\,4\,|\,30°\,)_\mathrm{p}, \quad z_2 = (\,2\,|\,120°\,)_\mathrm{p}, \quad z_1 \cdot z_2 = (\,8\,|\,150°\,)_\mathrm{p} = (\,-4\sqrt{3}\,|\,4\,)$

(b) $E = (\,1\,|\,0\,)_\mathrm{p} = (\,1\,|\,0\,)$

$I_1 = (\,1\,|\,90°\,)_\mathrm{p} = (\,0\,|\,1\,), \quad I_2 = -I_1 = (\,1\,|\,270°\,)_\mathrm{p} = (\,0\,|-1\,)$

8. (a) $((2|\frac{\pi}{12})_\mathrm{p})^{10}$ (b) $(\sqrt{3}+i)^{20}$ (c) $(-i)^{4n-3}$ mit $n \in \mathbb{N}$

Lösung: (a) $\left(1024\,\middle|\,\frac{5\pi}{6}\right)_\mathrm{p} = -512\sqrt{3} + 512\,i$

(b) $\left(2\,\middle|\,\frac{\pi}{6}\right)_\mathrm{p}^{20} = \left(1\,048\,576\,\middle|\,\frac{4\pi}{3}\right)_\mathrm{p} = -524\,288 - 524\,288\sqrt{3}\,i$

(c) $\left[(-i)^4\right]^n \cdot (-i)^{-3} = (-i)^{-3} = -i$

9. Zeichnen Sie die beiden Zahlen $z_1 = 2 + \frac{3}{2}\,i$ und $z_2 = \frac{3}{2} + 2\,i$ in die Gauß'sche Zahlenebene ein. Berechnen Sie das Produkt $z_3 = z_1 \cdot z_2$ in nachvollziehbarer Weise einmal in der Normal- und einmal in der Polarform.

Lösung: $z_1 \cdot z_2 = \dfrac{25}{4}\,i = \left(\dfrac{25}{4}\,\middle|\,90°\right)_\mathrm{p}$

10. Verwandeln Sie $z = \sqrt{3} + i$ in die Polarform. Berechnen Sie z^2, $\dfrac{1}{z}$ und z^{13}. Alle Ergebnisse in Polar- und Normalform!

Lösung: $z = (\,2\,|\,30°\,)_\mathrm{p}$, $z^2 = (\,4\,|\,60°\,)_\mathrm{p} = 2 + 2\sqrt{3}\,i$, $\dfrac{1}{z} = \left(\dfrac{1}{2}\,\middle|\,330°\right)_\mathrm{p} = \dfrac{\sqrt{3}-i}{4}$

$z^{13} = (\,8192\,|\,30°\,)_\mathrm{p} = 4096(\sqrt{3}+i)$

11. Gegeben sind die komplexen Zahlen $x = -2 + 2i$ und $y = 5 - 12i$. Berechnen Sie

$$z = \frac{338}{y} - \frac{384}{x^2}$$

Stellen Sie das Ergebnis in der Polar- und Normalform dar.

Lösung: $z = 10 - 24i = (\,26\,|\,292{,}62°\,)_\mathrm{p}$

12. Berechnen Sie Formeln für $\sin 3\alpha$ und $\cos 3\alpha$. Hinweis: $(1\,|\,\alpha)_{\mathrm{p}}^3$.

Lösung:
$$(1\,|\,\alpha)_{\mathrm{p}}^3 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \underbrace{\cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha}_{\cos 3\alpha} + \underbrace{i\,(3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha)}_{i\,\sin 3\alpha}$$
$$(1\,|\,\alpha)_{\mathrm{p}}^3 = (1\,|\,3\alpha)_{\mathrm{p}} = \cos 3\alpha + i\,\sin 3\alpha$$

13. Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $z^{100} = i$, deren Realteil zwischen 0,60 und 0,65 liegt. Lösungen in Polar- und in Normalform.

Lösung: $z = \mathrm{E}(\varphi) \quad\Longrightarrow\quad z^{100} = \mathrm{E}(100\varphi) = \mathrm{E}(90°)) \quad\Longrightarrow\quad 100\varphi = 90° + k\cdot 360°, \quad k\in\mathbb{Z}$

$\varphi_k = 0{,}9° + k\cdot 3{,}6°, \quad \mathrm{Re}(z_k) = \cos\varphi_k, \quad 0{,}60 < \cos\varphi_k < 0{,}65 \quad\Longrightarrow$

$53{,}13° > \varphi_k > 49{,}46° \quad\Longrightarrow\quad 14{,}5 > k > 13{,}5 \quad\Longrightarrow\quad k = 14, \quad \varphi_{14} = 51{,}3°$

$306{,}87° < \varphi_k < 310{,}54° \quad\Longrightarrow\quad 84{,}99 < k < 86{,}01 \quad\Longrightarrow\quad \varphi_{85} = 306{,}9°,\ \varphi_{86} = 310{,}5°$

$z_{14} = \mathrm{E}(51{,}3°) = 0{,}6252 + 0{,}7804\,i$

$z_{85} = \mathrm{E}(306{,}9°) = 0{,}6004 - 0{,}7997\,i$

$z_{86} = \mathrm{E}(310{,}5°) = 0{,}6494 - 0{,}7604\,i$

15.7. Geometrische Deutung der Multiplikation

1. In der komplexen Zahlenebene ist ein Dreieck mit den Ecken $z_1 = -1-i$, $z_2 = -5-i$ und $z_3 = -3-2i$ gegeben. Berechne und zeichne das Dreieck mit den Ecken z_1', z_2' und z_3', wenn sich z_i' $(i = 1,2,3)$ nach
   (a) $z_i' = \sqrt{2}(1+i)\cdot z_i$ berechnet. Was fällt auf?
   (b) $z_i' = -i\cdot z_i$ berechnet. Was fällt auf?
   (c) $z_i' = (-1+i)\cdot z_i$ berechnet. Was fällt auf?

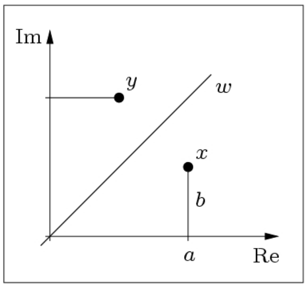
Lösung: (a) $z_1' = \sqrt{2}(1+i)(-1-i) = -2\sqrt{2}i$
$z_2' = \sqrt{2}(1+i)(-5-i) = -4\sqrt{2} - 6\sqrt{2}i$
$z_3' = \sqrt{2}(1+i)(-3-2i) = -\sqrt{2} - 5\sqrt{2}i$
Dreieck wird um 45° ($\tan 45° = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$) gegen den Uhrzeigersinn gedreht und mit dem Faktor $2 = |\sqrt{2}(1+i)|$ gestreckt.

(b) $z_1' = -i\cdot(-1-i) = -1+i$
$z_2' = -i\cdot(-5-i) = -1+5i$
$z_3' = -i\cdot(-3-2i) = -2+3i$
Dreieck wird um 270° gegen den Uhrzeigersinn gedreht.

(c) $z_1' = (-1+i)(-1-i) = 2$
$z_2' = (-1+i)(-5-i) = 6-4i$
$z_3' = (-1+i)(-3-2i) = 5-i$
Dreieck wird um 135° ($\tan 135° = \frac{1}{-1}$) gegen den Uhrzeigersinn gedreht und mit dem Faktor $\sqrt{2} = |-1+i|$ gestreckt.

Multiplikation mit einer Zahl $z = x + yi = (r, \phi)$ entspricht in der komplexen Zahlenebene einer Drehung um den Winkel ϕ gegen den Uhrzeigersinn und einer Streckung mit dem Faktor r.

2. w sei die Winkelhalbierende der reellen und imaginären Achse in der Gauß'schen Ebene (siehe Abb.), y ist der Spiegelpunkt von $x = a + b\,i$ an w.
   Wo in der Gauß'schen Ebene liegt das Produkt $z = x \cdot y$?



Lösung: $z = (a + bi)(b + ai) = (a^2 + b^2)\,i$, d.h. z auf der imaginären Achse.

3. Das Dreieck ABC mit A(2/3), B(4/4) und C(5/7) wird um A soweit gedreht, dass B' auf AC liegt. Berechnen Sie die Koordinaten des gedrehten Dreiecks A'B'C'.

Lösung: $|B' - A| = |B - A| = \sqrt{5}, \quad B' - A = \dfrac{C - A}{|C - A|} \cdot |B - A| = (C - A) \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$$B' = A + (C - A) \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = 2 + \frac{3\sqrt{5}}{5} + \left(3 + \frac{4\sqrt{5}}{5}\right) i \approx 3{,}34 + 4{,}79\,i$$

Drehfaktor: $D = \dfrac{B' - A}{B - A} = \dfrac{2 + i}{\sqrt{5}}$

$$C' = D \cdot (C - A) + A = 2 + \frac{2\sqrt{5}}{5} + \left(3 + \frac{11\sqrt{5}}{5}\right) i \approx 2{,}89 + 7{,}92\,i$$

4. (a) Welche Vektoren stehen senkrecht auf $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$?

   (b) Welche Vektoren der Länge 1 stehen senkrecht auf $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$?

Lösung: (a) Drehung von $\vec{x}$ um 90°, d.h. Multiplikation mit $D = (\,1\,|\,90^\circ\,)_{\mathrm{p}} = i$:

$$(a + b\,i) \cdot i = -b + a\,i \quad \Longrightarrow \quad k \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \text{ mit } k \in \mathbb{R}$$

(b) $\pm \dfrac{(6 + 2{,}5\,i) \cdot i}{|6 + 2{,}5\,i|} = \dfrac{-5 + 12\,i}{13} \quad \Longrightarrow \quad \pm \dfrac{1}{13} \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$

5. Die Schatzkarte des Piraten Enterfix ist mit einem Koordinatensystem überzogen und enthält folgenden Text: „Start in A (300 m |0); 500 m nach NNO; Drittelkreis mit $r = 200$ m nach links; in gerader Richtung 200 m." Berechnen Sie die Koordinaten des Schatzes und zeichnen Sie die Schatzkarte.

Lösung: $A = 300$

$B = 300 + 500\cos 67{,}5° + i \cdot 500 \sin 67{,}5° \approx$

$\approx 491{,}34 + 461{,}94\, i$

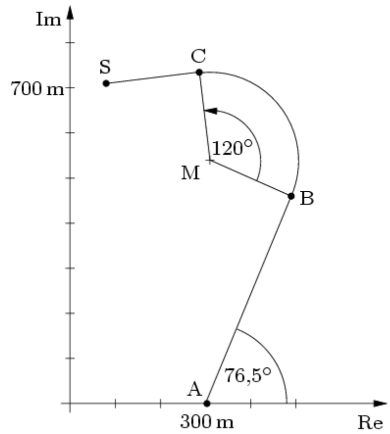
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = B - A$ um 90° drehen und mit $\frac{200}{500}$ multiplizieren ergibt

$\overrightarrow{\mathrm{BM}} = M - B = \dfrac{2}{5}\cdot(B-A)\cdot i \approx -184{,}78 + 76{,}54\, i.$

$C = M + (B-M)\cdot\big(\,1\,|\,120°\,\big)_{\mathrm{p}} \approx 280{,}46 + 736{,}77\, i$

$\overrightarrow{\mathrm{CS}} = S - C = (C - M)\cdot i \approx -198{,}29 - 26{,}10\, i$

$S = C + (S - C) \approx 82{,}2 + 710{,}7\, i$



6. Berechnen Sie den kleineren der beiden Winkel zwischen $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Lösung: $3 - 4\, i = D \cdot (-2 - 3\, i) \quad \Longrightarrow \quad D = \dfrac{3 - 4\, i}{-2 - 3\, i} = \dfrac{6 + 17\, i}{13}$

$\varphi = \arctan \dfrac{17}{6} \approx 70{,}56°$

7. Welche Drehstreckung, ausgerückt durch eine komplexe Zahl $s = x + i \cdot y$, führt den Punkt A (3|4) in B (−2| − 1,5) über? Zeichnung! Rechnen Sie in der Polarform!

Lösung: $s = \big(\,\frac{1}{2}\,\big|\, -90°\,\big)_{\mathrm{p}} = -\frac{i}{2}$

15.8. Einheitswurzeln

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen ($D = \mathbb{C}$). Geben Sie die Lösungen in Polar- und in Summenschreibweise an.
   (a) $z^3 = 8$
   (b) $z^3 = -\frac{1}{27}$
   (c) $z^4 = -4$
   (d) $z^6 = 729$

Lösung: (a) $z_1 = (2|0°) = 2$, $z_2 = (2|120°) = -1 + \sqrt{3}i$,
$z_3 = (2|240°) = -1 - \sqrt{3}i$

(b) $z_1 = (\frac{1}{3}|180°) = -\frac{1}{3}$, $z_2 = (\frac{1}{3}|60°) = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$,
$z_3 = (2|300°) = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$

(c) $z_1 = (\sqrt{2}|45°) = 1 + i$, $z_2 = (\sqrt{2}|135°) = -1 + i$,
$z_3 = (\sqrt{2}|225°) = -1 - i$, $z_4 = (\sqrt{2}|315°) = 1 - i$,

(d) $z_1 = (3|0°) = 3$, $z_2 = (3|60°) = 1\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}i$,
$z_3 = (3|120°) = -1\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}i$, $z_4 = (3|180°) = -3$.
$z_5 = (3|240°) = -1\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i$, $z_6 = (3|300°) = +1\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i$

2. Berechnen sie die Lösungen folgender Gleichung ($D = \mathbb{C}$).
Geben sie die Lösungen in Polarkoordinaten an!

$$z^4 = -4 + 2i$$

Lösung: $z_1 = (\sqrt[8]{20}|38{,}4°)$, $z_2 = (\sqrt[8]{20}|128{,}4°)$, $z_3 = (\sqrt[8]{20}|218{,}4°)$, $z_4 = (\sqrt[8]{20}|308{,}4°)$

3. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$z^4 = w \qquad \text{mit} \qquad w = -8 + 8\sqrt{3}\, i$$

Stellen Sie die Ergebnisse in der Polarform $r \cdot \mathrm{E}(\varphi)$, in der Normalform $a + b\,i$ und graphisch in der Gauß'schen Zahlenebene dar.
Berechnen Sie das Produkt aller Elemente der Lösungsmenge und vergleichen Sie es mit w.

Lösung: $w = -8 + 8\sqrt{3}\, i = 16 \cdot \mathrm{E}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

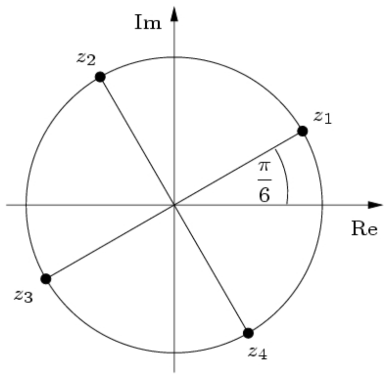
$$z_1 = 2 \cdot \mathrm{E}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2 \cdot \mathrm{E}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + \sqrt{3}\, i$$

$$z_3 = 2 \cdot \mathrm{E}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$z_4 = 2 \cdot \mathrm{E}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}\, i$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = 8 - 8\sqrt{3}\, i = -w$$



4. Die folgenden Aufgaben sind unter Zuhilfenahme der Polardarstellung zu lösen, die Ergebnisse sind aber wieder in der kartesischen Form anzugeben. Stellen Sie den Sachverhalt auch in der Gauß'schen Ebene dar.

(a) $z \cdot (-1 - i) = -i, \qquad z = ?$

(b) Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $z^3 = 4\sqrt{2} \cdot (-1+i)$.

Lösung: (a) $z \cdot \left(\sqrt{2} \,\middle|\, 225° \right)_\mathrm{p} = (\,1\,|\,270°\,)_\mathrm{p} \quad \Longrightarrow \quad z = \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \,\middle|\, 45° \right)_\mathrm{p} = \dfrac{1+i}{2}$

(b) $z^3 = (\,8\,|\,135°\,)_\mathrm{p}\,, \quad z_k = (\,2\,|\,45° + k \cdot 120°\,)_\mathrm{p}$

$z_1 = (\,2\,|\,45°\,)_\mathrm{p} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

$z_2 = (\,2\,|\,165°\,)_\mathrm{p} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6} + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}\right)\, i \approx -1{,}93 + 0{,}518\,i$

$z_3 = (\,2\,|\,285°\,)_\mathrm{p} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6} - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}\right)\, i \approx 0{,}518 - 1{,}93\,i$

15.9. Fundamentalsatz der Algebra

1. Ermitteln Sie ein Polynom möglichst kleinen Grades, das die Wertepaare $(0|1)$, $(1|1)$ und $(-i|-i)$ enthält.

Lösung: $P(x) = i\,x^2 - i\,x + 1$

2. Von einem Polynom P ist bekannt: Grad$(P) = 5$; $a_1 = -i$; $a_2 = a_3 = 0$
   $(\,2i\,|\,0\,) \in P$
   Für $z = 0$ nimmt P den Wert -2 an.
   $P(-3) = 160 - 240i$

   Stellen Sie die Gleichung von P auf und zerlegen Sie P vollständig in Linearfaktoren.

Lösung: $P(z) = i\,z^5 + 2\,z^4 - i\,z - 2 = i\,(z-2\,i)\,(z-1)\,(z+1)\,(z-i)\,(z+i)$

15.10. Anwendungen in der Physik

1. In der Elektrotechnik werden Widerstände von Spulen und Kondensatoren durch komplexe Zahlen ausgedrückt, um der Phasenverschiebung von Strom und Spannung in diesen Bauteilen Rechnung zu tragen.
   Der Widerstand eines Kondensators mit der Kapazität C berechnet sich nach der Formel
   $$R_C = \frac{1}{i\omega C}\,.$$
   Der Widerstand einer Spule mit der Induktivität L berechnet sich nach der Formel
   $$R_L = i\omega L\,.$$
   $\omega = 2\pi f$, wobei f die Frequenz der angelegten Spannung ist.

Werden ohmsche Widerstände, Spulen und Kondensatoren in Serie geschaltet, lässt sich der Ersatzwiderstand durch Addition der Einzelwiderstände berechnen. Der Betrag des Ersatzwiderstandes gibt das Verhältnis von Spannung und Stomstärke im Kreis an ($|R_{\text{ges}}| = \frac{U}{I}$).

Bei den folgenden Aufgaben kann ohne Einheiten gerechnet werden.

Berechnen sie den Ersatzwiderstand einer Serienschaltung aus

(a) einem ohmschen Widerstand mit $5\,\Omega$ und einer Spule mit der Induktivität $L = 0{,}01\,\mathrm{H}$ bei einer Frequenz von $50\,\mathrm{Hz}$.

(b) einem ohmschen Widerstand mit $5\,\Omega$ und einem Kondensator mit der Kapazität $C = 0{,}001\,\mathrm{F}$ bei einer Frequenz von $50\,\mathrm{Hz}$.

(c) einem ohmschen Widerstand mit $5\,\Omega$, einem Kondensator mit der Kapazität $C = 0{,}001\,\mathrm{F}$ und einer Spule mit der Induktivität $L = 0{,}01\,\mathrm{H}$ bei einer Frequenz von $50\,\mathrm{Hz}$.

Lösung: (a) $R_{\text{ges}} = 5 + i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}01 = 5 + \pi i$, $|R_{\text{ges}}| \approx 5{,}9$

(b) $R_{\text{ges}} = 5 + \dfrac{1}{i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}001} = 5 - \dfrac{10}{\pi} i$, $|R_{\text{ges}}| \approx 5{,}9$

(c) $R_{\text{ges}} = 5 + \dfrac{1}{i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}001} + i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}01 = 5 + \left(\pi - \dfrac{10}{\pi}\right) i$, $|R_{\text{ges}}| \approx 5{,}0$

2. Berechnen sie für folgende Schaltungen allgemein den Ersatzwiderstand und diskutieren sie die Abhängigkeit des Ersatzwiderstands von der Kreisfrequenz ω.

(a) Serienschaltung eines ohmschen Widerstands und einer Spule.

(b) Serienschaltung eines ohmschen Widerstands und eines Kondensators.

(c) Serienschaltung eines ohmschen Widerstands, einer Spule und eines Kondensators.

Lösung: (a) $R_{\text{ges}} = R + i\omega L \quad \Longrightarrow \quad |R_{\text{ges}}| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$.
Mit steigendem ω nimmt der Widerstand der Schaltung zu. $\lim\limits_{\omega \to 0} R_{\text{ges}} = R$ und $\lim\limits_{\omega \to \infty} R_{\text{ges}} = \infty$.

(b) $R_{\text{ges}} = R + \dfrac{1}{i\omega C} \quad \Longrightarrow \quad |R_{\text{ges}}| = \sqrt{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}$.
Mit steigendem ω nimmt der Widerstand der Schaltung ab. $\lim\limits_{\omega \to 0} R_{\text{ges}} = \infty$ und $\lim\limits_{\omega \to \infty} R_{\text{ges}} = R$.

(c) $R_{\text{ges}} = R + i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C} = R + (\omega L - \dfrac{1}{\omega C})i \quad \Longrightarrow$

$|R_{\text{ges}}| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \dfrac{1}{\omega C})^2}$.

Der Widerstand hat für $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ ein Minimum. Der Widerstand hat dann den Wert R.
$\lim\limits_{\omega \to 0} R_{\text{ges}} = \lim\limits_{\omega \to \infty} R_{\text{ges}} = R$.

3. Werden ohmsche Widerstände, Spulen und Kondensatoren parallel geschaltet, lässt sich der Kehrwert des Ersatzwiderstandes durch Addition der Kehrwerte der Einzelwiderstände berechnen. Der Betrag des Ersatzwiderstandes gibt das Verhältnis von Spannung und Stomstärke im Kreis an ($|R_{\text{ges}}| = \frac{U}{I}$).

   Bei den folgenden Aufgaben kann ohne Einheiten gerechnet werden.

   Berechnen sie den Ersatzwiderstand einer Parallelschaltung aus

   (a) einem ohmschen Widerstand mit $5\,\Omega$ und einer Spule mit der Induktivität $L = 0{,}01\,\mathrm{H}$ bei einer Frequenz von $50\,\mathrm{Hz}$.

   (b) einem ohmschen Widerstand mit $5\,\Omega$ und einem Kondensator mit der Kapazität $C = 0{,}001\,\mathrm{F}$ bei einer Frequenz von $50\,\mathrm{Hz}$.

   (c) einem Kondensator mit der Kapazität $C = 0{,}001\,\mathrm{F}$ und einer Spule mit der Induktivität $L = 0{,}01\,\mathrm{H}$ bei einer Frequenz von $50\,\mathrm{Hz}$.

Lösung: (a) $\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}01} = \frac{1}{5} + \frac{1}{\pi i} \quad \Longrightarrow R_{\text{ges}} = \frac{5\pi^2 + 25\pi i}{\pi^2 + 25}$, $|R_{\text{ges}}| \approx 2{,}7$

(b) $\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{5} + i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}001 = \frac{1}{5} + 0{,}1\pi i \quad \Longrightarrow R_{\text{ges}} = \frac{\frac{1}{5} - 0{,}1\pi i}{0{,}04 + 0{,}01\pi^2}$,

$|R_{\text{ges}}| \approx 2{,}7$

(c) $\frac{1}{R_{\text{ges}}} = i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}001 + \frac{1}{i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}01} = \left(\frac{\pi}{10} - \frac{1}{\pi}\right) i$, $|R_{\text{ges}}| \approx 241$

4. Berechnen sie für folgende Schaltungen allgemein den Ersatzwiderstand und diskutieren sie die Abhängigkeit des Ersatzwiderstands von der Kreisfrequenz ω.

   (a) Parallelschaltung eines ohmschen Widerstands und einer Spule.

   (b) Parallelschaltung eines ohmschen Widerstands und eines Kondensators.

   (c) Parallelschaltung einer Spule und eines Kondensators.

Lösung: (a) $\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} \quad \Longrightarrow \quad |R_{\text{ges}}| = \frac{\omega L R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$.

Mit steigendem ω nimmt der Widerstand der Schaltung zu.

$\lim_{\omega \to 0} R_{\text{ges}} = 0$ und $\lim_{\omega \to \infty} R_{\text{ges}} = R$.

(b) $\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R} + i\omega C = \frac{1}{R}(1 + RC\omega i) \quad \Longrightarrow$

$$R_{\text{ges}} = \frac{R}{1 + RC\omega i} \quad \Longrightarrow \quad |R_{\text{ges}}| = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}.$$

Mit steigendem ω nimmt der Widerstand der Schaltung ab.

$\lim_{\omega \to 0} R_{\text{ges}} = R$ und $\lim_{\omega \to \infty} R_{\text{ges}} = 0$.

(c) $\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{i\omega L} + i\omega C = (\omega C - \frac{1}{\omega L})i \quad \Longrightarrow \quad |R_{\text{ges}}| = \frac{\omega L}{|\omega^2 CL - 1|}$.

$\lim_{\omega \to \infty} R_{\text{ges}} = 0 = \lim_{\omega \to 0} R_{\text{ges}}$ und $\lim_{\omega \to \frac{1}{\sqrt{LC}}} R_{\text{ges}} = \infty$.