SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Jahrgangsstufe 12 (Gymnasium)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

21. September 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Integration

1.1 bestimmtes Integral

1. (a) $\int\limits_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

   (b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{\omega}} A\sin\omega t \,\mathrm{d}t = \left[-\frac{A}{\omega}\cos\omega t\right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} = -\frac{A}{\omega}\cos\pi + \frac{A}{\omega}\cos 0 = \frac{2A}{\omega}$

   (c) $\int\limits_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^4 = -\frac{1}{2\cdot 4^2} + \frac{1}{2} = \frac{15}{32}$

   (d) $\int\limits_{-1}^{-2} \left(\frac{x^5}{3} - \frac{3}{x^7}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^6}{18} + \frac{1}{2x^6}\right]_{-1}^{-2} = \frac{32}{9} + \frac{1}{128} - \frac{1}{18} - \frac{1}{2} = \frac{385}{128}$

   (e) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\frac{x}{3} \,\mathrm{d}x = \left[3\sin\frac{x}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 3\left[\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6}\right] = \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$

   (f) $\int\limits_0^3 (2x^4 - x^3 + 2x^2 - x) \,\mathrm{d}x = \left[\frac{2x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{1809}{20} = 90{,}45$

   (g) $\int\limits_0^1 x^{\frac{1}{3}} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_0^1 = \frac{3}{4}$

   (h)
   $$\int\limits_1^3 \frac{x^2+2x+1}{x^4+x^3} \,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 \frac{(x+1)^2}{x^3(x+1)} \,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) \mathrm{d}x =$$
   $$= \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right]_1^3 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{18} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{10}{9}$$

2. (a) $\overline{f} = \frac{1}{4-\frac{1}{2}} \int\limits_{\frac{1}{2}}^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{2}{7}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^4 = \frac{2}{7}\left[-\frac{1}{4} + 2\right] = \frac{1}{2}$

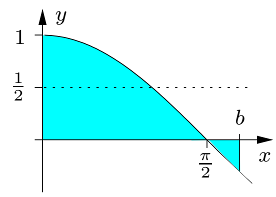
(b) $f(-x) = f(x) \quad \Longrightarrow f$ ist symmetrisch zur y-Achse:

$$\overline{f} = \frac{1}{2-(-2)} \int\limits_{-2}^{2} \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) \,\mathrm{d}x \stackrel{\text{Symmetrie}}{=} \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \int\limits_{0}^{2} \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left[4x - \frac{x^3}{12}\right]_0^2 = \frac{11}{3}$$

(c) $\overline{f} = \dfrac{1}{2\pi - 0} \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2\pi} \left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi} \left[-1+1\right] = 0$

(d) $\overline{f} = \dfrac{1}{\pi - 0} \displaystyle\int\limits_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi} \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = \dfrac{1}{2\pi} \left[1+1\right] = \dfrac{1}{\pi}$

(e) $\overline{f} = \dfrac{1}{b - 0} \displaystyle\int\limits_0^{b} \cos x \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{b} \left[\sin x\right]_0^{b} = \dfrac{\sin b}{b} = \dfrac{1}{2}$



Die Gleichung $\frac{\sin b}{b} = \frac{1}{2}$ ist nur numerisch lösbar, z.B. mit dem Newtonverfahren oder einfach durch Ausprobieren mit dem TR: $b \approx 1{,}895$.

3. $y(t) = t\left(v_0 - \dfrac{gt}{2}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad t =_{01}= 0, \quad t_{02} = \dfrac{2v_0}{g}$

Maximale Höhe zur Zeit $t_1 = \dfrac{t_{02}}{2} = \dfrac{v_0}{g}$: $\quad h = y(t_1) = \dfrac{v_0^2}{2g}$

$$\overline{h} = \frac{1}{t_{02} - t_{01}} \int\limits_{t_{01}}^{t_{02}} \left(v_0 t - \frac{g}{2} t^2\right) = \frac{g}{2v_0} \left[\frac{v_0 t^2}{2} - \frac{g}{6} t^3\right]_0^{\frac{2v_0}{g}} = \frac{v_0^2}{3g} = \frac{2}{3} h$$

4. (a) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x} \,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{3}} \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + C$

(b) $\displaystyle\int\limits_R^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{a\to\infty} \int\limits_R^{a} x^{-2} \mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_R^a = \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{1}{a} + \frac{1}{R}\right] = \frac{1}{R}$

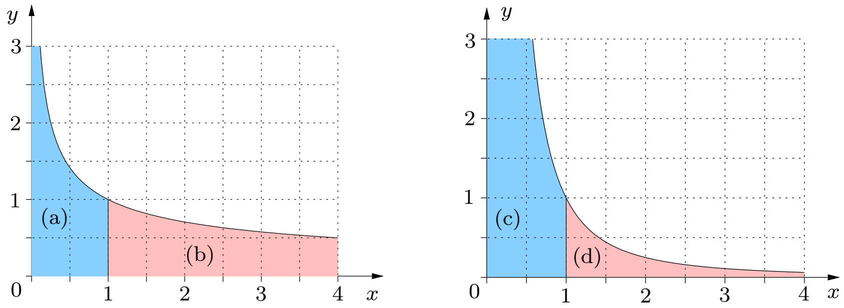
(c) $\overline{f} = \dfrac{1}{a} \displaystyle\int\limits_0^{a} x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^a = \frac{a^{n+1}}{a(n+1)} = \frac{a^n}{n+1}$

5. (a) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+} \int\limits_a^{1} x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0^+} (2 - 2\sqrt{a}) = 2$

(b) $\displaystyle\int\limits_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to\infty} \int\limits_1^{a} x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty} \left[2\sqrt{x}\right]_1^a = \lim_{a\to\infty} (2\sqrt{a} - 1) = +\infty$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 x^{-2}\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0^+} \left(-1+\frac{1}{a}\right) = +\infty$

(d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{a\to\infty} \int_1^a x^{-2}\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = \lim_{a\to\infty} \left(-\frac{1}{a}+1\right) = 1$



6. (a) Pol bei $x_0 = 0 \quad\Longrightarrow$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+} \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_{\varepsilon_2}^{1} =$$

$$= \underbrace{\lim_{\varepsilon_1\to 0^+} \left[\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right]}_{+\infty} + \underbrace{\lim_{\varepsilon_2\to 0^+} \left[-1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right]}_{+\infty} = +\infty$$

(b) Pol bei $x_0 = 0 \quad\Longrightarrow$

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+} \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{\varepsilon_2}^{1} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+} \left[-\frac{1}{2\varepsilon_1^2}+\frac{1}{2}\right] + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+} \left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varepsilon_2^2}\right] = \lim_{\varepsilon_2\to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon_2^2} - \lim_{\varepsilon_1\to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon_1^2}$$

- $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \quad\Longrightarrow\quad I = 0$
- $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 \quad\Longrightarrow\quad I = \displaystyle\lim_{\varepsilon_1\to 0^+} \left[\frac{1}{8\varepsilon_1^2} - \frac{1}{2\varepsilon_1^2}\right] = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+} \left[-\frac{3}{8\varepsilon_1^2}\right] = -\infty$

z.B. $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 \quad\Longrightarrow\quad I = \displaystyle\lim_{\varepsilon_2\to 0^+} \left[\frac{1}{2\varepsilon_2^2} - \frac{1}{8\varepsilon_2^2}\right] = \lim_{\varepsilon_2\to 0^+} \left[\frac{3}{8\varepsilon_2^2}\right] = +\infty$

7. $\displaystyle I_1 = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \lim_{a\to\infty} \int_1^a x^{-n}\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty} \left[\frac{1}{(1-n)x^{n-1}}\right]_1^a = \frac{1}{n-1} \cdot \lim_{a\to\infty} \left(1-\frac{1}{a^{n-1}}\right)$

$\Longrightarrow \quad I_1 = \dfrac{1}{n-1}$ für $n > 1$ und $I_1 = \infty$ für $n < 1$

$$I_2 = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \lim_{a\to 0^+} \int\limits_a^1 x^{-n}\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} \left[\frac{x^{1-n}}{1-n}\right]_a^1 = \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{a\to 0^+} \left(1 - a^{1-n}\right)$$

$\Longrightarrow \quad I_2 = \dfrac{1}{1-n}$ für $n < 1$ und $I_1 = \infty$ für $n > 1$

8. (a) $\Delta x = \dfrac{5-1}{4} = 1$, f monoton fallend im Integrationsintervall

$$S_\mathrm{u} = [f(2) + f(3) + f(4) + f(5)] \cdot 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{77}{60} = 1{,}28\overline{3}$$
$$S_\mathrm{o} = [f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] \cdot 1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} = 2{,}08\overline{3}$$
$$\overline{S} = \frac{S_\mathrm{u} + S_\mathrm{o}}{2} = \frac{101}{60} = 1{,}68\overline{3}$$
$$S_\mathrm{m} = [f(1{,}5) + f(2{,}5) + f(3{,}5) + f(4{,}5)] \cdot 1 = \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{2{,}5} + \frac{1}{3{,}5} + \frac{1}{4{,}5} \approx 1{,}574603$$

I bezeichnet den angegebenen genauen Wert;

$$\delta_\mathrm{u} = \frac{S_\mathrm{u} - I}{I} = -20{,}3\%, \quad \delta_\mathrm{o} = 29{,}4\%, \quad \delta_{\overline{S}} = 4{,}6\%, \quad \delta_\mathrm{m} = -2{,}2\%,$$

(b) $\Delta x = \dfrac{2-0}{4} = \dfrac{1}{2}$, f monoton fallend im Integrationsintervall

$$S_\mathrm{u} = [f(0{,}5) + f(1) + f(1{,}5) + f(2)] \cdot \frac{1}{2} = 0{,}8068102595$$
$$S_\mathrm{o} = [f(0) + f(0{,}5) + f(1) + f(1{,}5)] \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{12} = 1{,}2755602$$
$$\overline{S} = \frac{S_\mathrm{u} + S_\mathrm{o}}{2} = 1.04118526$$
$$S_\mathrm{m} = [f(0{,}25) + f(0{,}75) + f(1{,}25) + f(1{,}75)] \cdot \frac{1}{2} = 1{,}046497675$$

I bezeichnet den angegebenen genauen Wert;

$$\delta_\mathrm{u} = \frac{S_\mathrm{u} - I}{I} = -22{,}8\%, \quad \delta_\mathrm{o} = 22{,}1\%, \quad \delta_{\overline{S}} = -0{,}34\%, \quad \delta_\mathrm{m} = 0{,}17\%,$$

(c) $\Delta x = \dfrac{\pi}{16}$, f monoton steigend im Integrationsintervall

$$S_\mathrm{u} = \left[f(0) + f\left(\frac{\pi}{16}\right) + f\left(\frac{\pi}{8}\right) + f\left(\frac{3\pi}{16}\right)\right] \cdot \frac{\pi}{16} = 0{,}2515835636$$
$$S_\mathrm{o} = \left[f\left(\frac{\pi}{16}\right) + f\left(\frac{\pi}{8}\right) + f\left(\frac{3\pi}{16}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \cdot \frac{\pi}{16} = 0{,}4479331044$$
$$\overline{S} = \frac{S_\mathrm{u} + S_\mathrm{o}}{2} = 0{,}349758334$$
$$S_\mathrm{m} = \left[f\left(\frac{\pi}{32}\right) + f\left(\frac{3\pi}{32}\right) + f\left(\frac{5\pi}{32}\right) + f\left(\frac{7\pi}{32}\right)\right] \cdot \frac{\pi}{16} = 0{,}3449916438$$

I bezeichnet den angegebenen genauen Wert;

$$\delta_{\mathrm{u}} = \frac{S_{\mathrm{u}} - I}{I} = -27{,}4\%, \quad \delta_{\mathrm{o}} = 29{,}2\%, \quad \delta_{\overline{S}} = 0{,}92\%, \quad \delta_{\mathrm{m}} = -0{,}46\%,$$

(d) $\Delta x = \frac{\pi}{5}$, f monoton fallend im Integrationsintervall

$$S_{\mathrm{u}} = \left[f\left(\frac{\pi}{5}\right) + f\left(\frac{2\pi}{5}\right) + f\left(\frac{3\pi}{5}\right) + f\left(\frac{4\pi}{5}\right) + f(\pi)\right] \cdot \frac{\pi}{5} = 1.527278662$$

$$S_{\mathrm{o}} = \left[f(0) + f\left(\frac{\pi}{5}\right) + f\left(\frac{2\pi}{5}\right) + f\left(\frac{3\pi}{5}\right) + f\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right] \cdot \frac{\pi}{5} = 2.155597193$$

$$\overline{S} = \frac{S_{\mathrm{u}} + S_{\mathrm{o}}}{2} = 1.841437928$$

$$S_{\mathrm{m}} = \left[f\left(\frac{\pi}{10}\right) + f\left(\frac{3\pi}{10}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{7\pi}{10}\right) + f\left(\frac{9\pi}{10}\right)\right] \cdot \frac{\pi}{5} = 1.857196808$$

I bezeichnet den angegebenen genauen Wert;

$$\delta_{\mathrm{u}} = \frac{S_{\mathrm{u}} - I}{I} = -17{,}5\%, \quad \delta_{\mathrm{o}} = 16{,}4\%, \quad \delta_{\overline{S}} = -0{,}57\%, \quad \delta_{\mathrm{m}} = 0{,}28\%,$$

9. (a) $$\int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

(b) $$\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} A \sin \omega t \, \mathrm{d}t = \left[-\frac{A}{\omega} \cos \omega t\right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} = -\frac{A}{\omega} \cos \pi + \frac{A}{\omega} \cos 0 = \frac{2A}{\omega}$$

(c) $$\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^4 = -\frac{1}{2 \cdot 4^2} + \frac{1}{2} = \frac{15}{32}$$

(d) $$\int_{-1}^{-2} \left(\frac{x^5}{3} - \frac{3}{x^7}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^6}{18} + \frac{1}{2x^6}\right]_{-1}^{-2} = \frac{32}{9} + \frac{1}{128} - \frac{1}{18} - \frac{1}{2} = \frac{385}{128}$$

(e) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \frac{x}{3} \, \mathrm{d}x = \left[3 \sin \frac{x}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 3 \left[\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6}\right] = \frac{3}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)$$

(f) $$\int_0^3 (2x^4 - x^3 + 2x^2 - x) \, \mathrm{d}x = \left[\frac{2x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{1809}{20} = 90{,}45$$

(g) $$\int_0^1 x^{\frac{1}{3}} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}}\right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

(h)

$$\int_1^3 \frac{x^2+2x+1}{x^4+x^3}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{(x+1)^2}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right]_1^3 = -\frac{1}{3}-\frac{1}{18}+1+\frac{1}{2} = \frac{10}{9}$$

10. (a) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b}+C$

(b)

$$\int_1^{\sqrt{7}} \frac{2x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{7}} \frac{(x^2-4)'}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left[\ln|x^2-4|\right]_1^{2-\varepsilon} + \left[\ln|x^2-4|\right]_{2+\varepsilon}^{\sqrt{7}}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|-4\varepsilon+\varepsilon^2| - \ln 3 + \ln 3 - \ln|4\varepsilon+\varepsilon^2|\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\left|\frac{\varepsilon(-4+\varepsilon)}{\varepsilon(4+\varepsilon)}\right| = \ln 1 = 0$$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{3}\left(\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{2}+\sin^2\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}(\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}) = \frac{\pi}{2}$

11. (a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{5x^4+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{20}\int \frac{20x^3}{5x^4+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{20}\int \frac{(5x^4+3)'}{5x^4+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{20}\ln|5x^4+3|+C$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^{n-1}}{x^n+a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int \frac{nx^{n-1}}{x^n+a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int \frac{(x^n+a)'}{x^n+a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\ln|x^n+a|+C$

(c) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_2^3 \frac{3x^2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_2^3 \frac{(x^3-1)'}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\ln|x^3-1|\right]_2^3 = \frac{1}{3}\ln\frac{26}{7}$

(d) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{(\ln x)'}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln|\ln x|\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = \ln 2$

(e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x = -\left[\ln|\sin x+\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$

(f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x = -\left[\ln|\sin x+\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\sqrt{2}+\ln 1 = -\frac{1}{2}\ln 2$

12. (a) $\displaystyle\int (ax+b)^{99}\mathrm{d}x = \frac{(ax+b)^{100}}{100a}+C$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{(x^3+1)'}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \left[\ln|x^3+1|\right]_1^2 = \ln 9 - \ln 2 \approx 1{,}50$

(c) $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x - \ln 2 = \ln\frac{x}{2} = 1 \quad\Longrightarrow\quad x = 2\mathrm{e}$

1.2 Integralfunktion

1. Allgemein gilt: $\displaystyle f(x) = \int_a^x f'(x)\,\mathrm{d}x$ mit $f(a) = 0$.

   (a) $f(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_{01} = 2,\quad x_{02} = 6$, also $\displaystyle f(x) = \int_2^x (x-4)\;\mathrm{d}x = \int_6^x (x-4)\;\mathrm{d}x$

   (b) $g(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_{0k} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, also $\displaystyle g(x) = -\int_{x_{0k}}^x \sin x\,\mathrm{d}x$

   (c) $h(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_{0k} = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Um nicht über eine Polstelle zu integrieren, muss man unendlich viele Fälle unterscheiden:

$$h(x) = \int_{x_{0k}}^x \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \quad \text{für} \quad x \in \left]x_{0k} - \frac{\pi}{2}, x_{0k} + \frac{\pi}{2}\right[$$

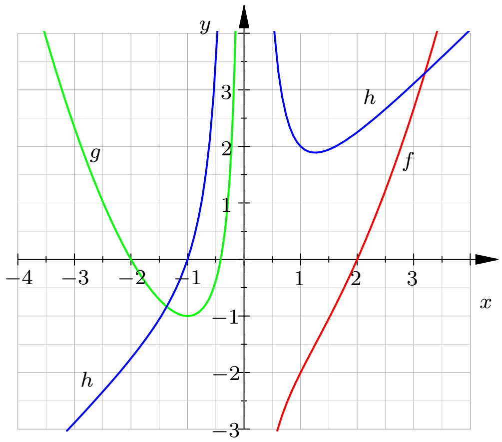
2. (a) $\displaystyle f(x) = \int_{\frac{\pi}{6}}^x \cos t\,\mathrm{d}t = \sin x - \sin\frac{\pi}{6} = \sin x - \frac{1}{2}$

   $\displaystyle g(x) = \int_{\frac{\pi}{3}}^x \cos t\,\mathrm{d}t = \sin x - \sin\frac{\pi}{3} = \sin x - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

   $\Longrightarrow \quad f(x) = g(x) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$

   (b) $\displaystyle f(x) = \int_2^x \left(\frac{1}{t^2} + t\right)\;\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t} + \frac{t^2}{2}\right]_2^x = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}$ für $x > 0$

   $\displaystyle g(x) = \int_{-2}^x \left(\frac{1}{t^2} + t\right)\;\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t} + \frac{t^2}{2}\right]_{-2}^x = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2}$ für $x < 0$



3. (a) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$ hat für alle $C \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle ($x_0 = \operatorname{sgn}(-3C) \cdot (|3C|)^{\frac{1}{3}}$) und ist damit auch Integralfunktion von f.

   (b) $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + C$ hat nur für $C \leqq 0$ eine Nullstelle. Für $C > 0$ ist F also keine Integralfunktion von f.

4. Nullstellen von f: $x_{01} = -1$, $x_{02} = 1$. Wegen der Polstelle Fallunterscheidung:

$$f(x) = \begin{cases} -\displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{2}{t^3}\,\mathrm{d}t & \text{für } x < 0 \\ -\displaystyle\int_{1}^{x} \frac{2}{t^3}\,\mathrm{d}t & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

5. $I_a(x) = -\displaystyle\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[\frac{1}{t}\right]_a^x = \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \lim_{a\to\pm\infty} I_a(x)$

   Um nicht über die Polstelle integrieren zu müssen:

$$f(x) = \begin{cases} -\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} & \text{für } x < 0 \\ -\displaystyle\int_{\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

   Mit der Polstelle $x_0 = 0$ im Integrationsintervall wäre das Integral unendlich, z.B.:

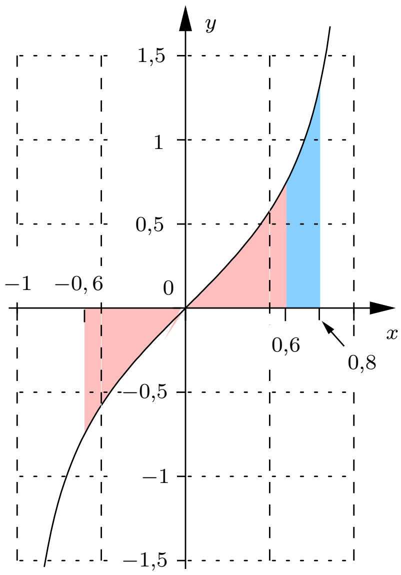
$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-\frac{1}{-\varepsilon} + \frac{1}{-1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{\varepsilon}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{2}{\varepsilon} - 2\right] = +\infty$$

6. (a) $g(x) = f'(x) = -\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, Nullstellen von f: $\pm\dfrac{3}{5} = \pm 0{,}6 \quad \Longrightarrow$

$$f(x) = \int\limits_{-\frac{3}{5}}^{x} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{3}{5}}^{x} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

(b)

x	$g(x)$
0	0
$\pm 0{,}1$	$\pm 0{,}101$
$\pm 0{,}2$	$\pm 0{,}204$
$\pm 0{,}3$	$\pm 0{,}314$
$\pm 0{,}4$	$\pm 0{,}436$
$\pm 0{,}5$	$\pm 0{,}577$
$\pm 0{,}6$	$\pm 0{,}750$
$\pm 0{,}7$	$\pm 0{,}980$
$\pm 0{,}8$	$\pm 1{,}333$
$\pm 0{,}9$	$\pm 2{,}065$



Wegen $f(-x) = f(x)$ ist G_f achsensymmetrisch zur y-Achse.

Wegen $g(-x) = -g(x)$ ist G_g punktsymmetrisch zum Ursprung.

$$f(0{,}8) = \int\limits_{-\frac{3}{5}}^{0{,}8} g(x)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\frac{3}{5}}^{\frac{3}{5}} g(x)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{\frac{3}{5}}^{0{,}8} g(x)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \underbrace{f\left(\frac{3}{5}\right) - f\left(-\frac{3}{5}\right)}_{0\ \text{(Symmetrie)}} + \int\limits_{\frac{3}{5}}^{0{,}8} g(x)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{3}{5}}^{0{,}8} g(x)\,\mathrm{d}t$$

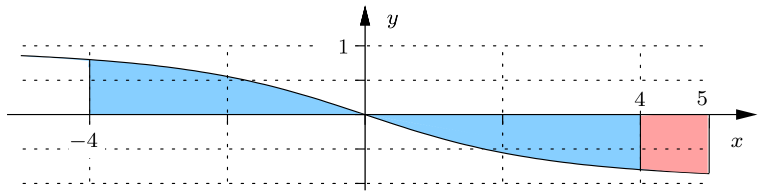
Argumentation mit einer der beiden Symmetrien oder mit $f\left(\frac{3}{5}\right) = f\left(-\frac{3}{5}\right) = 0$.

7. (a) $g(x) = f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}}$, Nullstellen von f: $\pm 4 \quad \Longrightarrow$

$$f(x) = -\int\limits_{-4}^{x} \frac{t}{\sqrt{9+t^2}}\,\mathrm{d}t = -\int\limits_{4}^{x} \frac{t}{\sqrt{9+t^2}}\,\mathrm{d}t$$

(b)

x	$g(x)$
0	0
± 1	$\mp 0{,}316$
± 2	$\mp 0{,}555$
± 3	$\mp 0{,}707$
± 4	$\mp 0{,}800$
± 5	$\mp 0{,}857$



Wegen $f(-x) = f(x)$ ist G_f achsensymmetrisch zur y-Achse.

Wegen $g(-x) = -g(x)$ ist G_g punktsymmetrisch zum Ursprung.

$$f(5) = \int_{-4}^{5} g(x)\,\mathrm{d}t = \int_{-4}^{4} g(x)\,\mathrm{d}t + \int_{4}^{5} g(x)\,\mathrm{d}t =$$

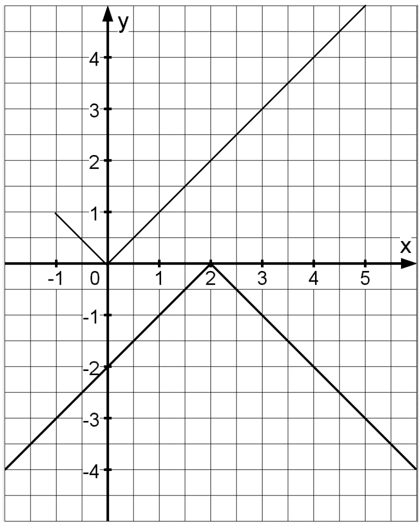
$$= \underbrace{f(4) - f(-4)}_{0 \text{ (Symmetrie)}} + \int_{4}^{5} g(x)\,\mathrm{d}t = \int_{4}^{5} g(x)\,\mathrm{d}t$$

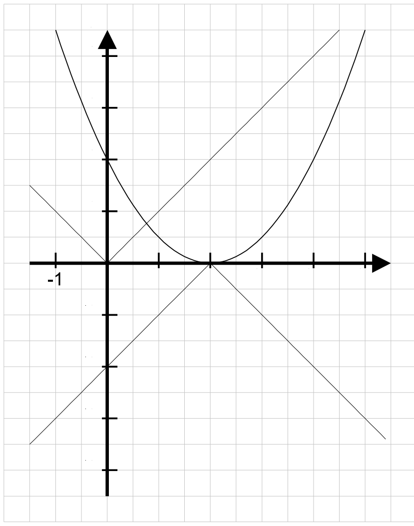
8. (a) f ist Stammfunktion von g:

$$\int_{a}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - \underbrace{f(a)}_{b} \quad\Longrightarrow\quad f(x) = b + \int_{a}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$$

(b) $f(x) = -\frac{1}{7} + \int_{8}^{x} t^{\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{7} + \left[\frac{3}{7}t^{\frac{7}{3}}\right]_8^x = -\frac{1}{7} + \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - \underbrace{\frac{3}{7}8^{\frac{7}{3}}}_{\frac{384}{7}} = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - 55$

9. f entsteht aus g durch Verschiebung um 2 nach rechts und Spiegelung an der x-Achse.





1.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

1. $F(x) = -\frac{1}{2}\ln(4 + 2\cos x) + C$

2. (a) $f(x) = \displaystyle\int (9 - x^2)\,\mathrm{d}x = 9x - \frac{x^3}{3} + C$

$$f(3) = 27 - \frac{27}{3} + C = 18 + C = 10 \quad\Longrightarrow\quad C = -8 \quad\Longrightarrow\quad f(x) = 9x - \frac{x^3}{3} - 8$$

$$f(1) = 9 - \frac{1}{3} - 8 = \frac{2}{3}$$

(b) $g(x) = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$

$$g(1) = -2 + C = 1 \quad\Longrightarrow\quad C = 3 \quad\Longrightarrow\quad g(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} + 3$$

3.
$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin x\cos x}{2} + C\right)' &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos x\cos x + \sin x(-\sin x)) = \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \cos^2 x + \sin^2 x\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin^2 x + \sin^2 x\right] = \sin^2 x \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

4. (a) Beweis durch Ableiten der rechten Seite (RS):

$$\mathrm{RS}' = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2a}\sin ax\cos ax + C\right)' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a}\left(a\cos^2 ax - a\sin^2 ax\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\big(\underbrace{1 - \sin^2 ax}_{\cos^2 ax} + \cos^2 ax\big) = \cos^2 ax$$

(b) Mit $a = \frac{1}{2}$ folgt aus der bewiesenen Integralformel:

$$\overline{f} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos^2\left(\frac{1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right]_0^\pi =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} - 0\right] = \frac{1}{2}$$

1.4 Stammfunktion und unbestimmtes Integral

1. Wir müssen zeigen, dass, $F(x) - G(x)$ eine Konstante ist:

$$F(x) - G(x) = \sqrt{x+1} - \frac{x}{1+\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1}) - x}{1+\sqrt{x+1}} =$$
$$= \frac{\sqrt{x+1} + x + 1 - x}{1+\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}+1}{1+\sqrt{x+1}} = 1 \quad \text{q.e.d}$$

2.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{2x}{a^2}\cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin ax + C\right] =$$
$$\frac{2}{a^2}\cos ax - \frac{2x}{a}\sin ax + \frac{2x}{a}\sin ax + \left(x^2 - \frac{2}{a^2}\right)\cos ax = x^2\cos ax \quad \text{q.e.d}$$

3. (a) $x^n + C$ (b) $t^{10}\cdot x + C$ (c) $\frac{1}{11}t^{11} + C$

(d) $\frac{x^{1-n}}{1-n} + C$ (e) $\begin{cases} \frac{x^2}{2} + C & \text{für } x \geqq 0 \\ -\frac{x^2}{2} + C & \text{für } x < 0 \end{cases}$ (f) $x^2 + 3x - \frac{3}{x} - \frac{1}{4x^4} + C$

(g) $\frac{a}{2}x^2 + ax + C$ (h) $\frac{x+1}{2}a^2 + C$ (i) $a(x+1)t + C$

4. (a) $\frac{x^{1000}}{1000} + C$ (b) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$ (c) $\frac{n}{n+m}\sqrt[n]{x^{n+m}} + C$ (d) $2\sqrt{x} + C$

(e) $\frac{1}{3}\sin 3x + C$ (f) $-\frac{A}{\omega}\cos\omega t + C$ (g) $\frac{x}{a^2} + C$ (h) $-\frac{1}{a} + C$

5. (a) $\mathrm{e}^x + C$ (b) $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + C$ (c) $2\sqrt{\mathrm{e}^x} + C$ (d) $-\mathrm{e}^{-x} + C$

(e) $\mathrm{e}^{ax} + C$ (f) $-\frac{A}{b}\mathrm{e}^{-bt} + C$ (g) $-2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + C$ (h) $\frac{2}{3}x^3 - \mathrm{e}^{-3x} + C$

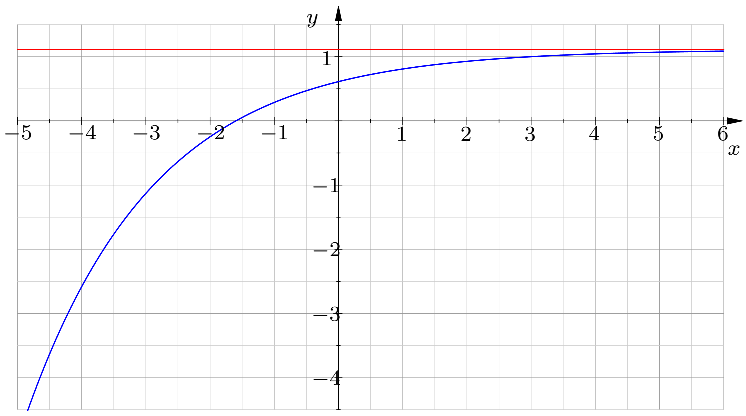
6. (a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x-1)\mathrm{e}^x + C\right] = \mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x$

   (b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x^2-2x+2)\mathrm{e}^x + C\right] = (2x-2)\mathrm{e}^x + (x^2-2x+2)\mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x$

   (c)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{a^3x^3-3a^2x^2+6ax-6}{a^4}\cdot\mathrm{e}^{ax}+C\right] =$$
$$= \frac{3a^3x^2-6a^2x+6a}{a^4}\cdot\mathrm{e}^{ax} + \frac{a^3x^3-3a^2x^2+6ax-6}{a^4}\cdot a\mathrm{e}^{ax} =$$
$$= \frac{3a^2x^2-6ax+6}{a^3}\cdot\mathrm{e}^{ax} + \frac{a^3x^3-3a^2x^2+6ax-6}{a^3}\cdot\mathrm{e}^{ax} = x^3\mathrm{e}^{ax}$$

7. $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + C$

$$f(3) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} + C = 1 \quad\Longrightarrow\quad C = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \approx 1{,}11$$
$$f(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + 1 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$$
$$f(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_0 = -2\ln\left(2+e^{-\frac{3}{2}}\right) \approx -1{,}60$$



8. (a) $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin x + x + C, \quad F(\pi) = \pi + C = \pi \quad\Longrightarrow\quad C = 0$
$$\Longrightarrow\quad F(x) = \sin x + x$$

   (b) $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3x^{\frac{1}{3}} + C, \quad F(8) = 6 + C = 0 \quad\Longrightarrow\quad C = -6$
$$\Longrightarrow\quad F(x) = 3x^{\frac{1}{3}} - 6$$

9. (a) $F(x) = \int \left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{8}x^2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + C, \quad F(4) = 4 + C = 4 \quad \Longrightarrow \quad C = 0$

$$\Longrightarrow \quad F(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3$$

(b) $x(t) = \int \left(\frac{t}{4} + \frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{8} - \frac{1}{t} + C, \quad x(2) = 0 + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = 0$

$$\Longrightarrow \quad x(t) = \frac{t^2}{8} - \frac{1}{t}$$

10. (a) $\dfrac{x^{n+1}}{a(n+1)} + C$ (b) $-\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(7-x)^4} + C$

(c) $-\dfrac{n}{b(n+m)}\sqrt[n]{(a-bx)^{n+m}} + C$ (d) $\dfrac{2}{5}\sqrt{5x-3} + C$

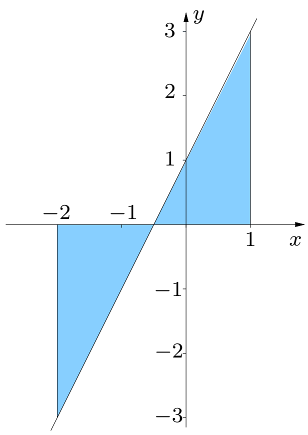
(e) $\dfrac{1}{3}\sin(3x-4) + C$ (f) $-\dfrac{A}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) + C$

(g) $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x-3} + C$ (h) $-\dfrac{1}{2}\ln|8-2t| + C$

(i) $\left[2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}-1}\right]_0^2 = 2\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

1.5 Berechnung von Flächeninhalten

1. (a) Nullstelle im Integrationsintervall: $x_0 = -\frac{1}{2}$



$$f(x) < 0 \text{ für } x < -\frac{1}{2}, \quad f(x) > 0 \text{ für } x > -\frac{1}{2}$$

$$A = \int_{-2}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} [-f(x)]\,\mathrm{d}x + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-x^2 - x\right]_{-2}^{-\frac{1}{2}} + \left[x^2 + x\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 4 - 2 + 1 + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 4{,}5$$

elementargeometrisch: $A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 3 = 4{,}5$

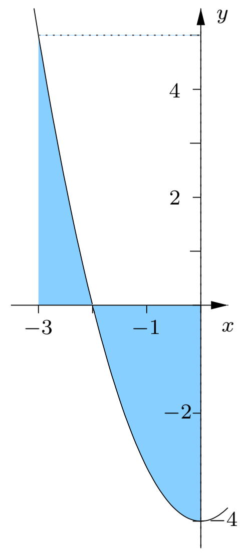
(b) Nullstelle im Integrationsintervall: $x_0 = -2$

$$f(x) > 0 \text{ für } x < -2, \quad f(x) < 0 \text{ für } x > -2$$

$$A = \int_{-3}^{0} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-2}^{0} [-f(x)]\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-3}^{-2} + \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{0} =$$

$$= -\frac{8}{3} + 8 + 9 - 12 - \frac{8}{3} + 8 = 7\frac{2}{3}$$



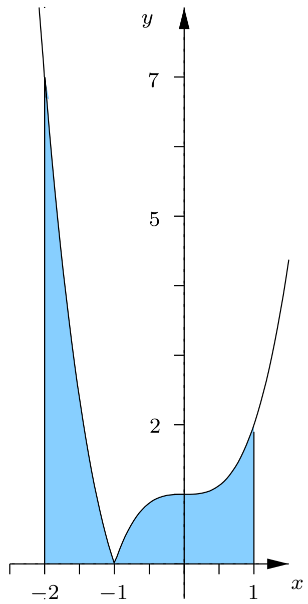
(c) Nullstelle von $x^3 + 1$: $x_0 = -1 \quad \Longrightarrow$

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 - 1 & \text{für } x < -1 \\ x^3 + 1 & \text{für } x \geqq -1 \end{cases}$$

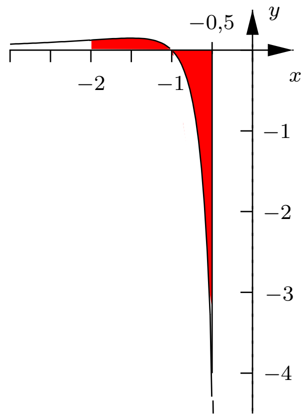
$$A = \int_{-2}^{-1} (-x^3 - 1)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} (x^3 + 1)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} - x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^4}{4} + x\right]_{-1}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{4} + 1 + 4 - 2 + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} + 1 = 4{,}75$$



(d) Nullstelle im Integrationsintervall: $x_0 = -1$



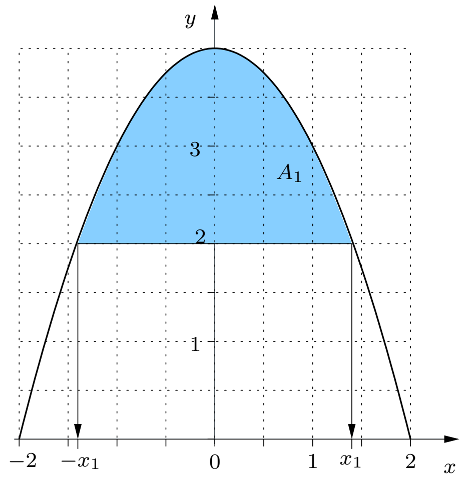
$$f(x) > 0 \text{ für } x < -1, \quad f(x) < 0 \text{ für } -1 < x < 0$$

$$A = \int_{-2}^{-0,5} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{-0,5} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right]_{-1}^{-0,5} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - 2 + 2 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

2. (a)



$$A_0 = \int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{2} (4 - x^2)\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{32}{3}$$

(b) NS von f: $\quad x_1 = \sqrt{4 - a}, \quad x_2 = -x_1$

$$A_1 = 2\int_0^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x - 2ax_1 = 2\left(4x_1 - \frac{x_1^3}{3}\right) - 2ax_1 = 2(4-a)x_1 - \frac{2}{3}x_1^3 =$$

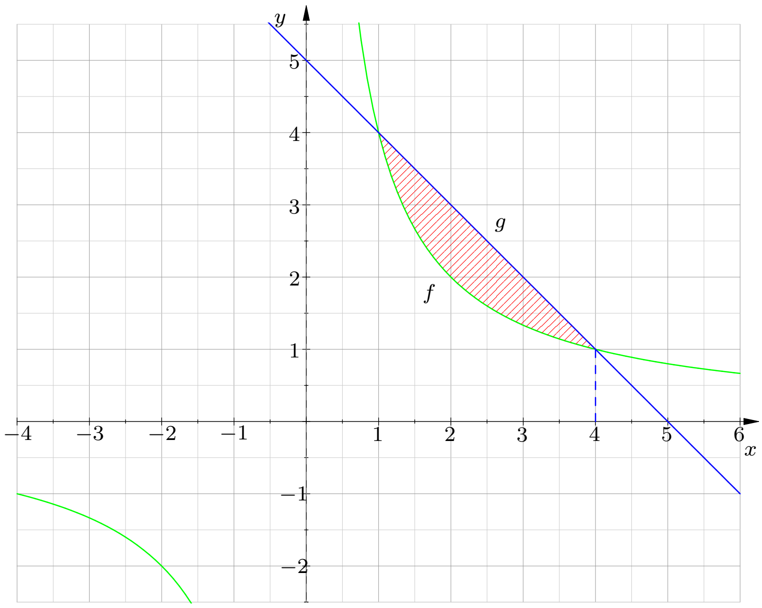
$$= 2(4-a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(4-a)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}(4-a)^{\frac{3}{2}}$$

$$A_1 = \frac{A_0}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{4}{3}(4-a)^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3} \quad \Longrightarrow \quad (4-a)^{\frac{3}{2}} = 4$$

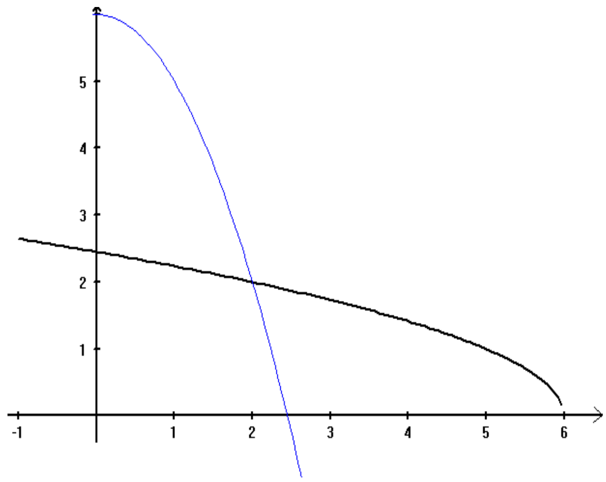
$$a = 4 - \sqrt[3]{16} \approx 1{,}48$$

3. Schnittpunkte: $f(x) = g(x) \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 5x = -4 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4$

$$A = \int_1^4 |g(x) - f(x)| = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln x\right]_1^4 = \frac{15}{2} - 8\ln 2 \approx 1{,}95$$



4. (a) $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{6-x}} < 0$, also streng monoton fallend und damit umkehrbar
   (b) $D_{f^{-1}} = W_f = [0; \infty[,\ W_{f^{-1}} = D_f =]-\infty; 6],\ f^{-1}(x) = 6 - x^2$



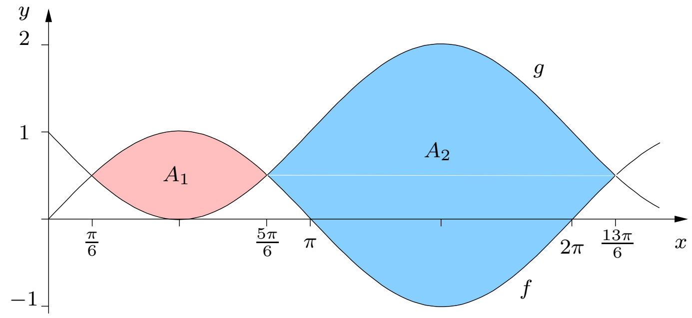
   (c) $S(2|2),\ A = 2\int_0^2 (6 - x^2)\,dx - 4 = 14\frac{2}{3}$

5. (a) Nenner und Zähler positiv für $x > \frac{2}{3}$
   (b) $f'(x) = \frac{3-9x}{9(x-1)^3} = 0$ für $x = \frac{1}{3}$ und dort auch Vorzeichenwechsel von + nach −, also Maximum
   (c) $\int_2^6 f(x)dx = \int_1^5 \frac{3t+1}{3t^2}dt = [\ln z - \frac{1}{3t}]_1^5 = \ln 5 + \frac{4}{15}$

6. (a) $a = 20$, $b = -10$
   (b) $-53°$
   (c)
   (d) $A = 47$

7. Schnittpunkte der beiden Grafen:

$$f(x) = g(x) \quad \Longrightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6}, \quad x_3 = \frac{13\pi}{6}$$



$$A_1 = \int\limits_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2\sin x - 1)\,\mathrm{d}x = \Big[-2\cos x - x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} =$$
$$= -2\cos\frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} =$$
$$= 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} \approx 1{,}37$$

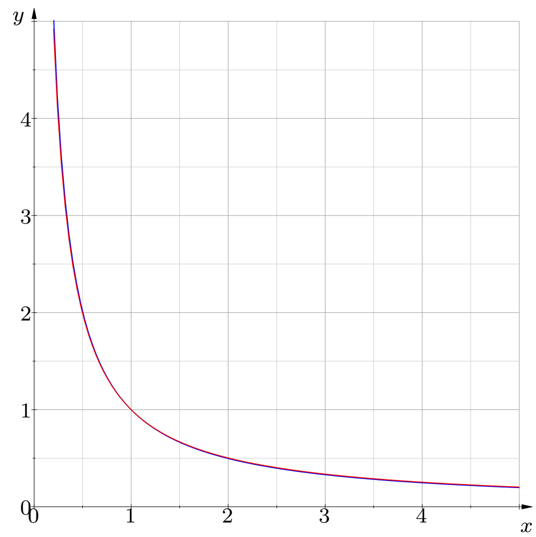
$$A_2 = \int\limits_{x_2}^{x_3} |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{13\pi}{6}} (1 - 2\sin x)\,\mathrm{d}x = \Big[2\cos x + x\Big]_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{13\pi}{6}} =$$
$$= 2\cos\frac{13\pi}{6} + \frac{13\pi}{6} - 2\cos\frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = \sqrt{3} + \frac{13\pi}{6} + \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6} =$$
$$= 2\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3} \approx 7{,}65$$

8. (a)

x	0,2	1	2	5
f_1	5,08	1,00	0,497	0,197
f_2	5,00	1,00	0,500	0,200
f_3	4,92	1,00	0,503	0,203

Die maximale gemeinsame Definitionsmenge aller drei Funktionen ist $\mathbb{R}^+$.

Die Grafen der derei Funktionen sind kaum zu unterscheiden.



(b) Für $0 < x < 1$ gilt $\frac{1}{x} > 1$ und daher wegen $1 - \varepsilon > 0$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{1-\varepsilon} < 1 \quad \Longrightarrow \quad f_1(x) < f_2(x) < f_3(x) < 1$$

Für $k \in \{1, 2, 3\}$ gilt

$$\lim_{x \to 0^+} f_k(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f_k(x) = 0^+$$

(c) $|F_k(x)|$ ist gleich der Fläche zwischen G_{f_k} und der x-Achse im Intervall $[1, x]$.

$$F_1(x) = \int_1^x t^{-1+\varepsilon}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon}$$

$$F_2(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

$$F_3(x) = \int_1^x t^{-1-\varepsilon}\,\mathrm{d}t = \frac{x^\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\lim_{x \to 0^+} F_1(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} F_2(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} F_3(x) = -\frac{1}{\varepsilon}$$

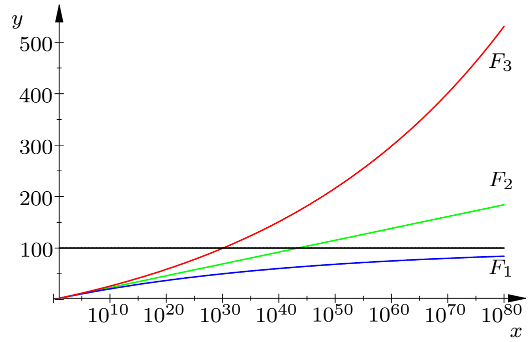
$$\lim_{x \to \infty} F_1(x) = \frac{1}{\varepsilon}, \qquad \lim_{x \to \infty} F_2(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \infty} F_3(x) = +\infty$$

(d)

$$F_1(x) = 100 - \frac{100}{\sqrt[100]{x}}$$

$$F_2(x) = \ln x$$

$$F_3(x) = 100\,\sqrt[100]{x} - 100$$



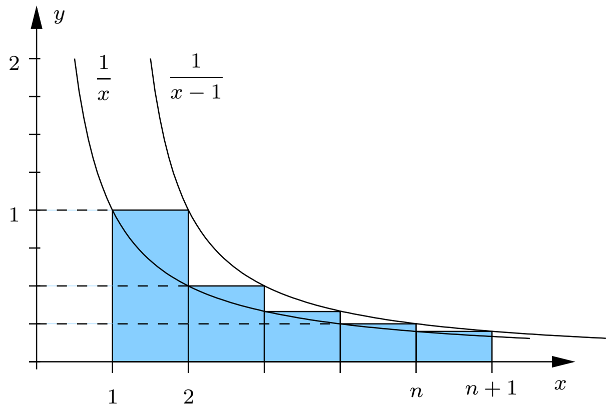
Die tatsächliche Strecke auf der x-Achse ist $X = 0{,}1 \lg x$:

$$F_2(x) = \ln x = \frac{\lg x}{\lg \mathrm{e}} = \frac{10}{\lg \mathrm{e}} \cdot X$$

9. (a)

n	H_n
1	1,0
2	1,5
3	1,833333333
4	2,083333333
5	2,283333333
6	2,45
7	2,592857143
8	2,717857143
9	2,828968254
10	2,928968254
11	3,019877345
12	3,103210678
13	3,180133755
14	3,251562327
15	3,318228993
16	3,380728993
17	3,439552523
18	3,495108078
19	3,547739657
20	3,597739657

(b)



$$H_n > \int\limits_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(1+n)$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(1+n) = \infty$ gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = \infty$.

(b)

$$\int\limits_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} < H_n < 1 + \int\limits_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$$

$\frac{1}{x-1}$ ist die um 1 nach rechts verschobene Funktion $\frac{1}{x}$. Daraus folgt

$$\int\limits_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \int\limits_1^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln n$$

und somit

$$\ln(1+n) < H_n < 1 + \ln n$$

$$\ln(1+n) = \ln\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Daraus folgt für die Intervallbreite:

$$b = 1 + \ln n - \ln(1+n) = 1 - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Wegen $1 < 1 + \frac{1}{n} < 2$ gilt $0 < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \ln 2$ und daher

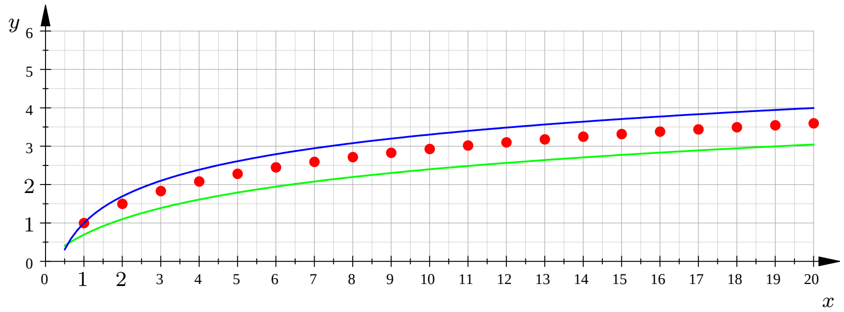
$$1 - \ln 2 < b < 1$$

Die lineare Näherung $f(1+x) \approx f(1) + f'(1) \cdot x$ für $|x| \ll 1$ liefert wegen $n \gg 1$, d.h. $\frac{1}{n} \ll 1$:

$$\ln(1+x) \approx 0 + 1 \cdot x = x \quad \text{oder} \quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n}$$

und damit

$$b \approx 1 - \frac{1}{n} \quad \text{für} \quad n \gg 1$$



(c) Auflösen nach n:

$$e^{H_n - 1} < n < e^{H_n} - 1$$

$$H_n \approx 100 \quad \Longrightarrow \quad e^{99} < n < e^{100} - 1 \quad \Longrightarrow \quad 9{,}89 \cdot 10^{42} < n < 2{,}87 \cdot 10^{43}$$

10. (a) $f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ln x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = 1, \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \left(\frac{-\infty}{0^+}\right) = -\infty$

de l'Hospital: $\quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 20 \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = 20 \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0^+$

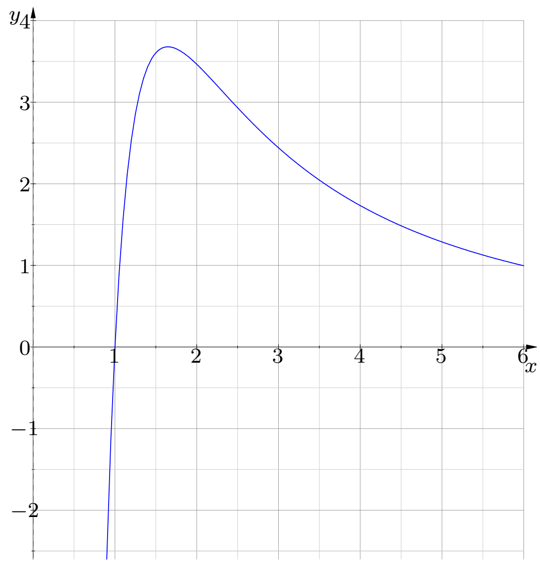
(b) $f'(x) = 20 \cdot \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = 20 \cdot \dfrac{x - \ln x \cdot 2x}{x^4} = 20 \cdot \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$

$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ln x = \dfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \approx 1{,}65$

$$\begin{array}{rcccl} 0 < x < x_1 & \Longrightarrow & f'(x) > 0 & \Longrightarrow & f \text{streng steigend} \\ x > x_1 & \Longrightarrow & f'(x) < 0 & \Longrightarrow & f \text{streng fallend} \end{array}$$

$\Longrightarrow$ rel. Maximum bei $(x_1|y_1)$ mit $y_1 = f(x_1) = \frac{10}{\mathrm{e}} \approx 3{,}68$

x	$f(x)$	
0,9		$\approx -2{,}60$
1		$= 0$
2	$5\ln 2$	$\approx 3{,}47$
3	$\frac{20\ln 3}{9}$	$\approx 2{,}44$
4	$\frac{5\ln 4}{4}$	$\approx 1{,}73$
5	$\frac{4\ln 5}{5}$	$\approx 1{,}29$
6	$\frac{5\ln 6}{9}$	$\approx 0{,}995$



(c) $F'(x) = -20 \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (1+\ln x)\cdot 1}{x^2} = -20 \cdot \frac{1-1-\ln x}{x^2} = \frac{20\ln x}{x^2} = f(x)$ q.e.d.

NS von F muss untere Grenze des Integrals sein: $F(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \mathrm{e}^{-1}$

$$F(x) = \int_{\mathrm{e}^{-1}}^{x} \frac{20\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

(d) $A = \int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \frac{20\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = F(\sqrt{\mathrm{e}}) - F(1) = \frac{-20(1+\frac{1}{2})}{\sqrt{\mathrm{e}}} - \frac{-20(1+0)}{1} = 20 - \frac{30}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 1{,}80$

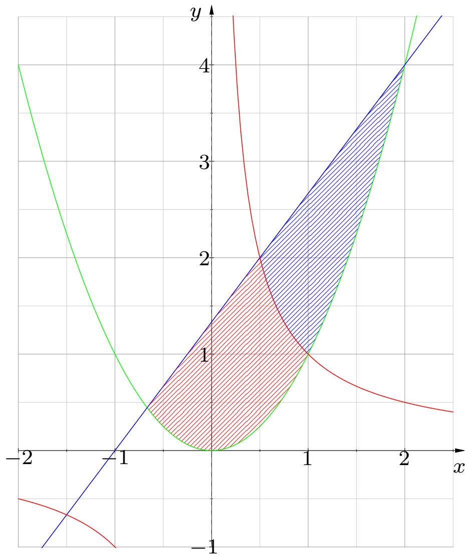
11. (a) $f(x) = g(x) \quad \Longrightarrow$

$$S_1\left(-\frac{2}{3}\middle|\frac{4}{9}\right), \quad S_2\,(2|4)$$

$g(x) = h(x) \quad \Longrightarrow$

$$S_3\left(-\frac{3}{2}\middle|-\frac{2}{3}\right), \quad S_4\left(\frac{1}{2}\middle|2\right)$$

$f(x) = h(x) \quad \Longrightarrow \quad S_5\,(1|1)$



(b) $$A = \int\limits_{-\frac{2}{3}}^{2} \left(\frac{4}{3}x + \frac{4}{3} - x^2\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-\frac{2}{3}}^{2} = \frac{256}{81} = 3\frac{13}{81}$$

(c)
$$A_1 = \int\limits_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{3}x + \frac{4}{3} - x^2\right)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{x} - x^2\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{2}} + \left[\ln x - \frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{833}{648} + \ln 2 - \frac{7}{24} = \frac{161}{162} + \ln 2$$

$$A_2 = A - A_1 = \frac{13}{6} - \ln 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{161 + \ln 2}{351 - \ln 2} \approx 1{,}145$$

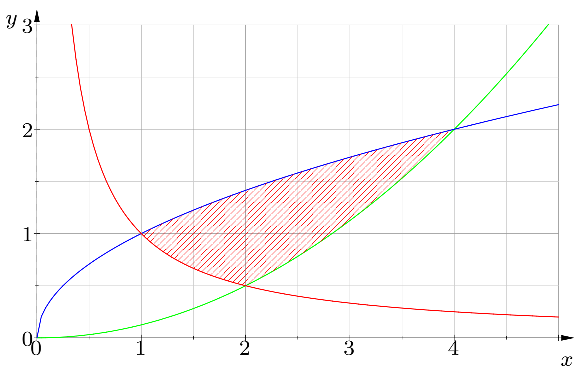
12. (a) $f(x) = g(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{8} = \sqrt{x}$

$x^4 = 64x \quad \Longrightarrow \quad x(x^3 - 64) = 0$

$$S_1\,(0|0)\,, \quad S_2\,(4|2)$$

$f(x) = h(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{8} = \frac{1}{x}$

$x^3 = 8 \quad \Longrightarrow \quad S_3\left(2\middle|\frac{1}{2}\right)$



$g(x) = h(x) \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x} = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad x^3 = 1 \quad \Longrightarrow \quad S_4\,(1|1)$

(b)

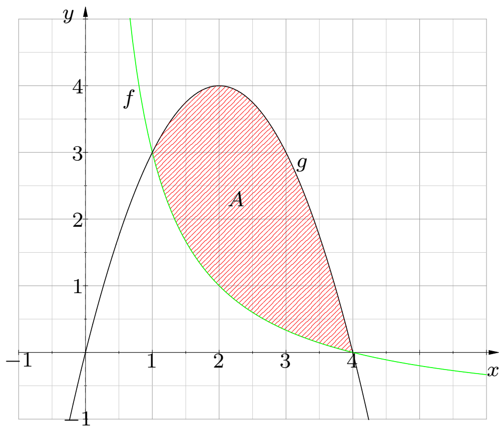
$$A = \int\limits_1^2 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x^2}{8}\right)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \ln x\right]_1^2 + \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{24}\right]_2^4 =$$
$$= \frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} - \ln 2 - \frac{2}{3} + \ln 1 + \frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}} - \frac{4^3}{24} - \frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} + \frac{2^3}{24} =$$
$$= -\ln 2 - \frac{2}{3} + \frac{16}{3} - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} - \ln 2 \approx 1{,}64$$

13. $f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{f0} = 4$

$g(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{g1} = 0, \quad x_{g2} = 4$

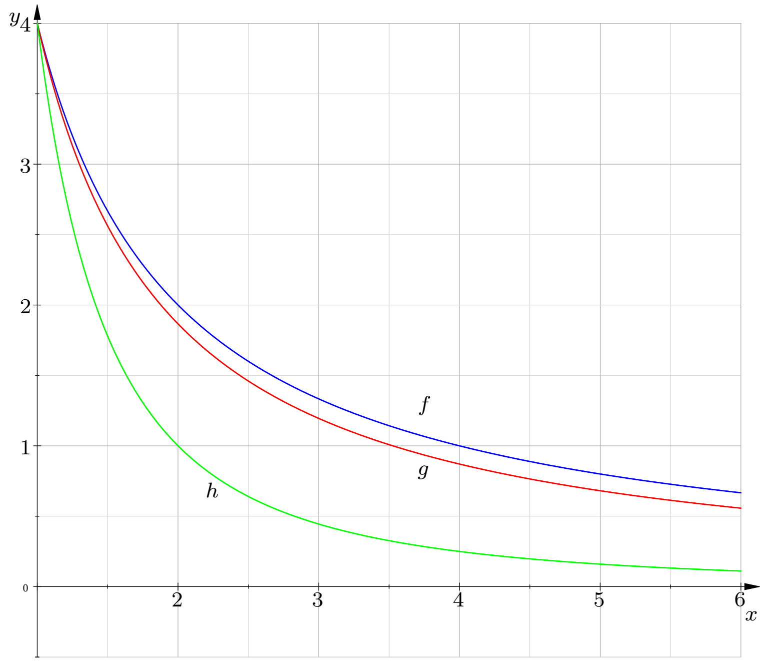
$x_1 = 1: \quad f(x_1) = 3, \quad g(x_1) = 3$

$x_2 = 4: \quad f(x_2) = 0, \quad g(x_2) = 0$



$$A = \int\limits_1^4 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int\limits_1^4 \left(4x - x^2 - \frac{4}{x} + 1\right)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} - 4\ln x + x\right]_1^4$$
$$= 32 - \frac{64}{3} - 4\ln 4 + 4 - 2 + \frac{1}{3} - 1 = 12 - 4\ln 4 \approx 6{,}455$$

14. (a)



(b) $A_1(x) = \int\limits_1^x f(t) - g(t)\,\mathrm{d}t = 4\ln x + \dfrac{40}{x^{0,1}} - 40$

$A_2(x) = \int\limits_1^x g(t) - h(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{4}{x} - \dfrac{40}{x^{0,1}} + 36$

(c) Man vermutet $A_1(x) < A_2(x)$.

x	5	10	10^2	10^3	10^4	10^5
$A_1(x)$	0,49	0,98	3,66	7,68	12,77	18,70
$A_2(x)$	2,75	4,63	10,80	15,96	20,08	23,35

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} A_1(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to\infty} A_2(x) = 36$

x	10^6	10^7	$1{,}5 \cdot 10^6$	$1{,}5 \cdot 10^6$	1 374 268	1 374 269
$A_1(x)$	25,31	32,45	26,53	26,10	26,2668644	26,2668666
$A_2(x)$	25,95	28,02	26,35	26,21	26,2668657	26,2668664

$A_1(x) < A_2(x)$ für $x < x_0$ und $A_1(x) > A_2(x)$ für $x > x_0$ mit $x_0 \approx 1\,374\,269$

2 Funktionen und deren Graphen

2.1 Höhere Ableitungen

1. $f^{(m)}(x) = \dfrac{n!}{(n-m)!} \cdot x^{n-m}$

2. $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

3. $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)}$

4. $f'(x) = 4\,x^3 - 2\,x + \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}$

   $f''(x) = 12\,x^2 - 2 + \dfrac{1}{2} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)\,x^{-\frac{3}{2}}$

   $f'''(x) = 24\,x + \dfrac{1}{2} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right)\,x^{-\frac{5}{2}}$

   $f^{(4)}(x) = 24 + \dfrac{1}{2} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right) \cdot \left(-\dfrac{5}{2}\right)\,x^{-\frac{7}{2}}$

   $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n} \cdot x^{-\frac{2n-1}{2}}$ für $n \geqq 5$

5. $f(x) = \dfrac{x^n}{n!} +$ Polynom vom Grad $n-1$

2.2 Graph und Funktion

2.3 Ableitungsfunktion und Integralfunktion

2.4 Krümmungsverhalten und Wendepunkte

1. (a) $g'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ (b) $h'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$ (c) $k(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$

   (d) $f'(x) = 5\mathrm{e}^{-x^2} - 10x^2\mathrm{e}^{-x^2} = 5\left(1 - 2x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2}$

   (b) Nullstelle: $x_0 = 0$

   $f(-x) = -5x\mathrm{e}^{-(-x)^2} = -5x\mathrm{e}^{-x^2} = -f(x) \quad\Longrightarrow\quad$ Punktsymmetrie zum Ursprung

   $f'(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad 1 - 2x^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_{11} = -\dfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad x_{12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

$f''(x) = -10x\mathrm{e}^{-x^2} - 20x\mathrm{e}^{-x^2} + 20x^3\mathrm{e}^{-x^2} = 10x\left(2x^2-3\right)\mathrm{e}^{-x^2}$

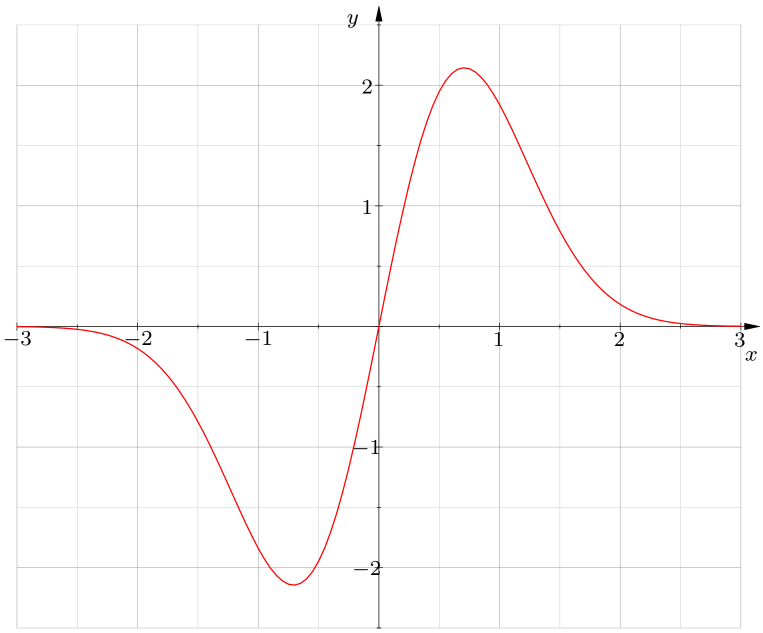
$f''(x_{12}) = -10\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} < 0 \quad \Longrightarrow \quad$ rel. Max. bei $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\middle|\frac{5}{2}\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) \approx (0{,}71\,|\,2{,}14)$

Symmetrie $\Longrightarrow$ rel. Min. bei $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\middle| -\frac{5}{2}\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) \approx (-0{,}71\,|\,-2{,}14)$

$f''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x^2 - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{21} = -\dfrac{1}{2}\sqrt{6}, \quad x_{22} = \dfrac{1}{2}\sqrt{6}, \quad x_{23} = 0$

$f'''(x_{22}) = 60\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \neq 0$, $f'''(0) = -30 \neq 0$ und Symmetrie $\Longrightarrow$

Wendepunkte bei $\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{6}\middle| \pm\frac{5}{2}\sqrt{6}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right) \approx (\pm 1{,}22\,|\,\pm 1{,}37)$ und $(0\,|\,0)$.



2. (a) Mit $x_1 = x$, $x_2 = x + \Delta x$, $\tan\varphi = f'(x)$ und $\tan(\varphi + \Delta\varphi) = f'(x + \Delta x)$ folgt ($\Delta\varphi$

kann auch negativ sein, R aber muss positiv sein):

$$R(x) = \lim_{\Delta\varphi\to 0} \frac{\Delta s}{|\tan\Delta\varphi|} = \lim_{\Delta x\to 0} \left| \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\tan(\varphi + \Delta\varphi - \varphi)} \right| =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \left| \frac{\Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} (1 + \tan\varphi \tan(\varphi + \Delta\varphi))}{\tan(\varphi + \Delta\varphi) - \tan\varphi} \right| =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \left| \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} (1 + f'(x) f'(x + \Delta x))}{\frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}} \right| =$$

$$= \left| \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2} (1 + f'(x)^2)}{f''(x)} \right| = \frac{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}$$

$$R(x) = \frac{1}{|k(x)|}$$

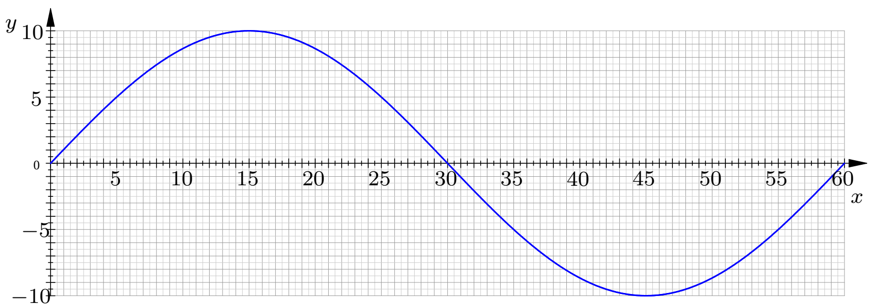
(b) Zunächst einmal gilt für den Betrag von λ

$$\sin|\lambda| = \frac{a}{R(x)} = a \cdot |k(x)|$$

$\lambda < 0$ bedeutet Rechtskurve, d.h. $f''(x) < 0$ und umgekehrt; das Vorzeichen von λ ist also gleich dem Vorzeichen von $f''(x)$ und damit auch dem von $k(x)$:

$$\sin\lambda = a \cdot k(x)$$

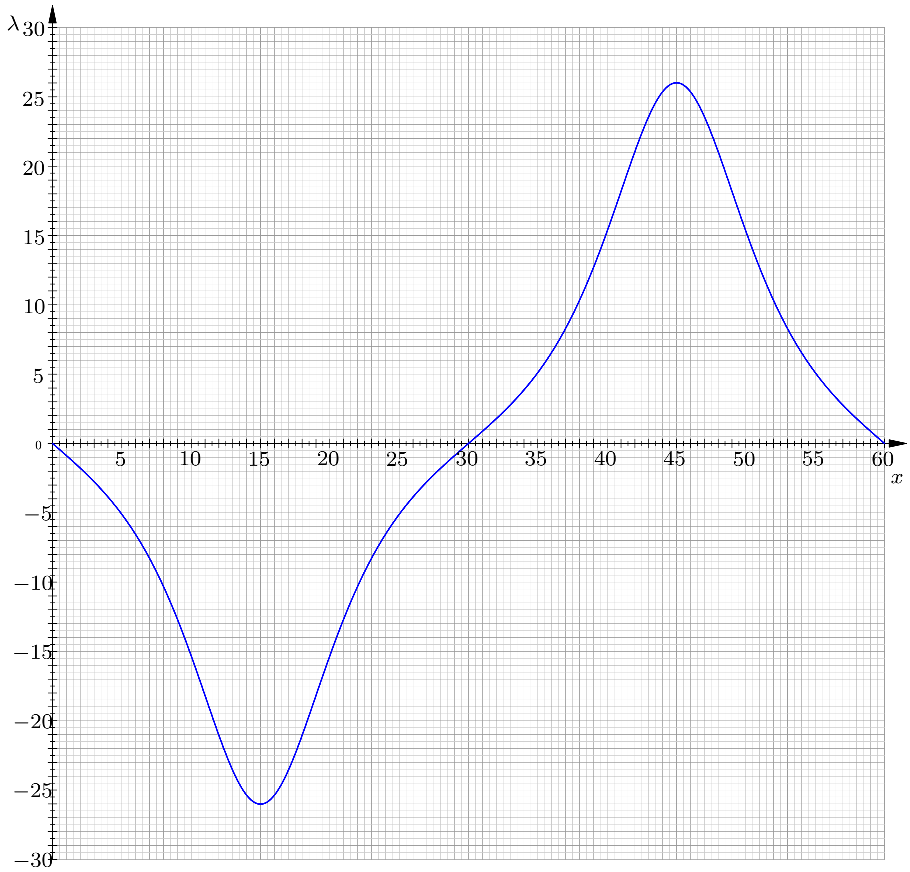
(c) Die Periodenlänge von f ist $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{30}} = 60$.



Mit $f'(x) = \frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{30} \cdot x\right)$ und $f''(x) = -\frac{\pi^2}{90} \sin\left(\frac{\pi}{30} \cdot x\right)$ folgt

$$\lambda(x) = a \cdot k(x) = \frac{-2\pi^2 \sin\left(\frac{\pi}{30} \cdot x\right)}{45 \left[1 + \frac{\pi^2}{9} \cos^2\left(\frac{\pi}{30} \cdot x\right)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Maximaler Lenkwinkel: $\lambda_{\max} = \lambda(45) \approx 26{,}0°$



3. (a) Substitution: $x = t - 2002 \Rightarrow$
   $f(x) = -\frac{1}{8}(x^3 - 3)(x - 3) + 4 = -\frac{1}{8}(x^4 - 3x^3 - 3x + 9)$
   $f'(x) = -\frac{1}{8}(4x^3 - 9x^2 - 3),\ f''(x) = -\frac{1}{8}(12x^2 - 18x) \Rightarrow$
   Wendepunkte bei $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{3}{2}$
   bzw. $t_1 = 2002$ und $t_2 = 2003,5$

   (b) Am Wendepunkt von f hat die Neuverschuldung f' ein Extremum. Die Neuverschuldung ist minimal bei $x_1 = 0$ bzw. $t_1 = 2002$ und maximal $x_2 = \frac{3}{2}$ bzw. $t_2 = 2003,5$. Ist das Maximum überschritten, also nach $t_2 = 2003,5$ sinkt die Neuverschuldung, der Schuldenzuwachs also abnimmt. D. h. die Schulden wachsen langsamer, die Schulden nehmen aber zu!

4. (a) Wendepunkte bei $x_W = -\frac{1}{3}$

   (b) Wendepunkte bei $x_W = -\frac{k}{3} \Rightarrow k = -3x \Rightarrow$
   $f(x_W) = x^3 - 3x \cdot x + x = -2x^3 + x$

   (c) Wendepunkte bei $x_W = -\frac{1}{3k} \Rightarrow k = -\frac{1}{3k} \Rightarrow$
   $f(x_W) = -\frac{1}{3k}x^3 + x^2 + x = \frac{2}{3}x^2 + x$

5. (a) Wendepunkte $W_1(1|-8)$, $W_2(-4|-513)$
$t_1(x) = -24x + 16$, $t_2(x) = 226x + 391$

(b) $S(-1\frac{1}{2}|52)$

6. (a) $H\left(1 \;\middle|\; \frac{1}{2}\right)$, $T\left(-1 \;\middle|\; -\frac{1}{2}\right)$, $W_1(0|0)$, $W_2\left(\sqrt{3} \;\middle|\; \frac{1}{4}\sqrt{3}\right)$, $W_3\left(-\sqrt{3} \;\middle|\; -\frac{1}{4}\sqrt{3}\right)$

(b) $H\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}} \;\middle|\; \frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)$, $T\left(-\sqrt[4]{\frac{1}{3}} \;\middle|\; -\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)$, $W_1(0|0)$, $W_2\left(\sqrt[4]{\frac{5}{3}} \;\middle|\; \frac{3}{8}\sqrt[4]{\frac{5}{3}}\right)$, $W_3\left(-\sqrt[4]{\frac{5}{3}} \;\middle|\; -\frac{3}{8}\sqrt[4]{\frac{5}{3}}\right)$

(c) $H\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n-1}} \;\middle|\; \frac{n-1}{n}\sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}\right)$, $T\left(-\sqrt[n]{\frac{1}{n-1}} \;\middle|\; -\frac{n-1}{n}\sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}\right)$, $W_1(0|0)$, $W_2\left(\sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}} \;\middle|\; \frac{n-1}{2n}\sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}}\right)$,
$W_3\left(-\sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}} \;\middle|\; -\frac{n-1}{2n}\sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}}\right)$

7. (a) kein Extremum, kein Wendepunkt,
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x) = \infty$

(b) $H\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \;\middle|\; \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$, $W_1\left(\sqrt[3]{2} \;\middle|\; \frac{1}{3}\sqrt[3]{2}\right)$, kein Wendepunkt bei $(0|0)$!!
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x) = \infty$

(c) $H\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n-1}} \;\middle|\; \frac{n-1}{n}\sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}\right)$, $W_1\left(\sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}} \;\middle|\; \frac{n-1}{2n}\sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}}\right)$
kein Wendepunkt bei $(0|0)$!!
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x) = \infty$

8. (a) $N_1(-2|0)$, $N_2(-1{,}45|0)$, $N_3(3{,}45|0)$,
Extrema: $T(-1{,}73|-0{,}39)$, $H(1{,}73|20{,}39)$,
Wendepunkt $W(0|10)$

(b) $N_1(-2{,}5|0)$, $N_2(1|0)$, $N_3(3|0)$,
Extrema: $H(-1{,}11|24{,}11)$, $T(2{,}11|-9{,}11)$,
Wendepunkt $W(0{,}50|7{,}50)$

(c) $N_1(-3|0)$, $N_2(-0{,}58|0)$, $N_3(0{,}58|0)$,
Extrema: $H(-2{,}05|11{,}03)$, $T(0{,}05|-3{,}03)$,
Wendepunkt $W(-1{,}00|4{,}00)$

(d) $N_1(2|0)$, Extrema: $H(0{,}07|-1{,}97)$, $T(1{,}27|-5{,}44)$,
Wendepunkt $W(0{,}67|-3{,}70)$

(e) $N_1(1|0)$, $N_2(-1{,}67|0)$,
Extrema: $H(-0{,}78|8{,}43)$, $T(1|0)$,
Wendepunkt $W(0{,}11|4{,}21)$

(f) $N_1(-1{,}62|0)$, $N_2(-1|0)$, $N_3(0{,}61|0)$,
Extrema: $H(-1{,}33|0{,}19)$, $T(0|-1)$,
Wendepunkt $W(-0{,}67|-0{,}41)$

9. (a) $t(x) = 2x + 1\frac{1}{9}$

   (b) $t(x) = 8$

   (c) $t(x) = -x + 7$

   (d) $t(x) = \left(1 - \frac{1}{3a}\right) \cdot x - \frac{1}{27a^2} + 1$

   1. Fall: $a < 0$: Für steigendes a, wird die Steigung der Tangente größer. Die Tangentensteigung ist immer > 1. Der y-Abschnitt wird für steigendes a kleiner.
   2. Fall: $a > 0$: Für steigendes a, wird die Steigung der Tangente größer. Die Tangentensteigung ist immer < 1. Der y-Abschnitt wird für steigendes a größer.

   (e) $t(x) = \left(-\frac{b^2}{3} + 1\right) \cdot x - \frac{b^3}{27} + 1$

   1. Fall: $b > 0$: Für steigendes b, wird die Steigung der Tangente kleiner und der y-Abschnitt ebenfalls kleiner.
   2. Fall: $b < 0$: Für steigendes b, wird die Steigung der Tangente größer und der y-Abschnitt kleiner.

   (f) $t(x) = \left(-\frac{1}{3} + c\right) \cdot x + \frac{26}{27}$

   Für steigendes c, wird die Steigung der Tangente größer und der y-Abschnitt bleibt unverändert.

   (g) $t(x) = \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right) \cdot x - \frac{b^3}{27a^2} + d$

10. (a) $f(x) = -\frac{1}{3}(x+2)(x+1)(x-3)$

    (b) $f(x) = -\frac{2}{3}(x+3)(x-1)$

    (c) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$

    (d) $f(x) = -6x^3 + 27x^2 - 36x + 16$

    (e) $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^3$

11. Für $x < 0$ kann die Bahnlinie mit $f_1(x) = 0$ beschrieben werden.
    Bedingung für die Bahnlinie:
    $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ (I), $k(x) \propto x$ (II)
    Ansatz für $x \geq 0$: $f_2(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + ...$ $\quad\Longrightarrow$

    $f_2'(x) = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + ...,\quad f_2''(x) = 2c + 6dx + 12ex^2 + ...$

    Aus (I) folgt $a = b = c = 0$. (II) kann mit diesem Polynomansatz nicht exakt erfüllt werden, da man mit obigem Ansatz $k(x) = \dfrac{6dx + 12ex^2 + ...}{(1 + (3dx^2 + 4ex^3 + ...)^2)^{\frac{3}{2}}}$ erhält.

    Für kleine x ist jedoch $f'(x)$ sehr klein und kann vernachlässigt werden. Man erhält $k(x) \approx f''(x)$. Für diese Näherung liefert $f_2(x) = dx^3$ eine Lösung.

Bestimmung von d (Einheit: km) aus $\dfrac{1}{r} = k(x) \approx f''(x) = 6dx$:
$k(0{,}2) \approx 6d \cdot 0{,}2 = \frac{1}{1} \implies d = \frac{5}{6}$
Betrachtung der Abweichung von der exakt berechneten Krümmung bei $x = 0{,}2$:

$$k(0{,}2) = \frac{6 \cdot \frac{5}{6} \cdot 0{,}2}{(1 + (3 \cdot \frac{5}{6} \cdot 0{,}2^2)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1{,}015}$$

Bei $x = 0{,}2$ wird der Krümmungsradius von 1000 m nicht exakt erreicht. Dies macht sich in einem kleinen Ruck im Zug an der Übergangsstelle bemerkbar. In der Praxis werden solche Abweichungen toleriert, da der entstehende Ruck geringer als das übliche Rütteln des Zuges ist.

12. $f(v) = v^3 + bv^2 + cv + d = 0$, $f'(u) = 3u^2 + 2bu + c = 0$, $f''(u) = 6u + 2b = 0$, $f'''(x) = 6 \neq 0 \implies$
$b = -3u$, $c = 3u^2$, $d = 3uv^2 - 3u^2v - v^3$

13. Bedingungen:
$f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f(2) = 0$, $f''(2) = 0$, $f'(2) = -4$
$\implies \quad f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$

14.

15. $P(x) = (x - x_1)^r \cdot P_1(x)$ mit $P_1(x_1) \neq 0$

$P'(x) = (x - x_1)^{r-1} \cdot P_1(x) + (x - x_1)^r \cdot P_1'(x)$

Da der zweite Summand von P' für $x = x_1$ null ist, muss es auch der erste Summand sein; das ist aber nur für $r \geqq 2$ möglich.

16. $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 4 & \text{für } x < 2 \\ x^2 - 5\,x + 4 & \text{für } x \geqq 2 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 2\,x - 1 & \text{für } x < 2 \\ 2\,x - 5 & \text{für } x > 2 \end{cases}$

rel. Minimum bei $(\,0{,}5\,|\,-4{,}25\,)$ und $(\,2{,}5\,|\,-2{,}25\,)$.

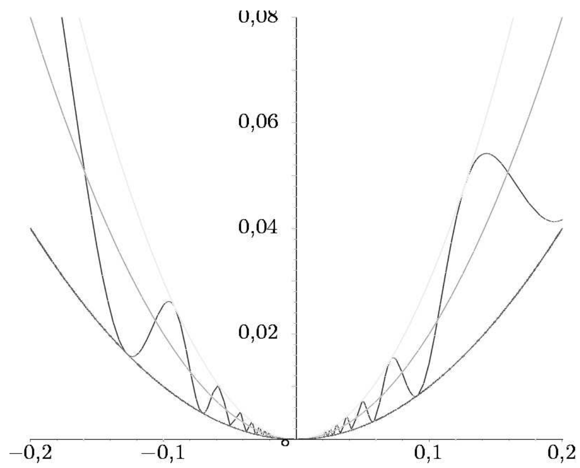
$f'_-(2) = 3$ und $f'_+(2) = -1$, d.h. rel. Maximum bei $(\,2\,|\,-2\,)$.

17. (a) $x_{00} = 0$, $x_{0k} = \dfrac{1}{k\,\pi}$ für $k \neq 0$

$$x_{1k} = \frac{1}{(0{,}5 + 2k)\pi}$$

$$x_{2k} = \frac{1}{(1{,}5 + 2k)\pi}$$

k	x_{0k}	x_{1k}	x_{2k}
0	0,000	0,637	0,212
1	0,318	0,127	0,091
2	0,159	0,071	0,058
3	0,106	0,049	0,042
4	0,080	0,037	0,034
5	0,064	0,030	0,028
6	0,053	0,025	0,024
7	0,045	0,022	0,021



(b) $x^2 \leqq f(x) \leqq 3\,x^2 \implies \lim\limits_{x\to 0} x^2 \leqq \lim\limits_{x\to 0} f(x) \leqq \lim\limits_{x\to 0} 3\,x^2 \implies$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, d.h. f ist stetig bei $x = 0$.

$f(x) > 0$ für alle $x \neq 0$ und $f(0) = 0 \implies$ absol. und rel. Min. bei $(0|0)$.

(c) $f'(x) = 4\,x + 2\,x \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$

(d) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2\left(2 + \sin\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = 0$

(e) $f'(x) = \begin{cases} 4\,x + 2\,x \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$, aber $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ existiert nicht.

f ist in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, aber f' ist bei $x = 0$ unstetig!

Da $x \sin\dfrac{1}{x}$ für $|x| \ll 1$ gegen $\cos\dfrac{1}{x}$ vernachlässigt werden kann, wechselt f' in jeder noch so kleinen Umgebung von 0 unendlich oft das Vorzeichen!

2.5 Wirtschaft

1. Gewinn: $G(x) = x \cdot n(x) - K(x) = -10^{-8} \cdot x^3 - 0{,}003\,x^2 + 132\,x$
   $G'(x) = -3 \cdot 10^8\,x^2 - 0{,}006\,x + 132 = 0 \quad\implies\quad x_0 = 20\,000 \;(x_0 = -220\,000)$
   $n(x_0) = 212$, $G(x_0) = 1{,}36 \cdot 10^6$

2. (a) Bei zunehmender Nachfrage x nimmt der Angebotspreis $a(x)$ zu. D. h. $a(x)$ ist monoton steigend.
   Die Nachfrage x nach einer Ware nimmt zu, wenn der Nachfragepreis $n(x)$ sinkt. D.

h. $n(x)$ ist monoton fallend.
Bedingung für Verkaufspreis: $a(x) = n(x)$

(b) Graphische Lösung: $a(x)$ und $n(x)$ zeichnen. Der y-Wert des Schnittpunktes der Funktionen ist der Preis.
Rechnerische Lösung: $a(x) = n(x)$ nach x auflösen. Der zugehörige Funktionswert ist der Preis.

i. $x = 6{,}82 \Rightarrow y = 52$

ii. $x = 6{,}97 \Rightarrow y = 40$

iii. $x = 3{,}8 \Rightarrow y = 127$

iv. $x = 2{,}83 \Rightarrow y = 866$

v. $x = 5{,}68 \Rightarrow y = 270$

vi. $x = 12{,}06 \Rightarrow y = 284$

In allen Fällen liefert die Gleichung zwei Lösungen, von denen marktwirtschaftlich nur eine Lösung sinnvoll ist. Durch Runden der Zwischenergebnisse sind kleine Abweichungen im Ergebnis möglich.

3. (a) Bei lebensnotwendigen Gütern wird sich die Nachfrage weniger verändern, als bei Luxusgütern.

(b) Betrachtet man z. B. die Nachfragefunktion einer Ware, ist klar, dass eine Preisänderung von 5 DM bei einem Auto eine andere Bedeutung hat, als bei einem kg Butter. Im Vergleich zum Preis eines Autos sind 5 € zu vernachlässigen und damit hat die Preisänderung praktisch keine Auswirkung. Bei einem kg Butter hingegen haben 5 € eine Bedeutung. Damit ist es nicht sinnvoll die Auswirkung als Preisänderung pro Änderung der Nachfrage anzugeben, sondern zu relativen Größen überzugehen.

(c)
$$\varepsilon(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{n(x+\Delta x)-n(x)}{n(x)}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{n(x)}{x\frac{n(x+\Delta x)-n(x)}{\Delta x}} = \frac{n(x)}{x\,n'(x)}$$

(d) i. $\varepsilon(x) = 1 - \frac{100}{7x}$

ii. $\varepsilon(x) = 1 - \frac{200}{23x}$

iii. $\varepsilon(x) = \frac{1}{2} - \frac{20}{x^2}$

iv. $\varepsilon(x) = \frac{1}{2} - \frac{485}{13x^2}$

v. $\varepsilon(x) = -1 - \frac{1}{2}x$

vi. $\varepsilon(x) = -1 + \frac{13}{500}x$

(e) Preis fällt $\Rightarrow$ Nachfrage x steigt.
$U'(x) = n(x) + xn'(x) > 0 \Leftrightarrow \varepsilon(x) = \frac{n(x)}{xn'(x)} < -1$, da $n'(x) < 0$ und $x > 0$!

(f) $\varepsilon(x) > -1 \Leftrightarrow \frac{n(x)}{xn'(x)} > -1 \Leftrightarrow n(x) < -xn'(x)$, da $n'(x) < 0 \Leftrightarrow U'(x) = n(x) - xn'(x) < 0$. Also ist $U(x)$ monoton fallend. Eine Preiserhöhung reduziert die Nachfrage x und erhöht damit den Umsatz.

(g)

	Preiserhöhung $\varepsilon > -1$	Preissenkung $\varepsilon < -1$
i	$]7\frac{1}{7};\infty[$	$]0;7\frac{1}{7}[$
ii	$]4\frac{8}{23};\infty[$	$]0;4\frac{8}{23}[$
iii	$]\sqrt{13\frac{1}{3}};\infty[$	$]0;\sqrt{13\frac{1}{3}}[$
iv	$]\sqrt{\frac{970}{39}};\infty[$	$]0;\sqrt{\frac{970}{39}}[$
v	-	$\mathbb{R}^+$
vi	$\mathbb{R}^+$	-

4. (a) $U(x) = xn(x) \Rightarrow$ Maximum des Gewinns $G(x) = U(x) - K(x) \Leftrightarrow G'(x) = 0 = U'(x) - K'(x)$ und $G''(x) = U''(x) - K''(x) < 0$;
   Maximum des Gewinns, wenn $G(x)$ eine waagrechte Tangente hat.
   (b) i. $G'(x) = 480 - 6x, G''(x) = -6 < 0 \Rightarrow$ Maximum für $x = 80$, G(80)=19020, Preis $n(x) = 501{,}5$
   ii. $G'(x) = 58 - 0{,}8x, G''(x) = -0{,}8 < 0 \Rightarrow$ Maximum für $x = 72{,}5$, G(72,5)=6032,5, Preis $n(x) = 115$
   iii. $G'(x) = 90 - 116x - 0{,}6x^2, G''(x) = -116 - 1{,}2x \Rightarrow$ Maximum für $x = 0{,}77$ (die zweite Lösung der Gleichung ist nicht sinnvoll, da < 0!), G(0,77)=32, Preis $n(x) = 54$
   iv. $G'(x) = 480 - 22x - 0{,}3x^2, G''(x) = -22 - 0{,}6x \Rightarrow$ Maximum für $x = 17{,}596 \approx 17{,}6$ (die zweite Lösung der Gleichung ist nicht sinnvoll, da < 0!), G(17,6)=4195, Preis $n(x) = 289$

5. Gewinn: $G(x) = x \cdot n(x) - K(x) = -10^{-8} \cdot x^3 - 0{,}003\,x^2 + 132\,x$
   $G'(x) = -3 \cdot 10^8\,x^2 - 0{,}006\,x + 132 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = 20\,000 \ (x_0 = -220\,000)$
   $n(x_0) = 212,\ G(x_0) = 1{,}36 \cdot 10^6$

6. (a) $K_D(x)$ nach x ableiten und gleich Null setzen liefert zwei Lösungen, von denen nur eine sinnvoll ist. Für diesen Wert ist $K_D'' > 0$.
   i. $x = 10, K_D(10) = 80$
   ii. $x = 9{,}4, K_D(9{,}4) = 17$
   (b) $K_D(x)' = \frac{K(x)'}{x} - \frac{K(x)}{x^2} = \frac{K(x)' - K_D(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow K(x)' = K_D(x)$.
   Minimum, wenn $K_D(x)'' = ... = \frac{K(x)''}{x} > 0$
   (c) $K(x)' = K_D(x)$ verwenden! Die Gleichung kann durch raten gelöst werden.
   i. $x = 2, K_D(2) = 19$
   ii. $x = 3, K_D(3) = 75{,}5$
   iii. $x = 5, K_D(5) = 120$

7. (a) 238 DM, 2 928 DM, 13 058 DM, 16 562 DM, 46 046 DM, 55 136 DM
   (b) 1,8%, 12,7%, 23,3%, 25,1%, 35,4%, 37,8%
   (c)
   (d) Bei Ehegatten sind nur 32 376 DM zu zahlen.

8. (a)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x < 12\,096 \\ 86{,}63 \cdot 10^{-8} x^2 + 0{,}238136x - 2993{,}26 & \text{falls} \quad 12\,096 \le x < 55\,728 \\ 151{,}91 \cdot 10^{-8} x^2 + 0{,}165451x - 970{,}93 & \text{falls} \quad 55\,728 \le x < 120\,042 \\ 0{,}53x - 22\,842 & \text{falls} \quad x \ge 120\,042 \end{cases}$$

   (b) $f(x)$ ist unstetig für $x = 12\,096$, $x = 55\,728$ und $x = 120\,042$, sonst stetig.
   $g(x)$ ist unstetig für $12\,096 + k \cdot 54$ mit $k \in \mathbb{Z}_0$, sonst stetig.
   (e)

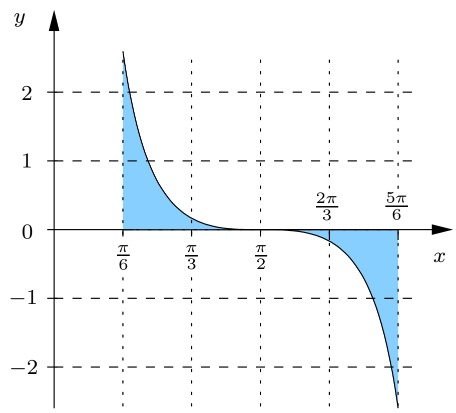
$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x < 12\,096 \\ 173{,}26 \cdot 10^{-8} x + 0{,}238136 & \text{falls} \quad 12\,096 < x < 55\,728 \\ 303{,}82 \cdot 10^{-8} x + 0{,}165451 & \text{falls} \quad 55\,728 < x < 120\,042 \\ 0{,}53 & \text{falls} \quad x > 120\,042 \end{cases}$$

2.6 Kurvendiskussion

2.6.1 Diskussion einzelner Funktionen

1. (a)

x	$f(x)$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2{,}60$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{6} \approx 0{,}167$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{6} \approx -0{,}167$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3}{2}\sqrt{3} \approx -2{,}60$



   (b) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\sin x - \frac{1}{\sin x} + C\right) = -\cos x - \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x \overbrace{(1 - \sin^2 x)}^{\cos^2 x}}{\sin^2 x} = \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$$

(c) Nullstelle von f bei $x_0 = \frac{\pi}{2}$ und $f(x) < 0$ für $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$:

$$A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\sin x - \frac{1}{\sin x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\sin x - \frac{1}{\sin x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} =$$

$$= -1 - 1 + \frac{1}{2} + 2 - (-\frac{1}{2} - 2 + 1 + 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

2. $f(-x) = f(x) \quad \Longrightarrow \quad$ Symmetrie zur y-Achse

$$f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}} = \frac{1}{3{,}3} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{x^2}{8} = \ln\frac{1}{3{,}3} = -\ln 3{,}3$$

$$x_0 = \pm 2\sqrt{2\ln 3{,}3} \approx \pm 3{,}09$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1^-$$

$$f'(x) = \frac{33}{40}\cdot x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}$$

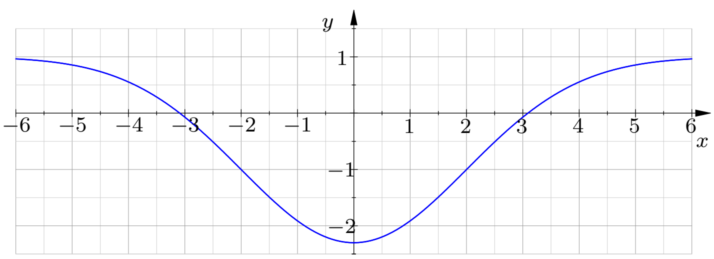
$$f''(x) = \frac{33}{40}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}$$

$$f'(0) = 0 \text{ und } f''(0) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei T}\,(0|-2{,}3)$$

$$f''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \pm 2$$

$$f'''(x) = \frac{33}{40}\left(-\frac{3x}{4} + \frac{x^3}{16}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}} = \frac{33}{160}\left(-3 + \frac{x^2}{4}\right)x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}$$

$$f'(\pm 2) = 0 \text{ und } f'''(\pm 2) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Wendepunkte bei W}_{1,2}\Big(\pm 2\Big|\underbrace{1 - \frac{3{,}3}{\sqrt{e}}}_{\approx -1{,}00}\Big)$$



3. (a) $f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{3}\cdot(x^3+1)'}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln(x^3+1) + C$

$f(0) = C = 1 \quad \Longrightarrow \quad C = 1$

$$f(x) = \frac{1}{3}\ln(x^3+1) + 1$$

$$f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = -\left(1 - \mathrm{e}^{-3}\right)^{\frac{1}{3}} \approx -0{,}983121$$

Definitionsmenge: $x^3 + 1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad D_f =]-1; +\infty[$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0$$

In ganz D_f gilt $f'(x) \geqq 0$, f ist also in ganz D_f monoton steigend. Also Terrassenpunkt bei T $(0|1)$.

$$f''(x) = \frac{2x(x^3+1) - x^2 \cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$$

$f''(x) = 0$ für $x_{21} = 0$ und $x_{22} = \sqrt[3]{2}$.

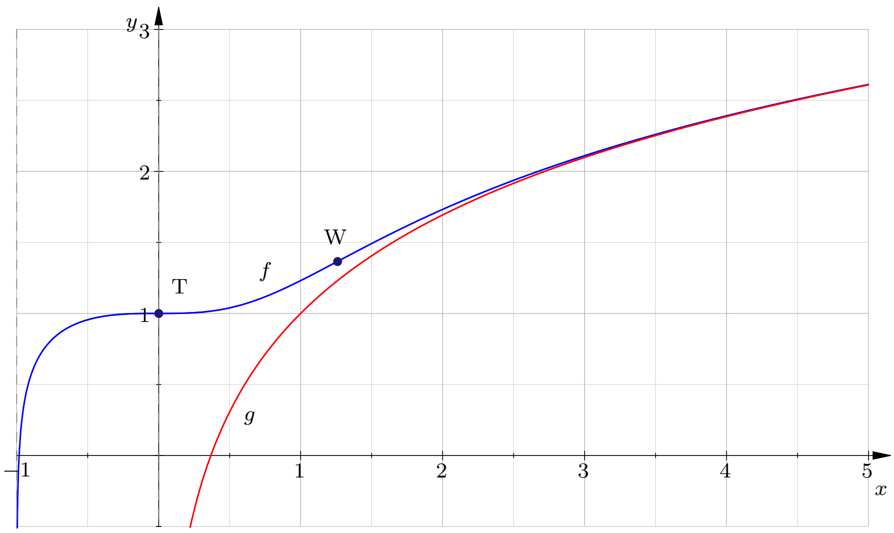
	$-1 < x < x_{21}$	$x_{21} < x < x_{22}$	$x_{22} < x$
x	$-$	$+$	$+$
$2 - x^3$	$+$	$+$	$-$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$

Also VZW von f'' bei x_{21} und x_{22}, d.h. Wendepunkte bei T $(0|1)$ und W $\left(\sqrt[3]{2}\middle|\frac{1}{3}\ln 3 + 1\right)$.

(b)

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{3}\ln\left(x^3+1\right) - \ln x = \frac{1}{3}\ln\left(x^3+1\right) - \frac{1}{3}\ln x^3 =$$
$$= \frac{1}{3}\ln\frac{x^3+1}{x^3} = \frac{1}{3}\ln\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - g(x)| = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \ln 1 = 0$$



(c)

$$|f(x) - g(x)| = \frac{1}{3}\ln\left(1 + \frac{1}{x^3}\right) < \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{x^3} < \mathrm{e}^{0{,}03} - 1$$

$$x > \frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}^{0{,}03} - 1}} \approx 3{,}2$$

4. Diskussion von f:

Nullstelle: $x_{f0} = \frac{1}{2}$, $\quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} - 2\right) = (0^+ \cdot (-1)) = 0^-$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} - 2\right) = ((+\infty) \cdot (+\infty)) = +\infty$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^2} = \frac{2x-2}{x^3}, \quad f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{f1} = 1$$

$$f''(x) = \frac{6}{x^4} - \frac{4}{x^3} = \frac{6-4x}{x^4}, \quad f''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{f2} = \frac{3}{2}$$

$f''(x_{f1}) = 2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Tiefpunkt bei $(1 \mid -1)$.

$$f'''(x) = -\frac{24}{x^5} + \frac{12}{4^3} = \frac{12x - 24}{x^5}$$

$$f'''(x_{f2}) = -\frac{64}{81} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{WP bei } \left(\frac{3}{2}\middle| -\frac{8}{9}\right)$$

$$g(x) = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{x} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t}\right) \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t} - 2\ln t\right]_{\frac{1}{2}}^{x} = -\frac{1}{x} - 2\ln x + 2 + 2\ln\frac{1}{2}$$

$$g(x) = 2(1 - \ln 2) - \frac{1}{x} - 2\ln x$$

Diskussion von g:

Untere Grenze der Integralfunktion ist Nullstelle: $x_{g0} = \frac{1}{2}$, $\quad \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0^-$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[2(1-\ln 2) - \frac{1}{x}\left(1 + 2\underbrace{x\ln x}_{\to 0}\right)\right] = \left(2(1-\ln 2) - \frac{1}{0^+}\right) = -\infty$$

$g'(x) = f(x) \quad \Longrightarrow \quad x_{1g} = x_{f0} = \dfrac{1}{2}$

$g''(x_{1g}) = f'(x_{1g}) = -8 < 0 \quad \Longrightarrow$

HP bei $\left(\frac{1}{2}\middle|0\right)$

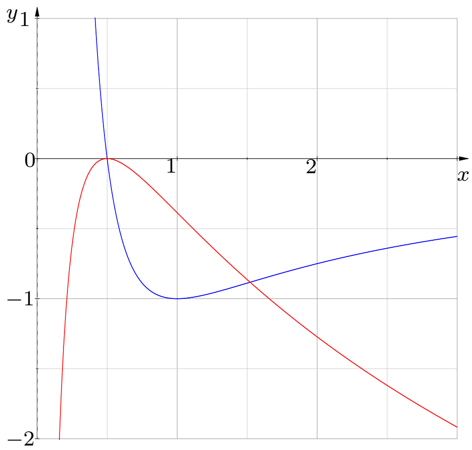
$g''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{g2} = x_{f1} = 1$

$g'''(x_{g2}) = f''(1) = 2 \neq 0 \quad \Longrightarrow$

WP bei $(1|1 - 2\ln 2) \approx (1|-0{,}39)$

$f(x) = g(x) \quad \Longrightarrow$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = 2(1 - \ln 2) - \frac{1}{x} - 2\ln x$$



Der erste Schnittpunkt ist die Nullstelle beider Funktionen: $x_1 = \dfrac{1}{2}$.

Zweite Nullstelle mit dem Newton-Verfahren:

$$h(x) = g(x) - f(x) = 2(1 - \ln 2) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 2\ln x = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} = x_n - \frac{2(1 - \ln 2) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 2\ln x}{-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x}}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n\left[3 - 2x_n + 2x_n^2(-2 + \ln 2x_n)\right]}{2 - x_n - 2x_n^2}$$

$$\begin{aligned} X_1 &= 1{,}5 \\ X_2 &= 1{,}521091763 \\ X_3 &= 1{,}521148687 \\ X_4 &= 1{,}521148688 = x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_1}^{x_2} (g(x) - f(x))\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \left(2(1 - \ln 2) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 2\ln x\right)\mathrm{d}x = \\ &= \left[2(1 - \ln 2)x + \ln x + \frac{1}{x} - 2x(\ln x - 1)\right]_{\frac{1}{2}}^{x_2} = \\ &= 2(1 - \ln 2)x_2 + \ln x_2 + \frac{1}{x_2} - 2x_2(\ln x_2 - 1) - 4 + \ln 2 = 0{,}4697 \end{aligned}$$

5. (a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = (0 + \infty) = +\infty$

(b) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 1$

$f''(x) = \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2-x}{x^3}$

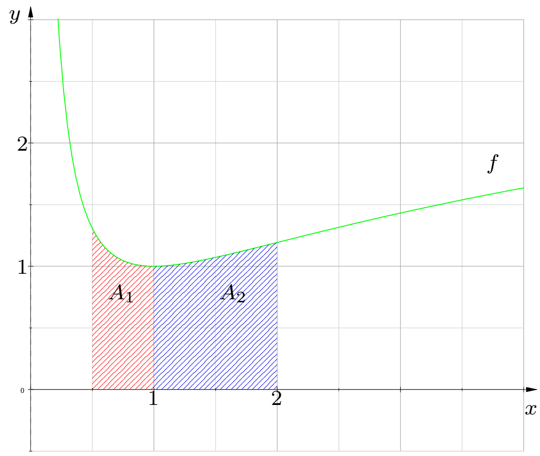
$f''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 2$

$f''(1) = 1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad$ TP bei $(1|1)$

$f'''(x) = -\dfrac{6}{x^4} + \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2x-6}{x^4}$

$f'''(2) = -\dfrac{1}{8} \neq 0 \quad \Longrightarrow$

WP bei $\left(2\middle|\frac{1}{2} + \ln 2\right) \approx (2|1{,}19)$



(c) $g(x) = \displaystyle\int_1^x \left(\frac{1}{t} + \ln t\right) \mathrm{d}t = [\ln t + t(\ln t - 1)]_1^x = \ln x + x(\ln x - 1) - \ln 1 - 1 \cdot (\ln 1 - 1)$

$$g(x) = 1 - x + (1+x)\ln x \quad \text{mit} \quad g(1) = 0$$

(d) $A_1 = \left|g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right| = \left|\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\ln\dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\ln 2\right| = \dfrac{\ln 8 - 1}{2} \approx 0{,}53972$

$A_2 = g(2) = -1 + 3\ln 2 = \ln 8 - 1 = 2A_1 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{A_2}{A_1} = 2$

6. (a) $x_{f0} = 0, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty \cdot \infty) = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0^+$$

(b) $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$

$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{f1} = 1$

$f''(x) = -2\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$

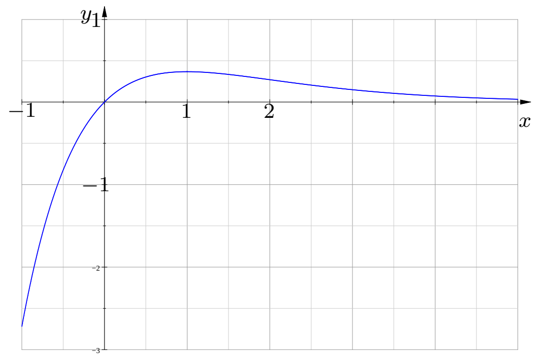
$f''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{f2} = 2$

$f''(1) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}} < 0 \quad \Longrightarrow \quad$ HP bei $\left(1\middle|\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

$f'''(x) = 3\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = (3-x)\mathrm{e}^{-x}$

$f'''(2) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \neq 0 \quad \Longrightarrow$

WP bei $\left(2\middle|\frac{2}{\mathrm{e}^2}\right) \approx (2|0{,}27)$



(c) Zu zeigen ist $g'(x) = f(x)$ und $g(0) = 0$ (Untergrenze).

$$g'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (x+1)(-\mathrm{e}^{-x}) = -\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x} = f(x)$$

$$g(0) = 1 - (0+1)\mathrm{e}^0 = 1 - 1 = 0$$

(d) $g'(x) = f(x) \quad \Longrightarrow \quad x_{g1} = x_{f0} = 0$

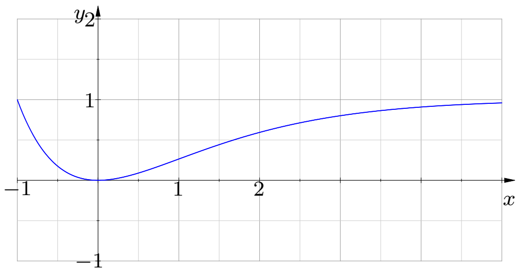
$g''(x) = f'(x) \quad \Longrightarrow \quad x_{g2} = x_{f1} = 1$

$g''(0) = f'(0) = 1 > 0 \quad \Longrightarrow$

TP bei $(0|0)$

$g'''(1) = f''(1) = -\frac{1}{\mathrm{e}} \neq 0 \quad \Longrightarrow$

WP bei $\left(1\middle|\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$



(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x} = 1 - 0 = 1$

Die Fläche zwischen G_f und der x-Achse im Intervall $[0, +\infty[$ ist 1.
G_g hat die waagrechte Asymptote $y = 1$.

7. $f(x) = \dfrac{x^3}{8} \cdot (x-4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{01} = 0, \quad x_{02} = 4$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x^3}{8} \cdot (x-4)\right] = ((-\infty)\cdot(-\infty)) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^3}{8} \cdot (x-4)\right] = ((+\infty)\cdot(+\infty)) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \cdot (x-3), \quad f''(x) = \frac{3x^2}{2} - 3x = \frac{3x}{2} \cdot (x-2)$$

$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{11} = 0, \quad x_{12} = 3, \qquad f''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{21} = 0, \quad x_{22} = 2$

$f'(x) > 0$ für $x > 3$ und $f'(x) \leqq 0$ für $x \leqq 3 \quad \Longrightarrow$

f streng fallend in $]-\infty; 3[$ und f streng steigend in $]3; +\infty[$.

$f'(x_{12}) = 0$ und $f''(x_{12}) = \dfrac{9}{2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Tiefpunkt bei T $\left(3\middle|\frac{27}{8}\right)$

$f'''(x) = 3x - 3 = 3(x-1)$

$f'(x_{11}) = 0$ und $f''(x_{11}) = 0$ und $f''(x_{11}) = -3 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Terrassenpunkt bei F $(0|0)$

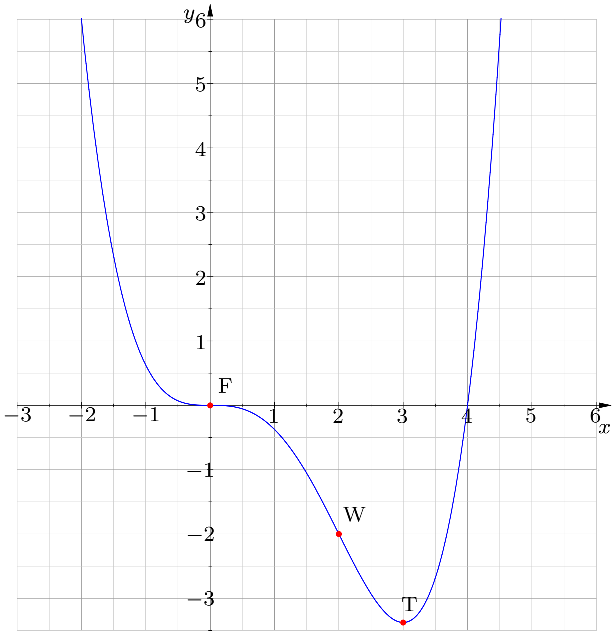
$f''(x_{22}) = 0$ und $f'''(x_{22}) = 3 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Wendepunkt bei W $(2|-2)$

$f(x) = -2 \quad \Longrightarrow \quad g(x) = x^4 - 4x^3 + 16 = 0$, eine Lösung ist $X_1 = 2$, die zweite Lösung findet man mit dem Newtonverfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - 4x_n^3 + 16}{4x_n^3 - 12x_n^2}$$

$$X_2 \approx 3{,}678573510$$

$x_0 = 3{,}5$
$x_1 = 3{,}721938776$
$x_2 = 3{,}680359091$
$x_3 = 3{,}678576718$
$x_4 = 3{,}678573510$
$x_5 = 3{,}678573510$



8. $f(-x) = f(x) \quad\Longrightarrow\quad f$ symmetrisch zur y-Achse

$$f(x) = \frac{x^2}{4} \cdot \left(x^2 - 8\right) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_{01} = 0, \quad x_{02} = -2\sqrt{2}, \quad x_{03} = 2\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2}{4} \cdot \left(x^2 - 8\right)\right] = ((+\infty) \cdot (+\infty)) = +\infty$$

$$f'(x) = x^3 - 4x = x \cdot \left(x^2 - 4\right), \quad f''(x) = 3x^2 - 4, \quad f'''(x) = 6x$$

$$f'(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_{11} = 0, \quad x_{12} = -2, \quad x_{13} = 2$$

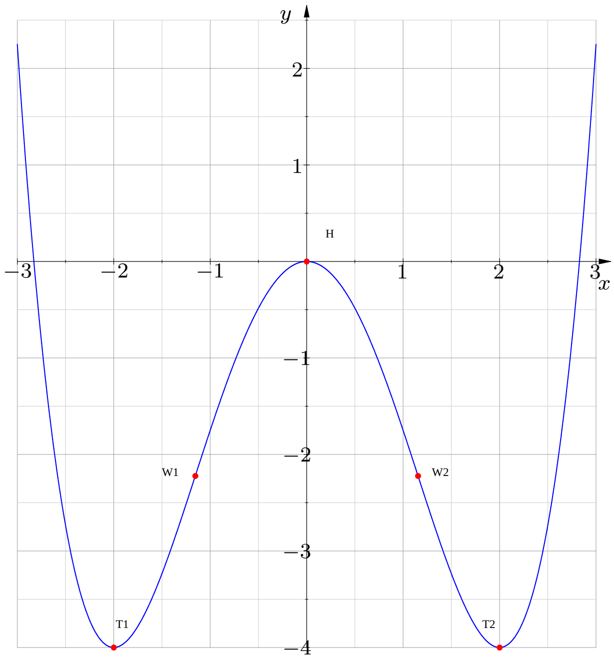
$$f''(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_{21} = 0, \quad x_{22} = -\tfrac{2}{3}\sqrt{3}, \quad x_{23} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}$$

$f'(x_{11}) = 0$ und $f''(x_{11}) = -4 < 0 \quad\Longrightarrow\quad$ Hochpunkt bei $\mathrm{H}\,(0|0)$

$f'(x_{13}) = 0$ und $f''(x_{13}) = 8 > 0 \quad\Longrightarrow\quad$ Tiefpunkte bei $\mathrm{T}_{1,2}\,(\pm 2| -4)$

$f''(x_{22}) = 0$ und $f'''(x_{22}) = 4\sqrt{3} \neq 0 \quad\Longrightarrow\quad$ Wendepunkte bei $\mathrm{W}_{1,2}\left(\pm\tfrac{2}{3}\sqrt{3}\middle| -\tfrac{20}{3}\right)$

$f(x) = -2 \quad\Longrightarrow\quad x^4 - 8x^2 = -2$ hat die vier Lösungen $x = \pm\sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}}$.



9. $f(x) = 0 \implies x_{01} = 2$ (durch Probieren)

   $f(x) : (x-2) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{2} \implies x_{02,3} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{33}$

   $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3}{4} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)}_{\to 1}\right] = \pm\infty$$

   $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + 2, \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}, \quad f'''(x) = \frac{3}{2}$

   $f'(x) = 0 \implies x_{11} = \frac{2}{3}, \quad x_{12} = 4, \qquad f''(x) = 0 \implies x_{21} = \frac{7}{3}$

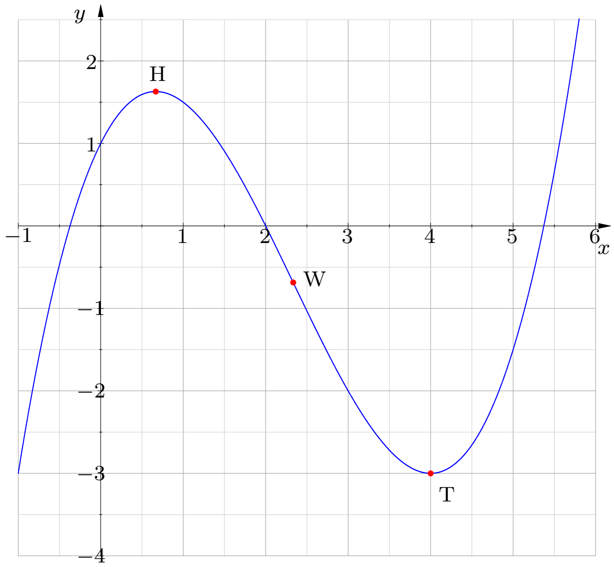
   Da der Graf von f' eine nach oben geöffnete Parabel ist, folgt $f'(x) > 0$ für $x < \frac{2}{3}$ und $x > 4$, $f'(x) < 0$ für $\frac{2}{3} < x < 4 \implies$

   f streng steigend in $\left]-\infty; \frac{2}{3}\right[$ und $]4; +\infty[$, f streng fallend in $\left]\frac{2}{3}; 4\right[$.

   $f'(x_{11}) = 0$ und $f''(x_{11}) = -\frac{5}{2} < 0 \implies$ Hochpunkt bei H $\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{44}{27}\right)$

   $f'(x_{12}) = 0$ und $f''(x_{12}) = \frac{5}{2} > 0 \implies$ Tiefpunkt bei T $(4|-3)$

   $f''(x_{21}) = 0$ und $f'''(x_{21}) = \frac{3}{2} \neq 0 \implies$ Wendepunkt bei W $\left(\frac{7}{3}\middle|-\frac{37}{54}\right)$



10. Einzige Nullstelle bei $x_0 = 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \left(\frac{\infty}{0^+}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{\mathrm{e}^{x-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^{x-1}} = 0^+$

$f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{1-x}$

$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{1-x} - x^2\mathrm{e}^{1-x} = x(2-x)\mathrm{e}^{1-x}$

$f''(x) = 2\mathrm{e}^{1-x} - 2x\mathrm{e}^{1-x} - 2x\mathrm{e}^{1-x} + x^2\mathrm{e}^{1-x} = (2-4x+x^2)\mathrm{e}^{1-x}$

$f'''(x) = -2\mathrm{e}^{1-x} - 4\mathrm{e}^{1-x} + 4x\mathrm{e}^{1-x} + 2x\mathrm{e}^{1-x} - x^2\mathrm{e}^{1-x} = (-x^2+6x-6)\mathrm{e}^{1-x}$

$f'(x) = 0 \implies x_{11} = 0, \quad x_{12} = 2, \quad f''(x) = 0 \implies x_{21} = 2-\sqrt{2}, \quad x_{22} = 2+\sqrt{2}$

Da der Graf von $x(2-x)$ eine nach unten geöffnete Parabel ist, folgt
$f'(x) < 0$ für $x < 0$ und $x > 2$, $f'(x) > 0$ für $0 < x < 2 \quad \implies$

f streng fallend in $]-\infty;0[$ und $]2;+\infty[$, f streng steigend in $]0;2[$.

$f'(x_{11}) = 0$ und $f''(x_{11}) = 2\mathrm{e} > 0 \quad \implies \quad$ Tiefpunkt bei $\mathrm{T}\,(0|0)$

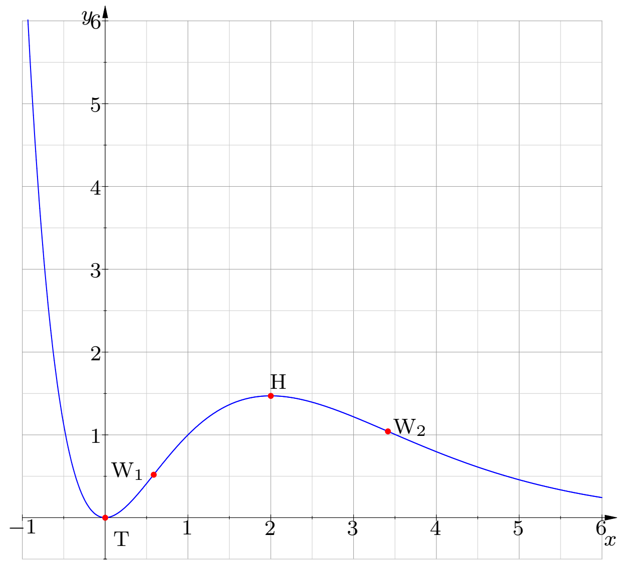
$f'(x_{12}) = 0$ und $f''(x_{12}) = -2\mathrm{e}^{-1} < 0 \quad \implies \quad$ Hochpunkt bei $\mathrm{T}\left(2\middle|\frac{4}{\mathrm{e}}\right)$

Da der Graf von $2-4x+x^2$ eine Parabel ist, liegt bei den Nullstellen von f'' ein Vorzeichenwechsel vor, d.h. Wendepunkte bei

$$\mathrm{W}_1\left(\underbrace{2-\sqrt{2}}_{0{,}59}\middle|\underbrace{(2-\sqrt{2})^2\mathrm{e}^{-1+\sqrt{2}}}_{0{,}52}\right) \quad \text{und} \quad \mathrm{W}_2\left(\underbrace{2+\sqrt{2}}_{3{,}41}\middle|\underbrace{(2+\sqrt{2})^2\mathrm{e}^{-1-\sqrt{2}}}_{1{,}04}\right)$$

Alternativ über dritte Ableitung:

$$f'''(x_{21}) = -2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-1+\sqrt{2}} \neq 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_{22}) = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-1-\sqrt{2}} \neq 0$$



11. Einzige Nullstelle bei $x_0 = 1$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \left(\frac{-\infty}{0^+}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{20}{x}}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{10}{x^2} = 0^+$$

$$f'(x) = \frac{20(1-2\ln x)}{x^3}, \qquad f''(x) = \frac{20(-5+6\ln x)}{x^4}, \qquad f'''(x) = \frac{40(13-12\ln x)}{x^5}$$

$f'(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_0 = \sqrt{\mathrm{e}},\ f'(x) > 0 \quad\Longrightarrow\quad x < \sqrt{\mathrm{e}} \quad\Longrightarrow$

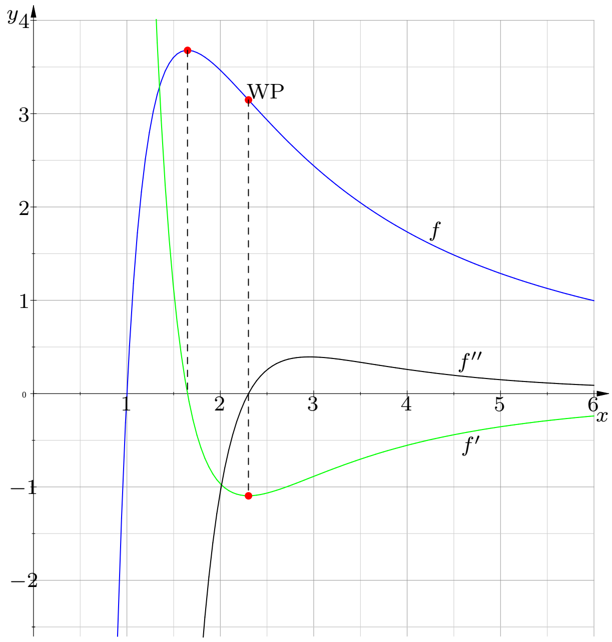
f streng steigend in $]0;\sqrt{\mathrm{e}}[$ und f streng fallend in $]\sqrt{\mathrm{e}};+\infty[\quad\Longrightarrow$

$$\text{Hochpunkt bei H}\left(\sqrt{\mathrm{e}}\left|\frac{10}{\mathrm{e}}\right.\right) \approx \mathrm{H}\,(1{,}65|3{,}68)$$

$f''(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_0 = \mathrm{e}^{\frac{5}{6}},\ f'(x) > 0 \quad\Longrightarrow\quad x > \mathrm{e}^{\frac{5}{6}} \quad\Longrightarrow$

f rechtsgekrümmt in $]0;\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}[$ und f linksgekrümmt in $]\mathrm{e}^{\frac{5}{6}};+\infty[\quad\Longrightarrow$

$$\text{Wendepunkt bei W}\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\left|\frac{50}{3}\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}\right.\right) \approx \mathrm{H}\,(2{,}30|3{,}15)$$



12. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 3} = \dfrac{(x-2)^2}{x-3}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}, \quad \text{Nullstelle bei } x_0 = 2$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x - 4 + \frac{x}{4}}{1 - \frac{3}{x}} = \pm\infty \qquad \lim_{x \to 3^\pm} f(x) = \left(\frac{1}{0^\pm}\right) = \pm\infty$$

Polynomdivision $\Longrightarrow \quad f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-3} \quad \Longrightarrow \quad$ Asymptote: $a : x \to x - 1$

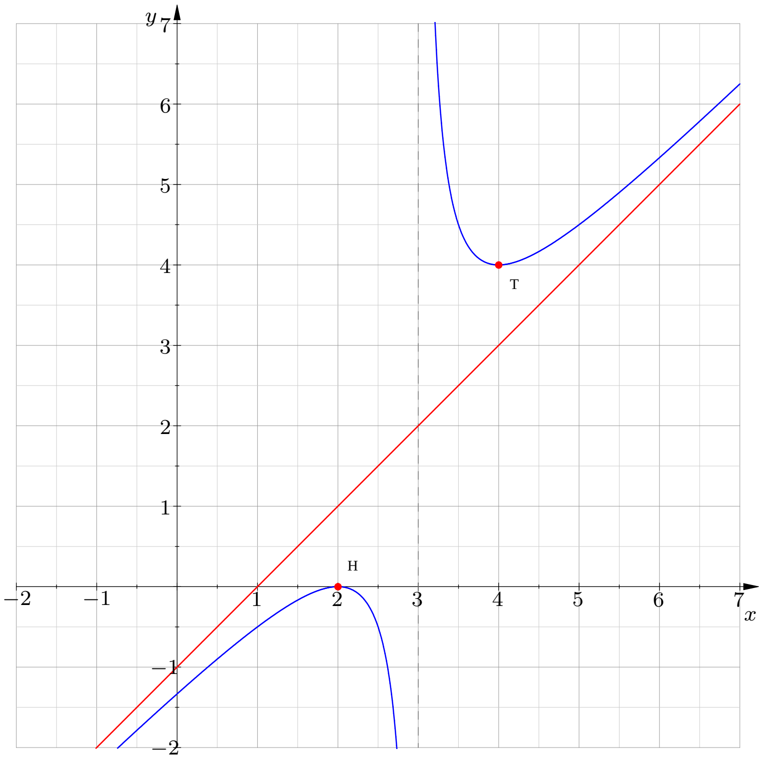
$f'(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}, \quad f''(x) = \dfrac{2}{(x-3)^3}$

$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{11} = 2, \quad x_{12} = 4$

$f''(x_{11}) = -2 < 0 \quad \Longrightarrow$ Hochpunkt bei H $(2|0)$

$f''(x_{12}) = 2 > 0 \quad \Longrightarrow$ Tiefpunkt bei T $(4|4)$

Keine Nullstellen von f'', keine Wendepunkte.



13. (a) $f(x) = f(-x)$, also achsensymmetrisch.
    (b) $t(x) = -3x - 9$
    (c) $\alpha = 45{,}9°$
    (d) $N_1(-3|0), N_2(-1|0), N_3(1|0), N_4(3|0)$
    (e) Maximum bei $P(0|\frac{9}{16})$, Minima bei $Q(-\sqrt{5}|-1)$ und bei $R(\sqrt{5}|-1)$

14. (a) keine Symmetrie
    (b) Minimum bei $(3|0)$, Maximum bei $(1|4)$, Wendepunkt bei $(2|2)$

15. (a) achsensymmetrisch
    (b) $N_1(2|0)$, $N_2(-2|0)$, $N_3(\sqrt{20}|0)$, $N_4(-\sqrt{20}|0)$
    (c) Maximum bei $(0|4)$, Minima bei $(\pm\sqrt{12}|-3\frac{1}{5})$

16. (a) $D_\pm = [-5{,}5]$
    (b) $f_+ : (-\frac{5}{\sqrt{1+t^2}}|0)$, $f_- : (\frac{5}{\sqrt{1+t^2}}|0)$
    (c) $f_-(x) = -f_+(x)$

(d) f_+: Maximum bei $(\frac{5t}{\sqrt{1+t^2}}|5\sqrt{1+t^2})$
f_-: Minimum bei $(-\frac{5t}{\sqrt{1+t^2}}|-5\sqrt{1+t^2})$
senkrechte Tangenten bei $x = \pm 5$

(e) $f''_+(x) < 0$, also f_+ immer rechtsgekrümmt.
$f''_-(x) > 0$, also f_- immer linksgekrümmt.

17. Nullstellen: $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\,\pi}{6}, \frac{3\,\pi}{2}$

$f'(x) = 2\,\cos 2\,x + \sin x = -4\,\sin^2 x + \sin x + 2 = 0 \quad \Longrightarrow$

$\sin x = \frac{1}{8} \pm \frac{\sqrt{33}}{8}$

Waagrechte Tangenten bei $-0{,}202\,\pi$, $0{,}319\,\pi$, $0{,}681\,\pi$ und $1{,}202\,\pi$.

18. (a) $x_1 = 0$, $x_{2/3} = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4a})$,
eine Nullstelle, wenn $x_{2/3}$ nicht existiert, also wenn $a > \frac{1}{4}b^2$
zwei Nullstellen, wenn $x_2 = x_3$, also wenn $a = \frac{1}{4}b^2$
drei Nullstellen, wenn x_2 und x_3 existieren und verschieden sind, also wenn $a < \frac{1}{4}b^2$

(b) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{4/5} = \frac{1}{3a}(-b \pm \sqrt{b^2 - 3a})$
keine waagrechte Tangente, wenn $x_{4/5}$ nicht existieren, also wenn $a > \frac{1}{3}b^2$
eine waagrechte Tangente, wenn $x_4 = x_5$, also wenn $a = \frac{1}{3}b^2$
zwei waagrechte Tangenten, wenn x_4 und x_5 existieren und verschieden sind, also wenn $a < \frac{1}{3}b^2$

(c) $x_W = -\frac{b}{3a}$, $y_W = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{b}{3a}$

(d) $y_w = \frac{2}{3}bx_w^2 + x_w$

(e) $f(x) = \frac{3}{4}x^3 + 2x^2 + x$, $N_1(0|0)$, $N_2(-2|0)$, $N_3(-\frac{2}{3}|0)$,
$E_1(-0{,}30|-0{,}14)$, $E_2(-1{,}48|0{,}47)$, $W_1(-0{,}89|0{,}16)$

(f)

19. (a) Für x gegen minus (plus) unendlich geht der Graph von $f(x)$ gegen minus (plus) unendlich. Der Graph kann kein, zwei oder vier Extrema haben. Der Graph kann einen, zwei oder drei Wendepunkte haben.

(b) $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 = 5x^3(x-4)$, $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x-3) \Rightarrow$
Maximum bei $H(0|1)$, Minimum bei $T(4|-255)$, Wendepunkt bei $W(3|-161)$

(c)

(d)

(e)

(f) $t_{x_i}(x) = f'(x_i)(x - x_i) + f(x_i) = 0 \Rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{y_i}{f'(x_i)}$

(g) $x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^5 - 5x_i^4 + 1}{5x_i^4 - 20x_i^3} \Rightarrow$
$x_1 = 1,\ x_2 = 0{,}8,\ x_3 = 0{,}712070...,\ x_4 = 0{,}694818...,$
$x_5 = 0{,}694204,\ x_6 = 0{,}6942032$

20. (a) $f(x) = \frac{1}{8}(x+2)^2(x-4),\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

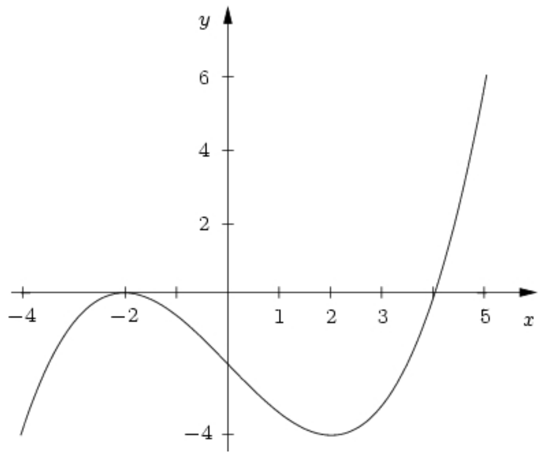
(b) $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2} = \frac{3}{8}(x^2 - 4)$

f steigend in $]-\infty; -2[$ und in $]2; +\infty[$, fallend in $]-2; 2[$.
Relatives Maximum bei $(-2\,|\,0)$, relatives Minimum bei $(2\,|-4)$

(c) $f''(x) = \frac{3}{4}x$. Rechtsgekrümmt in $]-\infty; 0[$, linksgekrümmt in $]0; +\infty[$

Wendepunkt: $(0\,|-2)$

(d)

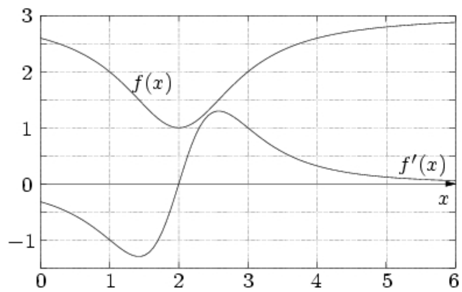


21.

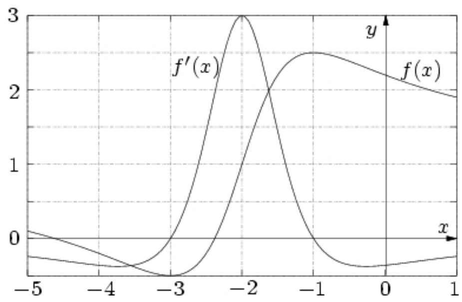
(a) $f'(x) = \frac{4\,(x-2)}{(x^2 - 4\,x + 5)^2}$

waagrechte Tangente bei $(2\,|\,1)$.

(c) $f(2-h) = \frac{1 + 3\,h^2}{1 + h^2} = f(2+h)$



22.



(a) $f'(x) = \dfrac{-3\,(x^2+4\,x+3)}{(x^2+4\,x+5)^2}$

waagrechte Tangenten bei $(\,-3\,|\,-0{,}5\,)$ und $(\,-1\,|\,2{,}5\,)$.

(c) $1 - f(-2-h) = \dfrac{3\,h}{1+h^2} =$

$= f(-2+h) - 1$

23. (a) $D_f = \mathbb{R}$, Nullstelle: $x_0 = 1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1^{\mp}$

(b)

$$\begin{aligned} \mathrm{G}_f \text{ symmetrisch zu Z} &\iff f(-h) - 1 = 1 - f(h) \\ &\iff f(h) + f(-h) = 2 \\ &\iff \frac{(1-h)^2}{1+h^2} + \frac{(1+h)^2}{1+h^2} = 2 \\ &\iff 2 = 2 \end{aligned}$$

(c) $f'(x) = -\dfrac{2\,(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

waagrechte Tangente bei $(-1\,|\,2\,)$ und bei $(\,1\,|\,0\,)$

(d)

(e) $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = -\dfrac{(1-x)(1+x)}{|1-x|\,(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

(f) $\lim\limits_{x\to 1^\pm} g'(x) = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ (Spitze von g bei $x = 1$)

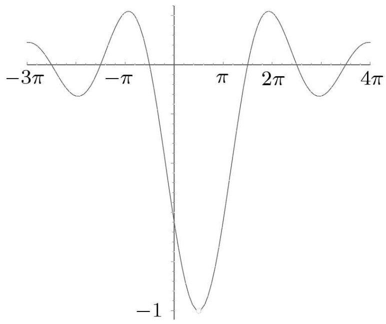
24. (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ Nullstellen: $-\dfrac{5\pi}{2}, -\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{2}$

(b) $f\left(\dfrac{\pi}{2} - h\right) = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right)}{-h} = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}{h} = f\left(\dfrac{\pi}{2} + h\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{\text{de l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{-\sin x}{1} = -1$

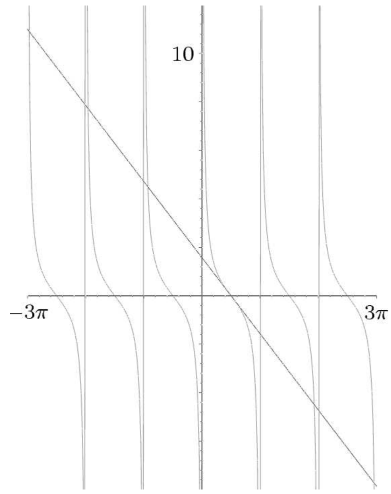
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in D_f \\ -1 & \text{für } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(d)



Für die Nullstellen von f' gilt rechts von π die Näherung $x_k \lessapprox k\pi$, und zwar umso genauer, je größer x ist.

(e)



25. (a) $f(1+h) = f(1-h) = \dfrac{h^2+7}{h^2+1}$

(b)

(c) $f'(x) = -\dfrac{12(x-1)}{(x^2-2x+2)^2} \quad \Longrightarrow \quad$ waagrechte Tangente bei $(\,1\,|\,7\,)$

26. (a) $f(2+h) = f(2-h) = \dfrac{h^2+4}{h^2+1}$

(b)

(c) $f'(x) = -\dfrac{6(x-2)}{(x^2-4x+5)^2} \quad \Longrightarrow \quad$ waagrechte Tangente bei $(\,2\,|\,4\,)$

27. (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad \lim\limits_{x\to(-1)^\pm} = \pm\infty, \quad \lim\limits_{x\to\pm\infty} = \pm\infty$

(b) $f'(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$, waagrechte Tangenten bei $(0|0)$ und $(-2|-4)$

f streng steigend in $]-\infty;-2\,[$ und in $]\,0;+\infty\,[$
f streng fallend in $]-2;-1\,[$ und in $]-1;0\,[$

(d) $f(-1+h)+2 = f(-1-h)-2$

28. (a) $D_f =]-1\,;\,1\,[, \quad \lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0^+$

(b) $f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}, \quad \lim\limits_{x\to(-1)^+} f'(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty$

29. (a) $D_f = \mathbb{R}$, Nullstellen von f: $x_{01} = -1$, $x_{02} = 3$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

(b) $f'(x) = \dfrac{2}{5}(x+1)^2(x-2)$, Nullstellen von f': $x_{11} = -1$, $x_{12} = 2$

$f'(x) \leqq 0$ in $]-\infty\,;\,2]$, $f'(x) \geqq 0$ in $[\,2\,;\,+\infty\,[$, rel. Min. bei $(\,2\,|\,-2{,}7\,)$

(c) $f''(x) = \dfrac{6}{5}(x+1)(x-1)$, Nullstellen von f'': $x_{21} = -1$, $x_{22} = 1$

$f''(x) > 0$ in $]-\infty\,;\,-1\,[$ und in $]\,1\,;\,+\infty\,[$, $f''(x) < 0$ in $]\,-1\,;\,1\,[$

Wendepunkte bei $(-1\,|\,0\,)$ (Terrassenpunkt) und bei $(\,1\,|\,-1{,}6\,)$

30. (a) $D_f = \mathbb{R}$, Nullstellen von f: $x_{01} = -3$, $x_{02} = 2$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

(b) $f'(x) = \dfrac{1}{10}(x-2)^3(x+2)$, Nullstellen von f': $x_{11} = -2$, $x_{12} = 2$

$f'(x) \geqq 0$ in $]-\infty\,;\,-2\,]$ und in $[\,2\,;\,+\infty\,[$, $f'(x) \leqq 0$ in $[-2\,;\,2\,]$

rel. Min. bei $(\,2\,|\,0\,)$, rel. Max. bei $(\,-2\,|\,5{,}12\,)$

(c) $f''(x) = \dfrac{2}{5}(x-2)^2(x+1)$, Nullstellen von f'': $x_{21} = -1$, $x_{22} = 2$

$f''(x) < 0$ in $]-\infty\,;\,-1\,[$, $f''(x) > 0$ in $]\,-1\,;\,+\infty\,[$

Wendepunkt bei $(-1\,|\,3{,}24\,)$, das Minimum bei $(\,2\,|\,0\,)$ ist ein Flachpunkt.

31. (a) $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}\,x\cdot\left(\frac{1}{3}\,x^2 - x\right) - x = -\frac{1}{9}\,x^3 + \frac{1}{3}\,x^2 - x & \text{für } x \leqq 0 \\ \frac{1}{3}\,x\cdot\left(\frac{1}{3}\,x^2 - x\right) - x = \frac{1}{9}\,x^3 - \frac{1}{3}\,x^2 - x & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$$x \leqq 0: \quad -x\left(\frac{1}{9}\,x^2 - \frac{1}{3}\,x + 1\right) = -x\left[\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] = 0$$

$$x > 0: \quad x\left(\frac{1}{9}\,x^2 - \frac{1}{3}\,x - 1\right) = x\left[\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right] = 0$$

Nullstellen bei $x_{01} = 0$ und $x_{02} = \frac{3}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 4{,}85$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

(b) f ist in ganz $\mathbb{R}$ stetig.

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}\,x^2 + \frac{2}{3}\,x - 1 = -\frac{1}{3}\left[(x-1)^2 + 2\right] & \text{für } x \leqq 0 \\ \frac{1}{3}\,x^2 - \frac{2}{3}\,x - 1 = \frac{1}{3}\left[(x-1)^2 - 4\right] & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = -1$, d.h. f ist in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

(c) $f'(x) < 0$ für $x < 3$, $f'(3) = 0$, $f'(x) > 0$ für $x > 3 \quad\Longrightarrow$

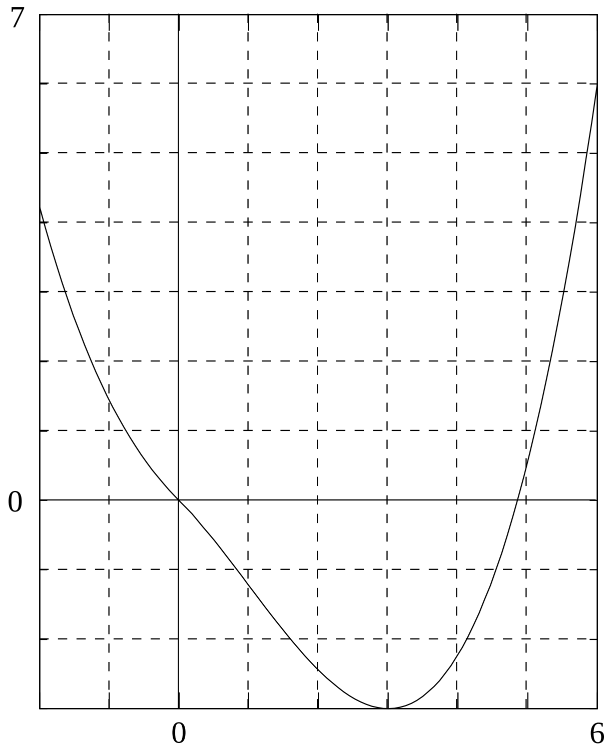
relatives Minimum bei $(3|-3)$

(d) $$f''(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}\,x + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}(x-1) & \text{für } x \leqq 0 \\ \frac{2}{3}\,x - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(x-1) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$f''(x) > 0$ für $x < 0$ und für $x > 1$, $f''(x) < 0$ für $0 < x < 1$ $\implies$ Wendepunkte bei $(0|0)$ und $\left(1\middle| -\frac{11}{9}\right)$

(e)

x	-2	-1	2	4	5	6
$f(x)$	4,22	1,44	$-2{,}44$	$-2{,}22$	0,55	6



(f) $f'(0) = -1 \quad \implies \quad t_1(x) = -x$

$f'(1) = -\frac{4}{3} \quad \implies \quad t_2(x) = -\frac{11}{9} - \frac{4}{3}(x-1) = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{9}$

Schnittpunkt von t_1 und t_2 bei $\left(\frac{1}{3}\middle| -\frac{1}{3}\right)$

32. NS: $x_{01} = 2 - \sqrt{22} \approx -2{,}69, \quad x_{02} = 0, \quad x_{03} = 2 + \sqrt{22} \approx 6{,}69$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \frac{1}{3}\,x^3 - x^2 - 3x$

$f''(x) = x^2 - 2x - 3$

rel. Minimum bei $\left(\frac{3}{2}(1-\sqrt{5})\middle|\frac{9}{8}\left(-13+5\sqrt{5}\right)\right) \approx (-1{,}85\,|\,-2{,}05)$

rel. Maximum bei $(0\,|0\,)$

rel. Minimum bei $\left(\frac{3}{2}(1+\sqrt{5})\middle|\frac{9}{8}\left(-13-5\sqrt{5}\right)\right) \approx (4{,}85\,|\,-27{,}2)$

Wendepunkt bei $\left(-1\middle| -\frac{13}{12}\right) = (-1\,|\,-1{,}08\overline{3})$

Wendepunkt bei $\left(3\middle| -\frac{63}{4}\right) = (3\,|\,-15{,}75)$

33. (a) $f(x) = \frac{x}{8}\left(x^2 - 12x + 36\right) = \frac{x}{8}(x-6)^2 \qquad f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{01} = 0,\ x_{02} = 6$

(b) $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2} = \frac{3}{8}\left(x^2 - 8x + 12\right) \qquad f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 8x + 4^2 = -12 + 16$

$x_{11} = 2,\ x_{12} = 6,$ $\qquad f'$ ist eine nach oben geöffnete Parabel $\Longrightarrow$

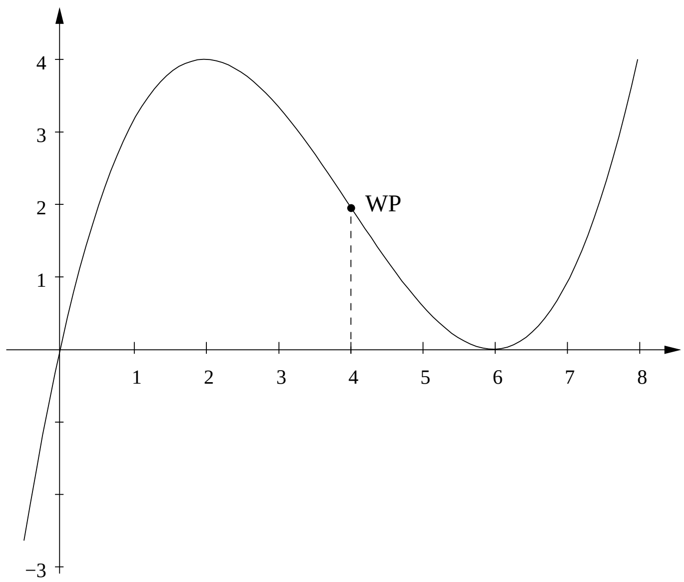
$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ und } f \text{ streng steigend in }]-\infty; 2[\text{ und in }]6; \infty[\\ f'(x) < 0 \text{ und } f \text{ streng fallend in }]2; 6[\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{rel. Max. bei } (2|4) \\ \text{rel. Min. bei } (6|0) \end{array}\right.$$

(c) $f''(x) = \frac{3}{4}x - 3 \qquad f''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 4 \quad \Longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) < 0 \text{ und } f \text{ rechtsgekrümmt in }]-\infty; 4[\\ f'(x) > 0 \text{ und } f \text{ linksgekrümmt in }]4; \infty[\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Wendepunkt bei } (4|2)$$

(d)

x	$f(x)$
−0,5	−2,64
0	0
1	3,125
3	3,375
5	0,625
7	0,875
8	4
x	$f''(x)$
2	-1,5
6	+1,5
8	4
x	$f'''(x)$
4	0,75



2.6.2 Diskussion von Funktionenscharen

1. (a) $f_{0{,}25} = -1{,}25^4 x^2 + 0{,}25$

$f_{0{,}5} = -1{,}5^4 x^2 + 0{,}5$

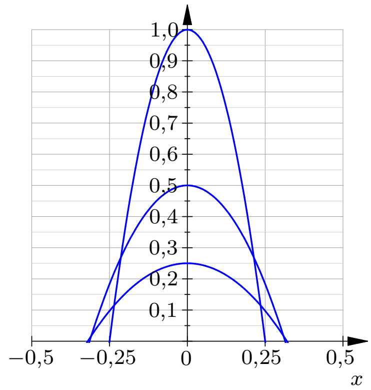
$f_1 = -x^2 + 1$

Nullstellen:

$$x_1 = -\frac{\sqrt{a}}{(a+1)^2}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{a}}{(a+1)^2} \quad \text{für} \quad a \geqq 0$$

keine Nullstellen für $a < 0$



(b)

$$A(a) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f_a(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{x_2} f_a(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2(a+1)^4 x_2^3}{3} + 2ax_2 =$$

$$= -\frac{2(a+1)^4 a^{\frac{3}{2}}}{3(a+1)^6} + \frac{2a\sqrt{a}}{(a+1)^2} = \frac{4a^{\frac{3}{2}}}{3(a+1)^2}$$

(c) $A'(a) = \dfrac{4}{3(a+1)^4} \cdot \left[\dfrac{3}{2}\sqrt{a}(a+1)^2 - 2a^{\frac{3}{2}}(a+1)\right] = \dfrac{4\sqrt{a}}{3(a+1)^3} \cdot \left[\dfrac{3}{2} - \dfrac{a}{2}\right]$

$A'(a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = 0$ und $a_2 = 3$

Aus $A(0) = 0$, $A(a) > 0$ für $a > 0$ und $\lim\limits_{a\to\infty} A(a) = 0$ folgt, dass

$$A_{\max} = A(3) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

2. (a) Nullstellen von f: $x_{01} = 0$, $x_{02} = s$

$$f_s'(x) = -3x^2 + 2sx = x\,(2s - 3x)$$

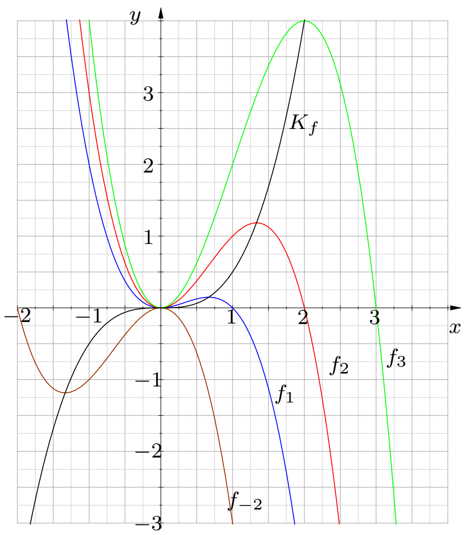
Nullstellen von f': $x_{11} = 0$, $x_{12} = \frac{2}{3}s$

$$f_s''(x) = -6x + 2s$$

$f_s''(x_{11}) = 2s, \quad f_s''(x_{12}) = -2s \quad \Longrightarrow$

$(0|0)$ ist Tiefpunkt für $s > 0$
Hochpunkt für $s < 0$
Terrassenpunkt für $s = 0$

$\left(\frac{2s}{3}\middle|\frac{4s^3}{27}\right)$ ist Hochpunkt für $s > 0$
Tiefpunkt für $s < 0$
Terrassenpunkt für $s = 0$



$$\mathrm{E}\left(\frac{2s}{3}\middle|\frac{4s^3}{27}\right) = \mathrm{E}\left(x_E|y_E\right) \quad\Longrightarrow\quad K_f : x_E \to y_E = \tfrac{1}{2}x_E^3$$

(b) $F_s(x) = \int\limits_0^x (-x^3 + sx^2)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{s}{3}x^3 = x^3\left(\dfrac{s}{3} - \dfrac{x}{4}\right)$

Nullstellen von F: $X_{01} = 0$, $X_{02} = \frac{4}{3}s$

$$F_s'(x) = f_s(x)$$

Nullstellen von F': $X_{11} = 0$, $X_{12} = s$

$$F_s''(x) = f_s'(x)$$

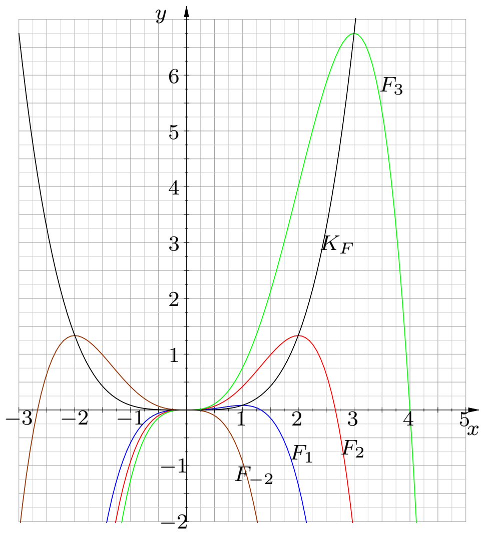
$F_s''(X_{11}) = 0$ mit VZW für $s \neq 0$:

$(0|0)$ ist Terrassenpunkt für $s \neq 0$
Hochpunkt für $s = 0$

$F_s''(X_{12}) = -s^2 < 0 \quad\Longrightarrow$

$\left(s\middle|\frac{s^4}{12}\right)$ ist immer Hochpunkt.

$K_F : x_E \to y_E = \frac{1}{12}x_E^4$



(c) $A_s = \left|\int\limits_0^s f_s(x)\,\mathrm{d}x\right| = |F_s(s)| = \dfrac{s^4}{12}$

3. (a) keine Symmetrie

(b) $N(0|0)$

(c) Waagrechte Tangente für $x = -t$, sonst immer streng monoton steigend. Für $x < -t$ rechtsgekrümmt, für $x > -t$ linksgekrümmt.

(d) keine Extrema, Terrassenpunkt bei $(-t| - \frac{1}{3}t^3)$

(e) $y = \frac{1}{3}x^3$

4. (a) keine Symmetrie

(b) Für $|t| < \sqrt{3}$ strend monoton steigend.
Für $|t| > \sqrt{3}$ streng monoton steigend im Intervall
$x \in]-\infty, \frac{-t-\sqrt{t^2-3}}{3}[\cup]\frac{-t+\sqrt{t^2-3}}{3}, \infty[$, sonst streng monoton fallend.
Für $x < -\frac{1}{3}t$ rechtsgekrümmt und für $x > -\frac{1}{3}t$ linksgekrümmt.

(c) Maximum bei $x = \frac{-t-\sqrt{t^2-3}}{3}$, Minimum bei $x = \frac{-t+\sqrt{t^2-3}}{3}$ (für $|t| < \sqrt{3}$ keine Extrema) und Wendepunkt bei $x = -\frac{1}{3}t$.
Für $|t| = \sqrt{3}$ Terrassenpunkt bei $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

(d) $y = -2x^3 + x + 1$

5. (a) $f(-x) = -f(x)$, also punktsymmetrisch.
   (b) $N_1(-\sqrt{3}\,t|0)$, $N_2(0|0)$, $N_3(\sqrt{3}\,t|0)$
   (c) $f'(x) = (x-t)(x+t)$, also steigend für $x \in]-\infty, -t[\cup]t, \infty[$ und fallend für $x \in]-t, t[$. $f''(x) = 2x$, also rechtsgekrümmt für $x < 0$ und linksgekrümmt für $x > 0$.
   (d) Maximum bei $(-t|\frac{2}{3}t^3)$, Minimum bei $(t| -\frac{2}{3}t^3)$, Wendepunkt bei $(0|0)$, kein Terrassenpunkt für $t \neq 0$.
   (e) $y = -\frac{2}{3}x^3$

6. $f'(x) = 2\,x - \dfrac{a}{x^2}$, $f'(x) = 0 \implies x_1 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

   $\mathrm{P_a}\,(x_1|y_1)$ mit $y_1 = 3 \cdot \left(\dfrac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, Kurve der Minima: $y = 3 \cdot x^2$

7. $f_a'(a) = n'(a)$ und $f_a(a) = n(a) \implies b = 4\,a$ und $c = -2\,a^2$

   $f_a(x) = -x^2 + 4\,a\,x - 2\,a^2$, Scheitel von f_a: $\mathrm{S_a}\left(2\,a \middle| 2\,a^2\right)$

   Kurve der Scheitelpunkte: $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$

8. (a) $f_a'(a) = h'(a)$ und $f_a(a) = h(a) \implies$

   $b = -2\,a - \dfrac{1}{a^2}$ und $c = \dfrac{2}{a} + a^2$

   $f_a(x) = x^2 + \left(-2\,a - \dfrac{1}{a^2}\right)\,x + \dfrac{2}{a} + a^2$

   (d)

a	-5,0	-2,0	-1,0	-0,5	-0,4	0,4	0,5	0,7	1,0	1,5	2,0	4,0
x_S	-4,98	-1,88	-0,5	1,5	2,73	3,53	2,5	1,72	1,5	1,72	2,13	4,03
y_S	-0,20	-0,52	-1,25	-6,00	-12,3	-7,27	-2,00	0,39	0,75	0,62	0,48	0,25

   g ist keine Funktion.

9. (a) $D = \mathbb{R}_0^+$, $x_{01} = 0$, $x_{02} = 1$
   (b) $f_n'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - n\,x^{n-1}$, $x_n = (2n)^{\frac{-2}{2n-1}}$, $y_n = (2n)^{\frac{-1}{2n-1}}\left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)$
   (c) $+\infty$
   (d) $\mathrm{P}_1(\,0{,}25\,|\,0{,}25\,)$, $\mathrm{P}_4(\,0{,}552\,|\,0{,}650\,)$, $f_1'(1) = -0{,}5$, $f_4'(1) = -3{,}5$

10. (a) $D = \mathbb{R}^+$, keine Nullstellen, $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = +\infty$

(b) $f_n'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{n}{x^2}$, $x_n = (2n)^{\frac{2}{3}}$, $y_n = \dfrac{3}{2}\,(2n)^{\frac{1}{3}}$

(c) $\mathrm{P}_1\left(2^{\frac{2}{3}} \middle| \frac{3}{2}\,2^{\frac{1}{3}}\right)$, $\mathrm{P}_4(\,4\,|\,3\,)$

(d) $g(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

11. (a) $D_{f_a} = \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f_a(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$

(b) $f_a'(x) = -\dfrac{a^3}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $\mathrm{P}_a\left(a^2\middle|3a\right)$, $g(x) = 3\sqrt{x}$

(d) $\mathrm{G}_g \cap \mathrm{G}_{f_a} = \{\mathrm{P}_a\} \quad\Longrightarrow\quad f_a'(a^2) = 0$

$g'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$, $\quad g'(a^2) = \dfrac{3}{2a} = \tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad\Longrightarrow\quad a = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

2.6.3 Ortskurven besonderer Punkte

1. (a) Nullstellen: $x_{a0} = -\dfrac{2}{a}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \left(\frac{-\operatorname{sgn}(a)\cdot\infty}{0^+}\right) = -\operatorname{sgn}(a)\cdot\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \left(\frac{\operatorname{sgn}(a)\cdot\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{a}{2\mathrm{e}^x} = \left(\frac{a}{+\infty}\right) = 0^{\pm}$$

(b) $f_a(x) = f_b(x) \quad\Longrightarrow\quad ax = bx \quad\Longrightarrow\quad (a-b)x = 0 \quad\Longrightarrow\quad x = 0\ (a \neq b)$

Der gemeinsame Punkt aller Grafen ist also $(0|1)$.

(c) $f_a'(x) = \dfrac{-ax+a-2}{2\mathrm{e}^x}$, $\quad f_a''(x) = \dfrac{ax-2a+2}{2\mathrm{e}^x}$, $\quad f_a'''(x) = \dfrac{-ax+3a-2}{2\mathrm{e}^x}$

$f_a'(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_{a1} = \dfrac{a-2}{a} = 1 - \dfrac{2}{a}$, $\quad f_a''(x_{a1}) = -\dfrac{a}{2}\mathrm{e}^{\frac{2-a}{a}}$, $\quad f_a(x_{a1}) = \dfrac{a}{2}\mathrm{e}^{\frac{2-a}{a}}$

$a > 0 \quad\Longrightarrow\quad f_a''(x_{a1}) < 0 \quad\Longrightarrow\quad$ Hochpunkt bei $\mathrm{H}\left(\frac{a-2}{a}\middle|\frac{a}{2}\mathrm{e}^{\frac{2-a}{a}}\right)$

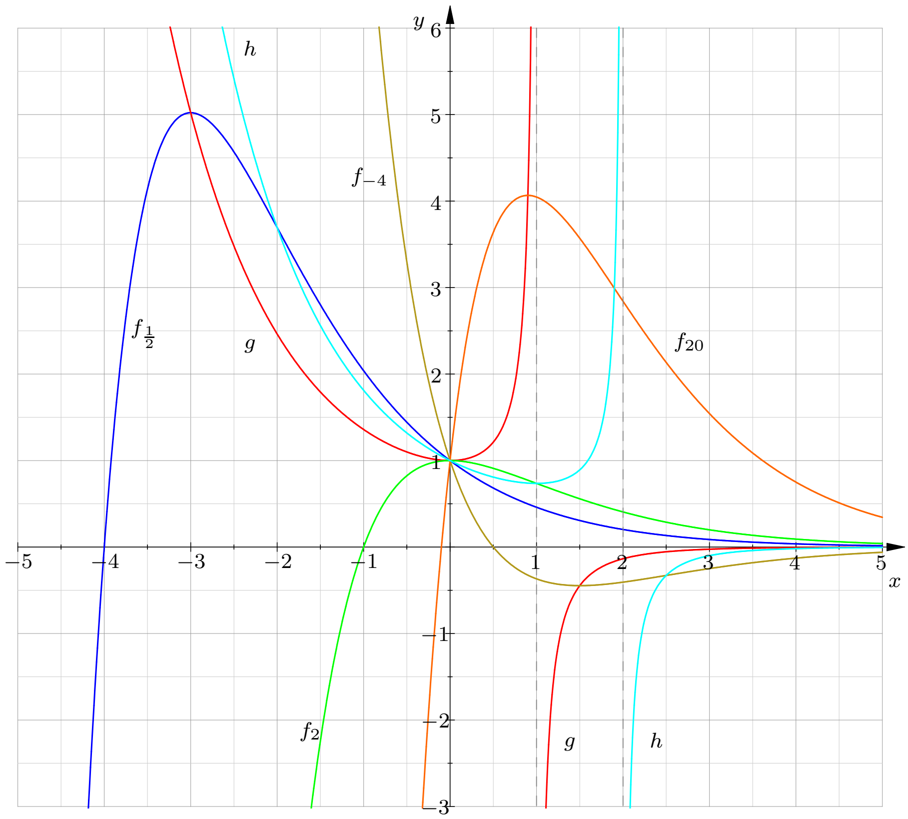
$a < 0 \quad\Longrightarrow\quad f_a''(x_{a1}) > 0 \quad\Longrightarrow\quad$ Tiefpunkt bei $\mathrm{H}\left(\frac{a-2}{a}\middle|\frac{a}{2}\mathrm{e}^{\frac{2-a}{a}}\right)$

$f_a''(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_{a2} = \dfrac{2a-2}{a} = 2 - \dfrac{2}{a}$, $\quad f_a'''(x_{a2}) = \dfrac{a}{2}\mathrm{e}^{\frac{2-2a}{a}} \neq 0 \quad\Longrightarrow$

Wendepunkt bei $\mathrm{W}\left(\frac{2a-2}{a}\middle|a\mathrm{e}^{\frac{2-2a}{a}}\right)$

(d)

a	0,5	2	20	-4
x_{a0}	-4	-1	$-0,1$	0,5
x_{a1}	-3	0	0,9	1,5
$f(x_{a1})$	$\frac{e^3}{4} \approx 5{,}02$	1	$\frac{10}{e^{0,9}} \approx 4{,}07$	$-\frac{2}{e^{1,5}} \approx -0{,}446$
x_{a2}	-2	1	1,9	2,5
$f(x_{a2})$	$\frac{e^2}{2} \approx 3{,}69$	$\frac{2}{e} \approx 0{,}74$	$\frac{20}{e^{1,9}} \approx 2{,}99$	$-\frac{4}{e^{2,5}} \approx -0{,}328$



(e) $f'_{0,5}(0) = -0{,}75 = \tan\alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = -36{,}87°$

$f'_{20}(0) = 9 = \tan\beta \quad \Longrightarrow \quad \beta = 83{,}66°$

Schnittwinkel: $\varphi = 180° - (\beta + |\alpha|) = 59{,}47°$

(f) $x_1 = 1 - \frac{2}{a} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{2} = \frac{1}{1 - x_1} \quad \Longrightarrow \quad y_1 = \frac{a}{2} e^{\frac{2-a}{a}} = \frac{e^{-x_1}}{1 - x_1} \quad \Longrightarrow$

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{1 - x}$$

(g) $f''_a(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \frac{2a - 2}{a},\ y_2 = f(x_2) = a e^{\frac{2-2a}{a}} = \frac{2}{2 - x_2} e^{-x_2}$

$$h(x) = \frac{2e^{-x}}{2 - x}$$

2. (a) Höhenschnittpunkt liegt auf einer Parabel.
   (b) $h_c : x = c$ und $h_a : x \to (1-c) \cdot x$
   (c) H liegt auf h_c ($\Rightarrow x = c$) und auf h_a ($\Rightarrow y = (1-c) \cdot x$). Also $H(c|c - c^2)$
   (d) $y_H = (1-c) \cdot x_H = (1 - x_H) \cdot x_H = x_H - x_H^2$
   (e) $S(\frac{1}{2}|\frac{1}{4})$; Ergebnis stimmt mit Teilaufgabe (a) überein

3. (a) $N_1(0|0)$, $N_2(-\frac{b}{a}|0)$
   (b) $f'(x) = x(3ax + 2b) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ oder $x_2 = -\frac{2b}{3a}$
   $f''(x) = 6ax + 2b \neq 0$ für x_1 und x_2 (a und $b \neq 0$!).
   Also Extrema bei $(0|0)$ und $(-\frac{2b}{3a}|\frac{4b^3}{27a^2})$
   (c)
   (d) Extrema liegen auf einer Parabel.
   (e) $f(x_2) = \frac{4b^3}{27a^2} = \frac{b}{3} \cdot (-\frac{2b}{3a})^2 = \frac{b}{3} \cdot x_2^2$

4. (a) $N_1(0|0)$, $N_2\left(\sqrt{-\frac{b}{a}}\,\middle|\,0\right)$
   (b) $f'(x) = 3ax^2 + b = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{-\frac{b}{3a}}$
   $f''(x) = 6ax \Rightarrow f''\left(\sqrt{-\frac{b}{3a}}\right) \neq 0.$
   Also Extrema bei $\left(\sqrt{-\frac{b}{3a}}\,\middle|\,\frac{2}{3}b\sqrt{-\frac{b}{3a}}\right)$.
   (c)
   (d) Extrema liegen auf einer Geraden.
   (e) $f(x_{\text{Max}}) = \sqrt{-\frac{b}{3a}}(-\frac{b}{3} + b) = \frac{2}{3}b \cdot x_{\text{Max}}$

5. (b) $E_1(0|0)$, $E_2\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\,\middle|\,-\frac{b^2}{4a}\right)$, $E_3\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}\,\middle|\,-\frac{b^2}{4a}\right)$
   Drei Extrema genau dann, wenn a und b verschiedene Vorzeichen haben.
   (d) Vermutung: Extrema liegen auf einer nach oben geöffneten Parabel.
   (e) $e(x) = \frac{b}{2}x^2$

6. (a) $E_1(0|0)$, $E_2\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\,\middle|\,-\frac{b^2}{4a}\right)$, $E_3\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}\,\middle|\,-\frac{b^2}{4a}\right)$
   Drei Extrema genau dann, wenn a und b verschiedene Vorzeichen haben.
   (b) Vermutung: Extrema liegen auf einer nach oben geöffneten Parabel.

(c) $e(x) = \frac{b}{2}x^2$

7. (a) Extrema bei $x_E = -\frac{1\pm\sqrt{1-3k}}{3} \Rightarrow$
$k = -3x^2 - 2x \Rightarrow f(x_E) = x^3 + x^2 + (-3x^2 - 2x) \cdot x = -2x^3 - x^2$
(b) Extrema bei $x_E = -\frac{k\pm\sqrt{k^2-3}}{3} \Rightarrow$
$k = -\frac{1}{2x} - \frac{3}{2}x \Rightarrow f(x_E) = x^3 + (-\frac{1}{2x} - \frac{3}{2}x) \cdot x^2 + x = -\frac{1}{2}(x^3 - x)$
(c) Extrema bei $x_E = -\frac{1}{3k}(1 \pm \sqrt{1-3k}) \Rightarrow$
$k = -\frac{2x+1}{3x^2} \Rightarrow f(x_E) = (-\frac{2x+1}{3x^2})x^3 + x^2 + x = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x$

8. (a) Wendepunkte bei $x_W = -\frac{1}{3}$
(b) Wendepunkte bei $x_W = -\frac{k}{3} \Rightarrow k = -3x \Rightarrow$
$f(x_W) = x^3 - 3x \cdot x + x = -2x^3 + x$
(c) Wendepunkte bei $x_W = -\frac{1}{3k} \Rightarrow k = -\frac{1}{3k} \Rightarrow$
$f(x_W) = -\frac{1}{3k}x^3 + x^2 + x = \frac{2}{3}x^2 + x$

9. $f'(x) = 2\,x - \dfrac{a}{x^2} \quad , \quad f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\mathrm{P_a}\,(x_1|y_1)$ mit $y_1 = 3 \cdot \left(\dfrac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, Kurve der Minima: $y = 3 \cdot x^2$

10. $f_a'(a) = n'(a)$ und $f_a(a) = n(a) \quad \Longrightarrow \quad b = 4\,a$ und $c = -2\,a^2$
$f_a(x) = -x^2 + 4\,a\,x - 2\,a^2$, Scheitel von f_a: $\mathrm{S_a}\left(2\,a\middle|2\,a^2\right)$

Kurve der Scheitelpunkte: $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$

11. (a) $f_a'(a) = h'(a)$ und $f_a(a) = h(a) \quad \Longrightarrow$
$b = -2\,a - \dfrac{1}{a^2}$ und $c = \dfrac{2}{a} + a^2$
$f_a(x) = x^2 + \left(-2\,a - \dfrac{1}{a^2}\right)\,x + \dfrac{2}{a} + a^2$
(d)

a	-5,0	-2,0	-1,0	-0,5	-0,4	0,4	0,5	0,7	1,0	1,5	2,0	4,0
x_S	-4,98	-1,88	-0,5	1,5	2,73	3,53	2,5	1,72	1,5	1,72	2,13	4,03
y_S	-0,20	-0,52	-1,25	-6,00	-12,3	-7,27	-2,00	0,39	0,75	0,62	0,48	0,25

g ist keine Funktion.

12. (a) $x_1 = 0$, Maximum für $b < 0$, Minimum für $b > 0$
Falls a und b verschiedene Vorzeichen haben gibt es weitere Extrema:
$x_{2,3} = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ Maximum für $b > 0$, Minimum für $b < 0$

(b) $o(x) = -ax^4$

(c) Falls a und b verschiedene Vorzeichen haben, gibt es Wendepunkte:
$x_{4,5} = \pm\sqrt{-\frac{b}{6a}}$

(d)

(e) Die Flächen haben gleichen Flächeninhalt, da sie wie der Funktionsgraph achsensymmetrisch zur y-Achse sind.

13. (a) $t(x) = -2\,a\,x - a^2, \quad h(x) = \dfrac{2a}{5} \cdot x - \dfrac{a^2}{25}$

$t(x) = 0$ bei $x = -\dfrac{a}{2}, \quad h(x) = 0$ bei $x = \dfrac{a}{10}$

(b) $x_a = -\dfrac{2a}{5},\ y_a = -\dfrac{a^2}{5}$

(c) $x_a = -1,\ y_a = -1{,}25$

(d) $g(x) = -\dfrac{5}{4}\,x^2$

14. (a) $g(x) = 2\,b\,x - b^2, \quad h(x) = -\dfrac{2b}{7} \cdot x - \dfrac{b^2}{49}$

$g(x) = 0$ bei $x = \dfrac{b}{2}, \quad h(x) = 0$ bei $x = -\dfrac{b}{14}$

(b) $x_b = \dfrac{3b}{7},\ y_b = -\dfrac{b^2}{7}$

(c) $x_b = 1{,}5,\ y_b = -1{,}75$

(d) $k(x) = -\dfrac{7}{9}\,x^2$

2.6.4 Kurvendiskussion mit dem Computer

1. (a) $\lim\limits_{f\to 0} A(f) = \dfrac{C}{f_0^2}$ System folgt exakt dem Erreger.

$\lim\limits_{f\to\infty} A(f) = 0$ System kommt nicht mehr mit.

(b) $f_R = \sqrt{f_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$

(c) f_R nimmt mit der Eigenfrequenz f_0 des Systems zu und mit dem Reibungsfaktor γ ab. Für kleine Reibungen gilt $f_R \approx f_0$.

2. (a) i. $I(\omega) = |\frac{1}{0{,}1\omega} - 0{,}1\omega|,\ N(10|0)$

ii. $\lim\limits_{\omega\to 0} I(\omega) = \infty;\ \lim\limits_{\omega\to\infty} I(\omega) = \infty$

iii. Bei $\omega = 10$ nicht differenzierbar!

iv. Für $\omega < 10$ streng monoton fallend und für $\omega > 10$ streng monoton steigend.

(b) i. $I(10) = \sqrt{1 - \frac{1}{1+R^2}} = \frac{R}{\sqrt{1-R^2}}$

ii. $\lim\limits_{\omega \to 0} I(\omega) = \dfrac{1}{R}$; $\lim\limits_{\omega \to \infty} I(\omega) = \infty$

iii. waagrechte Tangente bei $\omega = 0$;
Minimum bei $\omega = 10\sqrt{\sqrt{1 + 2R^2} - R^2}$

iv.

v. $I(0)$ sinkt; $I(Minimum)$ steigt

vi. $\omega = \sqrt{50}$

3.

4.

5.

6. (a) $f'(x) = 4ax^3 + 2bx = 2x \cdot (2ax^2 + b) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_{2/3} = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.
Also: drei waagrechte Tangenten, wenn a und b verschiedene Vorzeichen haben.

(b) $f'(x) = 5x^4 + 3bx^2 - 1 = 5q^2 + 3bq - 1 = 0$
(Substitution: $q = x^2$)$\Rightarrow$
$q_1 = \frac{-3b+\sqrt{9b^2+20}}{10} > 0$. Da $\sqrt{9b^2 + 20} > |3b| \geq 3b \Rightarrow$
$x_1 = \sqrt{\frac{1}{10}(-3b + \sqrt{9b^2 + 20})}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{10}(-3b + \sqrt{9b^2 + 20})}$
$q_2 = \frac{-3b-\sqrt{9b^2+20}}{10} < 0$. Da $\sqrt{9b^2 + 20} > |3b| \geq 3b$.
Also: Der Graph von $f(x)$ hat zwei waagrechte Tangenten.

(c) $f'(x) = 5x^4 + 3bx^2 + 1 = 5q^2 + 3bq + 1 = 0$
(Substitution: $q = x^2$)$\Rightarrow$
$q_1 = \frac{-3b+\sqrt{9b^2-20}}{10}$. Da $\sqrt{9b^2 - 20} < |3b|$ folgt: $q_1 > 0$ für $b < 0$ und $q_1 < 0$ für $b > 0$.
$q_2 = \frac{-3b-\sqrt{9b^2-20}}{10}$. Da $\sqrt{9b^2 - 20} < |3b|$ folgt: $q_2 > 0$ für $b < 0$ und $q_2 < 0$ für $b > 0$.
Also:
Der Graph von $f(x)$ hat vier waagrechte Tangenten wenn $b < -\frac{\sqrt{20}}{3}$ (q_1 und q_2 positiv; Voraussetzung für b beachten).
Der Graph von $f(x)$ hat keine waagrechte Tangenten wenn $b > -\frac{\sqrt{20}}{3}$ (q_1 und q_2 negativ; Voraussetzung für b beachten)).

7. Echt monoton fallend in ganz D_f. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \cdot \left(1 + \cos\dfrac{1}{x}\right)$

Unendlich viele Terassenpunkte: $\mathrm{T}\left(\dfrac{1}{(1+2k)\pi}\middle|(1+2k)\pi\right)$

8. (a) Substitution: $x = \dfrac{T}{100\,°\mathrm{C}}$,

   Maximum $(0{,}22|-0{,}41)$, Minimum $(-1{,}00|-2{,}65)$,
   Wendepunkt $(-0{,}39|-1{,}53)$

   (b)

   (c) Im Temperaturbereich von $-25\,°\mathrm{C}$ bis $25\,°\mathrm{C}$ weicht $\tilde{f}(T)$ von $f(T)$ nur geringfügig ab. Hier stellt also $f(T)$ eine genügend gute Näherung dar.
   Betrachtet man aber einen größeren Temperaturbereich, muss $\tilde{f}(T)$ verwendet werden.
   z. B. $|f(50\,°\mathrm{C}) - \tilde{f}(50\,°\mathrm{C})| = 0{,}204$, $\dfrac{|f(50\,°\mathrm{C}) - \tilde{f}(50\,°\mathrm{C})|}{\tilde{f}(50\,°\mathrm{C})} = 33\%$

   Dem Diagramm entnimmt man, dass die Längenänderung $\tilde{f}(T)$ eines 10 m langen Stabes im Temperaturbereich von $-100\,°\mathrm{C}$ bis $100\,°\mathrm{C}$ ca. $1{,}0\frac{\mu\mathrm{m}}{°\mathrm{C}}$ beträgt. Dies entspricht einer Längenausdehung um 0,00001% pro °C!

Literatur: *Mathematikaufgaben, Anwendungen aus der modernen Technik und Arbeitswelt*, Werner Schmidt, Ernst Klett Verlag, 1984

9. (a) $c^2 = \sqrt{((x-c)^2+y^2)\cdot((x+c)^2+y^2)} \quad \Longrightarrow$

   $y^4 + y^2(2x^2+2c^2) + x^4 - 2x^2c^2 = 0 \quad \Longrightarrow$

   $f(x) = \pm\sqrt{-x^2 - c^2 + \sqrt{c^4 + 4x^2c^2}}$

   (b) $x_1 = 0$, $x_{2/3} = \pm\sqrt{2}c$

   (c) $f'(x) = \pm\dfrac{-x\sqrt{c^4+4x^2c^2} + 2c^2x}{\sqrt{-x^2-c^2+\sqrt{c^4+4x^2c^2}}\cdot\sqrt{c^4+4x^2c^2}} \quad \Longrightarrow$

   vier Punkte mit waagrechter Tangente:

   $x_{4/5} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$, $y_{4a/4b} = y_{5a/5b} = \pm\dfrac{1}{2}c$

   (d)

3 Stochastik: Binomialverteilung und beurteilende Statistik

3.1 Urnenmodell - Ziehen mit und ohne Zurücklegen

1. Die Zahl der möglichen Pokerblätter zu fünf Karten ist $n = \binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

   (a) Royal Flush: $z = 4 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 1{,}54 \cdot 10^{-6}$

   (b) Straight Flush: $z = 4 \cdot 9 = 36 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 1{,}39 \cdot 10^{-5}$

   (c) Vierer: $z = 13 \cdot 48 = 624 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 2{,}40 \cdot 10^{-4}$

   (d) Full House: $z = 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 3744 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 1{,}44 \cdot 10^{-3}$

   (e) Flush: $z = 4 \cdot \binom{13}{5} - 36 - 4 = 5108 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 1{,}97 \cdot 10^{-3}$

   (f) Straight: $z = 10 \cdot 4^5 - 36 - 4 = 10200 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 3{,}92 \cdot 10^{-2}$

   (g) Dreier: $z = 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \frac{48 \cdot 44}{2} = 54\,912 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 2{,}11 \cdot 10^{-2}$

   (h) Zwei Paare: $z = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot \binom{4}{2} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} \cdot 44 = 123\,552 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 4{,}75 \cdot 10^{-2}$

   (i) Ein Paar: $13 \cdot \binom{4}{2} \cdot \frac{48 \cdot 44 \cdot 40}{3!} = 1\,098\,240 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 0{,}423$

2. Es gibt $n = \binom{32}{8} = 10\,518\,300$ verschiedene Schafkopfblätter.

   (a) Buam-Solo-Du: $z = 1 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 9{,}51 \cdot 10^{-8}$.

   Wenn jemand jeden Tag 100 Spiele absolviert, dauert es im Schnitt $10^5\,\mathrm{d} = 288\,\mathrm{a}$ bis er einmal ein Buam-Solo-Du erhält. Soviel zum korrekten Mischen beim Schafkopfen!

   (b) Vier Ober und vier Herzkarten: $z = 1 \cdot \binom{7}{4} = 35 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 3{,}33 \cdot 10^{-6}$

   (c) Keinen Ober und keinen Unter: $z = \binom{24}{8} = 735\,471 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 6{,}99 \cdot 10^{-2}$

(d) Acht Trümpfe für ein Herz-Solo: $z = \binom{14}{8} = 3003 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 2{,}89 \cdot 10^{-4}$

(e) Wir betrachten den Spieler mit dem Herzober. Er bekommt noch sieben Karten aus den restlichen 23 Karten (5 Trümpfe, 18 Nichttrümpfe). Die Zahl der Möglichkeiten, keinen Trumpf mehr zu bekommen, ist

$$z_0 = \binom{18}{7}$$

Die Zahl der Möglichkeiten, noch einen Trumpf zu bekommen, ist

$$z_1 = 5 \cdot \binom{18}{6}$$

Also gewinnt unser Spieler seinen „Du“ in $z = z_1 + z_2 = 124\,644$ von

$$n = \binom{23}{7} = 245\,157$$

Fällen, d.h. mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{z}{n} = 0{,}5084 = 50{,}84\%$.

3. $\overline{\text{G}}\text{Z}(6, n) = \binom{6+n-1}{n} = \binom{n+5}{n} = \frac{(n+5)!}{n! \cdot 5!} = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{120}$

$$\overline{\text{G}}\text{Z}(6, n) > 10^6 \quad \Longrightarrow \quad (n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) > 1{,}2 \cdot 10^8$$

Das Produkt nähern wir durch $(n+3)^5$ an:

$$(n+3)^5 > 1{,}2 \cdot 10^8 \quad \Longrightarrow \quad n > \left(1{,}2 \cdot 10^8\right)^{\frac{1}{5}} - 3 = 38{,}3$$

Probieren:

$$\binom{38+5}{5} = 962\,598, \quad \binom{39+5}{5} = 1\,086\,008 \quad \Longrightarrow \quad n \geqq 39$$

4. (a) Anfangslage: n rote und n schwarze Karten. Die Wahrscheinlichkeit für ein Pärchen ist

$$p_n = P(\{rs, sr\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2n-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2n-1} = \frac{n}{2n-1}$$

Beim nächsten Versuch ist die Ausgangslage $n-1$ rote und $n-1$ schwarze Karten, d.h. die Wahrscheinlichkeitfür ein zweites Pärchen ist

$$p_{n-1} = \frac{n-1}{2(n-1)-1} = \frac{n-1}{2n-3}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeitist dann

$$p = p_n \cdot p_{n-1} \cdot p_{n-2} \cdot \ldots \cdot p_1 = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1} =$$

$$= \frac{n! \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2}{(2n-1)!} = \frac{n! \cdot 2 \cdot (n-1) \cdot 2 \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1}{(2n-1)!} =$$

$$= \frac{n! \cdot 2^{n-1} \cdot (n-1)!}{(2n-1)!} = \frac{n! \cdot 2^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot 2n}{(2n-1)! \cdot 2n} = \frac{n! \cdot 2^n \cdot n!}{(2n)!} = \frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n)!}$$

Für $n = 26$ ist
$$p = \frac{2^{26} \cdot (26!)^2}{52!} = 1{,}35 \cdot 10^{-7}$$

(b) Der Unterschied zu Teilaufgabe (a): Die Wahrscheinlichkeit für ein rs-Paar ist halb so groß wie p_n, d.h. die gesamte gesuchte Wahrscheinlichkeit ist
$$p' = \frac{1}{2^n} \cdot p = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n)!} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$
Für $n = 26$ ist
$$p' = \frac{(26!)^2}{52!} = 2{,}0 \cdot 10^{-15}$$

(c) Entweder Stapel 1 rot und Stapel 2 schwarz oder umgekehrt:
$$p'' = 2p' = \frac{2(n!)^2}{(2n)!}$$
Für $n = 26$ ist $p'' = 4{,}0 \cdot 10^{-15}$.

5. (a) $\overline{\text{G}}\,\overline{\text{Z}}(20; 5) = \binom{20}{5} = \frac{20!}{5! \cdot 15!} = 15\,504$

(b) $\overline{\text{G}}\text{Z}(20; 5) = \binom{20+5-1}{5} = \binom{24}{5} = \frac{24!}{5! \cdot 19!} = 42\,504$

(c) $\text{G}\overline{\text{Z}}(20; 5) = \frac{20!}{15!} = 1\,860\,480$

(d) $\text{GZ}(20; 5) = 20^5 = 3\,200\,000$

(e) Kein Fach doppelt belegt: (c) $\Longrightarrow$ $z_0 = 1\,860\,480$

Ein Fach doppelt belegt: $\binom{20}{4}$ Möglichkeiten für die Auswahl der 4 Fächer, 4 Möglichkeiten für die Auswahl des doppelt belegten Faches, $\frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!}$ Möglichkeiten für die Belegung der Fächer:
$$z_1 = 4 \cdot \binom{20}{4} \cdot \frac{5!}{2!} = 1\,162\,800$$
Zwei Fächer doppelt belegt: $\binom{20}{3}$ Möglichkeiten für die Auswahl der 3 Fächer, $\binom{3}{2} = 3$ Möglichkeiten für die Auswahl der doppelt belegten Fächer, $\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!}$ Möglichkeiten für die Belegung der Fächer:
$$z_1 = 3 \cdot \binom{20}{3} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 2!} = 102\,600$$
$$z = z_0 + z_1 + z_2 = 3\,125\,880$$

(f) Wie (e), nur für die Belegung der Fächer gibt es jeweils nur eine Möglichkeit:

$$z = \binom{20}{5} + 4 \cdot \binom{20}{4} + 3 \cdot \binom{20}{3} = 15\,504 + 19\,380 + 3420 = 38\,304$$

6. (a) $\overline{p}(n)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter n Personen alle an verschiedenen Tagen Geburtstag haben:

$$\overline{p}(n) = \begin{cases} \dfrac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} = \dfrac{365!}{365^n \cdot (365-n)!} & \text{für } n \leqq 365 \\ 0 & \text{für } n > 365 \end{cases}$$

Da der Taschenrechner $n!$ für $n > 69$ nicht berechnen kann, verwenden wir das Ergebnis in der Form (hier ist keine Fallunterscheidung nötig!)

$$\overline{p}(n) = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \frac{365 - n + 1}{365} = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{365 - i}{365}$$

$$p(n) = 1 - \overline{p}(n) = 1 - \prod_{i=1}^{n-1} \frac{365 - i}{365}$$

Eine weiter Form für die Berechnung mit einem Taschenrechner, der die Binomialkoeffizienten beherrscht:

$$\overline{p}(n) = \frac{365!}{365^n \cdot (365-n)!} = \frac{365! \cdot n!}{365^n \cdot (365-n)! \cdot n!} = \frac{n!}{365^n} \cdot \binom{365}{n}$$

Weiter muss man aufpassen, dass der TR kein Zwischenergebnis $\geqq 10^{100}$ errechnet. Als Beispiel die Berechnung für $n = 40$:

$$\overline{p}(40) = \binom{365}{39} \cdot \frac{326}{40} : 365^{20} : 365^{20} \cdot 40! = 0{,}10877 \quad \Longrightarrow \quad p(40) = 0{,}89123$$

Noch etwas trickreicher die Berechnung für $n = 60$:

$$\binom{365}{60} = \underbrace{\frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 327}{1 \cdot 2 \ldots \cdot 39}}_{\binom{365}{39}} \cdot \underbrace{\frac{326 \cdot 325 \cdot \ldots \cdot 306}{40 \cdot 41 \ldots \cdot 60}}_{\binom{326}{21} \cdot \frac{21! \cdot 39!}{60!}}$$

$$\overline{p}(60) = \binom{365}{39} : 60! \cdot \binom{326}{21} \cdot 21! \cdot 39! : 365^{20} : 365^{20} : 365^{20} \cdot 60! = 0{,}005877$$

$$\Longrightarrow \quad p(60) = 0{,}99412$$

n	2	3	4	5	6	7
$p(n)$	0,274%	0,820%	1,64%	2,71%	4,05%	5,62%
n	8	9	10	20	40	60
$p(n)$	7,43%	9,46%	11,69%	41,14%	89,12%	99,41%

(b) $p(22) = 47{,}57\%$ und $p(23) = 50{,}73\%$ $\quad\Longrightarrow\quad$ ab 23 Personen

7. (a) $N = \binom{25}{8} = 1\,081\,575$

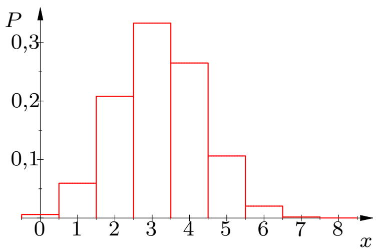
(b) $N \cdot 8! = 1\,081\,575 \cdot 40\,320 = 43\,609\,104\,000 \approx 4{,}36 \cdot 10^{10}$

(c) Es gibt $\binom{10}{x}$ Möglichkeiten, x Mädchen und $\binom{15}{8-x}$ Möglichkeiten, $8-x$ Buben auszuwählen. Die Zahl der Gruppen mit genau x Mädchen ist also

$$Z(x) = \binom{10}{x} \cdot \binom{15}{8-x} \quad\Longrightarrow\quad P(x) = \frac{Z(x)}{N} = \frac{\binom{10}{x} \cdot \binom{15}{8-x}}{\binom{25}{8}}$$

x	$P(x)$
0	0,00595
1	0,05950
2	0,20824
3	0,33318
4	0,26503

x	$P(x)$
5	0,10601
6	0,02039
7	0,00166
8	0,00004



8. (a) Sitzordnung 1: Stühle nummeriert: $m_1 = \mathrm{G\overline{Z}}(s,n) = \frac{s!}{(s-n)!}$

Sitzordnung 2: Stühle nicht nummeriert, es kommt nur darauf an, wer welche Nachbarn hat.

$$m_2 = \frac{m_1}{s} = \frac{\mathrm{G\overline{Z}}(s,n)}{s} = \frac{(s-1)!}{(s-n)!}$$

(b) Der erste Freund hat s Sitzmöglichkeiten, der zweite dann jeweils zwei (links oder rechts), die restlichen $n-2$ Personen auf $s-2$ Sitzen haben

$$\frac{(s-2)!}{(s-2-(n-2))!} = \frac{(s-2)!}{(s-n))!}$$

Sitzmöglichkeiten. Es gibt also

$$g = \frac{2s(s-2)!}{(s-n))!}$$

günstige Sitzmöglichkeiten, d.h.

$$p = \frac{g}{m_1} = \frac{2s(s-2)!(s-n)!}{s!(s-n))!} = \frac{2(s-2)!}{(s-1)!} = \frac{2}{s-1}$$

Es überrascht, dass p nicht von n abhängt. Die fertige Lösung zeigt uns einen eleganteren Lösungsweg:

Sitzt der erste Freund, dann hat der zweite $s-1$ Sitzmöglichkeiten, wovon zwei günstig sind, also $p = \frac{2}{s-1}$.

(c) Wenn der erste Freund schon sitzt, haben die beiden anderen noch

$$\mathrm{G\overline{Z}}(s-1,2) = \frac{(s-1)!}{(s-3)!} = (s-1)(s-2)$$

Sitzmöglichkeiten, wovon sechs günstig sind (123,132,213,312,231,321):

$$P = \frac{6}{(s-1)(s-2)}$$

(d) (a) Wie „nummerierte Plätze“, d.h. m_1

(b) Sitzt der erste Freund nicht auf einem Randplatz, dann hat der zweite zwei Sitzmöglichkeiten, sonst nur eine. Von den insgesamt $s(s-1)$ Sitzmöglichkeiten der beiden Freunde sind also $1+2(s-2)+1 = 2(s-1)$ günstig, also

$$p = \frac{2(s-1)}{s(s-1)} = \frac{2}{s}$$

(c) Sitzt der erste Freud auf einem Randplatz, dann haben die beiden anderen zwei Sitzmöglichkeiten (123, 132), sitzt er neben dem Randplatz, dann haben sie vier (123,132,213,312) sonst sechs Möglichkeiten. Von den insgesamt $s(s-1)(s-2)$ Sitzmöglichkeiten der drei Freunde sind also $2+4+6(s-4)+4+2 = 6(s-2)$ günstig, also

$$p = \frac{6(s-2)}{s(s-1)(s-2)} = \frac{6}{s(s-1)}$$

(e) $\binom{n}{s} \cdot s! = \frac{n!s!}{s!(n-s)!} = \frac{n!}{(n-s)!} = \mathrm{G\overline{Z}}(n,s)$

9. (a) $26! = 4{,}033 \cdot 10^{26}$

(b) Bei 26 Buchstaben gibt es 25 Plätze für Leerzeichen, d.h. 2^{25} Möglichkeiten, Leerzeichen zu setzten. Daraus folgt für die Zahl der Sätze:

$$26! \cdot 2^{25} = 1{,}35 \cdot 10^{34}$$

(c) $26^5 = 11\,881\,376$

(d) $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 7\,893\,600$

10. (a) Als Ergebnisraum verwenden wir $\Omega_r = \{111, 112, \ldots, 555\}$, wobei xyz bedeutet: Pfeil 1 in Feld x, Pfeil 2 in Feld y und Pfeil 3 in Feld z.

$$z_r = |\Omega_r| = 5^3 = 125$$

Drei verschiedene Felder:	$z_{r3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 =$	60
Zwei verschiedene Felder:	$z_{r2} = 5 \cdot 3 \cdot 4 =$	60
Alle im gleichen Feld:	$z_{r1} = 1 \cdot 5 =$	5

Jedes der 125 Elementarereignisse hat die gleiche Wahrscheinlichkeit $p_r = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$A = \text{„Alle Pfeile in einem Feld"} = \{111, 222, 333, 444, 555\}$$

ist dann

$$P(A) = 5p_r = \frac{1}{25} = \frac{z_{r1}}{z_r}$$

(b) Als Ergebnisraum verwenden wir $\Omega = \{30000, 21000, \ldots, 00003\}$, wobei z.B. 01020 bedeutet: ein Pfeil in Feld 2, 2 Pfeile 2 in Feld 4.

Drei verschiedene Felder:	$z_3 = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} =$	10
Zwei verschiedene Felder:	$z_2 = 5 \cdot 4 =$	20
Alle im gleichen Feld:	$z_1 = 1 \cdot 5 =$	5

$z = z_1 + z_2 + z_3 = 35$

oder mit der Formel für ungeordnete Sichproben mit Zurücklegen:

$$z = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = 35$$

Es wäre falsch, hier $P(A) = \dfrac{z_1}{z} = \dfrac{5}{35} = \dfrac{1}{7}$ zu verwenden, da die Elementarereignisse von Ω nicht gleichwahrscheinlich sind (in dieser Form kein Laplace-Experiment).

Ω ist eine Vergröberung von Ω_r. Z.B. entsprechen die Elemente 125, 152, 215, 251, 512 und 521 aus Ω_r nur dem einen Element 11001 aus Ω. Dem Element $21000 \in \Omega$ entsprechen die Elemente 112, 121, 211 aus Ω_r, dagegen hat $30000 \in \Omega$ nur ein Gegenstück $111 \in \Omega_r$. Es folgt

$$p(30000) = p_r, \quad p(21000) = 3p_r, \quad p(11100) = 6p_r$$

Mit $A = \{30000, 03000, 00300, 00030, 00003\}$ folgt dann $P(A) = 5p_r = \dfrac{1}{25}$

11. (a) Wir denken uns die Kugeln nummeriert, z.B. die roten Kugeln von 1 bis a und die blauen von $a+1$ bis $n = a+b$. Da es nicht auf die Reihenfolge ankommt und ohne Zurücklegen gezogen wird („mit einem Griff"), gibt es insgesamt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, k Kugeln aus den n Kugeln zu ziehen. Ein Zug mit genau x blauen Kugeln hat $k-x$ rote Kugeln. Es gibt $\binom{a}{k-x}$ Möglichkeiten, $k-x$ rote Kugeln aus a roten Kugeln zu ziehen und $\binom{b}{x}$ Möglichkeiten, x blaue Kugeln aus b blauen Kugeln zu ziehen. Insgesamt gibt es also $\binom{a}{k-x}\binom{b}{x}$ Möglichkeiten für einen Zug mit b blauen Kugeln.

Andere Herleitung:

Man stelle sich ein Baumdiagramm des k-stufigen Versuchs vor. Für einen Pfad mit $k-x$ roten und x blauen Kugeln ist die Wahrscheinlichkeit

$$p=\frac{a\cdot(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-k+x+1)}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+x+1)}\cdot\frac{b\cdot(b-1)\cdot\ldots\cdot(b-x+1)}{(n-k+x)\cdot(n-k+x-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}=$$
$$=\frac{a!}{(a-k+x)!}\cdot\frac{b!}{(b-x)!}\cdot\frac{(n-k)!}{n!}$$

Die Zahl der Pfade mit x blauen Kugeln ist gleich der Zahl der Möglichkeiten, x ununterscheidbare blaue Kugeln auf k Plätze zu verteilen, also $\binom{k}{x}$. Damit gilt

$$P(x)=p\cdot\binom{k}{x}=\frac{a!}{(a-k+x)!}\cdot\frac{b!}{(b-x)!}\cdot\frac{(n-k)!}{n!}\cdot\frac{k!}{x!(k-x)!}=$$
$$=\frac{a!}{(k-x)!(a-k+x)!}\cdot\frac{b!}{x!(b-x)!}\cdot\frac{k!(n-k)!}{n!}=\frac{\binom{a}{k-x}\binom{b}{x}}{\binom{a+b}{k}}$$

(b) $P(x)=\frac{\binom{10}{6-x}\binom{4}{x}}{\binom{14}{6}}$, $\quad P(0)=\frac{\binom{10}{6}\binom{4}{0}}{\binom{14}{6}}=\frac{70}{1001}=6{,}993\%$

$P(1)=\frac{\binom{10}{5}\binom{4}{1}}{\binom{14}{6}}=\frac{336}{1001}=33{,}566\%$, $\quad P(2)=\frac{\binom{10}{4}\binom{4}{2}}{\binom{14}{6}}=\frac{420}{1001}=41{,}598\%$

$P(3)=\frac{\binom{10}{3}\binom{4}{3}}{\binom{14}{6}}=\frac{160}{1001}=15{,}984\%$, $\quad P(4)=\frac{\binom{10}{2}\binom{4}{4}}{\binom{14}{6}}=\frac{15}{1001}=1{,}499\%$

12. $52^k\leqq n \quad\Longrightarrow\quad k\ln 52\leqq\ln n \quad\Longrightarrow\quad k\leqq\frac{\ln n}{\ln 52}$

(a) $n_1=365{,}25\cdot 24\cdot 60=525969 \quad\Longrightarrow\quad k\leqq\frac{\ln n_1}{\ln 52}=3{,}33 \quad\Longrightarrow\quad k_{\max}=3$

(b) $n_2=1000n_1=525\,969\,000 \quad\Longrightarrow\quad k\leqq\frac{\ln n_2}{\ln 52}=5{,}08 \quad\Longrightarrow\quad k_{\max}=5$

(c) $n_3=13{,}7\cdot 10^9 n_1=7{,}206\cdot 10^{15} \quad\Longrightarrow\quad k\leqq\frac{\ln n_3}{\ln 52}=9{,}24 \quad\Longrightarrow\quad k_{\max}=9$

13. (a) Geordnet mit Zurücklegen: $n=26^5=11\,881\,376$

(b) Geordnet ohne Zurücklegen: $n=\frac{26!}{(26-5)!}=26\cdot 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22=7\,893\,600$

(c) Ungeordnet ohne Zurücklegen: $n = \binom{49}{6} = 13\,983\,816$

(d) Geordnet ohne Zurücklegen (Permutation): $n = 10! = 3\,628\,800$

(e) Geordnet mit Zurücklegen: $n = 3^{10} = 59\,049$

(f) Ungeordnet mit Zurücklegen: $n = \binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10} = \binom{12}{2} = 66$

Sind x_1, x_2 und x_3 die Besetzungszahlen, dann kann man das Problem auch so formulieren:

Wie viele Lösungen aus $\mathbb{N}_0$ hat die Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 10$?

(g) Das ist keine unserer Grundaufgaben. Anders formuliert lautet das Problem:

Wie viele Lösungen aus $\mathbb{N}_0$ hat die Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ mit $x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$? Für dieses Problem gibt es keine einfache geschlossene Formel. Wir lösen es durch das Hinschreiben aller Möglichkeiten für (x_1, x_2, x_3): (0,0,10), (0,1,9), (0,2,8), (1,1,8), (0,3,7), (1,2,7), (0,4,6), (1,3,6), (2,2,6), (0,5,5), (1,4,5), (2,3,5), (2,4,4), (3,3,4), also 14 Möglichkeiten.

Weiterführende Lektüre: Im Netz nach *Partiton Function* suchen (z.B. auf den Seiten von WolframMathWorld). Mit der Rundungsfunktion oder nint-Funktion (*nearest integer*)

$$[x] = \text{nächstgelegene ganze Zahl von } x,$$

wobei Komma-Fünf-Zahlen auf die nächste *gerade* Zahl gerundet werden ([1,5] = 2, [2,5] = 2, [3,5] = 4) und der Abrundfunktion oder floor-Funktion

$$\lfloor x \rfloor = \text{nächstkleinere ganze Zahl von } x$$

($\lfloor -2,3 \rfloor = -3$, $\lfloor 2,3 \rfloor = 2$) hat die Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = n$ mit $x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$ genau

$$1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left[\frac{n^2}{12} \right]$$

Lösungen in $\mathbb{N}_0$. Für $n = 10$ ergibt sich

$$1 + \left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor + \left[\frac{10^2}{12} \right] = 1 + \lfloor 5 \rfloor + [8{,}\overline{3}] = 1 + 5 + 8 = 14$$

3.2 Bernoulli-Experiment und -Kette

1. (a) $n = 12$; $p_{\frac{1}{6}}(Z > 3) = 1 - \Sigma_{i=0}^{3} B(12, \frac{1}{6}, i) = 1 - 0,87482191 \approx 12,5\%$

   (b) $n = 12$; $p_{0,25}(Z \le 3) = \Sigma_{i=0}^{3} B(12, 0,25, i) = 0,64877 \approx 64,9\%$

2. (a) i. Bedingung $x + 5 = 5$, also (0|5), (1|4), (2|3), (3|2), (4|1), (5|0)

ii. $18 + 17 = 35$

(b) i. $p((4|0)) = (\frac{1}{2})^4 = 6,25\%$, $p((8|1)) = 9 \cdot (\frac{1}{2})^9 = 1,76\%$, $p((2|2)) = 3 \cdot (\frac{1}{2})^4 = 18,8\%$

ii. $p_{nichtaufKO-Achse} = 1 - 2 \cdot (\frac{1}{2})^{20} = 99,9998\%$

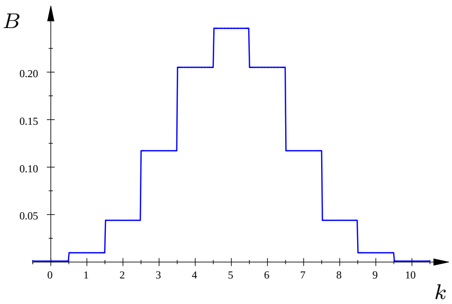
3.3 Binomialkoeffizient, Binomialverteilung

1. (a) $B(n; \frac{1}{2}; k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{n-k}} = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$

$B(n; \frac{1}{2}; n-k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n-k}} \cdot \frac{1}{2^k} = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$

$B(n; \frac{1}{2}; k) = B(n; \frac{1}{2}; n-k) \quad \Longrightarrow$

$B(n; \frac{1}{2}; k)$ ist symmetrisch zur Geraden $k = \frac{n}{2}$



(b) Mittlere Säule: $B(n; \frac{1}{2}; \frac{n}{2}) = \binom{n}{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{n!}{2^n \cdot (\frac{n}{2})!^2}$

Säulen daneben:

$$B(n; \tfrac{1}{2}; \tfrac{n}{2} - 1) = B(n; \tfrac{1}{2}; \tfrac{n}{2} + 1) = \binom{n}{\frac{n}{2} + 1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{n!}{2^n \cdot (\frac{n}{2} + 1)! \cdot (\frac{n}{2} - 1)!} =$$

$$= \frac{n!}{2^n \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) \cdot \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{n}{2} - 2\right) \cdot \ldots \cdot 1} =$$

$$= \frac{\frac{n}{2} \cdot n!}{\left(\frac{n}{2} + 1\right) \cdot 2^n \cdot \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{n}{2} - 2\right) \cdot \ldots \cdot 1} =$$

$$= \frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2} + 1} \cdot \frac{n!}{2^n \cdot (\frac{n}{2})!^2} = \underbrace{\frac{n}{n+2}}_{<1} \cdot B(n; \tfrac{1}{2}; \tfrac{n}{2}) < B(n; \tfrac{1}{2}; \tfrac{n}{2})$$

(c) $P(\text{„mindestens einmal K“}) = 1 - P(\text{„kein K“}) = 1 - \frac{1}{2^n} \geqq 0{,}9$

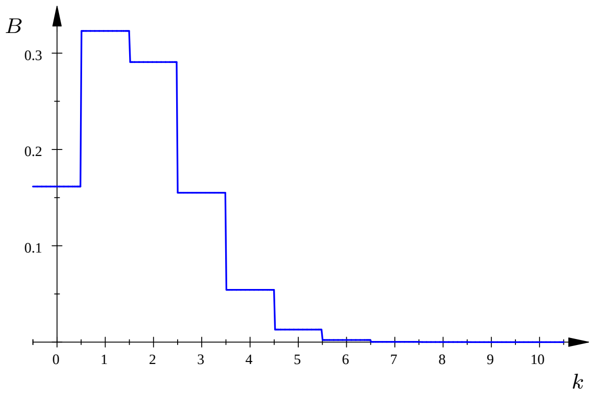
$\frac{1}{2^n} \leqq 0{,}1 \quad \Longrightarrow \quad 2^n \geqq 10 \quad \Longrightarrow \quad n \ln 2 \geqq \ln 10 \quad \Longrightarrow \quad n \geqq \frac{\ln 10}{\ln 2} = 3{,}32$

Die Münze muss mindestens viermal geworfen werden.

$$P(\text{„mindestens einmal K“}) = 1 - \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16} = 93{,}75\%$$

2. (a)

k	$B(10, \frac{1}{6}, k)$
0	16,15%
1	32,30%
2	29,07%
3	15,50%
4	5,43%
5	1,30%
6	0,22%
7	0,025%
8	$1{,}86 \cdot 10^{-3}$ %
9	$8{,}27 \cdot 10^{-5}$ %
10	$1{,}65 \cdot 10^{-6}$ %



(b) $p = \dfrac{1}{6}$, $q = 1 - p = \dfrac{5}{6}$

$P(\text{„mindestens einmal 6“}) = 1 - P(\text{„keine 6“}) = 1 - q^n \geqq 0{,}9$

$q^n \leqq 0{,}1 \quad \Longrightarrow \quad n \geqq \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln \frac{5}{6}} = 12{,}6$

Der Würfel muss mindestens 13-mal geworfen werden.

$$P(\text{„mindestens einmal 6“}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{13} = 90{,}65\%$$

3. (a) $p = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$, $q = 1 - p = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$, $p_1 = p^{15}q^5 = \dfrac{4^{15}}{5^{20}} = 1{,}126 \cdot 10^{-5}$

(b) $p_2 = \dbinom{20}{15} p^{15}q^5 = \underbrace{\dbinom{20}{5}}_{15504} p^{15}q^5 = \dfrac{15504 \cdot 4^{15}}{5^{20}} = 17{,}46\%$

(c) $p_{\mathrm{T}} = p^5 = \dfrac{4^5}{5^5} = \dfrac{1024}{3125} = 0{,}32768 = 32{,}768\%$

$q_{\mathrm{T}} = 1 - p_{\mathrm{T}} = \dfrac{2101}{3125} = 0{,}67232 = 67{,}232\%$

$P(\text{„kein Treffer“}) = q_{\mathrm{T}}^n, \quad P(\text{„mindestens ein Treffer“}) = 1 - q_{\mathrm{T}}^n$

$$1 - q_{\mathrm{T}}^n \geqq 0{,}95 \quad \Longrightarrow \quad q_{\mathrm{T}}^n \leqq 0{,}05 \quad \Longrightarrow \quad n \geqq \frac{\ln 0{,}05}{\ln q_{\mathrm{T}}} = 7{,}55$$

Lena muss mindestens acht Serien schießen.

4. $p = \dfrac{1}{\binom{49}{6}} = \dfrac{1}{13983816} = 7{,}151 \cdot 10^{-8}, \quad q = 1 - p = \dfrac{13983815}{13983816} = 0{,}9999999285$

$n \geqq \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln q} = 32\,198\,925{,}11$, also mindestens 32 198 926-mal.

5. (a) Es gibt $z = 5^{10} = 9\,765\,625$ verschiedene Möglichkeiten, also ist

$$p = \frac{1}{9\,765\,625} = 1{,}024 \cdot 10^{-7}$$

(b) $q = 1 - p = \dfrac{9\,765\,624}{9}765\,625 = 0{,}999\,999\,8976 \quad \Longrightarrow$

$$p_1 = 1 - q^{10000} = 1{,}0235 \cdot 10^{-3} = 0{,}10235\%$$

(c) $1 - q^n \geqq 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad q^n \leqq 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad n \geqq \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln q} = 6\,769\,015{,}09$

6. Trefferwahrscheinlichkeit: $p = \dfrac{1}{8}, \quad q = 1 - p = \dfrac{7}{8}$

(a) $p_1 = p^3 q^7 = 7{,}67 \cdot 10^{-4}$

(b) $p_2 = B(10; \frac{1}{8}; 3) = \dbinom{10}{3} p^3 q^7 = 0{,}0920 = 9{,}20\%$

(c) $p_3 = 1 - B(10; \frac{1}{8}; 0) = 1 - \dbinom{10}{0} p^0 q^{10} = 1 - q^{10} = 0{,}7369 = 73{,}69\%$

(d) $P(\text{„mindestens 3 Treffer“}) = 1 - P(\text{„höchstens 2 Treffer“} \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} p_4 &= B(10; \tfrac{1}{8}; 3) + B(10; \tfrac{1}{8}; 4) + \ \ldots\ + B(10; \tfrac{1}{8}; 10) = \\ &= 1 - B(10; \tfrac{1}{8}; 0) - B(10; \tfrac{1}{8}; 1) - B(10; \tfrac{1}{8}; 2) = \\ &= 1 - q^{10} - \binom{10}{1} p^1 q^9 - \binom{10}{2} p^2 q^8 = 0{,}1195 = 11{,}95\% \end{aligned}$$

(e) $1 - q^n \geqq 0{,}9 \quad \Longrightarrow \quad q^n \leqq 0{,}1 \quad \Longrightarrow \quad n \geqq \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln q} = 17{,}24$, also mindestens 18-mal.

(f) $1 - q^n - \dbinom{n}{1} p^1 q^{n-1} \geqq 0{,}9 \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{q^n + npq^{n-1}}_{f(n)} \leqq 0{,}1$

Diese Gleichung ist für uns nur durch Probieren lösbar:

$f(29) = 0{,}107$ und $f(30) = 0{,}0962 \quad \Longrightarrow \quad$ mindestens 30 Karten

(g) Es gibt 9 Möglichkeiten für die Lage des Trefferpaars. Die Gewinnwahrscheinlichkeit des Spielers ist also

$$p_{\mathrm{g}} = 9p^2 q^8 = 0{,}04832 = 4{,}832\%$$

E sei der Einsatz pro Spiel. Von N Spielen gewinnt die Bank $(1 - p_{\mathrm{g}})N$ Spiele und nimmt somit $(1 - p_{\mathrm{g}})NE$ ein. Andererseits verliert die Bank $p_{\mathrm{g}}N$ Spiele und zahlt damit $20p_{\mathrm{g}}NE$ aus. Die Rendite der Bank ist also

$$\frac{(1 - p_{\mathrm{g}})NE - 20p_{\mathrm{g}}NE}{NE} = 1 - 21p_{\mathrm{g}} = -1{,}47\%$$

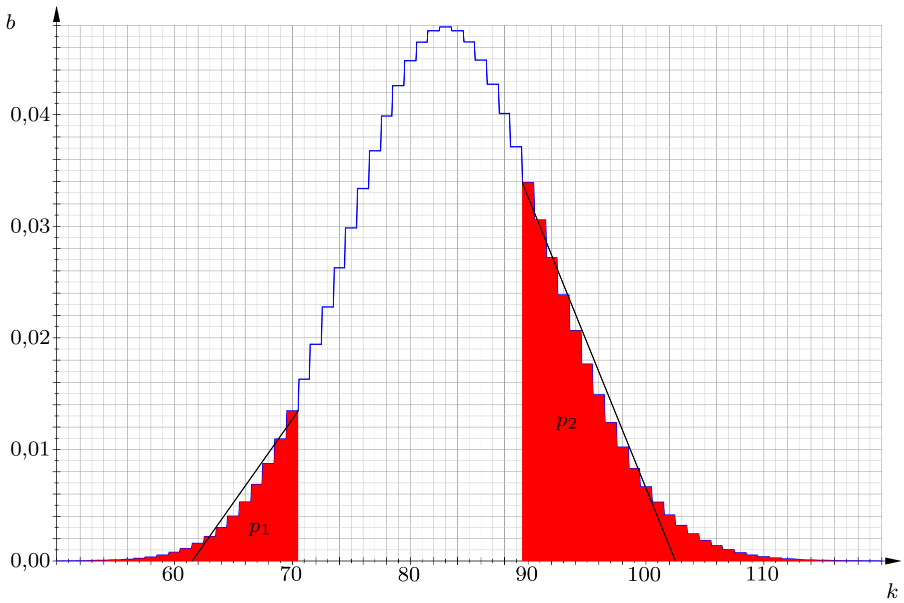
Die Bank dürfte nur das 19-fache des Einsatzes auszahlen, dann wäre die Rendite $1 - 20p_{\mathrm{g}} = 3{,}36\%$

7. (a) $p = \dfrac{1}{6} \quad \Longrightarrow \quad q = 1 - p = \dfrac{5}{6}, \quad 1 - q^n \geqq 0{,}9999 \quad \Longrightarrow \quad q^n \leqq 10^{-4}$

$$n \ln q \leqq -4 \ln 10 \quad \Longrightarrow \quad n \geqq \frac{-4 \ln 10}{\ln q} = 50{,}52 \quad \Longrightarrow \quad n \geqq 51$$

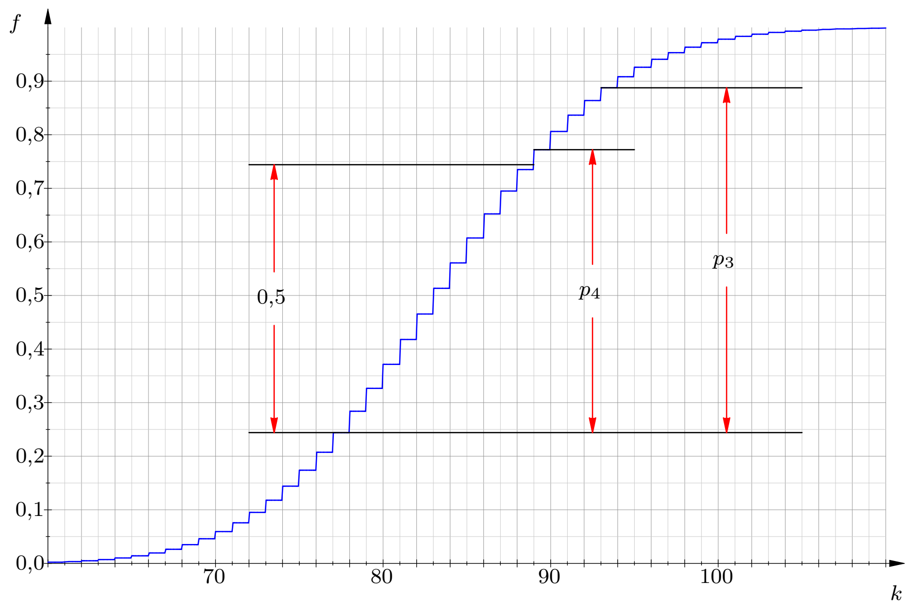
(b) $p_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{70} B\left(500, \frac{1}{6}, k\right) \approx \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 0{,}0135 \approx 6\%$

$p_2 = \displaystyle\sum_{k=90}^{500} B\left(500, \frac{1}{6}, k\right) \approx \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 0{,}034 \approx 22\%$



(c) $p_3 = \displaystyle\sum_{k=78}^{93} B\left(500, \frac{1}{6}, k\right) = F_{\frac{1}{6}}^{500}(93) - F_{\frac{1}{6}}^{500}(77) = f(93) - f(77) \approx 64\%$

$p_4 = f(m) - f(77) \geqq 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad f(m) \geqq f(77) + 0{,}5 \approx 0{,}75 \quad \Longrightarrow \quad m = 89$



3.4 Anwendungen der Binomialverteilung, u. a. einseitiger Signifikanztest

1. (a) 98%
   (b) 79%

2. (a) Die erwarteten Trefferzahlen sind $E_s = 200p_s = 140$ und $E_l = 200p_l = 160$.

$$\begin{aligned}&\text{Entscheidung für H}_s\text{:} && X \in \{0, 1, ..., k\}\\ &\text{Entscheidung für H}_l\text{:} && X \in \{k+1, k+2, ..., 200\}\end{aligned}$$

   mit k ungefähr 150.

   (b) Liegender Anschlag, aber Entscheidung für H_s:

$$p = 0{,}8 \text{ und } X \leqq k \quad \Longrightarrow \quad F_s = F_{0,8}^{200}(k)$$

   Stehender Anschlag, aber Entscheidung für H_l:

$$p = 0{,}7 \text{ und } X > k \quad \Longrightarrow \quad F_l = 1 - F_{0,7}^{200}(k)$$

k	F_s(in %)	F_l(in %)	$F_s + F_l$(in %)
149	3,45	6,95	10,4
150	4,94	5,06	10,0
151	6,90	3,59	10,5

   Die Entscheidungsregel mit $k = 150$ minimiert also die Fehlersumme.

4 Geometrie: Geraden und Ebenen im Raum

4.1 Lineare Abhängigkeit von Vektoren

1. (a) $\vec{b} = \dfrac{3}{2}\vec{a} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig.

   (b) $\dfrac{4}{-1{,}6} = -\dfrac{5}{2} \neq \dfrac{-3{,}6}{\frac{7}{5}} = -\dfrac{18}{7} \quad \Longrightarrow \quad \vec{e}$ und $\vec{f}$ sind linear unabhängig.

   (c) Da $\vec{x} \nparallel \vec{a} \| \vec{b}$ mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht möglich.
   Da $\vec{e}$ und $\vec{f}$ linear unabhängig sind, gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\vec{x} = \lambda\vec{e} + \mu\vec{f} \quad \Longrightarrow$

$$
\begin{array}{rrl}
 & -1{,}6\lambda + 4\mu = 8{,}8 & (1) \\
 & 1{,}4\lambda - 3{,}6\mu = -8 & (2) \\
\hline
0{,}9 \cdot (1) + (2): & -0{,}04\lambda = -0{,}08 & (3) \\
 & \lambda = 2 & (4) \\
(4) \text{ in } (1) & -3{,}2 + 4\mu = 8{,}8 & (5) \\
 & \mu = 3 & \\
 & \vec{x} = 2\vec{e} + 3\vec{f} &
\end{array}
$$

2. (a) Aus $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{o}$ folgt

$$
\begin{array}{rrl}
 & 4\lambda - 5\mu + 21\nu = 0 & (1) \\
 & -3\lambda - 2\mu - 5\nu = 0 & (2) \\
 & \lambda + 3\mu - 3\nu = 0 & (3) \\
\hline
(3): & \lambda + 3\mu - 3\nu = 0 & (4) \\
(2) + 3 \cdot (3): & 7\mu - 14\nu = 0 & (5) \\
(1) - 4 \cdot (3) & -17\mu + 33\nu = 0 & (6) \\
\hline
(4): & \lambda + 3\mu - 3\nu = 0 & (7) \\
(5): & 7\mu - 14\nu = 0 & (8) \\
17 \cdot (5) + 7 \cdot (6): & -7\nu = 0 & (9)
\end{array}
$$

$\Longrightarrow \quad \lambda = \mu = \nu = 0$, also sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig.

(b) Aus $\lambda\vec{e} + \mu\vec{f} + \nu\vec{g} = \vec{o}$ folgt

$$\begin{array}{rrr} & 2\lambda + \mu + 9\nu = 0 & (1) \\ & \lambda - \mu + 12\nu = 0 & (2) \\ & \lambda + 2\mu - 3\nu = 0 & (3) \\ \hline (3): & \lambda + 2\mu - 3\nu = 0 & (4) \\ (2)-(3): & -3\mu + 15\nu = 0 & (5) \\ (1) - 2\cdot(3) & -3\mu + 15\nu = 0 & (6) \\ \hline (5) \text{ bzw. } (6): & \mu = 5\nu & (7) \\ (7) \text{ in } (1): & \lambda = -7\nu & (8) \end{array}$$

Z.B. für $\nu = 1$ folgt $-7\vec{e} + 5\vec{f} + \vec{g} = \vec{o}$, also sind $\vec{e}$, $\vec{f}$ und $\vec{g}$ linear abhängig.

(c) Da $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind, gibt es $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ mit $\vec{x} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} \quad \Longrightarrow$

$$\begin{array}{rrr} & 4\lambda - 5\mu + 21\nu = -8 & (1) \\ & -3\lambda - 2\mu - 5\nu = 1 & (2) \\ & \lambda + 3\mu - 3\nu = 2 & (3) \\ \hline (3): & \lambda + 3\mu - 3\nu = 2 & (4) \\ (2) + 3\cdot(3): & 7\mu - 14\nu = 7 & (5) \\ (1) - 4\cdot(3) & -17\mu + 33\nu = -16 & (6) \\ \hline (4): & \lambda + 3\mu - 3\nu = 2 & (7) \\ (5): & 7\mu - 14\nu = 7 & (8) \\ 17\cdot(5) + 7\cdot(6): & -7\nu = 7 & (9) \\ & \nu = -1 & (10) \\ (10) \text{ in } (8): & \mu = -1 & (11) \\ (10) \text{ und } (11) \text{ in } (7): & \lambda = 2 & \end{array}$$

$$\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$$

Obwohl $\vec{e}$, $\vec{f}$ und $\vec{g}$ linear abhängig sind, könnte $\vec{x}$ zu $\vec{e}$, $\vec{f}$ und $\vec{g}$ komplanar sein. Wir setzen einfach an: $\vec{x} = \lambda\vec{e} + \mu\vec{f} + \nu\vec{g}$:

$$\begin{array}{rll} & 2\lambda + \mu + 9\nu = -8 & (1) \\ & \lambda - \mu + 12\nu = 1 & (2) \\ & \lambda + 2\mu - 3\nu = 2 & (3) \\ \hline (3): & \lambda + 2\mu - 3\nu = 2 & (4) \\ (2)-(3): & -3\mu + 15\nu = -1 & (5) \\ (1) - 2\cdot(3) & -3\mu + 15\nu = -12 & (6) \end{array}$$

(5) und (6) sind nicht gleichzeitig erfüllbar, das Gleichungssystem hat keine Lösung, $\vec{x}$ ist nicht als Linearkombination von $\vec{e}$, $\vec{f}$ und $\vec{g}$ darstellbar.

3. (a)

$$\begin{array}{rll} & 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 7 & (1) \\ & -4x_1 + 31x_2 + 7x_3 = -9 & (2) \\ \hline 2\cdot(1)+(2): & 25x_2 + 5x_3 = 5 & (3) \\ (3):5: & 5x_2 + x_3 = 1 & (4) \\ \text{wir wählen}: & x_2 = \lambda & (5) \\ (5) \text{ in } (4): & x_3 = 1 - 5\lambda & (6) \\ (5) \text{ und } (6) \text{ in } (1): & x_1 = 4 - \lambda & (6) \end{array}$$

$$\Longrightarrow \qquad L = \left\{ \vec{x} \,\middle|\, \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

(b)

$$\begin{array}{rll} & 14x_1 - 21x_2 - 7x_3 = 49 & (1) \\ & -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 = -24 & (2) \\ \hline (1):7: & 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 7 & (3) \\ (2):3: & -2x_1 + 3x_2 + x_3 = -8 & (4) \\ \hline (3)+(4): & 0 = -1 & (5) \end{array}$$

$$\text{Widerspruch} \quad \Longrightarrow \quad L = \emptyset$$

(c)

$$\begin{array}{rrl}
 & 14x_1 - 21x_2 - 7x_3 = 49 & (1) \\
 & -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 = -21 & (2) \\
\hline
(1) : 7 : & 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 7 & (3) \\
(2) : (-3) : & 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 7 & (4) \\
\hline
(3) + (4) : & 0 = 0 & (5)
\end{array}$$

Die beiden Gleichungen (3) und (4) sind identisch, die Lösungsmenge L des Systems ist also gleich der Lösungsmenge L_1 von (1) bzw. (3). Interpretiert man die Elemente von L als Punkte im $\mathbb{R}^3$, dann ist L die durch (3) beschriebene Ebene mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und z.B. dem Aufpunkt A (3,5|0|0).

4. (a)

$$\begin{array}{rrl}
 & 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 15 & (1) \\
 & -2x_1 + 2x_2 + x_3 = -13 & (2) \\
 & 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 16 & (3) \\
\hline
(1) : & 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 15 & (4) \\
2 \cdot (1) + 5 \cdot (2) : & 16x_2 + 3x_3 = -35 & (5) \\
3 \cdot (1) - 5 \cdot (3) : & 14x_2 + 7x_3 = -35 & (6) \\
\hline
(4) : & 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 15 & (7) \\
(5) : & 16x_2 + 3x_3 = -35 & (8) \\
7 \cdot (5) - 8 \cdot (6) : & -35x_3 = 35 & (9) \\
\hline
(9) \quad \Longrightarrow & x_3 = -1 & (10) \\
(10) \text{ in } (8) : & x_2 = -2 & (11) \\
(10) \text{ und } (11) \text{ in } (7) : & x_1 = 4 &
\end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad L = \{(4|-2|-1)\}$$

(b)

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - x_3 &= 15 && (1) \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -13 && (2) \\ -15x_1 - 9x_2 + 3x_3 &= -45 && (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1): && 5x_1 + 3x_2 - x_3 &= 15 && (4) \\ 2\cdot(1) + 5\cdot(2): && 16x_2 + 3x_3 &= -35 && (5) \\ (3):(-3): && 5x_1 + 3x_2 - x_3 &= 15 && (6) \end{aligned}$$

(4) und (6) identisch $\Longrightarrow$ (6) fällt weg

$$\begin{aligned} \text{wir wählen }: && x_3 &= \lambda && (7) \\ (7) \text{ in } (5): && x_2 &= -\frac{35}{16} - \frac{3\lambda}{16} && (8) \\ (7) \text{ und } (8) \text{ in } (4): && x_1 &= \frac{69}{16} + \frac{5\lambda}{16} && (9) \end{aligned}$$

$$\mu = \frac{\lambda}{16} \Longrightarrow \qquad L = \left\{ \vec{x} \middle| \vec{x} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 69 \\ -35 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 16 \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

(c)

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - x_3 &= 15 && (1) \\ 10x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 30 && (2) \\ -15x_1 - 9x_2 + 3x_3 &= -45 && (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1): && 5x_1 + 3x_2 - x_3 &= 15 && (4) \\ (2):2: && 5x_1 + 3x_2 - x_3 &= 15 && (5) \\ (3):(-3): && 5x_1 + 3x_2 - x_3 &= 15 && (6) \end{aligned}$$

Alle drei Gleichungen sind identisch, die Lösungsmenge L des Systems ist also gleich der Lösungsmenge L_1 von (1). Interpretiert man die Elemente von L als Punkte im $\mathbb{R}^3$, dann ist L die durch (1) beschriebene Ebene mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und z.B. dem Aufpunkt A $(0|0|-15)$.

(d)

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - x_3 &= 15 && (1) \\ 10x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 30 && (2) \\ -15x_1 - 9x_2 + 3x_3 &= -42 && (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1): && 5x_1 + 3x_2 - x_3 &= 15 && (4) \\ (2):2: && 5x_1 + 3x_2 - x_3 &= 15 && (5) \\ (3):(-3): && 5x_1 + 3x_2 - x_3 &= 14 && (6) \end{aligned}$$

$$(5) - (6): \qquad 0 = 1$$

$$\text{Widerspruch} \quad\Longrightarrow\quad L = \emptyset$$

4.2 Geraden und Ebenen

1. (a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

   (b) $\overrightarrow{R} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{R}\,(5|1{,}5|3{,}5)$

   $\overrightarrow{S} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{S}\,(-1|9|8)$

   $\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -11 \\ -4 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{T}\,(15|-11|-4)$

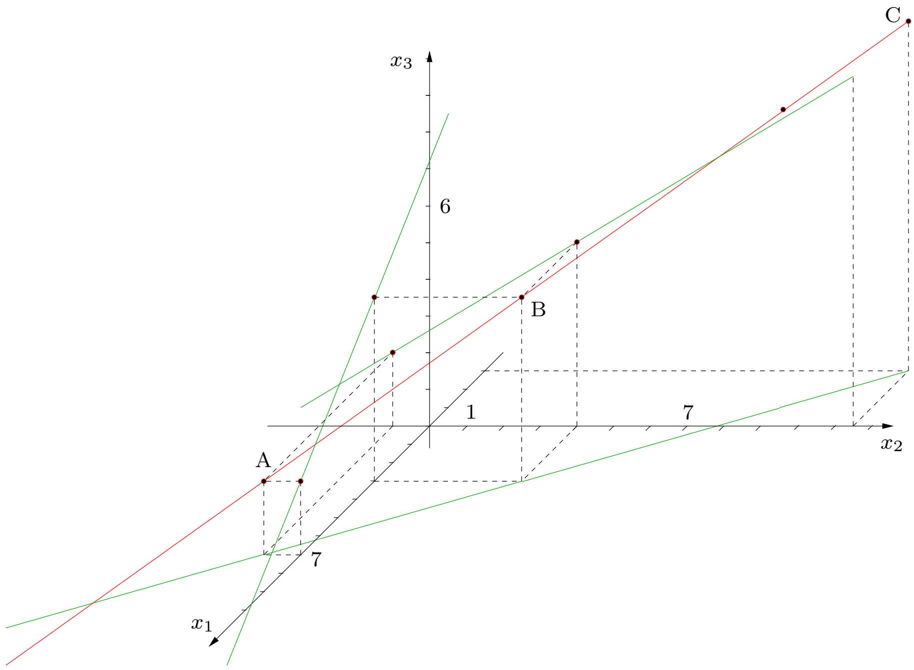
   (c) $\mathrm{C} \in g \quad\Longrightarrow\quad \begin{pmatrix} -3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad 7 - 4\lambda = -3 \quad\Longrightarrow\quad \lambda = \frac{5}{2}$

   $$\overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11{,}5 \\ 9{,}5 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{C}\,(-3|11{,}5|9{,}5)$$

   (d) $s_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (e) $x_1 = 7 - 4\lambda \quad\Longrightarrow\quad \lambda = \frac{7}{4} - \frac{1}{4}x_1, \quad x_2 = -1 + 5\lambda = \frac{31}{4} - \frac{5}{4}x_1$

   (f)



2. $\frac{20}{\sqrt{464}}y + \frac{8}{\sqrt{464}}z - \frac{44}{\sqrt{464}} = 0$

3. (a) $\frac{1}{2}\sqrt{866}$

   (b) Parallele zu AB durch c, $g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

   (c) $h : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} \text{-0,5} \\ \text{-2,5} \\ \text{0,5} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \text{-2,75} \\ \text{-7,75} \\ \text{2,75} \end{pmatrix}$

4. (a) 75°

   (b) $s : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{-40} \\ \text{-79} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$

   (c) Mittelpunkt liegen auf Gerade senkrecht zurx_1x_2-Ebene

   (d) 1. Fall: $a_1 = 0$, $E_1 : 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 81 = 0$
   2. Fall: $a_2 = -1,6$, $E_2 : 5,6x_1 - 0,8x_2 + 7x_3 - 74,6 = 0$

5. (a) z. B. $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$

   (b) $S_1(2|0|0)$, $S_2(0|4|0)$, $S_3(0|0|6)$, $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ \text{-6} \end{pmatrix}$

(c) $a = \frac{1}{8}$, $g_{\frac{1}{8}}$ liegt in E

(d) ebenes Geradenbüschel, $g_a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. (a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = -9$

$$E: \quad \vec{n}(\vec{x} - \vec{a}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad E: \quad -6x_1 + x_2 + 9x_3 + 9 = 0$$

(b) Die Achsenpunkte von E sind $\mathrm{A}_1\,(-10|0|0)$, $\mathrm{A}_2\,(0|4|0)$ und $\mathrm{A}_3\,\left(0\middle|0\middle|\frac{20}{3}\right)$. Mögliche Richtungsvektoren:

$$\vec{u}\,' = \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ besser } \vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\,' = \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}, \text{ besser } \vec{v} = \frac{3}{4}\vec{v}\,' = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufpunkt z.B. A_2: $\quad E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

4.3 Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

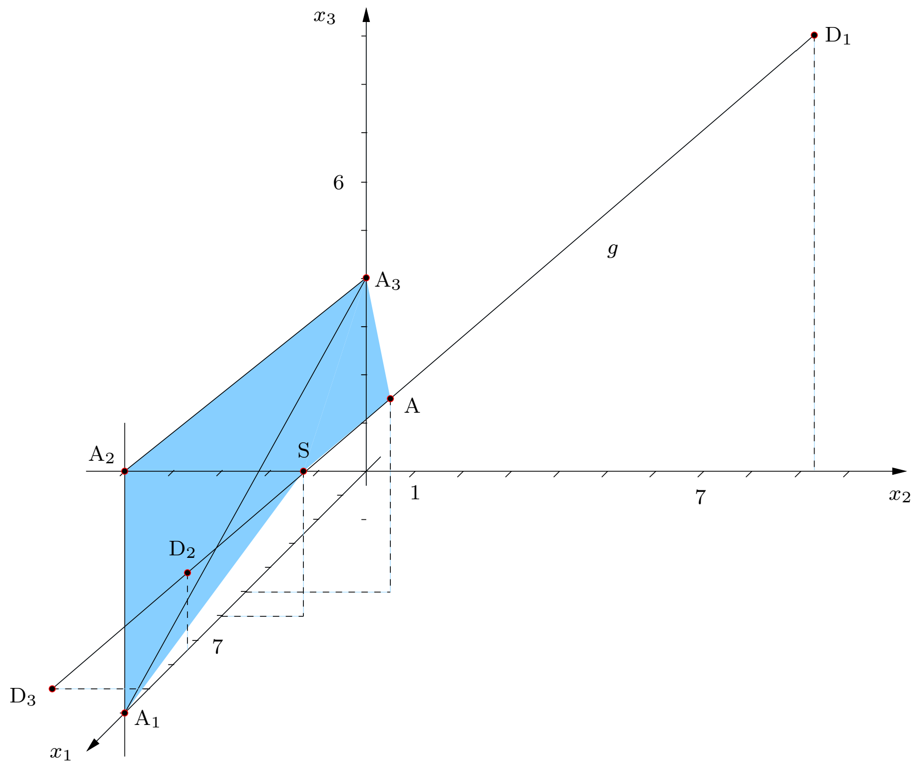
1. (a) $E: \quad \frac{x_1}{10} - \frac{x_2}{5} + \frac{x_3}{4} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{A}_1\,(10|0|0)\,,\ \mathrm{A}_2\,(0|-5|0)\,,\ \mathrm{A}_3\,(0|0|4)$

$$x_2x_3\text{-Ebene}: 5 - 4\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{5}{4} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{D}_1\left(0\middle|\frac{37}{4}\middle|9\right) = \mathrm{D}_3\,(0|9{,}25|9)$$

$$x_1x_3\text{-Ebene}: 3 + 5\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{5} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{D}_2\left(\frac{37}{5}\middle|0\middle|\frac{8}{5}\right) = \mathrm{D}_2\,(7{,}4|0|1{,}6)$$

$$x_1x_2\text{-Ebene}: 4 + 4\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{D}_3\,(9|-2|0)$$

(b)



(c) Mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $d = 20$ gilt

$$E: \ \vec{n}\vec{x} - d = 0 \text{ und } g: \ \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{v} \quad \Longrightarrow \quad \vec{n}\vec{a} + \lambda\vec{n}\vec{v} = d$$

$$\lambda = \frac{d - \vec{n}\vec{a}}{\vec{n}\vec{v}} = \frac{20 - 18}{-8} = -\frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{S}} = \vec{s} = \vec{a} - \frac{1}{4}\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{7}{4} \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. (a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\vec{n}_1{}' = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -8 & 5 & 6 \\ -4 & 9 & 4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ 8 \\ -52 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -17 \\ 4 \\ 26 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -17 \\ 4 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_2{}' = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -8 & 5 & -6 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 42 \\ -27 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Mit $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ folgt $\vec{n}_1\vec{a} = -45$ und $\vec{n}_2\vec{a} = -14$ und damit

$$\vec{n}_1(\vec{x} - \vec{a}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad E_1: \ -17x_1 + 4x_2 - 26x_3 + 45 = 0$$

$$\vec{n}_2(\vec{x} - \vec{a}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad E_2: \ 2x_1 + 14x_2 - 9x_3 + 14 = 0$$

(b) Achsenpunkte von E_1: $\mathrm{A}_{11}\left(\frac{45}{17}\middle|0\middle|0\right)$, $\mathrm{A}_{12}\left(0\middle|-\frac{45}{4}\middle|0\right)$, $\mathrm{A}_{13}\left(0\middle|0\middle|\frac{45}{26}\right)$

Achsenpunkte von E_2: $\mathrm{A}_{21}\,(-7|0|0)$, $\mathrm{A}_{22}\,(0|-1|0)$, $\mathrm{A}_{23}\left(0\middle|0\middle|\frac{14}{9}\right)$

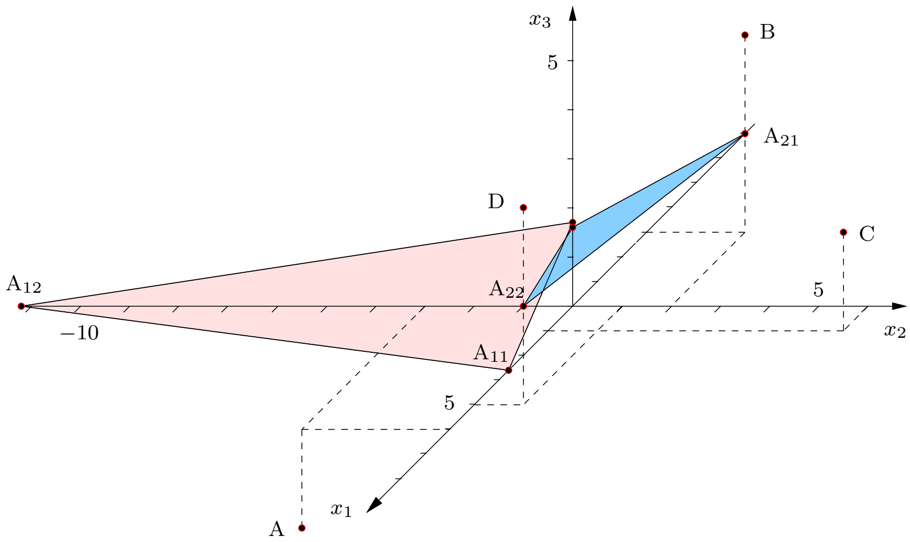
(c) $g_1: \quad -17x_1 + 4x_2 + 45 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \dfrac{17}{4}x_1 - \dfrac{45}{4}$

$g_2: \quad 2x_1 + 14x_2 + 14 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = -\dfrac{1}{7}x_1 - 1$

(d) $-17 \cdot 5 + 4 \cdot 4 - 26f_3 + 45 = 0 \quad \Longrightarrow \quad f_3 = -\dfrac{12}{13}$

$2 \cdot 1 + 14 \cdot g_2 - 9 \cdot 3 + 14 = 0 \quad \Longrightarrow \quad g_2 = \dfrac{11}{14}$

(e)



(f) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \dfrac{256}{3\sqrt{109} \cdot \sqrt{281}} = 0{,}4876 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 60{,}82°$

3. (a) $x_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -1 \quad \Longrightarrow \quad$ Schnittpunkt: $\mathrm{S}_{12}\,(9|-2|0)$

(b) $x_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -\dfrac{3}{5} = -0{,}6 \quad \Longrightarrow \quad$ Schnittpunkt: $\mathrm{S}_{13}\left(\frac{37}{5}\middle|0\middle|\frac{8}{5}\right) = \mathrm{S}_{13}\,(7{,}4|0|1{,}6)$

(c) $x_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{5}{4} = 1{,}25 \quad \Longrightarrow \quad$ Schnittpunkt: $\mathrm{S}_{23}\left(0\middle|\frac{37}{4}\middle|9\right) = \mathrm{S}_{23}\,(0|9{,}25|9)$

(d) g in E_1: $\quad 2(5 - 4\lambda) - 4(3 + 5\lambda) + 5(4 + 4\lambda) - 20 = 0 \quad \Longrightarrow \quad -8\lambda - 2 = 0$

$\lambda = -\dfrac{1}{4}$ in g: $\quad \mathrm{S}_{E1}\left(6\middle|\frac{7}{4}\middle|3\right) = \mathrm{S}_{E1}\,(6|1{,}75|3) \quad \Longrightarrow \quad L = \{\mathrm{S}_{E1}\}$

(e) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2' = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = -\dfrac{\vec{n}_2'}{16} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_2: \quad \vec{n}(\vec{x} - \vec{a}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 + x_3 + 4 = 0$

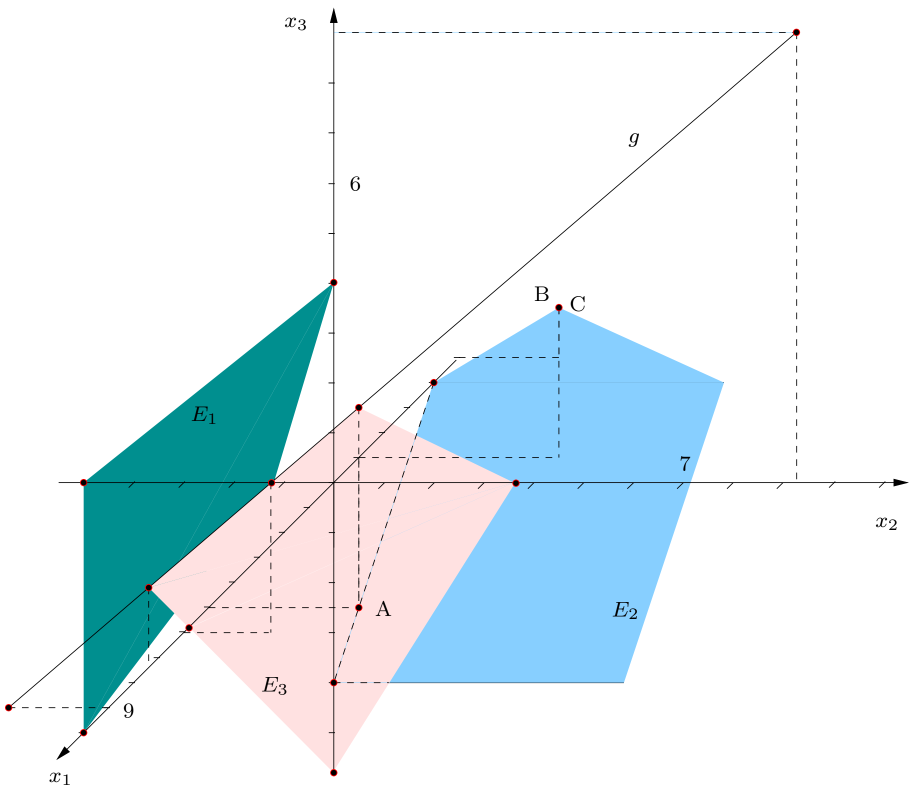
g in E_2: $\quad 5 - 4\lambda + 4 + 4\lambda - 20 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 13 = 0 \quad \Longrightarrow \quad L = \emptyset$

(f) F, G und H sind Achsenpunkte, also Achsenabschnittsform:

$$E_3: \quad \frac{x_1}{5{,}8} + \frac{8x_2}{29} - \frac{x_3}{5{,}8} = 1 \Big| \cdot 58 \quad \Longrightarrow \quad 5x_1 + 8x_2 - 5x_3 - 29 = 0$$

g in E_3: $\quad 5(5 - 4\lambda) + 8(3 + 5\lambda) - 5(4 + 4\lambda) - 29 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 = 0$

Die Gleichung ist für jedes λ erfüllt, d.h. $g \subset E_3$ oder $L = g$.



4.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} 2 - \lambda &= 1 + 4\mu \\ 1 + 3\lambda &= 1 - 3\mu \\ -1 - 2\lambda &= k + \mu \end{aligned}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt $\lambda = -\frac{1}{3}$ und $\mu = \frac{1}{3}$ und damit aus der dritten Gleichung $k = -\frac{2}{3}$.

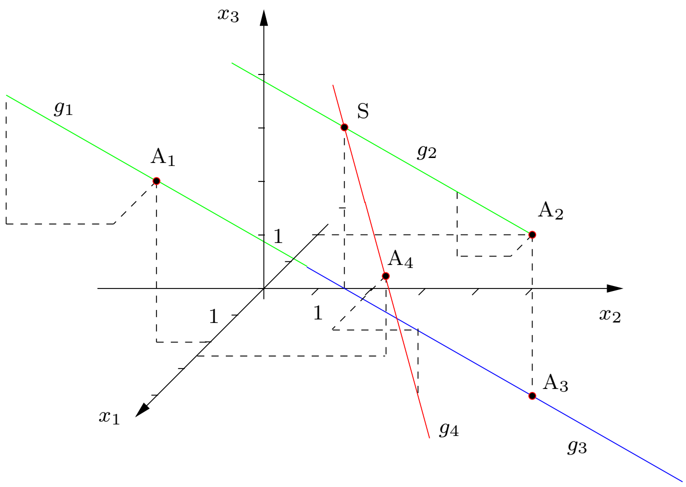
$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad S\left(\frac{7}{3}\middle|0\middle|-\frac{1}{3}\right)$$

5. $g_1: \quad \vec{x} = \overrightarrow{A_1} + \lambda\vec{v_1}$

$g_2: \quad \vec{x} = \overrightarrow{A_2} + \mu\vec{v_2}$

$g_3: \quad \vec{x} = \overrightarrow{A_3} + \nu\vec{v_3}$

$g_4: \quad \vec{x} = \overrightarrow{A_4} + \sigma\vec{v_4}$



$\vec{v_1} \| \vec{v_2} \| \vec{v_3} \nparallel \vec{v_4}$

$\overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \nparallel \vec{v_1}$

g_1 echt parallel zu g_2

$\overrightarrow{A_1A_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \| \vec{v_1}$

$\Longrightarrow \quad g_1 = g_3$

$g_1 \cap g_4: \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 3{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} 2 + 4\lambda &= 2{,}5 + 5\sigma \quad (1) \\ -1 - 5\lambda &= 3{,}5 + 4\sigma \quad (2) \\ 3 + 6\lambda &= 1{,}5 - 3\sigma \quad (3) \end{aligned}$$

(1) und (2) $\Longrightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{2}, \quad \sigma = -\frac{1}{2}$

in (3): $0 \neq 3 \quad \Longrightarrow \quad g_1$ windschief zu g_4

$g_2 \cap g_4: \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 3{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} -2 + 4\lambda &= 2{,}5 + 5\sigma \quad (1) \\ 4 - 5\lambda &= 3{,}5 + 4\sigma \quad (2) \\ 6\lambda &= 1{,}5 - 3\sigma \quad (3) \end{aligned}$$

(1) und (2) $\Longrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{2}, \quad \sigma = -\frac{1}{2}$

in (3): $3 = 3 \quad \Longrightarrow \quad g_2 \cap g_4 = \{S\}$ mit

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

6. (a) $E: \quad \vec{x} = \vec{A} + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$g: \quad \vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{G}} + \lambda \overrightarrow{\mathrm{GF}} = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(b) $E \cap x_3$-Achse $\Longrightarrow$ $x_1 = x_2 = 0$:

$$\begin{aligned} 4\lambda - \mu &= -3 && (1) \\ 3\lambda + 4\mu &= -3 && (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \cdot (1) + (2): \quad 19\lambda &= -15 && (3) \\ \lambda &= -\frac{15}{19} && (4) \\ (4) \text{ in } (1): \quad \mu &= -\frac{3}{19} && (5) \end{aligned}$$

$$(4) \text{ und } (5) \text{ in } E: \quad \mathrm{A}_3 \left(0 \middle| 0 \middle| \frac{69}{19}\right)$$

Analog zeigt man: $\mathrm{A}_2\,(-23|0|0)$, $\mathrm{A}_1 \left(0 \middle| \frac{69}{7} \middle| 0\right)$

(c) $g \cap x_1x_2$-Ebene $\Longrightarrow$ $x_3 = 4 + 4\sigma = 0$ $\Longrightarrow$ $\sigma = -1$ $\Longrightarrow$ $\mathrm{S}_{12}\,(12|5|0)$

$g \cap x_1x_3$-Ebene $\Longrightarrow$ $x_2 = 10 + 5\sigma = 0$ $\Longrightarrow$ $\sigma = -2$ $\Longrightarrow$ $\mathrm{S}_{13}\,(11|0|-4)$

$g \cap x_2x_3$-Ebene $\Longrightarrow$ $x_1 = 13 + \sigma = 0$ $\Longrightarrow$ $\sigma = -13$ $\Longrightarrow$ $\mathrm{S}_{23}\,(0|-55|-48)$

(d) $E \cap g$ $\Longrightarrow$ $x_E = x_g$ $\Longrightarrow$:

$$\begin{aligned} 4\lambda - \mu - \sigma &= 10 && (1) \\ 3\lambda + 4\mu - 5\sigma &= 7 && (2) \\ -\lambda + \mu - 4\sigma &= 1 && (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1): \quad 4\lambda - \mu - \sigma &= 10 && (4) \\ 3 \cdot (1) - 4 \cdot (2): \quad -19\mu + 17\sigma &= 2 && (5) \\ (1) + 4 \cdot (3): \quad 3\mu - 17\sigma &= 14 && (6) \end{aligned}$$

$$(5) + (6): \quad -16\mu = 16 \qquad (7)$$

$$\Longrightarrow \quad \mu = -1, \quad \sigma = -1, \quad \lambda = 2$$

$$\sigma \text{ in } g \quad \Longrightarrow \quad E \cap g = \{\mathrm{S}\} \quad \text{mit} \quad \mathrm{S}\,(12|5|0)$$

(e) Richtungsvektoren von E': $\vec{w} = \overrightarrow{\mathrm{GF}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, da jeder zur Spurgeraden parallele Vektor als Richtungsvektor verwendet werden kann.

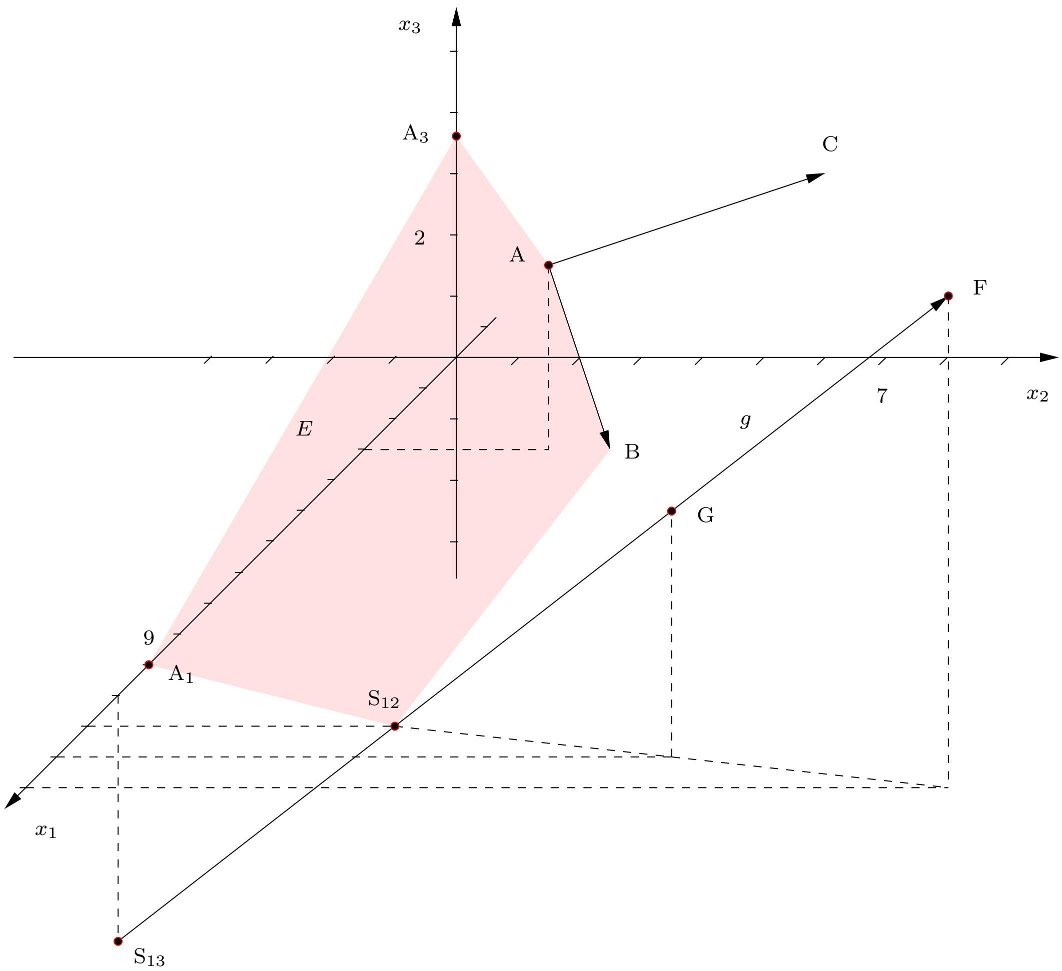
$$E': \quad \vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{A}} + s\vec{w} + t\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die Spurgerade h in der x_1x_2-Ebene gilt $x_3 = 0$ $\Longrightarrow$

$$x_3 = 3 + 4s = 0 \quad \Longrightarrow \quad s = -\frac{3}{4}$$

s in E':

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



7. (a) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$$

(b) $x_3 = 1 + 3\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad G\left(\frac{11}{3}\middle| -4 \middle| 0\right)$.

$$g': \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad h': \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c)

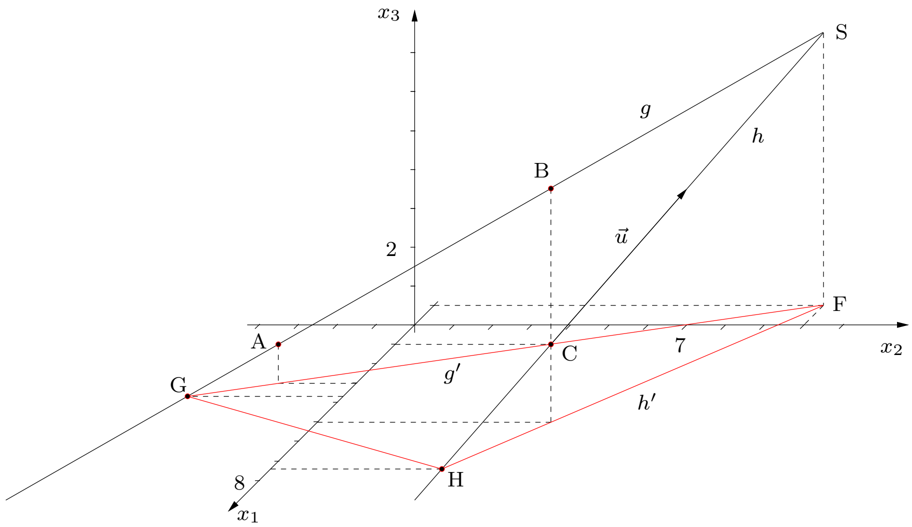
$$g \cap h: \quad \begin{aligned} 3 - 2\lambda &= 5 - 3\mu & (1)\\ -2 + 6\lambda &= 6 + 2\mu & (2)\\ 1 + 3\lambda &= 2 + z\mu & (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2\lambda + 3\mu &= 2 & (4)\\ 6\lambda - 2\mu &= 8 & (5)\\ 3\lambda - z\mu &= 1 & (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3\cdot(4)+(5): &\quad 7\mu = 14 \implies \mu = 2 & (7)\\ (7) \text{ in } (4): &\quad -2\lambda + 6 = 2 \implies \lambda = 2 & (8)\\ (7),(8) \text{ in } (6): &\quad 6 - 2z = 1 \implies z = 2{,}5 & (9) \end{aligned}$$

(8) in $g \implies$ S$\,(-1|10|7)$

(d)



(e) $x_3 = 2 + \frac{5}{2}\mu = 0 \implies \mu = -\frac{4}{5} \implies$ H$\,(7{,}4|4{,}4|0)$. F$\,(-1|10|0)$.

$$\overrightarrow{\mathrm{HF}} = \begin{pmatrix} -8{,}4\\ 5{,}6\\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{42}{5}\\ \frac{28}{5}\\ 0 \end{pmatrix} = \frac{14}{5}\begin{pmatrix} -3\\ 2\\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{HG}} = \begin{pmatrix} -\frac{56}{15}\\ -\frac{42}{5}\\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{14}{15}\begin{pmatrix} 4\\ 9\\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{HF}} \times \overrightarrow{\mathrm{HG}} = \frac{14^2}{75}\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 35 \end{pmatrix} \implies V = \frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{HF}} \times \overrightarrow{\mathrm{HG}}|\cdot\overline{\mathrm{FS}} = \frac{14^2\cdot 35\cdot 7}{150} = \frac{4802}{15} \approx 320$$

8. (a) $E_1: \quad \frac{x_1}{4} - \frac{x_2}{5} + \frac{x_3}{4} = 1 \implies$ A$_1\,(4|0|0)$, A$_2\,(0|-5|0)$, A$_3\,(0|0|4)$.

$$E_1: \quad \vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{A}}_1 + \nu\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1} + \sigma\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3} = \begin{pmatrix} 4\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 4\\ 5\\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0\\ 5\\ 4 \end{pmatrix}$$

(b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$

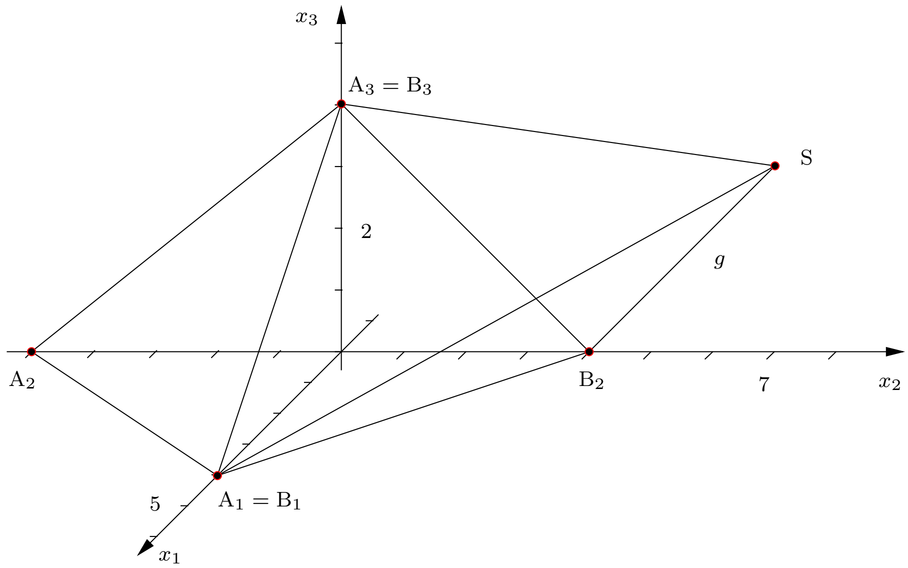
$$E_2: \quad x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$$

(c) $E_2: \quad \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{4} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{B}_1\,(4|0|0)\,,\ \mathrm{B}_2\,(0|4|0)\,,\ \mathrm{B}_3\,(0|0|4).$

(d) $g: \quad \vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{B}}_2 + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

g in E_1: $5t - 4(4+t) + 5t - 20 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = 6 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{S}\,(6|10|6)$

(e)



(f)

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2} \times \overrightarrow{\mathrm{B}_1\mathrm{B}_3}| \cdot \overline{\mathrm{B}_2\mathrm{S}} = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \frac{4^2 \cdot 6}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 16 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 16 \cdot \sqrt{3}^{\,2} = 48$$

9. Man verschafft sich zunächst einen Überblick, indem man mit Hilfe des Kreuzprodukts Normalenvektoren der Ebenen berechnet:

$$\vec{n}_1 = \vec{n}_2 = \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Die Gleichungen der Ebenen in Normalenform:

$$\begin{aligned} E_1: &\quad x_2 + x_3 - 6 = 0 && (1)\\ E_2: &\quad x_2 + x_3 - 6 = 0 && (2)\\ E_3: &\quad x_2 + x_3 - 4 = 0 && (3)\\ E_4: &\quad 5x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 9 = 0 && (4) \end{aligned}$$

$$E_1 \cap E_2 = E_1 = E_2, \quad E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3 = \emptyset$$

$E_1 \cap E_4$: Zwei Gleichungen mit drei Unbekannten, wir setzen $x_3 = \lambda$:

$$\begin{aligned} (1) \Longrightarrow &\quad x_2 = 6 - \lambda && (5)\\ (4) \Longrightarrow &\quad 5x_1 - 5x_2 = 9\lambda - 9 && (6)\\ (5) \text{ in } (6): &\quad 5x_1 - 30 + 5\lambda = 9\lambda - 9 && (7)\\ &\quad x_1 = \frac{4}{5}\lambda + \frac{21}{5} \end{aligned}$$

$$E_1 \cap E_4 = E_2 \cap E_4 = g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{21}{5} \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$E_3 \cap E_4$: Zwei Gleichungen mit drei Unbekannten, wir setzen $x_3 = \lambda$:

$$\begin{aligned} (3) \Longrightarrow &\quad x_2 = 4 - \lambda && (8)\\ (4) \Longrightarrow &\quad 5x_1 - 5x_2 = 9\lambda - 9 && (9)\\ (5) \text{ in } (6): &\quad 5x_1 - 20 + 5\lambda = 9\lambda - 9 && (10)\\ &\quad x_1 = \frac{4}{5}\lambda + \frac{11}{5} \end{aligned}$$

$$E_3 \cap E_4 = h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

10. Mit Hilfe des Kreuzprodukts berechnet man den Normalenvektor von E_1:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Die Gleichungen der Ebenen in Normalenform:

$$\begin{aligned} E: &\quad 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 20 = 0 && (1)\\ E_1: &\quad 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 4 = 0 && (2)\\ E_2: &\quad -x_1 + 5x_2 - x_3 - 22 = 0 && (3) \end{aligned}$$

$E \cap E_1$: Zwei Gleichungen mit drei Unbekannten, wir setzen $x_3 = \lambda$:

$$\begin{aligned}
E:&& 4x_1 + 7x_2 + 4\lambda - 20 &= 0 && (4)\\
E_1:&& 2x_1 - 3x_2 - 6\lambda + 4 &= 0 && (5)\\
\hline
(4) - 2\cdot(5):&& 13x_2 + 16\lambda &= 28 && (6)\\
&& x_2 &= \frac{28}{13} - \frac{16}{13}\lambda && (7)\\
(7) \text{ in } (4):&& 4x_1 + \frac{7\cdot 28}{13} - \frac{7\cdot 16}{13}\lambda + 4\lambda &= 20 \,|\, :4 && (8)\\
&& x_1 + \frac{49}{13} - \frac{28}{13}\lambda + \lambda &= 5 && (9)\\
&& x_1 &= \frac{16}{13} + \frac{15}{13}\lambda && (10)
\end{aligned}$$

$$E \cap E_1 = g: \quad \vec{x} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}16\\28\\0\end{pmatrix} + \frac{\lambda}{13}\begin{pmatrix}15\\-16\\13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\12\\-8\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}15\\-16\\13\end{pmatrix}$$

$E \cap E_2$: Zwei Gleichungen mit drei Unbekannten, wir setzen $x_3 = \lambda$:

$$\begin{aligned}
E:&& 4x_1 + 7x_2 + 4\lambda - 20 &= 0 && (11)\\
E_2:&& -x_1 + 5x_2 - \lambda - 22 &= 0 && (12)\\
\hline
(11) + 4\cdot(12):&& 27x_2 &= 108 && (13)\\
&& x_2 &= 4 && (14)\\
(14) \text{ in } (12):&& x_1 &= -2 - \lambda && (15)
\end{aligned}$$

$$E \cap E_2 = h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

4.4 Abstand- und Winkelbestimmung

1. (a) $\vec{n} = \begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\\-6\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\-3\\-6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix} = 8 + 6 - 18 = -4 \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
E:&& 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 4 &= 0\\
\text{HNF von } E:&& -\frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{6}{7}x_3 - \frac{4}{7} &= 0
\end{aligned}$$

$$d(\mathrm{P}, E) = \frac{-2\cdot(-4) + 3\cdot 5 + 6\cdot(-2) - 4}{7} = 1$$

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} = \vec{P} - d(\mathrm{P}, E)\cdot\vec{n}_0 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-26\\32\\-20\end{pmatrix}$$

$$\vec{P'} = \vec{P} - 2 \cdot d(\mathrm{P}, E) \cdot \vec{n}_0 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -24 \\ 29 \\ -26 \end{pmatrix}$$

(b) HNF von E: $$\frac{9x_1 + 12x_2 + 20x_3 - 205}{25} = 0$$

$$d(\mathrm{P}, E) = \frac{9 \cdot (-6) + 12 \cdot 22 + 20 \cdot 31 - 205}{25} = 25$$

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} = \vec{P} - d(\mathrm{P}, E) \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} -15 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P'} = \vec{P} - 2 \cdot d(\mathrm{P}, E) \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} -24 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

(c) Richtungsvektoren von E:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

HNF von E: $$\frac{x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 1}{3} = 0$$

$$d(\mathrm{P}, E) = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) - 1}{3} = 6$$

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} = \vec{P} - d(\mathrm{P}, E) \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P'} = \vec{P} - 2 \cdot d(\mathrm{P}, E) \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. (a) z. B. $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$

   (b) $S_1(2|0|0)$, $S_2(0|4|0)$, $S_3(0|0|6)$, $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

   (c) $a = \frac{1}{8}$, $g_{\frac{1}{8}}$ liegt in E

   (d) ebenes Geradenbüschel, $g_a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. (a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_1' = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 36 \\ -12 \\ 54 \end{pmatrix}$

$$\vec{n}_1' = 6 \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \text{wir wählen} \quad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Mit $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ folgt $\vec{n}_1\vec{a} = 6 \cdot 3 - 2 \cdot 6 + 9 \cdot 1 = 15$ und damit

$$\vec{n}_1(\vec{x} - \vec{a}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad E_1: \ 6x_1 - 2x_2 + 9x_3 - 15 = 0$$

(b) $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, $|\vec{n}_1| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 9^2} = \sqrt{121} = 11$, $|\vec{n}_2| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 7^2} = \sqrt{121} = 11$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{87}{121} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 44{,}03°$$

(c) C in E_2: $6 \cdot (-3) + 6 \cdot (-3) + 7 \cdot 3 + 15 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{C} \in E_2$

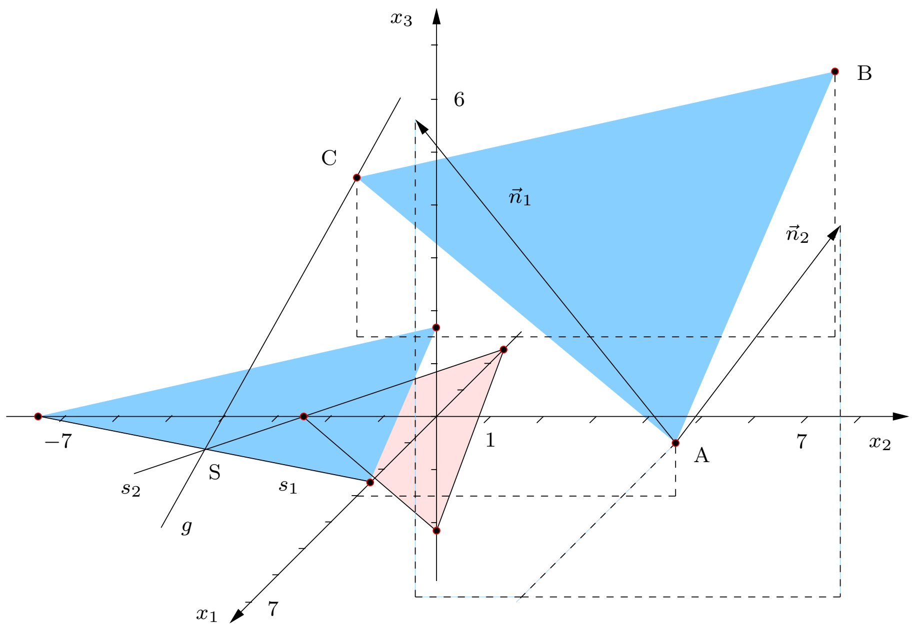
(d) $x_3 = 0$ in E_1: $\quad 6x_1 - 2x_2 = 15 \quad \Longrightarrow \quad s_1: \ x_2 = 3x_1 - 7{,}5$

$x_3 = 0$ in E_2: $\quad 6x_1 + 6x_2 = -15 \quad \Longrightarrow \quad s_2: \ x_2 = -x_1 - 2{,}5$

$$s_1 \cap s_s: \quad 3x_1 - 7{,}5 = -x_1 - 2{,}5 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{5}{4}$$

$$x_2 = \frac{15}{4} - \frac{15}{2} = -\frac{15}{4} \quad \Longrightarrow \quad \text{S}\left(\frac{5}{4}\middle| -\frac{15}{4}\middle|0\right) = \text{S}\,(1{,}25| -3{,}75|0)$$

(e) Achsenpunkte von E_2: $\text{A}_1\,(-2{,}5|0|0)$, $\text{A}_2\,(0|-2{,}5|0)$, $\text{A}_3\,\left(0|0|-\frac{15}{7}\right)$



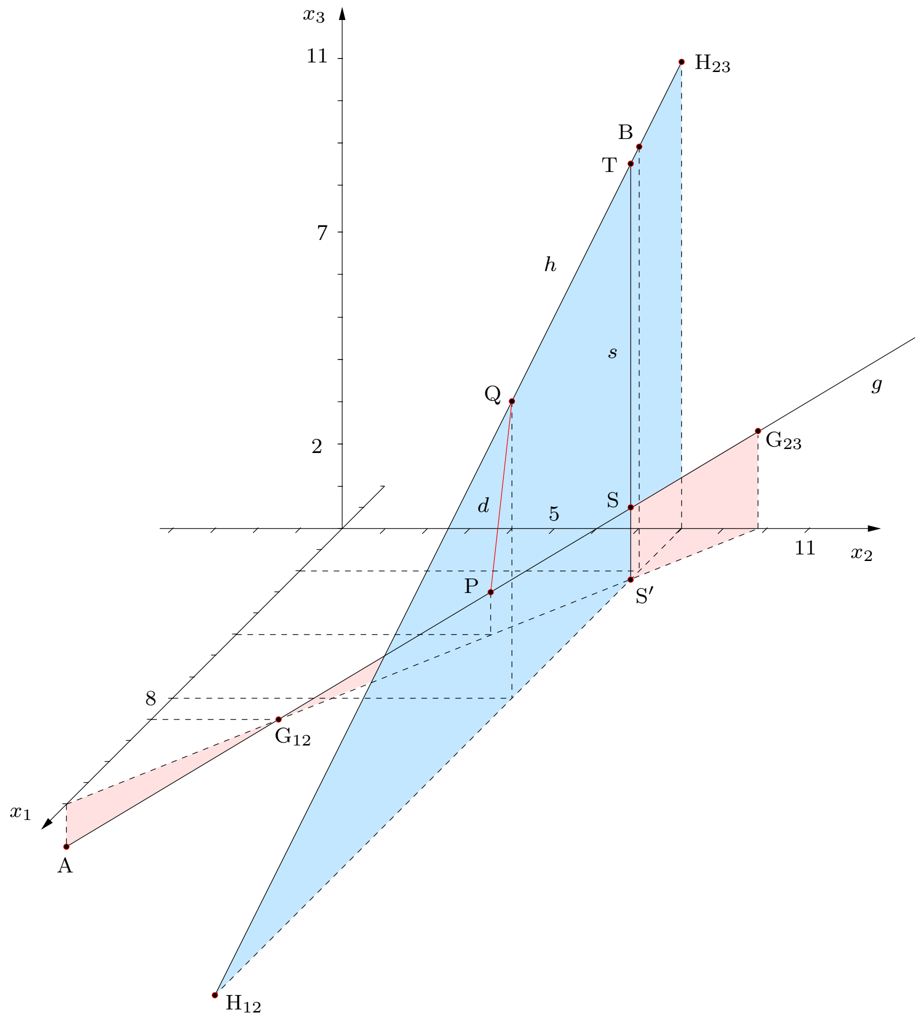
(f) Da E_1 und E_2 nicht parallel sind ($\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$) ist die gesuchte Schnittmenge eine Gerade g. Wir kennen zwei Punkte, die in beiden Ebenen liegen: S und C. Also ist

$$E_1 \cap E_2 = g = \mathrm{SC}$$

4. (a) Spurpunkte von g: $\mathrm{G}_{12}\,(9|3|0)$, $\mathrm{G}_{13}\,(13|0|-1) = A$, $\mathrm{G}_{23}\,(0|9{,}75|2{,}25)$

Spurpunkte von h: $\mathrm{H}_{12}\,(22|8|0)$, kein H_{13}, da h parallel zur x_1x_3-Ebene, $\mathrm{H}_{23}\,(0|8|11)$

Setzt man die x_2-Komponenten der Geradengleichungen gleich, dann folgt $\lambda = \frac{8}{3}$ und damit für den Schnittpunkt von g' und h': $\mathrm{S}'\left(\frac{7}{3}\middle|8\middle|0\right)$.



(b)

$$
\begin{array}{lcr}
g \cap h: & 4\lambda + 2\mu = 11 & (1) \\
 & 3\lambda = 8 & (2) \\
 & \lambda + \mu = 11 & (3) \\
\hline
(2) \text{ und } (3) \Longrightarrow & \lambda = \frac{8}{3}, \quad \mu = \frac{25}{3} & (4) \\
(4) \text{ in } (1) & \underbrace{\frac{82}{3}}_{\text{lS}} \neq \underbrace{11}_{\text{rS}} &
\end{array}
$$

(1) also nicht erfüllt, d.h. g und h haben keinen Schnittpunkt. Da die Richtungsvektoren nicht parallel sind, sind g und h windschief.

(c) Ein Normalenvektor zu den beiden Richtungsvektoren ist

$$
\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}
$$

$$
d = |\vec{n}_0(\vec{b} - \vec{a})| = \left| \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \right| = \frac{-33 + 16 + 66}{7} = 7
$$

(d) Mit $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = d\vec{n}_0$, $\vec{P} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$, $\vec{Q} = \vec{b} + \mu\vec{v}$ und $\overrightarrow{\mathrm{Q}} = \overrightarrow{\mathrm{P}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ folgt

$$
\begin{array}{lcr}
 & 13 - 4\lambda + 3 = 2 + 2\mu & (1) \\
 & 3\lambda + 2 = 8 & (2) \\
 & -1 + \lambda + 6 = 10 - \mu & (3) \\
\hline
(1) \text{ und } (2) \Longrightarrow & \lambda = 2, \quad \mu = 3 & (4)
\end{array}
$$

$$
\overrightarrow{\mathrm{P}} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{P}\,(5|6|1)
$$

$$
\overrightarrow{\mathrm{Q}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{Q}\,(8|8|7)
$$

(e) $\mathrm{S}' \in g' \quad \Longrightarrow \quad 3\lambda = 8 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{8}{3}$. Der Punkt $\mathrm{S} \in g$, der senkrecht über S' liegt, hat die Koordinaten $\mathrm{S}\left(\frac{7}{3}\middle|8\middle|\frac{5}{3}\right)$.

$\mathrm{S}' \in h' \quad \Longrightarrow \quad 2 + 2\mu = \frac{7}{3} \quad \Longrightarrow \quad \mu = \frac{1}{6}$. Der Punkt $\mathrm{T} \in h$, der senkrecht über S' liegt, hat die Koordinaten $\mathrm{T}\left(\frac{7}{3}\middle|8\middle|\frac{59}{6}\right)$. Das Seil darf maximal die Länge

$$
s = \frac{59}{6} - \frac{5}{3} = \frac{49}{6} = 8{,}1\overline{6}
$$

haben.

5. (a) $g \| h$, A ist Aufpunkt von g, B Aufpunkt von h: $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

φ ist der Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{-2}{2\sqrt{41}\cdot\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{2}}$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\frac{1}{82}} = \frac{9}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{2}}$$

$$d(g,h) = \overline{\mathrm{AB}}\sin\varphi = \frac{9\cdot 2\sqrt{41}}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{2}} = 9\sqrt{2}$$

(b) $\vec{w} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, α ist der Winkel zwischen $\vec{w}$ und $\vec{v}$:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{w}\cdot\vec{v}}{|\vec{w}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{-2}{\sqrt{110}\cdot\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{55}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{55}} = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{55}}$$

$$d(P,g) = \overline{\mathrm{AP}}\sin\alpha = \frac{\sqrt{110}\cdot\sqrt{54}}{\sqrt{55}} = 6\sqrt{3}$$

$\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{BP}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, β ist der Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{v}$:

$$\cos\beta = \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{|\vec{r}|\cdot|\vec{v}|} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \beta = 90^\circ$$

$$d(P,h) = \overline{\mathrm{BP}} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

(c)

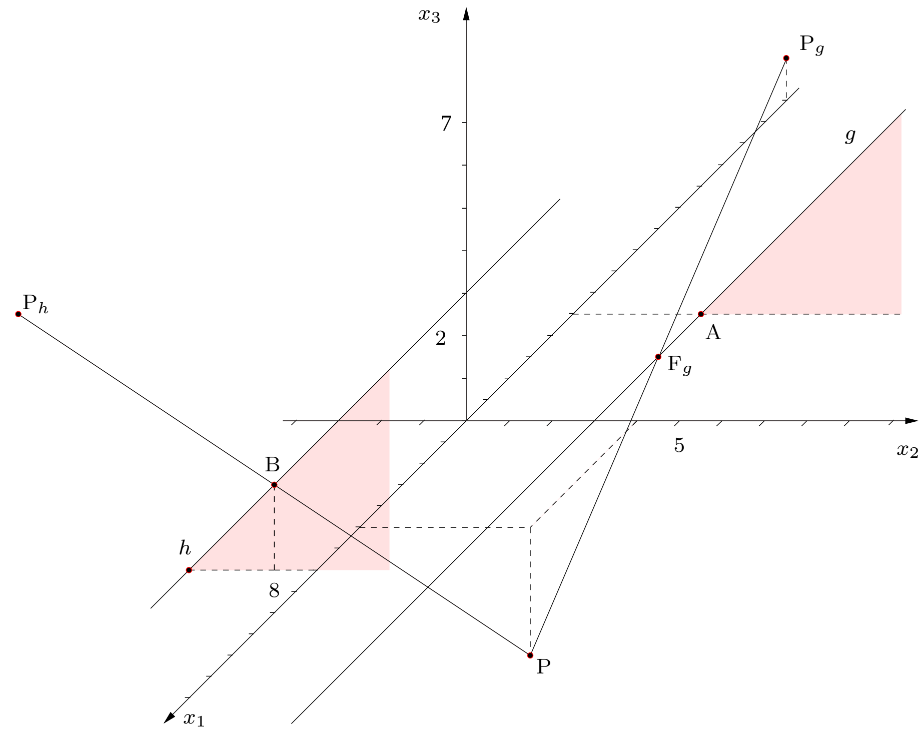
$$\vec{\mathrm{F}}_g = \vec{A} + \overline{\mathrm{AP}}\cos\alpha\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{110}}{\sqrt{55}\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathrm{F}}_h = \vec{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\vec{\mathrm{P}}_g = \vec{\mathrm{F}}_g + \overrightarrow{\mathrm{PF}_g} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathrm{P}}_h = \vec{\mathrm{F}}_h + \overrightarrow{\mathrm{PF}_h} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$$



6. (a) $\varphi = \sphericalangle(\vec{v}, \overrightarrow{\mathrm{AP}})$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{p} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \cos\varphi = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\vec{v}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|} = \frac{12}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{35}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{35}}$$

$$d(\mathrm{P}, g) = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}| \sin\varphi = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}| \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{35} \cdot \sqrt{1 - \frac{24}{35}} = \sqrt{11}$$

(b) Da $\cos\varphi > 0$, folgt

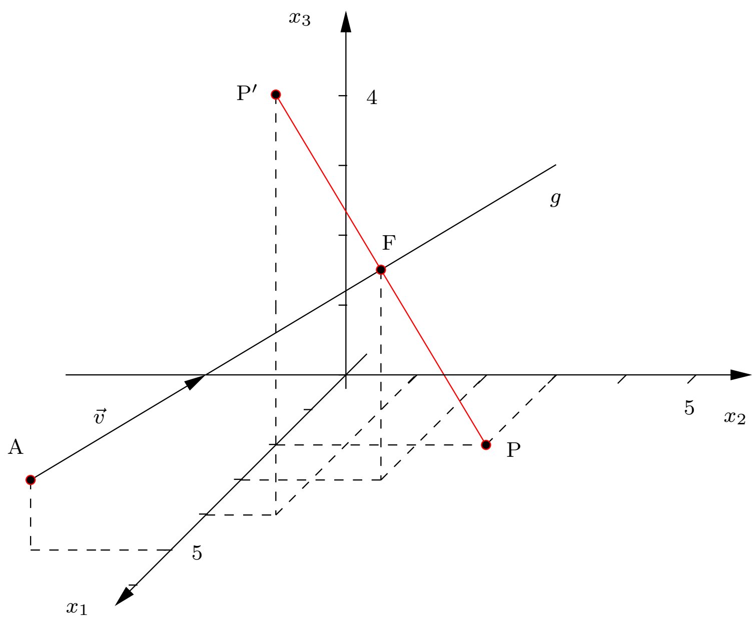
$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{AF}}|}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| \cos\varphi}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \vec{v} = 2\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = \vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{AF}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathrm{F}\,(3|2|3)$$

(c)

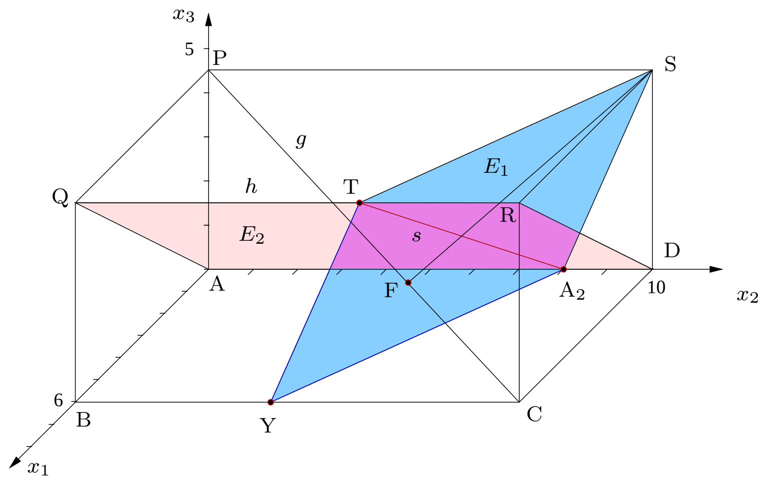
$$\overrightarrow{\mathrm{P}}' = \overrightarrow{\mathrm{P}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PF}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathrm{P}'\,(4|1|6)$$

(d)



7. (a) D (0|10|0), P (0|0|4,5), Q (6|0|4,5), R (6|10|4,5)

(b) $g: \quad \vec{x} = \vec{P} + \overrightarrow{\mathrm{PC}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -4{,}5 \end{pmatrix}$



(c) $\vec{n}_1' = 2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \\ -9 \end{pmatrix}$ ist Normalenvektor von E_1. $\quad \vec{n}_1' \cdot \vec{S} = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} = 159{,}5.$

$$\vec{n}_1 = 2\vec{n}_1' \quad \Longrightarrow \quad E_1: \quad \vec{n}_1(\vec{x} - \vec{S}) = 24x_1 + 40x_2 - 18x_3 - 319 = 0$$

(d) g in E_1:

$$24 \cdot 6\lambda + 40 \cdot 10\lambda - 18 \cdot \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{2}\lambda\right) - 319 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 625\lambda = 400$$

$$\lambda = \frac{16}{25} \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} + \frac{16}{25} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{96}{25} \\ \frac{32}{5} \\ \frac{81}{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}84 \\ 6{,}40 \\ 1{,}62 \end{pmatrix}$$

$$d(\mathrm{S}, g) = |\overrightarrow{\mathrm{FS}}| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{96}{25} \\ \frac{18}{5} \\ \frac{72}{25} \end{pmatrix} \right| = 6$$

(e)

$$d(\mathrm{B}, E_1) = \left| \frac{\vec{n}_1}{|\vec{n}_1|} \cdot (\vec{B} - \vec{S}) \right| = \left| \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 24 \\ 40 \\ -18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} \right| = \frac{175}{50} = 3{,}5$$

(f) Jeder Punkt $(0\,|\,x_2\,|\,0)$ erfüllt die Gleichung von E_2, d.h. die x_2-Achse ist in E_2 enthalten. Weiter erfüllt jeder Punkt $(6\,|\,x_2\,|\,4{,}5)$ die Gleichung von E_2, d.h. die Gerade $h = \mathrm{QR}$ ist auch in E_2 enthalten. E_2 ist also Diagonalebene in unserem Quader.

(g) $E_1 \cap a \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_3 = 0$ in $E_1 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \frac{319}{40} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{A}_2\,(0|7{,}975|0)$

$E_1 \cap h \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 6$ und $x_3 = \frac{9}{2}$ in $E_1 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \frac{32}{5} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{T}\,(6|6{,}4|4{,}5)$

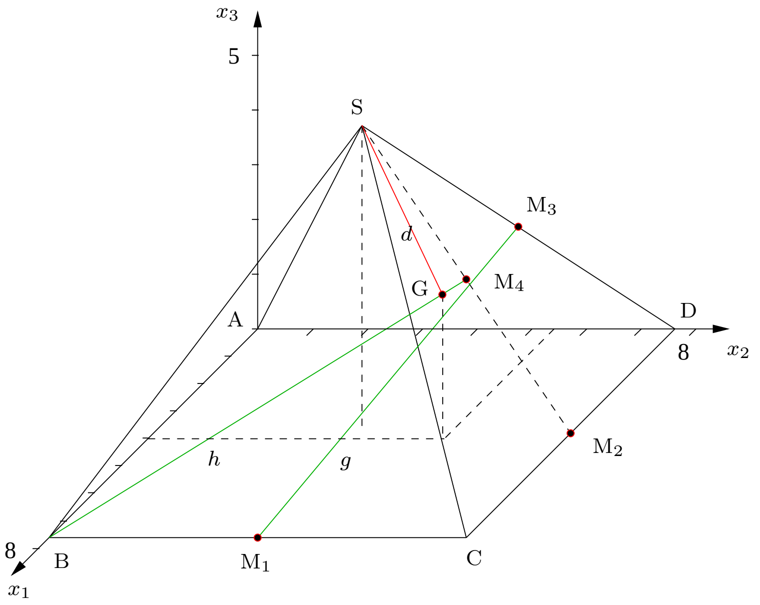
(h) $s = \mathrm{A_2T} \quad \Longrightarrow \quad s: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{319}{40} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -\frac{63}{40} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7{,}975 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 80 \\ -21 \\ 60 \end{pmatrix}$

8. (a) $\mathrm{M}_1\,(76|38|0)$, $\mathrm{M}_2\,(38|76|0)$, $\overrightarrow{\mathrm{M}_3} = \overrightarrow{\mathrm{D}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DS}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 76 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 38 \\ -38 \\ 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 57 \\ 28 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_4} = \overrightarrow{\mathrm{M}_2} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{M_2S}} = \begin{pmatrix} 38 \\ 76 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -38 \\ 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 57 \\ 28 \end{pmatrix}$$

(b) $g: \quad \vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{M}_1} + \mu \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{M_1M_3}}}_{\vec{u}} = \begin{pmatrix} 76 \\ 38 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -57 \\ 19 \\ 28 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}$

$h: \quad \vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{B}} + \lambda \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{BM}_4}}_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} 76 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -38 \\ 57 \\ 28 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$



(c) $\vec{n}_1 = \vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{BM}_4}$ ist Normalenvektor von E_1. $\quad \vec{n}_1 \cdot \vec{S} = \begin{pmatrix} -38 \\ 57 \\ 28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 38 \\ 38 \\ 56 \end{pmatrix} = 2290.$

$$\Longrightarrow \quad E_1: \quad \vec{n}_1(\vec{x} - \vec{S}) = -38x_1 + 57x_2 + 28x_3 - 2290 = 0$$

(d) G ist der Schnittpunkt von h mit E_1. h in E_1:

$$-38 \cdot (76 - 57\lambda) + 57 \cdot 57\lambda + 28 \cdot 28\lambda - 2290 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{5178}{5477}$$

$$\vec{\mathrm{G}} = \begin{pmatrix} 76 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5178}{5477} \begin{pmatrix} -38 \\ 57 \\ 28 \end{pmatrix} = \frac{1}{5477} \begin{pmatrix} 219488 \\ 295146 \\ 144984 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 40 \\ 54 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$d = \overline{\mathrm{GS}} = \frac{38\sqrt{4281}}{\sqrt{5477}} \approx 33{,}6$$

(e) Gesucht ist der Abstand $d(g, h)$ der beiden Geraden:

$$\vec{n}' = \vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -38 & 57 & 28 \\ -57 & 19 & 28 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 57 \cdot 28 - 28 \cdot 19 \\ -57 \cdot 28 + 38 \cdot 28 \\ -38 \cdot 19 + 57 \cdot 57 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1064 \\ -532 \\ 2527 \end{pmatrix} = 133 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$d(g, h) = \left| \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{M}_1} - \vec{\mathrm{B}}) \right| = \left| \frac{1}{21} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 38 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{-4 \cdot 38}{21} \right| = \frac{152}{21}$$

4.5 Anwendungen

1. (a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ -40 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -20 \\ 55 \\ -20 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\vec{n}' = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 50 \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 5 & 2 & -4 \\ -4 & 11 & -4 \end{vmatrix} = 50 \begin{pmatrix} 2 \cdot (-4) - (-4) \cdot 11 \\ (-4) \cdot (-4) - 5 \cdot (-4) \\ 5 \cdot 11 - 2 \cdot (-4) \end{pmatrix} = 50 \begin{pmatrix} 36 \\ 36 \\ 63 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}' = 450 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1800 \\ 1800 \\ 3150 \end{pmatrix}, \quad \text{wir wählen} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

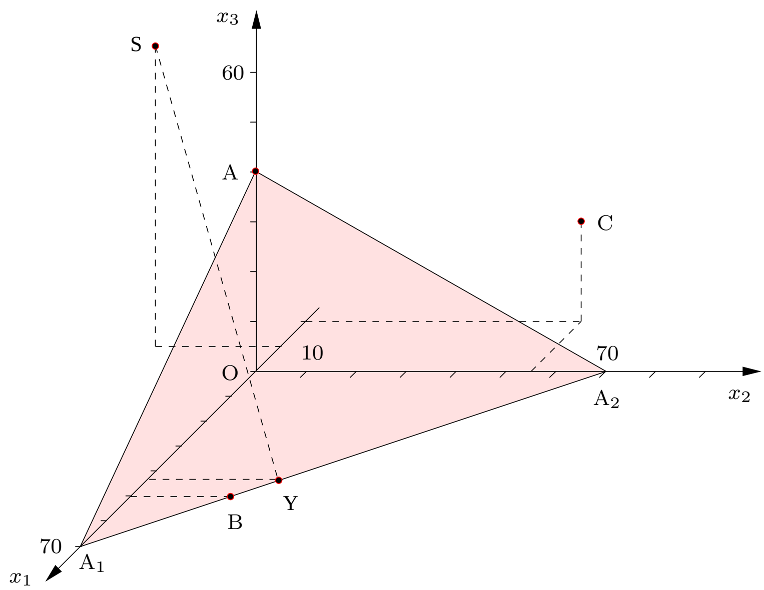
Mit $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix}$ folgt $\vec{n}\vec{a} = 7 \cdot 40 = 280$ und damit

$$\vec{n}(\vec{x} - \vec{a}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad E: \ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 280 = 0$$

(b) $S \in E \quad \Longrightarrow \quad 4 \cdot (-10) + 4s_2 + 7 \cdot 60 = 280 \quad \Longrightarrow \quad s_2 = -25$

(c) A_1: $x_2 = x_3 = 0$
$\Longrightarrow 4x_1 = 280$
$\Longrightarrow x_1 = 70$

A_2: $x_1 = x_3 = 0$
$\Longrightarrow 4x_2 = 280$
$\Longrightarrow x_2 = 70$



(d) Normalenvektor der x_1x_2-Ebene: $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\vec{n}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{81} = 9$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{e}_3\vec{n}}{|\vec{e}_3| \cdot |\vec{n}|} = \frac{7}{1 \cdot 9} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 38{,}94°, \quad \text{Steigung: } \tan\varphi = 80{,}8\%$$

(e) Es genügt zu zeigen, dass A_1 und A_2 auf t liegen:

$$t(70) = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_1 \in t, \quad t(0) = 70 \quad \Longrightarrow \quad A_2 \in t$$

(f) $\mathrm{Y} \in t \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Y}(y_1|70-y_1|0), \quad \overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}} = \begin{pmatrix} -70 \\ 70 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{SY}} = \begin{pmatrix} y_1+10 \\ 95-y_1 \\ -60 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}} \perp \overrightarrow{\mathrm{SY}} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{SY}} = -70(y_1+10) + 70(95-y_1) = 0$$

$$-y_1 - 10 + 95 - y_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_1 = 42{,}5$$

$$y_2 = 70 - y_1 = 27{,}5 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Y}(42{,}5|27{,}5|0)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{SY}} = \begin{pmatrix} 52{,}5 \\ 52{,}5 \\ -60 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \overline{\mathrm{SY}} = \sqrt{2 \cdot 52{,}5^2 + 60^2} \approx 95{,}5$$

(g) $\overrightarrow{\mathrm{A_2A_1}} = \begin{pmatrix} 70 \\ -70 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{A_2S}} = \begin{pmatrix} -10 \\ -95 \\ 60 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{A_2C}} = \begin{pmatrix} -20 \\ -15 \\ 20 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\mathrm{A_2S}} \times \overrightarrow{\mathrm{A_2A_1}} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -10 & -95 & 60 \\ 70 & -70 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4200 \\ 4200 \\ 7350 \end{pmatrix}, \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{A_2S}} \times \overrightarrow{\mathrm{A_2A_1}}\right| = 9450$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A_2C}} \times \overrightarrow{\mathrm{A_2S}} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -20 & -15 & 20 \\ -10 & -95 & 60 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1750 \end{pmatrix}, \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{A_2C}} \times \overrightarrow{\mathrm{A_2S}}\right| = 2250$$

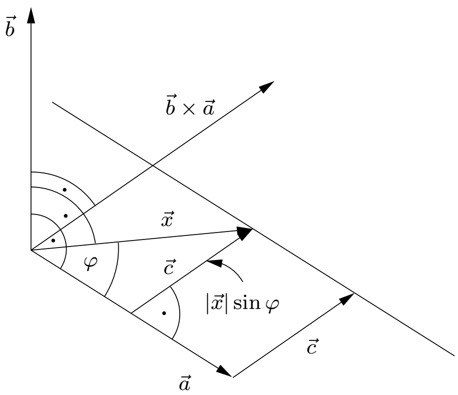
$$F = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{A_2S}} \times \overrightarrow{\mathrm{A_2A_1}}\right| + \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{A_2C}} \times \overrightarrow{\mathrm{A_2S}}\right| = 5850$$

Preis: $3{,}51 \cdot 10^6$ €

2. (a) Fall 1 ($\vec{a} \not\perp \vec{b}$):

Da $\vec{a} \times \vec{x}$ immer senkrecht auf $\vec{a}$ steht, ist $L = \emptyset$.

Fall 2 ($\vec{a} \perp \vec{b}$):



$$\vec{x} \perp \vec{b} \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} \| E \text{ mit } E: \ \vec{b}\vec{x} = 0$$

$$|\vec{a} \times \vec{x}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{x}| \sin\varphi = |\vec{b}| \quad \Longrightarrow$$

$$|\vec{c}| = |\vec{x}| \sin\varphi = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

$$\vec{x} = \lambda\vec{a} + \vec{c} = \lambda\vec{a} + \frac{\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{b} \times \vec{a}|} \cdot \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

$$L = \left\{ \vec{x} \,\middle|\, \vec{x} = \lambda\vec{a} + \frac{\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \wedge \lambda \in \mathbb{R} \right\} \qquad (1)$$

Oder: $\vec{a} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \implies$

$$x_2 = \frac{a_2x_3}{a_3} - \frac{b_1}{a_3}, \quad x_1 = \frac{a_1x_3}{a_3} + \frac{b_2}{a_3} \implies$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1x_3}{a_3} + \frac{b_2}{a_3} \\ \frac{a_2x_3}{a_3} - \frac{b_1}{a_3} \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{x_3}{a_3} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b_2}{a_3} \\ -\frac{b_1}{a_3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit $\lambda = \dfrac{x_3}{a_3}$ folgt

$$\vec{x} = \lambda\vec{a} + \frac{1}{a_3} \cdot \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

(äquivalent zur obigen Lösung, nur anderer Aufpunkt)

(b) Mit (1): $\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 11 & 10 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 52 \\ -55 \end{pmatrix}, \quad |\vec{a}|^2 = 26$

$$L = \left\{ \vec{x} \,\middle|\, \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{26} \begin{pmatrix} -11 \\ 52 \\ -55 \end{pmatrix} \wedge \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Mit (2):

$$L = \left\{ \vec{x} \,\middle|\, \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

z.B.

λ	0	1	2
$\vec{x}$	$\begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Oder:

$$\vec{a} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 5 & 0 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - 5x_3 \\ 5x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix} \implies$$

$$x_2 = 2 \text{ und } x_1 = -5x_3 - 11$$

3. (a) $\vec{v}_\text{A} = \begin{pmatrix} -50 \\ -100 \\ 20 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}} \implies |\vec{v}_\text{A}| = \sqrt{12900}\, \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 116\, \frac{\text{m}}{\text{s}} = 409\, \frac{\text{km}}{\text{h}}$

$\vec{v}_\text{K} = \begin{pmatrix} -100 \\ -200 \\ 120 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}} \implies |\vec{v}_\text{K}| = \sqrt{64400}\, \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 254\, \frac{\text{m}}{\text{s}} = 914\, \frac{\text{km}}{\text{h}}$

(b) $\cos\varphi = \frac{\vec{v}_A \vec{v}_K}{|\vec{v}_A| \cdot |\vec{v}_K}| = 0{,}9506 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 18{,}1°$

(c) Bahnkurven ohne Einheiten:

$$\text{Airbus:} \qquad g_A: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 10000 \\ 2000 \\ 3000 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -50 \\ -100 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\text{Jet:} \qquad g_K: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 9500 \\ 1000 \\ 1600 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -100 \\ -200 \\ 120 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -150$ und $\mu = -\frac{40}{3}$. Die Startorte sind dann

$$s_A = \begin{pmatrix} 17{,}5 \\ 17{,}0 \\ 0{,}0 \end{pmatrix} \text{km} \quad \text{und} \quad s_K \approx \begin{pmatrix} 10{,}83 \\ 3{,}67 \\ 0{,}00 \end{pmatrix} \text{km}$$

(d)

$$g_A = g_K \Longrightarrow \quad \begin{aligned} 50\lambda - 100\mu &= 500 && (1) \\ 100\lambda - 200\mu &= 1000 && (2) \\ -20\lambda + 120\mu &= 1400 && (3) \end{aligned}$$

$$\text{(1) und (2) identisch:} \quad \begin{aligned} \lambda - 2\mu &= 10 && (4) \\ -\lambda + 6\mu &= 70 && (5) \end{aligned}$$

$$(4) + (5) \quad \begin{aligned} 4\mu &= 80 \\ \mu = 20, \quad \lambda &= 50 \end{aligned}$$

Die Flugbahnen schneiden sich in $S\,(7500| - 3000|4000)$.

Orte der Flugzeuge:

$$\text{Airbus:} \qquad \vec{x}_A(t) = \begin{pmatrix} 10000 \\ 2000 \\ 3000 \end{pmatrix} \text{m} + t \cdot \begin{pmatrix} -50 \\ -100 \\ 20 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Jet:} \qquad \vec{x}_K(t) = \begin{pmatrix} 9500 \\ 1000 \\ 1600 \end{pmatrix} \text{m} + (t - 39\,\text{s}) \begin{pmatrix} -100 \\ -200 \\ 120 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der Airbus ist zur Zeit $t_A = 50\,\text{s}$, der Jet zur Zeit $t_K = 59\,\text{s}$ am Ort S.

(e) Die Entfernung der beiden Flugzeuge zur Zeit t bezeichnen wir mit $s(t)$. Der Einfachheit halber rechnen wir ohne Einheiten:

$$f(t) = s(t)^2 = [\vec{x}_A(t) - \vec{x}_K(t)]^2 = \begin{pmatrix} 50t - 3400 \\ 100t - 6800 \\ 6080 - 100t \end{pmatrix}^2 =$$

$$= 22\,500t^2 - 2\,916\,000t + 94\,766\,400$$

$s(t)$ ist minimal, wenn $f(t)$ minimal ist:

$$f'(t) = 45\,000t - 2\,916\,000 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = 64{,}8$$

$$s(64{,}8) = \sqrt{22\,500 \cdot 64{,}8^2 - 2\,916\,000 \cdot 64{,}8 + 94\,766\,400} = \sqrt{288\,000} \approx 537$$

Die minimale Entfernung zur Zeit 64,8 s ist also 537 m.

4. (a) $g: \quad \vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{A}} + \lambda'\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix}120\\40\\20\end{pmatrix} + \lambda'\begin{pmatrix}-80\\60\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}120\\40\\20\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-8\\6\\1\end{pmatrix}$

$h: \quad \vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{T}} + \mu\overrightarrow{\mathrm{TS}} = \begin{pmatrix}78\\-5\\14\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\140\\s-14\end{pmatrix}$

(b) Gleichsetzen von g und h:

$$\begin{aligned} -8\lambda &= -42 && (1)\\ 6\lambda - 140\mu &= -45 && (2)\\ \lambda - (s-14)\mu &= -6 && (3)\\ \hline (1) \Longrightarrow \quad \lambda &= \frac{21}{4} && (4)\\ (4) \text{ und } (2): \quad \mu &= \frac{153}{280} && (5)\\ (4) \text{ und } (5) \text{ in } (3): \quad \frac{21}{4} - (s-14)\cdot\frac{153}{280} &= -6 && (6)\\ s = s_1 &= \frac{588}{17} \approx 34{,}6 \end{aligned}$$

(c) Die kürzeste Verbindung zwischen g und h steht senkrecht auf beiden Geraden:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\140\\s-14\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-8\\6\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}224-6s\\112-8s\\1120\end{pmatrix}$$

Die Ebene E enthält g uns steht senkrecht auf $\vec{n}$:

$$E: \quad \vec{n}(\vec{x} - \overrightarrow{\mathrm{A}}) = 0$$

Der Abstand der Geraden ist der Abstand von T zu E:

$$d(s) = \frac{\vec{n}(\overrightarrow{\mathrm{T}} - \overrightarrow{\mathrm{A}})}{|\vec{n}|} = \frac{\begin{pmatrix}224-6s\\112-8s\\1120\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-42\\-45\\-6\end{pmatrix}}{\sqrt{(224-6s)^2 + (112-8s)^2 + 1120}} =$$

$$= \frac{612s - 21168}{\sqrt{(224-6s)^2 + (112-8s)^2 + 1120}} = 15$$

$$\begin{aligned}
(612s-21\,168)^2 &= 15^2\cdot[(224-6s)^2+(112-8s)^2+1120]\\
374\,544s^2-25\,909\,632s+448\,084\,224 &= 22\,500s^2-1\,008\,000s+296\,352\,000\\
352\,044s^2-24\,901\,632s &= -151\,732\,224\\
s^2-2\cdot\frac{49\,408}{1397} &= -\frac{602\,112}{1397}\\
\left(s-\frac{49\,408}{1397}\right)^2 &= \frac{49\,408^2-602\,112\cdot 1397}{1397^2}=\frac{40\,000^2}{1397^2}\\
s &= \frac{49\,408}{1397}\overset{+}{(-)}\frac{40\,000}{1397}\\
s=s_2=64, &\qquad \left(s_3=\frac{9408}{1397}\approx 6{,}73\right)
\end{aligned}$$

(d) $s=64 \quad\Longrightarrow\quad h:\quad \vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{T}}+\mu\overrightarrow{\mathrm{TS}}=\begin{pmatrix}78\\-5\\14\end{pmatrix}+\mu'\begin{pmatrix}0\\140\\50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}78\\-5\\14\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\14\\5\end{pmatrix}$

Weiter folgt aus $s=64$: $\vec{n}=\begin{pmatrix}-2\\-5\\14\end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}|=15$. Da $\vec{n}$ nach oben zeigt und h über g verläuft, folgt mit $\overrightarrow{\mathrm{P}}=\begin{pmatrix}120\\40\\20\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-8\\6\\1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{\mathrm{Q}}=\begin{pmatrix}78\\-5\\14\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\14\\5\end{pmatrix}$:

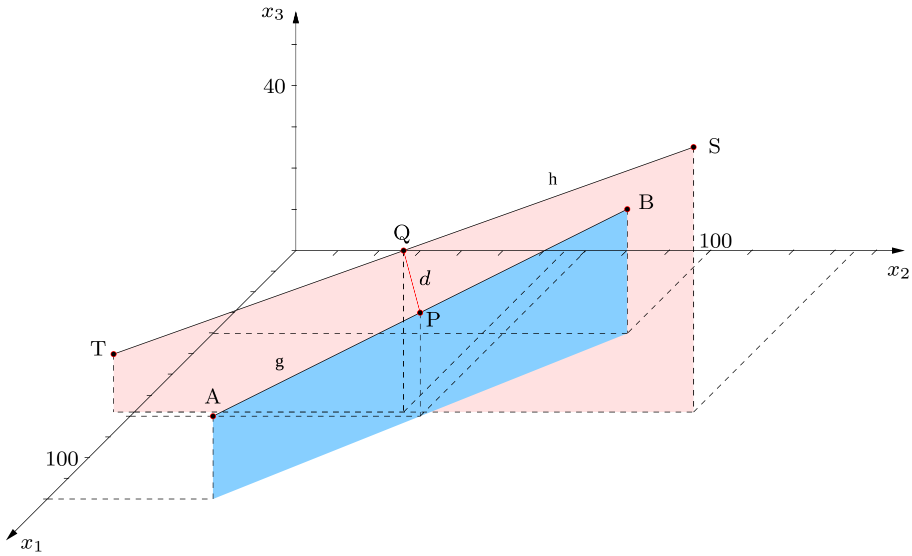
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=d\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

und damit

$$\begin{pmatrix}-42\\-45\\-6\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\14\\5\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}-8\\6\\1\end{pmatrix}=\frac{15}{15}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-5\\14\end{pmatrix}$$

Daraus folgt $\lambda=\mu=5$ und damit P $(80|70|25)$ und Q $(78|65|39)$.

(e)



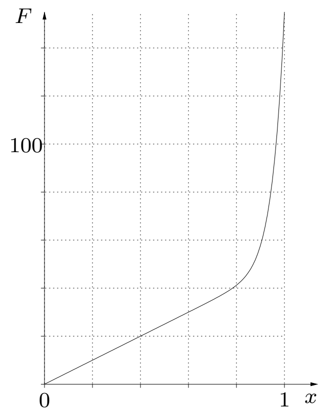
5 Anwendungen der Differential- und Integralrechnung

5.1 Integrale in der Physik

1. (a) $F(x) = Dx \quad \Longrightarrow \quad \Delta W = D\int\limits_{x_1}^{x_2} x\,\mathrm{d}x = \frac{D}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right)$

   (b)

$$W(x) = \int\limits_0^x F(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x} = \int\limits_0^x (D\tilde{x} + C\tilde{x}^{20})\,\mathrm{d}\tilde{x} =$$
$$= \left[\frac{D}{2}\tilde{x}^2 + \frac{C}{21}\tilde{x}^{21}\right]_0^x = \frac{D}{2}x^2 + \frac{C}{21}x^{21} =$$
$$= 25\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\cdot x^2 + 5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^{20}}\cdot x^{21}$$



$W(1\,\mathrm{m}) = 30\,\mathrm{J}, \quad W(1{,}2\,\mathrm{m}) = 260\,\mathrm{J}$

   (c)

$$W(r) = \int\limits_R^r F(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_R^r \frac{GMm}{x^2}\,\mathrm{d}x = GMm\int\limits_R^r \frac{\mathrm{d}x}{x^2} =$$
$$= GMm\left[-\frac{1}{x}\right]_R^r = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

$$\lim_{r\to\infty} W(r) = \frac{GMm}{R}$$

$$\frac{m}{2}v_0^2 = \frac{GMm}{R} \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 11{,}2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

2. (a) $v(t) = v(t_0) + \int\limits_{t_0}^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad x(t) = x(t_0) + \int\limits_{t_0}^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau$

(b) $v(t) = v(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} a \,\mathrm{d}\tau = v_0 + a(t - t_0)$

$$x(t) = x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \left[v_0 + a(t - t_0)\right] \,\mathrm{d}\tau = x_0 + \left[v_0\tau + \frac{a}{2}(\tau - t_0)^2\right]_{t_0}^{t} =$$
$$= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2$$

(c) Aus $m_0 - \alpha t_1 = \dfrac{m_0}{2}$ folgt $t_1 = \dfrac{m_0}{2\alpha}$.

$$\dot{v}(t) = a(t) = \frac{F}{m(t)} = \frac{F}{m_0 - \alpha t}$$

$$v(t) = v_0 + \int\limits_0^t a(\tau) \,\mathrm{d}\tau = v_0 + F \int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{m_0 - \alpha\tau} =$$
$$= v_0 + F \left[\frac{1}{-\alpha} \left(\ln|m_0 - \alpha\tau|\right)\right]_0^t = v_0 - \frac{F}{\alpha} \left(\ln(m_0 - \alpha t) - \ln m_0\right) =$$
$$= v_0 - \frac{F}{\alpha} \ln \frac{m_0 - \alpha t}{m_0} = v_0 + \frac{F}{\alpha} \ln \frac{m_0}{m_0 - \alpha t}$$

$$x(t) = x_0 + \int\limits_0^t v(\tau) \,\mathrm{d}\tau = x_0 + \int\limits_0^t \left(v_0 + \frac{F}{\alpha} \ln \frac{m_0}{m_0 - \alpha\tau}\right) \,\mathrm{d}\tau =$$
$$= x_0 + v_0 t - \frac{F}{\alpha} \int\limits_0^t \ln\left(1 - \frac{\alpha}{m_0}\tau\right) \,\mathrm{d}\tau =$$
$$= x_0 + v_0 t - \frac{F}{\alpha}\left(-\frac{m_0}{\alpha}\right) \left[\left(1 - \frac{\alpha}{m_0}\tau\right) \cdot \left\{\ln\left(1 - \frac{\alpha}{m_0}\tau\right) - 1\right\}\right]_0^t =$$
$$= x_0 + v_0 t + \frac{F m_0}{\alpha^2} \left[\left(1 - \frac{\alpha}{m_0}t\right) \cdot \left\{\ln\left(1 - \frac{\alpha}{m_0}t\right) - 1\right\} + 1\right] =$$
$$= x_0 + v_0 t + \frac{F m_0}{\alpha^2} \left[\left(1 - \frac{\alpha t}{m_0}\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{\alpha t}{m_0}\right) + \frac{\alpha t}{m_0}\right]$$

Für die speziellen Zahlenwerte gilt:

$$v(t) = -100 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \ln\left(1 - \frac{t}{100\,\mathrm{s}}\right)$$

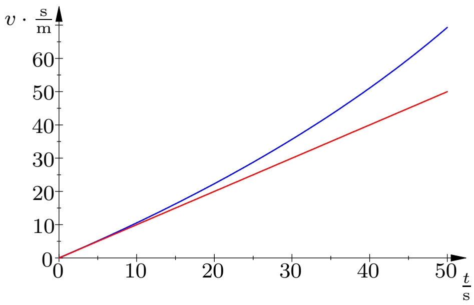
und

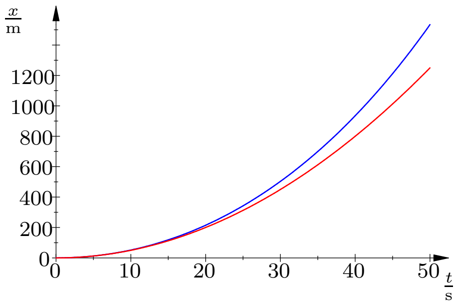
$$x(t) = 10^4\,\mathrm{m} \left[\left(1 - \frac{t}{100\,\mathrm{s}}\right) \ln\left(1 - \frac{t}{100\,\mathrm{s}}\right) + \frac{t}{100\,\mathrm{s}}\right]$$

Mit $t_1 = 50\,\mathrm{s}$ folgt $v(t_1) = 69{,}3\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $x(t_1) = 1{,}53\,\mathrm{km}$.

Ohne Sandverlust: $\overline{v}(t) = \frac{F}{m_0} t = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t$ und $\overline{x}(t) = \frac{F}{2m_0} t^2 = 0{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2$.

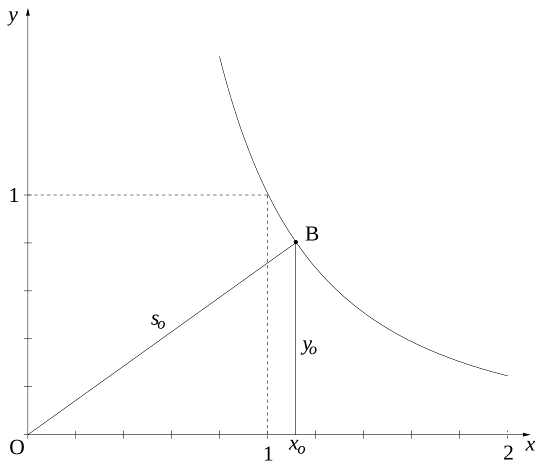
$\overline{v}(t_1) = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\overline{x}(t_1) = 1{,}25\,\text{km}$.





5.2 Extremwertaufgaben

1. (a)



(b) $s(x) = \sqrt{x^2 + f(x)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^4}}$

$$s'(x) = \frac{2x - \frac{4}{x^5}}{2\sqrt{x^2 + f(x)^2}}$$

$s'(x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = 2^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}122$

$y_0 = f(x_0) = 2^{-\frac{1}{3}} \approx 0{,}7937$

$\lim\limits_{x \to 0^+} s(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} s(x) = +\infty$
und nur eine Nullstelle von s' $\Longrightarrow$
relatives Minimum bei B $(x_0|y_0)$

(c) $s_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2} \approx 1{,}375$

In der Zeichnung hat s_0 die Länge $5 \cdot 1{,}375\,\text{cm} = 6{,}875\,\text{cm}$, in der Wirklichkeit also $2000 \cdot 6{,}875\,\text{cm} = 137{,}5\,\text{m}$.

2. (a) $t = \frac{s_1 + s_2}{c} = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{(l - x_1)^2 + y_2^2}}{c}$

$$0 = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x_1} = \frac{x_1}{cs_1} - \frac{x_2}{cs_2} = \frac{\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2}{c} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$$

(b) $t = \frac{s_1 n_1}{c} + \frac{s_2 n_2}{c} = \frac{n_1\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{c} + \frac{n_2\sqrt{(l - x_1)^2 + y_2^2}}{c}$

$$0 = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x_1} = \frac{n_1 x_1}{cs_1} - \frac{n_2 x_2}{cs_2} = \frac{n_1 \sin\alpha_1 - n_2 \sin\alpha_2}{c} \Longrightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}$$

3. (a) $V = r^2\pi h \Rightarrow h(r) = \frac{V}{r^2\pi} \Rightarrow A(r) = 2r^2\pi + \frac{2V}{r}$
   $A'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.
   Da $A(0) = \infty$ und $\lim\limits_{r\to\infty} A(r) = \infty$ handelt es sich hierbei um ein Minimum.

   (b) $A = 2r\pi(r + h) \Rightarrow h(r) = \frac{A}{2r\pi} - r \Rightarrow V(r) = \frac{1}{2}Ar - r^3\pi$
   $V'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$.
   Aus einer Grenzwertbetrachtung von $V(r)$ schließt man auf ein Maximum.

4. $p(x) = x(15 - x) \Rightarrow p'(x) = 15 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 7{,}5$
   Maximum, da der Graph von $p(x)$ eine nach unten geöffnete Parabel ist.

5. $b = 2c, a = 30 - 3c \Rightarrow V(c) = (30 - 3c) \cdot 2c \cdot c$
   $V'(c) = 120c - 18c^2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0, c_2 = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$
   Maximum, da $V'(6) > 0$ und $V'(7) < 0$.

6. (a) $V(x) = x(1\text{m} - 2x)^2 = 1\text{m}^2x - 4\text{m}x^2 + 4x^3$

   (b) $V'(x) = 1\text{m}^2 - 8\text{m}x + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}\text{m}$ oder $x_2 = \frac{1}{6}\text{m}$
   $V(0) = V(\frac{1}{2}\text{m}) = 0$.
   $V''(x) = -8\text{m} + 24x \Rightarrow V''(\frac{1}{6}\text{m}) = -4\text{m} < 0 \Rightarrow$
   Maximum bei $x_2 = \frac{1}{6}\text{m}$.

   (c) $V(\frac{1}{6}\text{m}) = \frac{2}{27}\text{m}^3$

7. (a) $V(x) = x(a - 2x)^2 = a^2x - 4ax^2 + 4x^3$

   (b) $V'(x) = a^2 - 8ax + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}a$ oder $x_2 = \frac{1}{6}a$
   $V(0) = V(\frac{1}{2}a) = 0$.
   $V''(x) = -8a + 24x \Rightarrow V''(\frac{1}{6}a) = -4a < 0 \Rightarrow$
   Maximum bei $x_2 = \frac{1}{6}a$.

   (c) $V(\frac{1}{6}a) = \frac{2}{27}a^3$

8. (a) $V(x) = x(a - 2x)(b - 2x) = abx - 2(a + b)x^2 + 4x^3$

   (b) $V'(x) = 12x^2 - 4(a + b)x + ab = 0 \Leftrightarrow$
   $x_1 = \frac{1}{6}(a + b + \sqrt{a^2 + b^2 - ab})$ oder $x_2 = \frac{1}{6}(a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - ab})$
   $V''(x) = -4(a + b) + 24x \Rightarrow$
   $V''(x_1) = 4\sqrt{a^2 + b^2 - ab} > 0 \Rightarrow$ Minimum bei x_1
   $V''(x_2) = -4\sqrt{a^2 + b^2 - ab} < 0 \Rightarrow$ Maximum bei x_2.

9. (a) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_{2/3} = \pm 1$

   (b)

(c) $A'(x) = (x \cdot f(x))' = 5x^4 - 6x^2 + 1 = 0 \Rightarrow$
$x_{1/2} = \frac{1}{10}(6 \pm \sqrt{36-20}) = \frac{1}{10}(6 \pm 4) \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{5}\sqrt{5}.$
$A''(x) = 20x^3 - 12x,$
$A''(1) > 0$, also Minimum.
$A''(\frac{1}{5}) = -\frac{8}{5}\sqrt{5} < 0$, also Maximum. Also: $\mathrm{P}\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\,|\,0{,}64\right)$

10. (a) $P(2|0)$, $Q(r\cos\varphi|r\sin\varphi)$, $R(-r\cos\varphi|r\sin\varphi)$, $S(-2|0)$
(b) $A(\varphi) = 4(1+\cos\varphi)\sin\varphi$, $\varphi \in [0; 90°]$
(c) $A(30°) = 3{,}732$, $A(45°) = 4{,}828$, $A(60°) = 5{,}196$, $A(90°) = 4$
(d)
$$\begin{aligned} A'(\varphi) &= 4(\cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 4(\cos\varphi + \cos(2\varphi)) \\ &= 8 \cdot \cos(\tfrac{3}{2}\varphi) \cdot \cos(\tfrac{1}{2}\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 60° \end{aligned}$$

11. (a)
(b) $A(\varphi) = \cos\varphi \cdot (1+\sin\varphi)$, $\varphi \in [-90°; 90°]$
(c)
$$\begin{aligned} A'(\varphi) &= -\sin\varphi \cdot (1+\sin\varphi) + \cos^2\varphi && \Leftrightarrow \\ &= -\sin\varphi - \sin^2\varphi + 1 - \sin^2\varphi \\ &= 1 - \sin\varphi - 2\sin^2\varphi = (1 - 2\sin\varphi)(1+\sin\varphi) = 0 \end{aligned}$$
1. Fall: $\sin\varphi = -1$. Für $\sin\varphi = -1$ folgt $A(\varphi) = 0$, also kein Maximum!
2. Fall: $\sin\varphi = \frac{1}{2}$ ($\Leftrightarrow \varphi = 30°$!).
Bei $\varphi = 30°$ liegt ein Maximum vor, da $A(0°) = 1$, $A(90°) = 0$ und $A(30°) = \frac{3}{4}\sqrt{3} \approx 1{,}299$.

12. (a) $b^2 + h^2 = d^2 \Rightarrow V(b) = b \cdot \sqrt{d^2 - b^2} \cdot l$. Da das Volumen immer positiv ist, ist $V(b)$ genau dann maximal, wenn $V^2(b) = b^2 \cdot (d^2 - b^2) \cdot l^2$ maximal ist $\Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}d$. $\Rightarrow$ 64% des Baumes werden genutzt.
(b) $bh^2 = b \cdot (d^2 - b^2)$ ist maximal, wenn $b = \frac{1}{\sqrt{3}}d \Rightarrow$ 60% des Baumes werden genutzt.

13. (a) $W(Z) = (m_p - m_n)c^2 Z + m_n A c^2 - 6\varepsilon A + 6\varepsilon A^{\frac{2}{3}} + \beta\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \eta\frac{(A-2Z)^2}{A}$
(b) $W'(Z) = -\alpha + Z\left(\frac{2\beta}{A^{\frac{1}{3}}} + \frac{8\eta}{A}\right) - 4\eta \Rightarrow$
minimale Bindungsenergie für
$$Z = \frac{A}{2} \cdot \frac{1 + \frac{\alpha}{4\eta}}{1 + \frac{\beta}{4\eta}A^{\frac{2}{3}}} = \frac{A}{2} \cdot \frac{1 + 9 \cdot 10^{-3}}{1 + 7{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot A^{\frac{2}{3}}}$$
(c) Für kleine A erhält man etwa gleich viele Neutronen und Protonen. Je größer A ist, umso mehr weicht die Protonenzahl von $\frac{A}{2}$ ab (kleiner).
TIP: $Z(A)$ und $\frac{A}{2}$ mit Funktionsplotprogramm zeichnen!

14. (a) Schwerpunkt jeweils bei $\frac{H}{2}$ (H: Dosenhöhe)

(b)
$$S(h) = \frac{m_D \frac{H}{2} + m_L \frac{h}{H}\frac{h}{2}}{m_D + m_L \frac{h}{H}} = \frac{m_D H^2 + m_L h^2}{2m_D H + 2m_L h}$$

$S'(h) = 0 \Leftrightarrow m_L h^2 + 2m_D H h - m_D H^2 = 0 \Leftrightarrow$
$h = \frac{1}{m_L}\left(-m_D H \pm H\sqrt{m_D(m_D + m_L)}\right)$
Da der Term unter der Wurzel größer als m_D ist und für h nur positive Werte sinnvoll sind, folgt

$$h = \frac{1}{m_L}\left(-m_D H + H\sqrt{m_D(m_D + m_L)}\right)$$

(c) $h = 0{,}28989H = 4{,}6\,\mathrm{cm}$

15. Bei einem zylindrischen Turm ist eine Querschnittsfläche, die um den Winkel ϕ gegen die Horizontale geneigt ist eine Ellipse mit der Fläche $\frac{r^2\pi}{\cos\phi}$. Die Kraft parallel zur Fläche beträgt $F_0 \sin\phi$ (F_0 ist die Gewichtskraft des abrutschenden Teils).
$\Rightarrow \sigma = \frac{F_0}{r^2\pi}\sin\phi\cos\phi$
σ ist bei festem F_0 und $r^2\pi$ für den Winkel $\phi = 45°$ maximal.

16. (a) $a + b = c = \text{konst} \Longrightarrow a \cdot b = ac - a^2 = f(a)$
1. Lösungsweg: $f'(a) = c - 2a = 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{2}c$, $f''(a) = -2 < 0$
Also: Produkt maximal für $a = \frac{1}{2}c$
2. Lösungsweg: $f(a)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel $\Longrightarrow$ $f(a)$ maximal am Scheitel $(\frac{1}{2}c|\frac{1}{4}c^2)$

(b) $a \cdot b = c = \text{konst} \Longrightarrow a + b = a + \dfrac{c}{a} = f(a)$
$f'(a) = 1 - \frac{c}{a^2} = 0 \Longrightarrow a = \pm\sqrt{c}$, $f''(a) = 2\dfrac{c}{a^3}$
1. Fall: $c > 0$, d. h. a und b haben gleiches Vorzeichen.
Für $a, b > 0$ ist $f''(a) > 0$ und damit erhält man für $a = b = \sqrt{c}$ ein Minimum. Für $a, b < 0$ ist $f''(a) < 0$ und damit erhält man für $a = b = -\sqrt{c}$ ein Maximum.
2. Fall: $c < 0 \Longrightarrow f'(a) > 1$, also kein Extremum.

17. Mit $m = \overline{\mathrm{SM}} > 0$ und $n = \overline{\mathrm{SN}} > 0$ folgt $A = \dfrac{1}{2}mn\sin\alpha \Longrightarrow$
$mn = \dfrac{2A}{\sin\alpha}$ und $m = \dfrac{2A}{n\sin\alpha}$.

$$\overline{\mathrm{MN}}^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha = \frac{4A^2}{n^2\sin^2\alpha} + n^2 - \frac{4A}{\tan\alpha} = f(n)$$

$$f'(n) = 0 \Longleftrightarrow n^4 = \frac{4A^2}{\sin^2\alpha} \Longrightarrow n = \sqrt{\frac{2A}{\sin\alpha}},\ m = \sqrt{\frac{2A}{\sin\alpha}}$$

18. $l = a+b$. Die Dreiecksfläche $A = ab\sin\alpha$ ist bei festem a und b maximal, wenn die Teilstücke einen Winkel von 90° einschließen. $\Rightarrow A(a) = ab = al - a^2$
1. Lösungsweg: $A'(a) = l - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}l$, $A''(a) = -2 < 0$, also Maximum für $a = b = \frac{1}{2}l$
2. Lösungsweg: $A(a)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel. Damit wird das Maximum am Scheitel $(\frac{1}{2}l|\frac{1}{4}l^2)$ angenommen.
3. Lösungsweg: Das Produkt zweier Zahlen mit konstanter Summe ist maximal, wenn die zwei Zahlen gleich groß sind.

19. $V(x) = x \cdot (8-2x) \cdot (5-2x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x \Rightarrow$
$V'(x) = 12x^2 - 52x + 40 = 0$ für $x_1 = 3\frac{1}{3}, x_2 = 1$
$V''(3\frac{1}{3}) > 0$, also Minimum bei $x_1 = 3\frac{1}{3}$
$V''(1) < 0$, also Maximum bei $x_2 = 1$

20. Seitenlängen des Rechtecks: a, $b \Longrightarrow A = ab \Longrightarrow d^2(a) = a^2 + \dfrac{A^2}{a^2}$

Minimum von d^2 bei $(\sqrt{A}, 2A) \Longrightarrow$ Minimum für $a = b = \sqrt{A}$, d.h. Quadrat

21.
$$d(x) = \sqrt{\left(3 - \sqrt{1 + \frac{1}{2}x^2}\right)^2 + (0-x)^2}$$

gibt den Abstand eines Punktes A$(x|f(x))$ von P an. $d(x)^2$ und damit auch $d(x)$ (da $d(x) \geq 0$) hat nur ein Minimum bei P$(0|1)$.

22. $U(x) = 2\,x + \dfrac{2\,A}{x}, \quad U'(x) = 2 - \dfrac{2\,A}{x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = y = \sqrt{A}$

23. Mantelfläche: $A(r) = r\,s\,\pi = \sqrt{r^4\,\pi^2 + \dfrac{9\,V^2}{r^2}}$

$A(r)$ minimal $\Longleftrightarrow g(r) = r^4\,\pi^2 + \dfrac{9\,V^2}{r^2}$ minimal

$$g'(r) = 4\,\pi^2\,r^3 - \frac{18\,V^2}{r^3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = r_0 = \sqrt[3]{\frac{3\,V}{\pi\sqrt{2}}}$$

$$g''(r) = 12\,\pi^2\,r^2 + \frac{54\,V^2}{r^4} > 0 \quad \Longrightarrow \quad A \text{ hat bei } r_0 \text{ ein Minimum.}$$

$$h_0 = \frac{3\,V}{r_0^2\,\pi} = r_0\,\sqrt{2}$$

24. (a) $r(x) = \left(1 + \dfrac{b}{x}\right)\sqrt{a^2 + x^2}$, $r'(x) = \dfrac{x^3 - b\,a^2}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}}$

$r'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = x_0 = a^{\frac{2}{3}}\,b^{\frac{1}{3}}$

$r'(x) < 0$ für $x < x_0$ und $r'(x) > 0$ für $x > x_0 \quad \Longrightarrow \quad$ rel. Min. von r bei x_0.

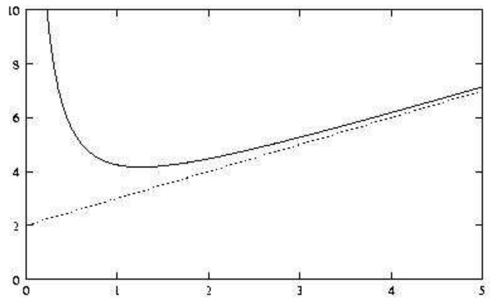
$L = r(x_0) = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

(b)
$$\begin{aligned} a = b &\implies L = 2\,a\sqrt{2} \\ a \ll b &\implies L \approx b \\ b = 2\,a &\implies L \approx 4{,}16\,a \end{aligned}$$

(c) $r(x) = \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)\sqrt{1+x^2} = (x+2)\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$

$$\lim_{x\to\infty}[r(x) - (x+2)] = \lim_{x\to\infty}\left[(x+2)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1}{\frac{1}{x+2}} \overset{\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^2}{x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 0$$



25. (a) $P(R) = R\,I^2 = U^2 \cdot \dfrac{R}{(R+R_\mathrm{i})^2}$

$$P'(R) = U^2 \cdot \frac{R_\mathrm{i} - R}{(R+R_\mathrm{i})^3} = 0 \quad\implies\quad R = R_\mathrm{i}$$

$$P''(R) = U^2 \cdot \frac{2\,R - 4\,R_\mathrm{i}}{(R+R_\mathrm{i})^4} \quad\implies\quad P''(R_\mathrm{i}) < 0 \quad\implies\quad \text{Maximum}$$

$$P_\mathrm{max} = P(R_\mathrm{i}) = \frac{U^2}{4\,R_\mathrm{i}}$$

26. (a) $V = \dfrac{13}{16}\,x^2 y, \quad y = \dfrac{16\,V}{13\,x^2}, \quad s = \dfrac{5}{8}\,x$

(b) $A'(x) = \dfrac{13}{4}\,x - \dfrac{40\,V}{13\,x^2}$

$$A'(x) = 0 \quad\implies\quad x = \sqrt[3]{\frac{160\,V}{169}}, \quad k = \frac{y}{x} = \frac{13}{10}$$

(c) $x = 8\,\mathrm{m}$, $y = 10{,}4\,\mathrm{m}$, $h = 5\,\mathrm{m}$ und $g = 3\,\mathrm{m}$

27. (a) $A_y(x) = 2\left[x\,y + \dfrac{V}{y} + \dfrac{V}{x}\right]$

(b) $A_y'(x) = 2\left[y - \dfrac{V}{x^2}\right] = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_y = \sqrt{\dfrac{V}{y}}$

(c) $F(y) = A_y(x_y) = 2\left[2\sqrt{V}\sqrt{y} + \dfrac{V}{y}\right]$

$F'(y) = 2\left[\dfrac{\sqrt{V}}{\sqrt{y}} - \dfrac{V}{y^2}\right] = 0 \quad\Longrightarrow\quad y = \sqrt[3]{V}$

Damit gilt auch $x = x_y = \sqrt[3]{V}$ und $z = \dfrac{V}{xy} = \sqrt[3]{V}$, Würfel!!

28. $p(x) = x(a-x)$, $\quad p'(x) = a - 2x = 0 \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{a}{2}$
$p''(x) = -2 < 0 \quad\Longrightarrow$ Maximum

29.

(a) $G(v) = a\,s\,B + b\,s\,B\,v^2 + \dfrac{c\,s}{v}$

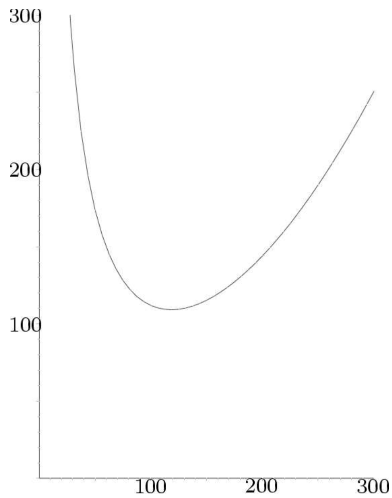
(b) $G'(v) = 2\,b\,s\,B\,v - \dfrac{c\,s}{v^2}$

$G'(v) = 0 \quad\Longrightarrow$

$v = v_0 = \sqrt[3]{\dfrac{c}{2\,b\,B}}$

(c) $v_0 = 118{,}6\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

$G_0 = G(v_0) = 109{,}21$ €



30. f symmetrisch zur y-Achse. Für $x \geqq 0$ gilt $d = f(x) = a - x^n$. A $(-x|d)$, B $(x|d)$

$F(x) = \dfrac{1}{2}\cdot 2x \cdot f(x) = a\,x - x^{n+1}$

$F(x)$ maximal für $x_0 = \sqrt[n]{\dfrac{a}{n+1}}$, $d_0 = f(x_0) = \dfrac{n\,a}{n+1}$

31. A $\left(a - \sqrt{c+a^2}\middle|c\right)$, B $\left(a + \sqrt{c+a^2}\middle|c\right)$, $\quad\overline{\mathrm{AB}} = 2\sqrt{c+a^2}$

$F(c) = \dfrac{1}{2}\cdot|c|\cdot\overline{\mathrm{AB}} = |c|\cdot\sqrt{c+a^2}$

$$F'(c) = \pm\frac{3c+2a^2}{2\sqrt{c+a^2}}$$

$F(c)$ hat relatives Maximum bei $c = -\dfrac{2\,a^2}{3}$ und ein relatives und absolutes Minimum bei $c = 0$ (Spitze von $F(c)$).

32. (a) $b = \dfrac{L}{2} - x \quad \Longrightarrow \quad h = \sqrt{b^2 - x^2} = \sqrt{\left(\dfrac{L}{2} - x\right)^2 - x^2} = \sqrt{\dfrac{L^2}{4} - Lx}$

$$A(x) = \frac{1}{2}\cdot 2x \cdot h = x\sqrt{\frac{L}{4}\,(L-4x)} = \frac{\sqrt{L}}{2}\sqrt{x^2\,(L-4x)} = \frac{\sqrt{L}}{2}\sqrt{Lx^2 - 4x^3}$$

(b) $A(x)$ ist maximal, wenn der Radikand $f(x) = Lx^2 - 4x^3$ maximal ist.

$$f'(x) = 2Lx - 12x^2 = 2x(L-6x)$$

$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = \frac{L}{6}$$

$$f''(x) = 2L - 24x \quad \Longrightarrow$$

$$f''(x_1) = 2L > 0 \text{ (Minimum)}, \qquad f''(x_2) = 2L - \frac{24L}{6} = -2L < 0 \text{ (Maximum)}$$

Also: $x_0 = \dfrac{L}{6}$.

Aus $x = x_0$ folgt $b = \dfrac{L}{2} - \dfrac{L}{6} = \dfrac{L}{3}$ und $2x = \dfrac{L}{3}$, d.h. das Dreieck ist gleichseitig.

(c)

$$A(x_0) = \frac{\sqrt{L}}{2}\sqrt{Lx_0^2 - 4x_0^3} = \frac{\sqrt{L}}{2}\sqrt{x_0^2(L-4x_0)} =$$

$$= \frac{\sqrt{L}}{2}\sqrt{\frac{L^2}{6^2}\left(L - \frac{4L}{6}\right)} = \frac{\sqrt{L}}{2}\cdot\frac{L}{6}\sqrt{\frac{L}{3}} = \frac{L^2}{12\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{36}\,L^2$$

33. (a) Preis für die Dämmung: $k_1(x) = 50\,\frac{€}{\text{m}^2}\cdot A \cdot 1{,}5 + \alpha\cdot x\cdot A\cdot 1{,}5 = 37\,500\,€ + 600\,€\cdot x$

Ölmenge in Litern: $m = \dfrac{\Delta W}{10\,\text{kWh}} = \dfrac{\beta A \Delta t}{10\,\text{kWh}}\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{3}+\frac{x}{2}} = \dfrac{10^5\,\text{l}}{\frac{1}{3}+\frac{x}{2}}$

Ölpreis: $k_2(x) = m\cdot 1{,}2\dfrac{€}{\text{l}} = \dfrac{120\,000\,€}{\frac{1}{3}+\frac{x}{2}} \quad \Longrightarrow$

$$k(x) = k_1(x) + k_2(x) = 37\,500\,€ + 600\,€\cdot x + \frac{120\,000\,€}{\frac{1}{3}+\frac{x}{2}}$$

(b) Umformen von k: $k(x) = p + qx + \dfrac{6r}{2+3x} \quad \Longrightarrow$

$$k'(x) = q - \frac{6r \cdot 3}{(2+3x)^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = x_0 = -\frac{2}{3} \overset{+}{(-)} \frac{1}{3}\sqrt{\frac{18r}{q}} = -\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{2r}{q}}$$

$$x_0 = -\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{2 \cdot 120\,000\,€}{600\,€}} = -\frac{2}{3} + 20 = 19\frac{1}{3}$$

(c) $k(18) = 61\,157{,}14\,€$, $k(20) = 61\,112{,}90\,€$, $k(0) = 397\,500{,}00\,€$

$$\frac{k(20)}{k(0)} = 0{,}154 = 15{,}4\% \quad \Longrightarrow \quad \text{um } 84{,}6\% \text{ kleiner}$$

5.3 Wachstums- und Zerfallsprozesse

1. (a) $t_A = 2$

   (b) $t_B = 2 \pm \sqrt{2}$

5.4 Optimierung

5.5 verknüpfte Funktionen

5.6 Anwendungen der Kurvendiskussion

1. (a) $P(R) = R\,I^2 = U^2 \cdot \dfrac{R}{(R+R_\mathrm{i})^2}$

   $$P'(R) = U^2 \cdot \frac{R_\mathrm{i} - R}{(R+R_\mathrm{i})^3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad R = R_\mathrm{i}$$

   $$P''(R) = U^2 \cdot \frac{2\,R - 4\,R_\mathrm{i}}{(R+R_\mathrm{i})^4} \quad \Longrightarrow \quad P''(R_\mathrm{i}) < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Maximum}$$

   $$P_\mathrm{max} = P(R_\mathrm{i}) = \frac{U^2}{4\,R_\mathrm{i}}$$

2. (a) $I_I(x) = I_{II}(x)$ für $I(x) = 0$ oder $I(x) = 1$. Aus der Berechnung eines geeigneten Funktionswertes z. B. $I_I(20°) = 0{,}85 < 0{,}92 = I_{II}(20°)$ folgt, dass für $I < 1$ die Anordnung II größere Ausschläge liefert.

   (b) $I_I(0°) = 0$, $I_I(10°) = 0{,}4$, $I_I(20°) = 0{,}85$, $I_I(40°) = 2{,}1$, $I_I(60°) = 4{,}8$, $I_I(80°) = 18{,}40$ $I_{II}(0°) = 0$, $I_{II}(10°) = 0{,}6$, $I_{II}(20°) = 0{,}92$, $I_I(40°) = 1{,}4$, $I_I(60°) = 2{,}2$, $I_I(80°) = 4{,}3$

(c)

(d) Große Empfindlichkeit bedeutet großes Δx für ein fest vorgegebenes ΔI. Empfindlichkeit$=\frac{1}{I(x)'}$

(e)

$$I_I'(x) = 0{,}04\frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$$
$$I_{II}'(x) = 0{,}1\sqrt{\frac{\cos x}{x}}\,\frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$$

3. (a) $\lim\limits_{f\to 0} A(f) = \dfrac{C}{f_0^2}$ System folgt exakt dem Erreger.

   $\lim\limits_{f\to\infty} A(f) = 0$ System kommt nicht mehr mit.

   (b) $f_R = \sqrt{f_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$

   (c) f_R nimmt mit der Eigenfrequenz f_0 des Systems zu und mit dem Reibungsfaktor γ ab. Für kleine Reibungen gilt $f_R \approx f_0$.

4. (a) $V \gg a, b \Rightarrow \frac{a}{V^2} \approx 0, V - b \approx V$
   Also $pV \approx TR$.

   (b) $p(V) = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$

   (c) Bedingung I: $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} = 0$
   Bedingung II: $\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}V^2} = \frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4} = 0$
   I in II einsetzen liefert $V_k = 3b$.
   $V_k = 3b$ in I einsetzen liefert $T_k = \frac{8a}{27bR}$.
   $T_k = \frac{8a}{27bR}$ in $p(V)$ einsetzen liefert $p_k = \frac{a}{27b^2}$.

   (d) $T_{k,\text{Sauerstoff}} = 154{,}5\,\text{K}$, $p_{k,\text{Sauerstoff}} = 5{,}08\text{MPa}$,
   $V_{k,\text{Sauerstoff}} = 0{,}0948\,\frac{m^3}{kmol}$

5. (a) i. $I(\omega) = |\frac{1}{0{,}1\omega} - 0{,}1\omega|$, $N(10|0)$

   ii. $\lim\limits_{\omega\to 0} I(\omega) = \infty$; $\lim\limits_{\omega\to\infty} I(\omega) = \infty$

   iii. Bei $\omega = 10$ nicht differenzierbar!

   iv. Für $\omega < 10$ streng monoton fallend und für $\omega > 10$ streng monoton steigend.

   (b) i. $I(10) = \sqrt{1 - \frac{1}{1+R^2}} = \frac{R}{\sqrt{1-R^2}}$

   ii. $\lim\limits_{\omega\to 0} I(\omega) = \dfrac{1}{R}$; $\lim\limits_{\omega\to\infty} I(\omega) = \infty$

   iii. waagrechte Tangente bei $\omega = 0$;
   Minimum bei $\omega = 10\sqrt{\sqrt{1+2R^2} - R^2}$

   iv.

v. $I(0)$ sinkt; $I(Minimum)$ steigt

vi. $\omega = \sqrt{50}$

6. (a) $W(Z) = (m_p - m_n)c^2 Z + m_n A c^2 - 6\varepsilon A + 6\varepsilon A^{\frac{2}{3}} + \beta \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \eta \frac{(A-2Z)^2}{A}$

   (b) $W'(Z) = -\alpha + Z\left(\frac{2\beta}{A^{\frac{1}{3}}} + \frac{8\eta}{A}\right) - 4\eta \Rightarrow$
   minimale Bindungsenergie für

$$Z = \frac{A}{2} \cdot \frac{1 + \frac{\alpha}{4\eta}}{1 + \frac{\beta}{4\eta} A^{\frac{2}{3}}} = \frac{A}{2} \cdot \frac{1 + 9 \cdot 10^{-3}}{1 + 7{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot A^{\frac{2}{3}}}$$

   (c) Für kleine A erhält man etwa gleich viele Neutronen und Protonen. Je größer A ist, umso mehr weicht die Protonenzahl von $\frac{A}{2}$ ab (kleiner).
   TIP: $Z(A)$ und $\frac{A}{2}$ mit Funktionsplotprogramm zeichnen!

7. (a) Substitution: $x = \dfrac{T}{100\,^\circ\mathrm{C}}$,
   Maximum $(0{,}22| - 0{,}41)$, Minimum $(-1{,}00| - 2{,}65)$,
   Wendepunkt $(-0{,}39| - 1{,}53)$

   (b)

   (c) Im Temperaturbereich von $-25\,^\circ$C bis $25\,^\circ$C weicht $\tilde{f}(T)$ von $f(T)$ nur geringfügig ab. Hier stellt also $f(T)$ eine genügend gute Näherung dar.
   Betrachtet man aber einen größeren Temperaturbereich, muss $\tilde{f}(T)$ verwendet werden.
   z. B. $|f(50\,^\circ\mathrm{C}) - \tilde{f}(50\,^\circ\mathrm{C})| = 0{,}204$, $\dfrac{|f(50\,^\circ\mathrm{C}) - \tilde{f}(50\,^\circ\mathrm{C})|}{\tilde{f}(50\,^\circ\mathrm{C})} = 33\%$

   Dem Diagramm entnimmt man, dass die Längenänderung $\tilde{f}(T)$ eines 10 m langen Stabes im Temperaturbereich von $-100\,^\circ$C bis $100\,^\circ$C ca. $1{,}0\frac{\mu\mathrm{m}}{^\circ\mathrm{C}}$ beträgt. Dies entspricht einer Längenausdehung um 0,00001% pro °C!

Literatur: *Mathematikaufgaben, Anwendungen aus der modernen Technik und Arbeitswelt*, Werner Schmidt, Ernst Klett Verlag, 1984

5.7 Anwendungen in der Geometrie

5.8 Aus der Physik

1. $\tan(90^\circ - \alpha) = -\tan(\alpha - 90^\circ) = -\dfrac{\sin(\alpha - 90^\circ)}{\cos(\alpha - 90^\circ)} = -\dfrac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

   Steigung von g: $\quad m = \tan\gamma = \tan(90^\circ - 2\varphi) = \dfrac{1}{\tan 2\varphi} = \dfrac{1 - \tan^2\varphi}{2\,\tan\varphi}$

$$\tan\varphi = \tan(90° - \tau) = \frac{1}{\tan\tau} = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{2ba} \quad \Longrightarrow \quad m = ba - \frac{1}{4ba}$$

Aus $g(x) = m\,x + p$ und $A \in g$ folgt

$$g(a) = \left(ba - \frac{1}{4ba}\right) a + p = ba^2 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{1}{4b}$$

Da p nicht von a abhängt, geht jeder zur y-Achse parallel einfallende Strahl durch P.

2. $v = \dot{s} = 4 \cdot 10^{14}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t + 3 \cdot 10^6\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad , \quad s(t_1) = 0{,}7\,\mathrm{m} \quad \Longrightarrow \quad t_1 = 5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$

   $v(t_1) = 2{,}3 \cdot 10^7\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

3. $v(t) = \dot{x}(t) = 40\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}^4} \cdot t^3 - 240\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}^3} \cdot t^2 + 320\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}^2} \cdot t$

   $a(t) = \dot{v}(t) = 120\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}^4} \cdot t^2 - 480\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}^3} \cdot t + 320\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}^2}$

   Nullstellen von x: $t_{01} = 0$, $t_{02} = 4\,\mathrm{h}$

   Nullstellen von v: $t_{11} = 0$, $t_{12} = 2\,\mathrm{h}$, $t_{13} = 4\,\mathrm{h}$

   Nullstellen von a: $t_{21} = \left(2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)\,\mathrm{h}$, $t_{22} = \left(2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)\,\mathrm{h}$

   $x_{\max} = x(2\,\mathrm{h}) = 160\,\mathrm{km}$, $v_{\max} = v(t_{21}) = \frac{640}{9}\sqrt{3}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \approx 123\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

4. (a) $I_I(x) = I_{II}(x)$ für $I(x) = 0$ oder $I(x) = 1$. Aus der Berechnung eines geeigneten Funktionswertes z. B. $I_I(20°) = 0{,}85 < 0{,}92 = I_{II}(20°)$ folgt, dass für $I < 1$ die Anordnung II größere Ausschläge liefert.

   (b) $I_I(0°) = 0$, $I_I(10°) = 0{,}4$, $I_I(20°) = 0{,}85$, $I_I(40°) = 2{,}1$, $I_I(60°) = 4{,}8$, $I_I(80°) = 18{,}40$ $I_{II}(0°) = 0$, $I_{II}(10°) = 0{,}6$, $I_{II}(20°) = 0{,}92$, $I_I(40°) = 1{,}4$, $I_I(60°) = 2{,}2$, $I_I(80°) = 4{,}3$

   (c)

   (d) Große Empfindlichkeit bedeutet großes Δx für ein fest vorgegebenes ΔI. Empfindlichkeit$=\frac{1}{I(x)'}$

   (e)

$$I_I'(x) = 0{,}04\frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$$

$$I_{II}'(x) = 0{,}1\sqrt{\frac{\cos x}{x}}\;\frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$$

5. (a) $v_L = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v_2 = -25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v_{1\,,t>6\,\mathrm{s}} = 30\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

   (b) $1\,\mathrm{s} \leqq t \leqq 6\,\mathrm{s}$: $x_1(t) = x_0 + v_0\,t + \frac{a}{2}\,t^2$, $v_1(t) = v_0 + a\,t$

   $x_1(1\,\mathrm{s}) = 0$, $x_1(6\,\mathrm{s}) = 125\,\mathrm{m}$, $v_1(6\,\mathrm{s}) = 125\,\mathrm{m} \quad \Longrightarrow$
   $a = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $v_0 = 18\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $x_0 = -19\,\mathrm{m}$, $v_1(0) = v_1(1\,\mathrm{s}) = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

6. (a) $\ddot{s}(t) = -\omega^2 s_0 \sin(\omega t)$
   (b) $\ddot{s}(t) = -\omega^2 s_0 \cos(\omega t)$
   (c) $\ddot{s}(t) = -\omega^2 s_0 \sin(\omega t + \varphi)$
   (d) Die Lösung (a) beschreibt Schwingungen, die in der Nulllage starten und die Lösung (b) Schwingungen, die bei der maximalen Auslenkung starten. Dagegen ist (c) eine allgemeine Lösung der Gleichung für beliebige Anfangsbedingungen, die dann den Phasenwinkel φ festlegen. Dazu entnimmt man aus dem Experiment $s(0s)$ und $\dot{s}(0s)$ und setzt die Werte in $s(t)$ und $\dot{s}(t)$ ein. Daraus erhält man den Phasenwinkel φ.

7.
$$\dot{s}(t) = -\frac{k}{2m} s(t) + s_0 \omega e^{-\frac{k}{2m}t} \cdot \cos(\omega t)$$
$$\ddot{s}(t) = \left(\frac{k}{2m}\right)^2 s_0\ e^{-\frac{k}{2m}t} \cdot \sin(\omega t) - 2\frac{k}{2m}\omega s_0\ e^{-\frac{k}{2m}t} \cdot \cos(\omega t) - \omega^2 s_0\ e^{-\frac{k}{2m}t} \cdot \sin(\omega t)$$
Einsetzen liefert:
$$s_0\ e^{-\frac{k}{2m}t} \cdot \sin(\omega t) \cdot m \cdot \left(\frac{D}{m} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2 - \omega^2\right) = 0$$

8. (a)
   i. $S(m) = 35000\ m^2 - 2m \cdot 21250 + 12950 \Rightarrow m = 0{,}607$
   ii. $S(m) = 5600\ m^2 - 2m \cdot 10700 + 20450 \Rightarrow m = 1{,}91$
   iii. $S(m) = 8400\ m^2 - 2m \cdot 24230 + 69921 \Rightarrow m = 2{,}88$
   iv. $S(m) = 750\ m^2 - 2m \cdot 222 + 65{,}79 \Rightarrow m = 0{,}296$

   (b)
$$\begin{aligned} S(m) &= (ma_1 - b_1)^2 + (ma_2 - b_2)^2 + (ma_3 - b_3)^2 + ... + (ma_n - b_n)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2) \cdot m^2 \\ &\quad -2 \cdot (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + ... + a_n b_n) \cdot m \\ &\quad +(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + ... + b_n^2) \end{aligned}$$

   (c) $p = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2$, $q = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + ... + a_n b_n$ und $r = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + ... + b_n^2$.
   (d) $m = \frac{q}{p}$

9. (a) $n(v) = \dfrac{v \cdot 1\,\mathrm{h}}{l + s(v)}$
   (b)

	$30\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$	$50\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$	$80\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$	$100\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$
trocken	13,3 m	27,7 m	57,5 m	82,9 m
nass	19,9 m	46,0 m	104,5 m	156,4

(c)

	30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$	50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$	80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$	100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$
trocken	1640	1531	1280	1138
nass	1204	980	730	620

Mit zunehmender Geschwindigkeit nimmt die Anzahl der passierenden Autos ab!

(d) $n(v) = \dfrac{v \cdot 1\,\text{h}}{5 + v + \frac{1}{2b}v^2} \Rightarrow n'(x) = \dfrac{(5 - \frac{1}{2b}v^2) \cdot 1\,\text{h}}{(5 + v + \frac{1}{2b}v^2)^2} = 0 \Leftrightarrow v = \pm\sqrt{10b}$

Negative Lösung nicht sinnvoll! $\Rightarrow$
trockene Straße: $n(v)$ maximal für $v = 8{,}4\frac{\text{m}}{\text{s}} = 30{,}1\frac{\text{km}}{\text{h}}$
nasse Straße: $n(v)$ maximal für $v = 5{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}} = 19{,}7\frac{\text{km}}{\text{h}}$
$n(v)$ ist für $v < n_{\max}$ streng monoton steigend und für für $v > n_{\max}$ streng monoton fallend.

(e) Das Maximum von $n(v)$ liegt bei erstaunlich niedrigen Geschwindigkeiten. Geschwindigkeitsbegrenzungen sind bei hohem Verkehrsaufkommen sinnvoll. Sie verbessern den Verkehrsfluss ($n(v)$ wird größer!).
$n(v)$ wird auch dann größer, wenn der Sicherheitsabstand $s(v)$ verringert wird. Dies ist jedoch nicht anzustreben, da dadurch das Unfallrisiko steigt.

10. Für $x < 0$ kann die Bahnlinie mit $f_1(x) = 0$ beschrieben werden.
Bedingung für die Bahnlinie:
$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ (I), $k(x) \propto x$ (II)
Ansatz für $x \geq 0$: $f_2(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + ... \quad \Longrightarrow$

$f_2'(x) = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + ...,\quad f_2''(x) = 2c + 6dx + 12ex^2 + ...$

Aus (I) folgt $a = b = c = 0$. (II) kann mit diesem Polynomansatz nicht exakt erfüllt werden, da man mit obigem Ansatz $k(x) = \dfrac{6dx + 12ex^2 + ...}{(1 + (3dx^2 + 4ex^3 + ...)^2)^{\frac{3}{2}}}$ erhält.

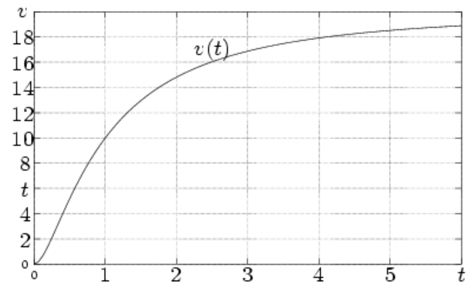
Für kleine x ist jedoch $f'(x)$ sehr klein und kann vernachlässigt werden. Man erhält $k(x) \approx f''(x)$. Für diese Näherung liefert $f_2(x) = dx^3$ eine Lösung.

Bestimmung von d (Einheit: km) aus $\dfrac{1}{r} = k(x) \approx f''(x) = 6dx$:
$k(0{,}2) \approx 6d \cdot 0{,}2 = \frac{1}{1} \Longrightarrow d = \frac{5}{6}$

Betrachtung der Abweichung von der exakt berechneten Krümmung bei $x = 0{,}2$:
$$k(0{,}2) = \frac{6 \cdot \frac{5}{6} \cdot 0{,}2}{(1 + (3 \cdot \frac{5}{6} \cdot 0{,}2^2)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1{,}015}$$

Bei $x = 0{,}2$ wird der Krümmungsradius von $1000\,\text{m}$ nicht exakt erreicht. Dies macht sich in einem kleinen Ruck im Zug an der Übergangsstelle bemerkbar. In der Praxis werden solche Abweichungen toleriert, da der entstehende Ruck geringer als das übliche Rütteln des Zuges ist.

11.



(a) $v_\infty = 20$

(b) $a(t) = \dfrac{120\,t}{(1+t)^4}, \quad a_\infty = 0^+$

(c) $a(t) > 0$ für $t > 0 \quad \Longrightarrow \quad v(t)$ streng steigend für $t > 0$, d.h. $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 20^-$.

12. $F(t) = m\,\ddot{x}(t) = 6\,\alpha\,m\,t$