SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Jahrgangsstufe 12 (Gymnasium)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

21. September 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Integration **3**
- 1.1 bestimmtes Integral . . . 3
- 1.2 Integralfunktion . . . 5
- 1.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . 7
- 1.4 Stammfunktion und unbestimmtes Integral . . . 8
- 1.5 Berechnung von Flächeninhalten . . . 9

2 Funktionen und deren Graphen **14**
- 2.1 Höhere Ableitungen . . . 14
- 2.2 Graph und Funktion . . . 14
- 2.3 Ableitungsfunktion und Integralfunktion . . . 14
- 2.4 Krümmungsverhalten und Wendepunkte . . . 14
- 2.5 Wirtschaft . . . 20
- 2.6 Kurvendiskussion . . . 24
  - 2.6.1 Diskussion einzelner Funktionen . . . 24
  - 2.6.2 Diskussion von Funktionenscharen . . . 33
  - 2.6.3 Ortskurven besonderer Punkte . . . 37
  - 2.6.4 Kurvendiskussion mit dem Computer . . . 40

3 Stochastik: Binomialverteilung und beurteilende Statistik **46**
- 3.1 Urnenmodell - Ziehen mit und ohne Zurücklegen . . . 46
- 3.2 Bernoulli-Experiment und -Kette . . . 49
- 3.3 Binomialkoeffizient, Binomialverteilung . . . 51
- 3.4 Anwendungen der Binomialverteilung, u. a. einseitiger Signifikanztest . . . 54

4 Geometrie: Geraden und Ebenen im Raum **56**
- 4.1 Lineare Abhängigkeit von Vektoren . . . 56
- 4.2 Geraden und Ebenen . . . 57
- 4.3 Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen . . . 59
- 4.4 Abstand- und Winkelbestimmung . . . 62
- 4.5 Anwendungen . . . 66

5 Anwendungen der Differential- und Integralrechnung **69**
- 5.1 Integrale in der Physik . . . 69
- 5.2 Extremwertaufgaben . . . 70
- 5.3 Wachstums- und Zerfallsprozesse . . . 78
- 5.4 Optimierung . . . 78

5.5 verknüpfte Funktionen 78
5.6 Anwendungen der Kurvendiskussion 78
5.7 Anwendungen in der Geometrie 82
5.8 Aus der Physik 82

1 Integration

1.1 bestimmtes Integral

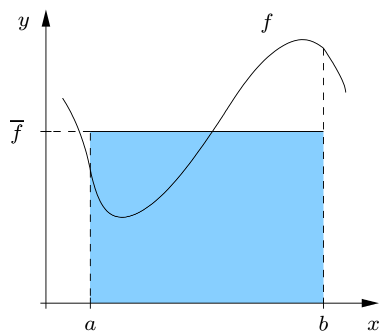
1. (a) $\int\limits_0^1 x^n \, \mathrm{d}x$ (b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{\omega}} A \sin \omega t \, \mathrm{d}t$ (c) $\int\limits_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$ (d) $\int\limits_{-1}^{-2} \left(\frac{x^5}{3} - \frac{3}{x^7} \right) \mathrm{d}x$

   (e) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \frac{x}{3} \, \mathrm{d}x$ (f) $\int\limits_0^3 (x^2+1)(2x^2-x) \, \mathrm{d}x$ (g) $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x} \, \mathrm{d}x$ (h) $\int\limits_1^3 \frac{x^2+2x+1}{x^4+x^3} \, \mathrm{d}x$

2. **Mittelwerte von Funktionen**

   Der Mittelwert einer Funktion f im Intervall $[a, b]$ ist definiert als

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$



   Berechne die Mittelwerte folgender Funktionen im Intervall $[a, b]$ und veranschauliche das Ergebnis am Grafen der Funktion:

   (a) $f(x) = \frac{1}{x^2} \quad a = \frac{1}{2}, \; b = 4$ (b) $f(x) = 4 - \frac{x^4}{4}, \quad a = -2, \; b = 2$

   (c) $f(x) = \sin x, \quad a = 0, \; b = 2\pi$ (d) $f(x) = \sin x, \quad a = 0, \; b = \pi$

   (e) $f(x) = \cos x, \quad a = 0;$ für welches b ist $\overline{f} = \frac{1}{2}$?

3. Ein Stein wird vom Boden aus ($y = 0$) mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen. Für seine Höhe y in Abhängigkeit von der Zeit t gilt

$$y(t) = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$$

   Berechne die mittlere Höhe $\overline{h}$ während der Flugphase, ausgedrückt durch die maximale Höhe h.

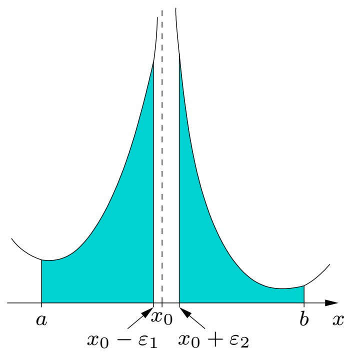
4. (a) $\int \sqrt[3]{x} \, \mathrm{d}x$ (b) $\int\limits_R^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

(c) Berechne den Mittelwert von $f(x) = x^n$ $(n > 0)$ im Intervall $[0, a]$.

5. Berechne folgende Integrale und veranschauliche sie als Flächeninhalte:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ (d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

6. Enthält das Integrationsintervall $[a, b]$ des bestimmten Integrals $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ eine Polstelle bei x_0, dann definiert man (uneigentliches Integral):



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_a^{x_0-\varepsilon_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{x_0+\varepsilon_2}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(a) Berechne $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

(b) Der Wert von $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$ hängt davon ab, wie ε_1 und ε_2 zusammenhängen.

Berechne I für

- $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ (Cauchyscher Hauptwert)
- $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$

Gib ein Beispiel für die Wahl von ε_1 und ε_2 an, für das $I = +\infty$ ist.

7. Für welche n ist $I_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n}$ bzw. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^n}$ endlich?

8. Berechne numerisch mit Untersummen (S_u), mit Obersummen (S_o) und mit der Midpoint-Rule (S_m) (n Teilintervalle). Berechne den relativen Fehler der drei Ergebnisse und des Mittelwertes $\overline{S}$ von S_u und S_o (genaue Ergebnisse in Klammern).

(a) $\displaystyle\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x}$, $n = 4$ (1,609437912) (b) $\displaystyle\int_0^2 2^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, $n = 4$ (1,04474066)

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x$, $n = 4$ (0,3465735903) (d) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, $n = 5$ (1,851937052)

9. (a) $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ (b) $\int\limits_0^{\ln 2} 5\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t$ (c) $\int\limits_{\mathrm{e}+1}^{\mathrm{e}^2-1} \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$ (d) $\int\limits_1^{2} \frac{\mathrm{d}x}{-3x+1}$

   (e) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x$ (f) $\int\limits_4^{5} (4x+5)^n\,\mathrm{d}x$ (g) $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$ (h) $\int\limits_0^{1} \frac{x^4-x^2+1}{x+1}\,\mathrm{d}x$

10. (a) $\int \mathrm{e}^{ax+b}\mathrm{d}x$ (b) $\int\limits_1^{\sqrt{7}} \frac{2x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$

    (c) Berechne numerisch (3 Intervalle): $\int\limits_0^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$

11. (a) $\int \frac{x^3}{5x^4+3}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int \frac{x^{n-1}}{x^n+a}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int\limits_2^{3} \frac{x^2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$

    (d) $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$ (e) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$ (f) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$

12. (a) $\int (ax+b)^{99}\mathrm{d}x$ (b) $\int\limits_1^{2} \frac{3x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$ (c) Berechne x: $\int\limits_2^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1$

1.2 Integralfunktion

1. Schreibe folgende Funktionen als Integralfunktion. Achte auch auf die Definitionsmenge!

   (a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$ (b) $g(x) = \cos x$ (c) $h(x) = \tan x$

2. Wie unterscheiden sich folgende Integralfunktionen.

   (a) $f(x) = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{x} \cos t\,\mathrm{d}t$ und $g(x) = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{x} \cos t\,\mathrm{d}t$

   (b) $f(x) = \int\limits_2^{x} h(t)\,\mathrm{d}t$ und $g(x) = \int\limits_{-2}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t$ mit $h(t) = \frac{1}{t^2} + t.$

   Zeichne die Grafen von h, f und g.

3. (a) Warum sind alle Stammfunktionen von f mit $f(x) = x^2$ auch Integralfunktionen von f?
   (b) Welche Stammfunktionen von f mit $f(x) = x^3$ sind keine Integralfunktionen von f?

4. Schreibe $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$ als Integralfunktion. Achtung, Fallunterscheidung!

5. Schreibe $f(x) = \frac{1}{x}$ als Integralfunktion.

6. Schreibe die Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{5} - \sqrt{1 - x^2}$ als Integralfunktion:

$$f(x) = \int\limits_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(2 Lösungen!)}$$

   Zeichne den Grafen der Integrandenfunktion g mit der Einheit 2 cm auf beiden Achsen. Veranschauliche mit Hilfe des Grafen am speziellen Beispiel $f(0{,}8)$, warum beide Lösungen gleichwertig sind.

7. Schreibe die Funktion f mit $f(x) = 5 - \sqrt{9 + x^2}$ als Integralfunktion:

$$f(x) = 5 - \sqrt{9 + x^2} = \int\limits_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

   (2 Lösungen). Zeichne den Grafen der Integrandenfunktion g im Intervall $[-5, 5]$ (Einheiten: 1 cm auf der x-Achse, 2 cm auf der y-Achse) und veranschauliche am Beispiel $f(5)$ mit Hilfe des Grafen, warum beide Lösungen gleichwertig sind.

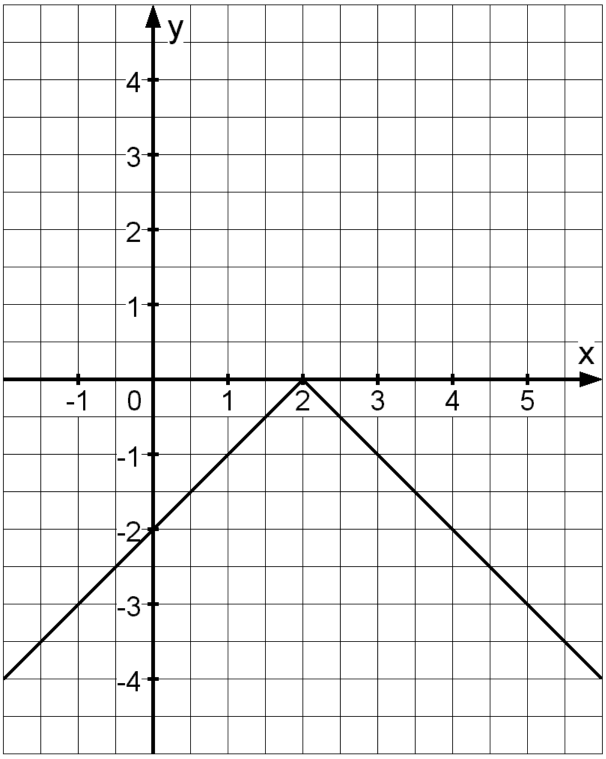
8. (a) Von der Funktion f weiß man

$$f'(x) = g(x) \quad \text{und} \quad f(a) = b$$

   mit einer bekannten Funktion g. Schreibe $f(x)$ mit Hilfe einer Integralfunktion.
   (b) Berechne $f(x)$ aus

$$f'(x) = \sqrt[3]{x^4} \quad \text{und} \quad f(8) = -\frac{1}{7}.$$

9. Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}$, der kongruent zum Graphen der Betragsfunktion, $g : x \to |x|$, $D_g = \mathbb{R}$ ist.



(a) Zeichnen Sie den Graphen der Betragsfunktion g ein und beschreiben Sie, wie G_f aus dem Graphen von g entsteht.

(b) Zeichnen Sie den Graphen der Integralfunktion $F : x \to \int_2^x f(t)dt$ für $-1 \leq x \leq 5$ in das gegebene Diagramm ein. (Hinweis: Eine integralfreie Darstellung der Funktion F ist hierzu nicht notwendig.)

Quelle: Handreichung für den Mathematikunterricht am Gymnasium, Das Abitur im Fach Mathematik am achtjährigen Gymnasium, Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung Abteilung Gymnasium, August 2008, www.isb.bayern.de

1.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

1. Geben Sie die Stammfunktion von $\frac{\sin x}{4+2\cos x}$ an.

2. (a) Von der Funktion f kennt man die Ableitung

$$f'(x) = 9 - x^2$$

und den Funktionswert $f(3) = 10$. Berechne $f(1)$.

(b) Von der Funktion g kennt man die Ableitung

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

und den Funktionswert $g(1) = 1$. Berechne die Gleichung von g und stelle sie in der Wurzelschreibweise dar.

3. Beweise mittels einer sehr ausführlichen Rechnung:

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin x \cos x}{2} + C$$

4. (a) Beweise die Integralformel: $\displaystyle\int \cos^2 ax \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2a} \sin ax \cos ax + C$

   (b) Berechne den Mittelwert der Funktion $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$ im Intervall $[0, \pi]$.

1.4 Stammfunktion und unbestimmtes Integral

1. Beweise: F und G mit $F(x) = \sqrt{x+1}$ und $G(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{x+1}}$ sind Stammfunktionen der gleichen Funktion f.

2. Beweise: $\displaystyle\int x^2 \cos ax \, \mathrm{d}x = \frac{2x}{a^2} \cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right) \sin ax + C$

3. (a) $\displaystyle\int nx^{n-1} \, \mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int t^{10} \, \mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int t^{10} \, \mathrm{d}t$

   (d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^n}$ (e) $\displaystyle\int |x| \, \mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int \frac{2x^6 + 3x^5 + 3x^3 + 1}{x^5} \, \mathrm{d}x$

   (g) $\displaystyle\int (ax + a) \, \mathrm{d}x$ (h) $\displaystyle\int (ax + a) \, \mathrm{d}a$ (i) $\displaystyle\int (ax + a) \, \mathrm{d}t$

4. (a) $\displaystyle\int x^{999} \, \mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x} \, \mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \sqrt[n]{x^m} \, \mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$

   (e) $\displaystyle\int \cos 3x \, \mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int A \sin \omega t \, \mathrm{d}t$ (g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2}$ (h) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}a}{a^2}$

5. (a) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{3x} \, \mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \sqrt{\mathrm{e}^x} \, \mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x}$

   (e) $\displaystyle\int a\mathrm{e}^{ax} \, \mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int A\mathrm{e}^{-bt} \, \mathrm{d}t$ (g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x}}$ (h) $\displaystyle\int \left(2x^2 + 3\mathrm{e}^{-3x}\right) \mathrm{d}x$

6. Beweise: (a) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (x-1)\mathrm{e}^x + C$

   (b) $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (x^2-2x+2)\mathrm{e}^x + C$

   (c) $\displaystyle\int x^3\mathrm{e}^{ax} \,\mathrm{d}x = \frac{a^3x^3-3a^2x^2+6ax-6}{a^4}\cdot \mathrm{e}^{ax} + C$

7. Von der Funktion f kennt man die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ und den Funktionswert $f(3) = 1$. Ermittle die Gleichung, berechne die Nullstelle und zeichne den Grafen von f.

8. Der Graf von F mit $F'(x) = f(x)$ enthält den Punkt P. Wie lautet $F(x)$ für

   (a) $f(x) = \cos x + 1$, $\mathrm{P}(\pi|\pi)$ (b) $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$, $\mathrm{P}(8|0)$

9. Löse folgende Anfangswertprobleme:

   (a) $F'(x) = \dfrac{3}{8}x(4-x)$, $F(4) = 4$ (b) $\dot{x} = \dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{t^2}$, $x(2) = 0$

10. (a) $\displaystyle\int (ax+b)^n \,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{7-x}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \sqrt[n]{(a-bx)^m}\,\mathrm{d}x$

    (d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5x-3}}$ (e) $\displaystyle\int \cos(3x-4)\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int A\sin(\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t$

    (g) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x-3}\mathrm{d}x$ (h) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{8-2t}$ (i) $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{\frac{x}{2}-1}\mathrm{d}x$

1.5 Berechnung von Flächeninhalten

1. Berechne die Fläche A, die von G_f, der x-Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen wird. Zeichne den Grafen und veranschauliche A.

   (a) $f(x) = 2x+1$, $a = -2$, $b = 1$ (b) $f(x) = x^2-4$, $a = -3$, $b = 0$
   (c) $f(x) = \left|x^3+1\right|$, $a = -2$, $b = 1$ (d) $f(x) = x^{-2}+x^{-3}$, $a = -2$, $b = -0{,}5$

2. Wir betrachten die Funktion f mit $f(x) = 4-x^2$.

   (a) Zeichne den Grafen von f im Intervall $[-2;2]$ und berechne den Inhalt A_0 des endlichen Flächenstücks, das G_f mit der x-Achse einschließt.

   (b) Eine Parallele zur x-Achse durch den Punkt $\mathrm{P}(0,a)$ mit $0 < a < 4$ teilt das eben betrachtete Flächenstück in zwei Teile, das obere davon hat den Inhalt A_1. Veranschauliche den Sachverhalt für $a = 2$ im schon vorhandenen Grafen und berechne dann A_1 in Abhängigkeit von a (also *nicht* für den speziellen Wert $a = 2$).

   Für welches a ist $A_1 = \frac{1}{2}A_0$?

3. Die Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{4}{x}$ und $g(x) = 5 - x$ schließen ein endliches Flächenstück mit dem Inhalt A ein. Zeichne die Grafen der beiden Funktionen und berechne A.

4. Gegeben ist die Funktion $f : x \to \sqrt{6 - x}$ in ihrem maximalen Definitionsbereich D_f.
   (a) Geben Sie D_f an und begründen Sie, dass f umkehrbar ist.
   (b) Geben Sie den Definitions- und Wertebereich der Umkehrfunktion an, und bestimmen Sie den Term der Umkehrfunktion. Zeichnen Sie die Graphen von f und f^{-1} in ein gemeinsames Koordinatensystem.
   (c) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem sich die beiden Graphen schneiden, sowie den Inhalt des „herzförmigen" Flächenstücks, das von den Graphen von f und f^{-1} sowie den Koordinatenachsen im I. Quadranten eingeschlossen wird.

   Quelle: Handreichung für den Mathematikunterricht am Gymnasium, Das Abitur im Fach Mathematik am achtjährigen Gymnasium, Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung Abteilung Gymnasium, August 2008, www.isb.bayern.de

5. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{3x-2}{3(x-1)^2}$.
   (a) Zeigen Sie dass der Graph der Funktion für $x > \frac{2}{3}$ oberhalb der x-Achse verläuft.
   (b) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion nur bei $x = \frac{1}{3}$ ein Minimum hat.
   (c) Berechnen Sie das Integral $\int_2^6 f(x)dx$

6. Der Querschnitt einer Staumauer wird dargestellt durch die Koordinatenachsen, der Gerade $y = 10$ und dem Graphen der Funktion $s(x) = a + b \ln x$. Der Graph von s geht durch die Punkte $A(e^2|0)$ und $B(e|10)$
   (a) Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b.
   (b) Unter welchem Winkel schneidet der Graph der Funktion die x-Achse.
   (c) Skizzieren Sie den Querschnitt der Staumauer und schätzen Sie den Querschnitt der Staumauer ab.
   (d) Berechnen Sie den Querschnitt der Staumauer exakt.

7. Zeichne die Grafen der Funktionen f und g mit

$$f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = 1 - \sin x$$

im Intervall $[0, \frac{7\pi}{3}]$ in ein Koordinatensystem (Einheit 2 cm). Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Funktionen im angegebenen Intervall. Die beiden Grafen schließen, jeweils zwischen einem Schnittpunkt und dem darauf folgenden Schnittpunkt, zwei verschieden große Flächenstücke ein. Berechne ihre Inhalte A_1 und A_2.

8. Wir betrachten die drei Funktionen f_1, f_2 und f_3 mit den Gleichungen

$$f_1(x) = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad f_3(x) = \frac{1}{x^{1-\varepsilon}}$$

mit $0 < \varepsilon < 1$.

(a) Zeichne die Grafen von f_1, f_2 und f_3 im Intervall $[0{,}1; 10]$ für $\varepsilon = 0{,}01$. Was fällt auf?

(b) Welche Ungleichungen verbinden $f_1(x)$, $f_2(x)$ und $f_3(x)$? Untersuche das Verhalten der drei Funktionen am Rand ihres Definitionsbereichs.

(c) Berechne die Stammfunktionen F_1, F_2 und F_3 der Funktionen f_1, f_2 und f_3 mit

$$F_1(1) = F_2(1) = F_3(1) = 0.$$

Welche geometrische Bedeutung haben $F_1(x)$, $F_2(x)$ und $F_3(x)$?

Untersuche das Verhalten von F_1, F_2 und F_3 für $x \to 0^+$ und $x \to +\infty$.

(d) Zeichne die Grafen von F_1, F_2 und F_3 im Intervall $[1; 10^{80}]$ mit einem logarithmischen Maßstab auf der x-Achse (statt x wird $0{,}1 \lg x$ angetragen, d.h. bei 3 cm z.B. ist $x = 10^{30}$, bei 6 cm $x = 10^{60}$).

Warum ist der Graf von F_2 in dieser Darstellung eine Gerade?

9. **Die harmonische Reihe**

Die Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \ ...$$

heißt *harmonische* Reihe, die Teilsummen bezeichnen wir mit

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ ... \ + \frac{1}{n}$$

(a) Berechne H_n für alle n mit $1 \leqq n \leqq 20$.

(b) Veranschauliche H_n durch die Fläche unter einer Treppenfunktion und zeichne auch die Grafen von $f(x) = \dfrac{1}{x}$ und $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ ein. Zeige durch den Vergleich mit einem geeignet gewählten Integral, dass die harmonische Reihe konvergiert, d.h. dass

$$\lim_{n\to\infty} H_n = \infty$$

gilt.

(c) Beweise mit Hilfe des schon erstellten Grafen:

$$\boxed{\ln(1+n) < H_n < 1 + \ln n}$$

Zeige, dass die Breite b des Intervalls, in dem H_n liegt, kleiner als eins ist. Wie groß ist b für $n \gg 1$? Zeichne die Punkte $(n|H_n)$ und die Grafen von $r(x) = \ln(1+x)$ und $s(x) = 1 + \ln x$ für $1 \leqq x \leqq 20$ in ein Koordinatensystem.

(d) In welchem Intervall liegt n, wenn H_n gegeben ist? Berechne dieses Intervall konkret für $H_n \approx 100$.

10. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{20 \ln x}{x^2} \quad \text{mit} \quad D_f = \mathbb{R}^+.$$

(a) Berechne die Nullstellen von f und untersuche das Verhalten von f an den Rändern von D_f.

(b) Untersuche f auf Monotonie und Extremwerte und Zeichne den Grafen von f im x-Intervall $[0,9;6]$.

(c) Beweise, dass F mit

$$F(x) = \frac{-20(1+\ln x)}{x}$$

eine Stammfuktion von f ist und stelle F als Integralfunktion von f dar.

(d) Berechne den Inhalt A der endlichen Fläche, die von G_f, der x-Achse, der Nullstelle und der Geraden $x = \sqrt{\mathrm{e}}$ begrenzt wird.

11. Gegeben sind die Funktionen f, g und h mit $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{4}{3}(x+1)$ und $h(x) = \frac{1}{x}$.

(a) Berechne die Koordinaten aller Schnittpunkte der drei Funktionen und zeichne die Grafen der Funktionen in ein Koordinatensystem ($-2 \leqq x \leqq 2{,}5$).

(b) Die Grafen von f und g schließen ein endliches Flächenstück mit dem Inhalt A ein. Berechne A.

(c) In welchem Verhältnis teilt der Graf von h das in Teilaufgabe (b) behandelte Flächenstück?

12. Gegeben sind die Funktionen f, g und h mit $f(x) = \frac{x^2}{8}$, $g(x) = \sqrt{x}$ und $h(x) = \frac{1}{x}$ mit den Definitionsmengen $\mathbb{R}_0^+$ (f und g) bzw. $\mathbb{R}^+$.

(a) Berechne die Koordinaten aller Schnittpunkte der drei Funktionen und zeichne die Grafen der Funktionen in ein Koordinatensystem ($0 \leqq x \leqq 5$, Einheit 2 cm).

(b) Die Grafen aller drei Funktionen schließen für $x \geqq 1$ ein endliches Flächenstück ein. Berechne seinen Inhalt A.

13. Die Grafen der beiden Funktionen f und g mit

$$f(x) = \frac{4}{x} - 1 \quad \text{und} \quad g(x) = 4x - x^2$$

schließen für $x > 0$ ein Flächenstück mit endlichem Inhalt A ein. Berechne die Nullstellen der beiden Funktionen und zeichne ihre Grafen im x-Intervall $]0;5]$. Weise nach, dass die der Zeichnung entnommenen Schnittpunkte tatsächlich die gemeinsamen Punkte der beiden Funktionsgrafen sind und berechne dann A.

14. (a) Zeichne die Grafen der Funktionen f, g und h mit

$$f(x) = \frac{4}{x}, \quad g(x) = \frac{4}{x^{1,1}} \quad \text{und} \quad h(x) = \frac{4}{x^2}$$

im x-Intervall $[1;6]$ in ein Koordinatensystem (Einheit: 2 cm).

(b) Mit g_x bezeichnen wir das Lot auf die x-Achse bei x. $A_1(x)$ ist die Fläche, die von G_f, G_g und g_x eingeschlossen wird, $A_2(x)$ wird von G_g, G_h und g_x eingeschlossen. Stelle die Gleichungen von A_1 und A_2 auf.

(c) Welche Ungleichung vermutet man zwischen $A_1(x)$ und $A_2(x)$, wenn man die Grafen der Funktionen betrachtet? Bestätige die Vermutung durch das Aufstellen einer Wertetabelle für $A_1(x)$ und $A_2(x)$ mit $x \in \{5, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5\}$.

(d) Berechne die Grenzwerte von $A_1(x)$ und $A_2(x)$ mit $x \to \infty$. Wie vertragen sich diese Ergebnisse mit der Vermutung aus Teilaufgabe (c)? Erweitere die Wertetabelle für $A_1(x)$ und $A_2(x)$ und bestimme möglichst genau den „kritischen Punkt“.

2 Funktionen und deren Graphen

2.1 Höhere Ableitungen

1. Berechnen Sie die m-te Ableitung von $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$.
2. Berechnen Sie die ersten fünf Ableitungen von $f(x) = \sin x$.
   Wie lautet die n-te Ableitung von f?
3. Berechnen Sie die ersten vier Ableitungen von $f(x) = \frac{1}{x}$.
   Wie lautet die n-te Ableitung von f?
4. Berechnen Sie die ersten fünf Ableitungen von $f(x) = x^4 - x^2 + \sqrt{x}$.
   Wie lautet die n-te Ableitung von f für $n \geqq 5$?
5. Nennen Sie mindestens zwei Funktionen, deren n-te Ableitung 1 ist.

2.2 Graph und Funktion

2.3 Ableitungsfunktion und Integralfunktion

2.4 Krümmungsverhalten und Wendepunkte

1. Berechne die Ableitungen folgender Funktionsterme:
   (a) $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ (b) $h(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ (c) $k(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ (d) $f(x) = 5x\mathrm{e}^{-x^2}$
   (e) Untersuche f auf Nullstellen, Symmetrie, relative Extrema und Wendepunkte.
   Zeichne den Grafen von f im x-Intervall $[-3, 3]$.

   Es darf, ohne nachzurechnen, $f'''(x) = -10\left(4x^4 - 12x^2 + 3\right)\mathrm{e}^{-x^2}$ verwendet werden.

2. **Krümmung**

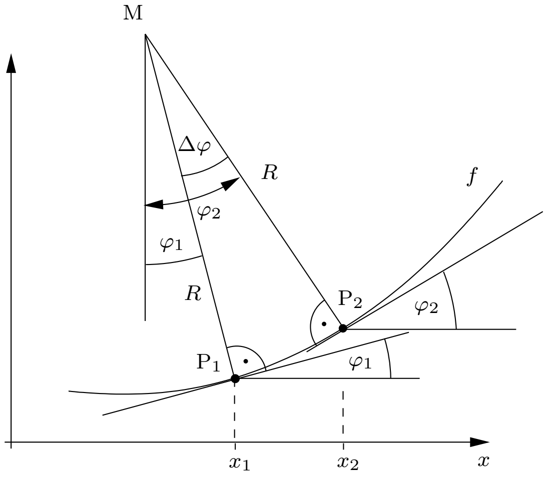
$P_1(x_1 \,|\, f(x_1))$ und $P_2(x_2 \,|\, f(x_2))$ mit $x_2 = x_1 + \Delta x$ sind zwei benachbarte Punkte auf dem Grafen von f. Die Normalen auf G_f in P_1 und P_2 schneiden sich in M. Wenn P_2 immer näher zu P_1 wandert, gilt

$$\overline{MP_2} \approx \overline{MP_1} =: R$$

und wegen „$\Delta\varphi$ sehr klein“:

$$\Delta\varphi \approx \tan\Delta\varphi \approx \frac{\Delta s}{R}$$

mit $\Delta s = \overline{P_1P_2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.



$$\boxed{\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}}$$

(a) Beweise unter Verwendung der angegebenen trigonometrischen Formel:

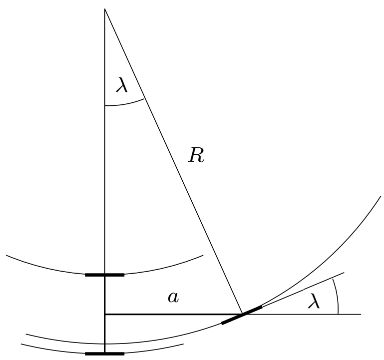
$$R(x) = \frac{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}$$

$R(x)$ heißt *Krümmungsradius* von f an der Stelle x. $R(x)$ ist der Radius eines Kreises, der G_f in einer kleinen Umgebung von x am besten annähert. Als *Krümmung* von f an der Stelle x definiert man

$$\boxed{k(x) = \frac{f''(x)}{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}}$$

Welche Beziehung besteht zwischen $R(x)$ und $k(x)$?

(b) Die Bedeutung der Krümmung kann man sich wie folgt veranschaulichen: Ein Dreirad, dessen Achsabstand a so klein ist, dass sich die Krümmung k von f zwischen Vorderrad und Hinterrädern kaum ändert, fährt entlang des Grafen von f. Wie hängt die Krümmung $k(x)$ mit dem Lenkwinkel λ zusammen, wenn $\lambda < 0$ Ausschlag nach rechts und $\lambda > 0$ Ausschlag nach links bedeutet?



(c) Ein Auto mit dem Achsabstand $a = 4$ fährt langsam durch eine S-Kurve mit der Gleichung

$$f(x) = 10\sin\left(\frac{\pi}{30} \cdot x\right) \quad \text{mit} \quad 0 \leqq x \leqq 60$$

(die Zahlenwerte für a, x und $f(x)$ verstehen sich in Metern). Zeichne die Grafen von $f(x)$ und $\lambda(x)$.

3. **Schuldenwachstum**
   Die Funktion f mit $f(t) = -\frac{1}{8}((t-2002)^3 - 3)(t-2005) + 4$ beschreibt im Intervall $t \in [2001; 2005]$ die Entwicklung der Staatsschulden (in Mio EUR) eines fiktiven Landes zwischen den Jahren 2001 und 2005.
   (a) Bestimme die Wendepunkte der Funktion.
   (b) Zur Schlagzeile ,,Die Neuverschuldung sinkt!" nimmt ein Politiker Stellung: ,,...damit sinkt die Schuldenlast für unsere Bürger". Beurteile die Aussage des Experten mit Hilfe der in a) bestimmten Punkte.

   Quelle: Veränderungen verstehen - aus qualitativer Sicht, Stefan Hußmann, PM Heft 31, Februar 2010, 52.Jg, S. 4-8

4. Berechnen Sie für folgende Funktionen die Ortskurve der Wendepunkte.
   (a) $f(x) = x^3 + x^2 + kx$
   (b) $f(x) = x^3 + kx^2 + x$
   (c) $f(x) = kx^3 + x^2 + x$

5. Gegeben ist die Funktion $g(x) = x^4 + 6x^3 - 24x^2 + 2x + 7$
   (a) Berechnen Sie die Gleichungen der zwei Wendetangenten von $g(x)$.
   (b) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Wendetangenten.

6. Bestimmen Sie für folgende Funktionen die Lage der Extrema und Wendepunkte ($D = \mathbb{R}$).
   (a) $f_1(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$
   (b) $f_2(x) = \dfrac{x}{1+x^4}$
   (c) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^n}, \quad n \in \mathbb{N}$ und n gerade

7. Bestimmen Sie für folgende Funktionen die Lage der Extrema und Wendepunkte und Untersuchen Sie das Verhalten an den Grenzen der Definitionsmenge.
   (a) $f_1(x) = \dfrac{x}{1+x}$

(b) $f_2(x) = \dfrac{x}{1+x^3}$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^n}, \quad n \in \mathbb{N}$ und n ungerade

8. Bestimmen Sie bei folgenden Funktionen Nullstellen, Extrema und Wendepunkte.
   (a) $f(x) = -x^3 + 9x + 10$
   (b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 14x + 15$
   (c) $f(x) = 3x^3 + 9x^2 - x - 3$
   (d) $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + x - 2$
   (e) $f(x) = 3x^3 - x^2 - 7x + 5$
   (f) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$

9. Berechne für folgende Funktionen die Gleichung der Tangente im Wendepunkt.
   Für die Teilaufgaben (d)-(g):
   Wie verändert sich die Tangente, wenn die vorkommenden Parameter variiert werden?
   Zeichnen Sie mit einer geeigneten Software die zugehörigen Kurvenscharen.
   (a) $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 3x + 1$
   (b) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 9$
   (c) $f(x) = 3x^3 - x + 7$
   (d) $f(x) = ax^3 + x^2 + x + 1, a \neq 0$
   (e) $f(x) = x^3 + bx^2 + x + 1$
   (f) $f(x) = x^3 + x^2 + cx + 1$
   (g) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

10. Geben Sie jeweils den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion an, die die folgenden Bedingungen erfüllt:
   (a) $f(-2) = 0$, $f(-1) = 0$, $f(3) = 0$, $f(0) = 2$
   (b) $f(-3) = 0$, $f(1) = 0$, $f(0) = 2$
   (c) $f(1) = 0$, $f(5) = 0$, Maximum bei $(3|2)$
   (d) Maximum bei $(2|4)$, Minimum bei $(1|1)$
   (e) Terrassenpunkt bei $(0|0)$, Maximum bei $(-6|27)$

11. Im Eisenbahnbau werden im Flachland für die Bahnstrecke normalerweise Krümmungsradien von 1000 m oder mehr genommen. Darüberhinaus wird die Bahnstrecke so gewählt, dass an der Übergangsstelle kein Knick entsteht, die Krümmung stetig ist und sich proportional zum zurückgelegten Weg ändert.
    Bestimmen sie den Übergangsbogen der Länge 200 m einer geradlinigen Bahnlinie zu einem Kreisbogen mit Radius 1000 m. Verwenden sie dazu als Näherung Polynome. Als Länge der Kurve darf näherungsweise die x-Koordinate verwendet werden.

    Hinweis:
    Die Krümmung $k(x)$ einer Kurve ist der Kehrwert des zugehörigen Krümmungsradius $\varrho(x)$:
    $$k(x) = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \varrho(x) = \frac{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}$$

    Literatur: A. Kirsch, *Übergangsbögen bei Eisenbahngleisen als Thema für den Mathematikunterricht*, MNU 50/3, S. 144-150

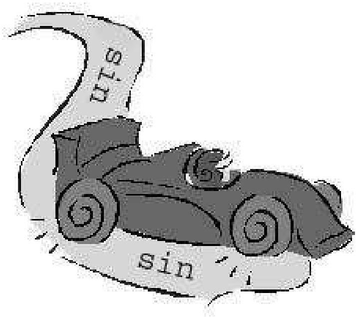
12. Bestimmen sie die Gleichung einer Funktion $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$, deren Graph bei $x = v$ eine Nullstelle und bei $x = u$ einen Terrassenpunkt hat.

13. Der Graph einer Polynomfunktion vierten Grades hat folgende Eigenschaft:
    - Maximum bei M(0|0)
    - Wendepunkt bei W(2|0) mit einer zur Geraden $y = -4x$ parallelen Tangente.

    Geben sie die Funktionsgleichung der Polynomfunktion an.

14. **Sinus und Kosinus**

    Wenn du dir vorstellst, auf der Sinuskurve $f(x) = \sin\alpha$ von links nach rechts zu fahren, folgen abwechselnd Rechts- und Linkskurven aufeinander.
    (a) Skizziere die Sinuskurve und die Kosinuskurve für $0° \leqq \alpha \leqq 720°$ und teile sie in Rechts- und Linkskurven ein.
    (b) Gib die Teilintervalle an, in denen beide Kurven Linkskurven sind.
    (c) Gib die Teilintervalle an, in denen die Sinuskurve eine Linkskurve und die Kosinuskurve eine Rechtskurve ist.



15. **Beweisen Sie**: Ist x_1 Nullstelle des Polynoms $P(x)$ und gilt $P'(x_1) = 0$, dann ist x_1 eine r-fache Nullstelle mit $r \geqq 2$.

    Hinweis: Schreiben Sie $P(x)$ als Produkt und differenzieren Sie.

16. Suchen Sie alle Extremwerte der Funktion $f(x) = x^2 - 2 \cdot |x-2| - 3x$.

17. Die im Unterricht angegebenen **hinreichenden** Kriterien für einen Extremwert sind keine **notwendigen** Kriterien. Es gibt z.B. Funktionen mit einem relativen Minimum in x_0, für die es kein noch so kleines positives h gibt mit f monoton fallend in $]\,x_0 - h\,;x_0\,[$ und f monoton steigend in $]\,x_0\,;x_0 + h\,[$. Als Beispiel betrachten wir die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot (2 + \sin\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$
    (a) Berechnen Sie alle x_{0k} mit $f(x) = 2\,x^2$, alle x_{1k} mit $f(x) = 3\,x^2$ sowie alle x_{2k} mit $f(x) = x^2$ und zeichnen Sie dann die Graphen von x^2, $2x^2$, $3x^2$ und f mit den Einheiten $0{,}1 \mathrel{\widehat{=}} 4\,\text{cm}$ auf der x-Achse und $0{,}01 \mathrel{\widehat{=}} 1\,\text{cm}$ auf der y-Achse im Bereich $-0{,}2 < x < 0{,}2$.

    (b) Zeigen Sie, dass f bei $x = 0$ stetig ist und dort ein absolutes und relatives Minimum besitzt.

    (c) Berechnen Sie $f'(x)$ für $x \neq 0$.

    (d) Berechnen Sie $f'(0)$ mit der Definition der Ableitung.

    (e) Zeigen Sie, dass f' bei $x = 0$ unstetig ist und in jeder noch so kleinen Umgebung von 0 unendlich oft das Vorzeichen wechselt.

2.5 Wirtschaft

1. Eine Elektronikfirma produziert Walkmans. Die Produktionskosten von x Geräten werden durch die Funktion $K(x) = 10^{-8} \cdot x^3 - 0{,}003\,x^2 + 200\,x$ beschrieben. Der Nachfragepreis des Gerätes (in €) wurde zu $n(x) = 332 - 0{,}006 \cdot x$ ermittelt, d.h. bei einem Verkaufspreis von $n(x)$ pro Stück sind x Leute bereit, das Gerät zu kaufen. Ermitteln Sie den maximal möglichen Gewinn der Firma. Bei welcher Stückzahl x_0 und bei welchem Verkaufspreis $n(x_0)$ wird der maximale Gewinn erzielt?

2. In einer Marktwirtschaft wird der Preis einer Ware durch Angebot und Nachfrage bestimmt. In Modellen zur Beschreibung marktwirtschaftlicher Mechanismen spricht man vom Angebotspreis, den der Anbieter verlangt und vom Nachfragepreis, den der Käufer bereit ist zu zahlen. Oft werden Angebotspreis und Nachfragepreis durch Funktionen $a(x)$ und $n(x)$ beschrieben. x ist dabei die Nachfrage.
   (a) Wie hängen Angebotspreis und der Nachfragepreis mit der Nachfrage x zusammen? Was bedeutet dies für das Monotonieverhalten von $a(x)$ bzw. $n(x)$? Wie erhält man den Verkaufspreis einer Ware?
   (b) Bestimmen Sie den Verkaufspreis einer Ware graphisch und rechnerisch für
      i. $a(x) = 20\sqrt{x}$ und $n(x) = 100 - 7x$.
      ii. $a(x) = 15\sqrt{x}$ und $n(x) = 200 - 23x$.
      iii. $a(x) = 20x + 50$ und $n(x) = 200 - 5x^2$.
      iv. $a(x) = 200x + 300$ und $n(x) = 970 - 13x^2$.
      v. $a(x) = 30x + 100$ und $n(x) = \dfrac{400}{x} + 200$.
      vi. $a(x) = 7x + 200$ und $n(x) = \dfrac{5000}{x} - 130$.

3. Der Preis einer Ware reguliert in einer Marktwirtschaft die Nachfrage. Steigt der Preis, so geht die Nachfrage zurück.
   Für den Anbieter ist es wichtig zu wissen, wie stark oder schwach die Nachfrage x auf eine Preisänderung reagiert. Die Funktion $n(x)$ gibt den Nachfragepreis an, den der Käufer bereit ist zu zahlen.
   (a) Bei welchen Gütern ist eine starke bzw. schwache Veränderung der Nachfrage bei einem verändertem Preis zu erwarten?
   (b) Um die Stärke dieser Reaktion auszudrücken führt man den Elastizitätskoeffizienten $\varepsilon(x)$ einer Funktion ein. Er gibt die relative Änderung der Nachfrage x pro relativer Änderung des Nachfragepreises $n(x)$ an.
   Begründen Sie, warum es nicht sinnvoll ist die absolute Änderung des Arguments pro alsoluter Änderung des Funktionswertes anzugeben.

(c) Drücken Sie $\varepsilon(x)$ der Nachfragefunktion $n(x)$ durch x, $n(x)$ und $n'(x)$ aus.

(d) Berechnen Sie die Elastizität folgender Nachfragefunktionen.

  i. $n(x) = 100 - 7x$.

  ii. $n(x) = 200 - 23x$.

  iii. $n(x) = 200 - 5x^2$.

  iv. $n(x) = 970 - 13x^2$.

  v. $n(x) = \frac{400}{x} + 200$.

  vi. $n(x) = \frac{5000}{x} - 130$.

(e) Zeigen Sie, dass der Umsatz $U(x) = x \cdot n(x)$ bei fallendem Preis steigt, wenn die Elastizität ε der Nachfragefunktion kleiner als -1 ist. Überlegen Sie dazu, wie sich ein fallender Preis auf die Nachfrage x auswirkt.

(f) Wie kann der Umsatz erhöht werden, wenn die Elastizität ε der Nachfragefunktion größer als -1 ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

(g) Geben Sie für die Nachfragefunktionen aus Teilaufgabe (d) die Bereiche an, in denen der Umsatz durch Preissteigerung- bzw. Preissenkung erhöht werden kann.

4. Die Produktionskosten $K(x)$ und der Umsatz $U(x) = x \cdot n(x)$ eines Unternehmens hängen von der Nachfrage x auf dem Markt ab. $n(x)$ ist der Nachfragepreis einer Ware.

(a) Leiten Sie eine Gleichung zur Berechnung des maximal möglichen Gewinns her. Deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

(b) Berechnen Sie für folgende Fälle den maximal möglichen Gewinn. Geben Sie jeweils den Preis der Ware im Gewinnmaximum an.

  i. $n(x) = 500 + \frac{120}{x}, \quad K(x) = 300 + 20x + 3x^2$

  ii. $n(x) = 60 + \frac{4000}{x}, \quad K(x) = 70 + 2x + 0{,}4x^2$

  iii. $n(x) = 100 - 60x, \quad K(x) = 3 + 10x - 2x^2 + 0{,}2x^3$

  iv. $n(x) = 500 - 12x, \quad K(x) = 300 + 20x - x^2 + 0{,}1x^3$

5. Eine Elektronikfirma produziert Walkmans. Die Produktionskosten von x Geräten werden durch die Funktion $K(x) = 10^{-8} \cdot x^3 - 0{,}003\,x^2 + 200\,x$ beschrieben. Der Nachfragepreis des Gerätes (in €) wurde zu $n(x) = 332 - 0{,}006 \cdot x$ ermittelt, d.h. bei einem Verkaufspreis von $n(x)$ pro Stück sind x Leute bereit, das Gerät zu kaufen. Ermitteln Sie den maximal möglichen Gewinn der Firma. Bei welcher Stückzahl x_0 und bei welchem Verkaufspreis $n(x_0)$ wird der maximale Gewinn erzielt?

6. Die Produktionskosten pro Stück $K_D(x) = \dfrac{K(x)}{x}$ eines Unternehmens hängen von der Menge der produzierten Ware x ab.
   (a) Berechnen Sie für folgenden Kostenfunktionen die Menge x, für die die Kosten pro Stück minimal sind. Geben Sie die minimalen Produktionskosten pro Stück an.
      i. $K(x) = 300 + 3x^2 + 20x$
      ii. $K(x) = 70 + 2x + 0{,}8x^2$
   (b) Zur Bestimmung des Minimums der Produktionskonsten pro Stück verwendet man häufig die Grenzkosten $K'(x)$. Zeigen Sie, dass $K'(x)$ die Funktion $K_D(x)$ in einem Punkt mit waagrechter Tangente schneidet.
   Welche weitere Bedingung muss erfüllt sein, damit die Produktionskosten pro Stück ein Minimum haben?
   (c) Berechnen Sie für folgende Kostenfunktionen die Menge x, für die die Kosten pro Stück minimal sind. Geben Sie die minimalen Produktionskosten pro Stück an.
      i. $K(x) = 20 + 3x + x^2 + x^3$
      ii. $K(x) = 144 + 2x + x^2 + \frac{5}{2}x^3$
      iii. $K(x) = 350 + 5x + 4x^2 + x^3$

7. Nach dem Einkommensteuergesetz §32a der Bundesrepublik Deutschland (1997) beträgt die Einkommensteuer

   bis 12 095 DM (Grundfreibetrag) 0 DM.

   von 12 096 DM bis 55 727 DM in DM: $(86{,}63 \cdot y + 2\,590) \cdot y$

   von 55 728 DM bis 120 041 DM in DM: $(151{,}91 \cdot z + 3\,346) \cdot z + 12\,949$

   von 120 042 DM an in DM: $0{,}53 \cdot x - 22\,842$

   Das zu versteuernde Einkommen ist auf den nächsten durch 54 ohne Rest teilbaren Betrag abzurunden, wenn es nicht bereits durch 54 ohne Rest teilbar ist.

   y ist ein Zehntausendstel des 12 042 DM übersteigenden Teils des abgerundeten zu versteuernden Einkommens.
   z ist ein Zehntausendstel des 55 674 DM übersteigenden Teils des abgerundeten zu versteuernden Einkommens.
   x ist das abgerundete zu versteuernden Einkommen.

   (a) Berechnen Sie die zu zahlende Einkommensteuer für ein zu versteuerndes Einkommen von 13 000 DM, 23 000 DM, 56 000 DM, 66 000 DM, 130 000 DM und 150 000 DM.
   (b) Berechnen Sie für die zu versteuernden Einkommen aus Teilaufgabe (a), welchen Prozentsatz des Einkommens die Steuern betragen.

(c) Stellen Sie die zu bezahlende Einkommensteuer S in DM in Abhängigkeit vom zu versteuernden Einkommen E in DM für folgende Intervalle graphisch dar:

i. $E \in [12\,000; 12\,400]$

ii. $E \in [70\,200; 70\,469]$

iii. $E \in [124\,200; 124\,469]$

(d) Im Absatz (5) des Einkommensteuergestz heißt es:

„Bei Ehegatten... beträgt die tarifliche Einkommensteuer... das Zweifache des Steuerbetrags, der sich für die Hälfte ihres gemeinsam zu versteuernden Einkommens... ergibt.“

Geben Sie für ein zu versteuerndes Einkommen von 130 000 DM die bei Ehegatten zu zahlende Einkommensteuer an. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Teilaufgabe (a).

8. Nach dem Einkommensteuergesetz §32a der Bundesrepublik Deutschland (1997) beträgt die Einkommensteuer

bis 12 095 DM (Grundfreibetrag) 0 DM.

von 12 096 DM bis 55 727 DM in DM: $(86{,}63 \cdot y + 2\,590) \cdot y$

von 55 728 DM bis 120 041 DM in DM: $(151{,}91 \cdot z + 3\,346) \cdot z + 12\,949$

von 120 042 DM an in DM: $0{,}53 \cdot x - 22\,842$

y ist ein Zehntausendstel des 12 042 DM übersteigenden Teils des abgerundeten zu versteuernden Einkommens.
z ist ein Zehntausendstel des 55 674 DM übersteigenden Teils des abgerundeten zu versteuernden Einkommens.
x ist das abgerundete zu versteuernden Einkommen.

Das zu versteuernde Einkommen ist auf den nächsten durch 54 ohne Rest teilbaren Betrag abzurunden, wenn es nicht bereits durch 54 ohne Rest teilbar ist.

(a) Geben Sie die im Einkommensteuergesetz definierte Funktion ohne Berücksichtigung der Rundungsregel als intervallweise definierte Funktion $f(x)$ auf $\mathbb{R}_0^+$ in Abhängigkeit vom zu versteuerndem Einkommen x in DM an. Wählen Sie folgende Intervallgrenzen: $< 12\,096$, $< 55\,728$ und $< 120\,042$.

(b) Untersuchen Sie f und die dem Gesetz exakt entsprechende Funktion g auf Stetigkeit.

(c) Zeichnen Sie f und die im Einkommensteuergesetz definierte Funktion g für $x < 12800$.

(d) Stellen Sie die Funktion f mit einer geeigneten Software für $x < 150000$ graphisch dar.

(e) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f.

(f) Stellen Sie f' mit einer geeigneten Software für $x < 150000$ graphisch dar und interpretieren Sie das Diagramm.

2.6 Kurvendiskussion

2.6.1 Diskussion einzelner Funktionen

1. Wir betrachten die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$$

(a) Berechne $f(x)$ für $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ und zeichne den Grafen von f im x-Intervall $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$. Einheiten: 2 cm auf der y-Achse, $\pi \mathrel{\widehat{=}} 6\,\text{cm}$ auf der x-Achse.

(b) Beweise: $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x - \frac{1}{\sin x} + C$

(c) Berechne die Fläche, die von G_f, der x-Achse und den beiden Geraden $x = \frac{\pi}{6}$ und $x = \frac{5\pi}{6}$ eingeschlossen wird.

2. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = 1 - 3{,}3 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}}.$$

Untersuche f zunächst auf Symmetrie, berechne dann die Nullstellen und die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ und ermittle die Koordinaten der relativen Extremwerte und der Wendepunkte. Zeichne den Grafen von f im Intervall $[-6; 6]$.

3. Von der Funktion f ist bekannt:

$$f'(x) = \frac{x^2}{x^3 + 1} \quad \text{und} \quad f(0) = 1$$

(a) Diskutiere f (Nullstellen, Grenzwerte, Extremwerte, Wendepunkte, Graf).

(b) Zeige, dass sich der Graf von f für große x beliebig nahe an den Grafen von g mit $g(x) = 1 + \ln x$ annähert. Zeichne den Grafen von g in das schon vorhandene Diagramm ein.

(c) Für welche x unterscheidet sich $g(x)$ um weniger als ein Hundertstel von $f(x)$?

4. Die beiden Funktionen f und g mit

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \quad \text{und} \quad g(x) = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad D_f = D_g = \mathbb{R}^+$$

schließen ein endliches Flächenstück mit dem Inhalt A ein. Diskutiere die beiden Funktionen, zeichne ihre Grafen und berechne A.

5. Wir betrachten die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x, \quad D = \mathbb{R}^+$$

   (a) Berechne $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ darf für das Weitere vorausgesetzt werden.

   (b) Untersuche f auf Extremwerte und Wendepunkte und zeichne den Grafen von f im x-Intervall $]0;5]$ (Einheit 2 cm).

   (c) Eine weitere Funktion ist g mit

$$g(x) = \int\limits_{1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

   Schreibe $g(x)$ in einer integralfreien Darstellung. Welche Nullstelle hat g?

   (d) A_1 ist der Inhalt der Fläche, die von G_f, der x-Achse und den Geraden $x = \frac{1}{2}$ und $x = 1$ eingeschlossen wird, A_2 dagegen wird von G_f, der x-Achse und den Geraden $x = 1$ und $x = 2$ eingeschlossen. Berechne A_1 und A_2 mit Hilfe der Funktion g und berechne exakt das Verhältnis der beiden Flächeninhalte.

6. Wir betrachten die Funktion f mit

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}, \quad D = \mathbb{R}$$

   (a) Berechne die Nullstelle von f und untersuche das Verhalten von f an den Rändern von D.

   (b) Untersuche f auf Extremwerte und Wendepunkte und zeichne den Grafen von f im x-Intervall $]-1;5]$ (Einheit 2 cm).

   [Nur zur Kontrolle: $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$, $f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$]

   (c) Eine weitere Funktion ist g mit

$$g(x) = \int\limits_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Beweise:

$$g(x) = 1 - (x+1)\mathrm{e}^{-x}$$

Welche Nullstelle hat g?

(d) Verwende bereits vorhandene Ergebnisse, um die Extremwerte und Wendepunkte von g zu bestimmen. Zeichne den Grafen von g im x-Intervall $]-1;5]$ (Einheit 2 cm).

(e) Berechne $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Interpretiere das Ergebnis geometrisch, einmal bezüglich des Grafen von f und einmal bezüglich des Grafen von g.

7. Untersuche die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{2}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Nullstellen, Verhalten an den Rändern von D_f, Monotonie, Extremwerte und Wendepunkte. Zeichne den Grafen von f im Intervall $[-2; 4{,}5]$.

Für welche x-Werte gilt $f(x) = -2$?

8. Untersuche die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2, \quad D_f = \mathbb{R}$$

auf Symmetrie, Nullstellen, Verhalten an den Rändern von D_f, Extremwerte und Wendepunkte. Zeichne den Grafen von f im Intervall $[-3; 3]$.

Für welche x-Werte gilt $f(x) = -2$?

9. Untersuche die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 2x + 1, \quad D_f = \mathbb{R}$$

auf Nullstellen, Verhalten an den Rändern von D_f, Monotonie, Extremwerte und Wendepunkte. Zeichne den Grafen von f im Intervall $[-1; 6]$.

10. Untersuche die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x-1}}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

auf Symmetrie, Nullstellen, Verhalten an den Rändern von D_f, Monotonie, Extremwerte und Terrassenpunkte. Zeichne den Grafen von f im Intervall $[-1; 6]$.

11. Untersuche die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{20 \ln x}{x^2}, \quad D_f = \mathbb{R}^+$$

auf Nullstellen, Verhalten an den Rändern von D_f, Monotonie, Extremwerte und Wendepunkte. Zeichne die Grafen von f, f' und f'' im Intervall $[0{,}9; 6]$ in ein Diagramm. Veranschauliche die Zusammenhänge zwischen den Nullstellen der Ableitungsfunktionen und den besonderen Stellen im Grafen von f.

12. Untersuche die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 3}$$

auf maximale Definitionsmenge, Nullstellen, Verhalten an den Rändern von D_f, Extremwerte und Wendepunkte. Zeichne den Grafen von f und eventuelle Asymptoten im Intervall $[-1; 7]$.

13. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{16}(x^4 - 10x^2 + 9).$$

  (a) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion auf Symmetrie.
  (b) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $(-3 \,|\, ?)$. Zeichnen sie die Tangente in ein Koordinatensystem mit $x \in [-5\,; 5]$ und $y \in [-3\,; 6]$ ein.
  (c) Unter welchem Winkel schneidet die Tangente im Punkt $\left(\frac{3}{2} \,|\, ?\right)$ die x-Achse?
  (d) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.
  (e) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion. Wo liegen Extrema und Terrassenpunkte?
  (f) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion im Intervall $[-4\,; 4]$ in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe (b).

14. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x(x-3)^2$.
  (a) Untersuchen Sie die Funktion auf Symmetrie.
  (b) Bestimmen Sie die Lage der Extrema und Wendepunkte.
  (c) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten.
  (d) Skizzieren Sie die Funktion.

15. Gegeben ist die Funktion $g(x) = \dfrac{1}{20}\,(x^4 - 24\,x^2 + 80)$.

(a) Untersuchen Sie die Funktion auf Symmetrie- und Monotonieverhalten.
(b) Bestimmen Sie die Lage der Nullstellen.
(c) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten.
Geben Sie die Lage der Extrema und Wendepunkte an.
(d) Skizzieren Sie die Funktion.

16. Gegeben sind die Funktionen $f_+(x) = tx + \sqrt{25 - x^2}$ und $f_-(x) = tx - \sqrt{25 - x^2}$.
(a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktionen an.
(b) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktionen f_+ und f_-.
(c) Zeigen Sie, dass zu jedem Punkt $(x_+|y_+)$ auf dem Graphen von f_+ eine dazu punktsymmetrischen Punkt $(x_-|y_-)$ auf dem Graphen von f_- gibt.
(d) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f_+ und f_- und bestimmen sie Art und Lage der Extrema.
(e) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Funktionen.
(f) Zeichnen Sie $f_+(x)$ und $f_-(x)$ für $t = 2$.
(g) Stellen Sie mit einer geeigneten Software $f_+(x)$ und $f_-(x)$ für verschiedene Werte von t graphisch dar.

17. Wir betrachten die Funktion $\quad f(x) = \sin 2x - \cos x \quad$ mit $\quad D_f = \left[-\frac{\pi}{2} \,;\, \frac{3\pi}{2} \right]$.
Berechnen Sie die Nullstellen und die Punkte mit waagrechter Tangente. Zeichnen Sie G_f.

18. Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$ mit $a > 0$ und $D = \mathbb{R}$.
(a) Geben Sie die Nullstellen der Funktion an.
Für welche Werte a erhält man drei, zwei bzw. eine Nullstelle?
(b) Berechnen Sie die x-Koordinaten der Punkte mit waagrechten Tangenten.
Für welche Werte a erhält man zwei, einen bzw. keinen Punkt mit waagrechter Tangente?
(c) Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.
(d) Berechnen Sie die Ortskurve der Wendepunkte für festes b und variables a.
(e) Geben Sie für $a = \frac{3}{4}$ und $b = 2$ die Funktionsgleichung, Lage der Extrema und Wendepunkte an.
(f) Zeichnen Sie die Funktion mit den Parameterwerten aus (e).

19. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^5 - 5x^4 + 1$.
    (a) Diskutieren Sie qualitativ, wie der Graph von $f(x)$ aussieht.
    (b) Bestimmen Sie Extrema und Wendepunkte der Funktion.
    (c) Skizzieren Sie den Graph der Funktion.
    (d) Bei Polynomen fünften Grades können die Nullstellen nicht mehr analytisch bestimmt werden. Ein Verfahren zur numerischen Nullstellenbestimmung ist das Newton-Verfahren:

        An den Graphen der Funktion wird in einem Punkt $(x_i|y_i)$, in der Nähe einer Nullstelle, eine Tangente gelegt. Deren Schnittpunkt mir der x-Achse liefert x_{i+1}. Zu diesem $x-$Wert wird der zugehörige Funktionswert y_{i+1} berechnet. Nun beginnt das Verfahren erneut. Die Folge x_1, x_2, x_3... konvergiert gegen die Nullstelle, wenn $|f'' \cdot f/f'^2| < 1$ ist.

        Machen Sie sich dieses Verfahren der Nullstellenbestimmung anhand einer Skizze klar.
    (e) Zeichnen Sie den Graph der Funktion im Intervall [0,1] (Maßstab für x-Richtung: $1 \mathrel{\hat{=}} 10cm$) und bestimmen Sie in diesem Intervall graphisch die Nullstelle.
    (f) Leiten Sie eine Formel zur numerischen Iteration der Nullstelle her.
    (g) Wenden Sie die Formel auf obige Funktion an. Starten Sie bei $x_1 = 1$ und rechnen Sie bis i=6.

20. Wir betrachten die Funktion $\quad f(x) = \frac{1}{8} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x - 2 \quad$ mit der Nullstelle $x_{01} = -2$.
    (a) Berechnen Sie die restlichen Nullstellen von f und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f. Schreiben Sie die vollständige Zerlegung von f in Linearfaktoren hin.
    (b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f und berechnen Sie die Koordinaten der relativen Extremwerte.
    (c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von f und berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.
    (d) Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[-4\,;\,5]$.

21. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 4\,x + 3}{x^2 - 4\,x + 5} + 2$$

    (a) Berechnen Sie $f'(x)$ und die Koordinaten des Punktes mit waagrechter Tangente.

(b) Zeichnen Sie die Graphen von f und f' im x-Intervall $[0\,;\,6]$ in ein Koordinatensystem (Einheit auf der x-Achse 1 cm, auf der y-Achse 2 cm). Wertetabelle!

(c) Beweisen Sie durch Rechnung, dass der Graph von f achsensymmetrisch ist. Die Achse ist der Zeichnung zu entnehmen!

22. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 7\,x + 11}{x^2 + 4\,x + 5}$$

(a) Berechnen Sie $f'(x)$ und die Koordinaten der Punkte mit waagrechter Tangente.

(b) Erstellen Sie eine Wertetabelle und zeichnen Sie die Graphen von f und f' im Intervall $[-5\;;\;1]$ (Einheit auf der x-Achse 1 cm, auf der y-Achse 2 cm).

(c) Beweisen Sie durch Rechnung, dass der Graph von f punktsymmetrisch ist. Das Zentrum $\mathrm{Z}\,(z_1|z_2)$ ist der Zeichnung zu entnehmen.

23. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{(1-x)^2}{1+x^2}$$

(a) Wie lautet die maximale Definitionsmenge von f? Untersuchen Sie f auf Nullstellen. Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

(b) Zeigen Sie, dass der Graph von f zum Punkt $\mathrm{Z}\,(0|1)$ symmetrisch ist.

(c) Berechnen Sie die Ableitung von f und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Suchen Sie die Koordinaten der Punkte mit waagrechter Tangente.

(d) Zeichnen Sie den Graphen von f im x-Intervall $[\,-4\,,\,4\,]$. Verwenden Sie auf der x-Achse die Einheit 1 cm und auf der y-Achse die Einheit 2 cm.

(e) Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses von Teilaufgabe (c) die Ableitung der Funktion g mit der Gleichung $g(x) = \sqrt{f(x)}$ und vereinfachen Sie das Ergebnis.

(f) Untersuchen Sie das Verhalten von g' in der Umgebung von $x = 1$ und zeichnen Sie den Graphen von g in das schon vorhandene Koordinatensystem ein.

24. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung $\quad f(x) = \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$.

(a) Wie lautet die Definitionsmenge von f? Berechnen Sie die Nullstellen von f im Intervall $I = [-3\pi\,,\,4\pi]$.

(b) Weisen Sie nach, dass der Graph von f zur Achse $x = \dfrac{\pi}{2}$ symmetrisch ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Definitionslücke von f stetig geschlossen werden kann und schreiben Sie die stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ hin.

(d) Berechnen Sie die Funktionswerte von f in der Mitte zwischen den Nullstellen und zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall I mit Kennzeichnung der Definitionslücke ($x = \pi \mathrel{\widehat{=}} 2\,\text{cm}$, $y = 1 \mathrel{\widehat{=}} 5\,\text{cm}$).

(e) Zeigen Sie, dass die Nullstellen von f' der Gleichung

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\pi}{2} - x$$

genügen. Bestimmen Sie graphisch die ungefähre Lage der Maxima und Minima von f.

25. Wir betrachten die Funktion $\quad f(x) = \dfrac{x^2 - 2\,x + 8}{x^2 - 2\,x + 2}.$

(a) Beweisen Sie, dass der Graph G_f symmetrisch zur Achse $x = 1$ ist.

(b) Zeichnen Sie G_f in der Einheit 1 cm im Intervall $[\,-2\,;4\,]$.
Verwenden Sie das Ergebnis von (a)!

(c) Berechnen Sie $f'(x)$ und die x-Koordinate des Punktes mit waagrechter Tangente von G_f.

26. Wir betrachten die Funktion $\quad f(x) = \dfrac{x^2 - 4\,x + 8}{x^2 - 4\,x + 5}.$

(a) Beweisen Sie, daß der Graph G_f symmetrisch zur Achse $x = 2$ ist.

(b) Zeichnen Sie G_f in der Einheit 1 cm im Intervall $[\,-1\,;5\,]$.
Verwenden Sie das Ergebnis von (a)!

(c) Berechnen Sie $f'(x)$ und die x-Koordinate des Punktes mit waagrechter Tangente von G_f.

27. Wir betrachten die Funktion $\quad f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}.$

(a) Berechnen Sie die Definitionsmenge D_f sowie die Grenzwerte von $f(x)$ an den Rändern von D_f.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der Ableitung die Monotoniebereiche sowie die Koordinaten der Punkte mit waagrechter Tangente von f.

(c) Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[\,-6\,;4\,]$ (Einheit 1cm).

(d) Beweisen Sie, dass G_f zum Punkt $\mathrm{Z}\,(-1|-2)$ symmetrisch ist.

28. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$.
    (a) Berechnen Sie D_f und untersuchen Sie das Verhalten von f am Rande von D_f.
    (b) Berechnen Sie $f'(x)$ und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Berechnen Sie die notwendigen Grenzwerte von f' und zeichnen Sie dann den Graphen von f (Einheit auf der x-Achse 5 cm ; Einheit auf der y-Achse 2,5 cm).

29. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{10}(x-3)(x+1)^3$.
    (a) Schreiben Sie die Definitionsmenge und die Nullstellen von f hin! Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f.
    (b) Untersuchen Sie f auf Monotonie und Extremwerte. f' ist als Produkt von Linearfaktoren darzustellen!
    (c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von f und berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.
    (d) Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $-3 \leqq x \leqq 3{,}5$ (Einheit 1cm).

30. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{50}(x+3)(x-2)^4$.
    (a) Schreiben Sie die Definitionsmenge und die Nullstellen von f hin. Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f.
    (b) Untersuchen Sie f auf Monotonie und Extremwerte. f' ist als Produkt von Linearfaktoren darzustellen!
    (c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von f und berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.
    (d) Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $-3{,}5 \leqq x \leqq 4{,}5$ (Einheit 1cm).

31. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{3}\,|x| \cdot \left(\frac{1}{3}\,x^2 - x\right) - x$$

    (a) Wie lautet die maximale Definitionsmenge von f? Geben Sie eine betragsfreie Darstellung von f an und berechnen Sie die Nullstellen von f. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion an den Rändern von D_f.
    (b) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.
    (c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion und berechnen Sie die Koordinaten der Extrema.

(d) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Funktion und berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.

(e) Berechnen Sie noch ein paar geeignete Funktionswerte und zeichnen Sie den Graphen von f im x-Intervall $[\,-2\,;6\,]$ in der Einheit 2 cm auf beiden Achsen.

(f) Wie lauten die Gleichungen der Wendetangenten und wo schneiden sie sich?

32. Diskutieren Sie die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{12}\,x^4 - \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x^2$$

nach allen Regeln der Kunst und zeichnen Sie ihren Graphen.

33. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{8}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{9}{2}\,x$$

im maximalen Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie die Nullstellen von f.

(b) Untersuchen Sie f auf Monotonie und auf Extremwerte.

(c) Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten von f und die Wendepunkte.

(d) Zeichnen Sie den Grafen von f im x-Intervall $[-0{,}5; 8]$ in der Einheit 1 cm.

2.6.2 Diskussion von Funktionenscharen

1. Wir betrachten die Funktionenschar f_a mit

$$f_a(x) = -(a+1)^4x^2 + a$$

(a) Zeichne die Grafen der Scharfunktionen für $a = 0{,}25$, $a = 0{,}5$ und $a = 1$ (Einheit 5 cm).

(b) Für $a > 0$ schließt der Graf von f_a mit der x-Achse ein endliches Flächenstück ein, dessen Inhalt wir mit $A(a)$ bezeichnen. Berechne $A(a)$.

(c) Für welches a ist $A(a)$ maximal? Wie groß ist $A_{\max}$?

2. Wir betrachten die Funktionenschar

$$f_s: \quad x \to f_s(x) = -x^3 + sx^2$$

(a) Berechne die Nullstellen und die relativen Extrema der Scharfunktionen f_s. Auf welcher Kurve K_f liegen alle Extrempunkte? Zeichne K_f und die Grafen von f_{-2}, f_1, f_2 und f_3 in ein Koordinatensystem.

(b) Eine weitere Funktionenschar ist durch

$$F_s: \quad x \to F_s(x) = \int\limits_0^x f_s(t)\,\mathrm{d}t$$

gegeben. Berechne die Nullstellen und die relativen Extrema der Scharfunktionen F_s. Auf welcher Kurve K_F liegen alle Extrempunkte? Zeichne K_F und die Grafen von F_{-2}, F_1, F_2 und F_3 in ein Koordinatensystem.

(c) Die Grafen von f_s schließen mit der x-Achse ein endliches Flächenstück mit dem Inhalt A_s ein. Berechne A_s.

3. Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = \frac{1}{3}x^3 + tx^2 + t^2x$.

   (a) Untersuchen Sie die Funktionen auf Symmetrie.

   (b) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktionen in Abhängigkeit von t.

   (c) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten der Funktionen in Abhängigkeit von t.

   (d) Geben Sie gegebenenfalls Extrema, Wendepunkte und Terrassenpunkte der Funktionen in Abhängigkeit von t an.

   (e) Geben Sie die Ortslinie der Terrassenpunkte an.

   (f) Zeichnen Sie die Funktion für $t = 2$.

   (g) Zeichnen Sie die Funktionenschar und die Ortslinie der Terrassenpunkte mit einer geeigneten Software.

4. Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = x^3 + tx^2 + x + 1$.

   (a) Untersuchen Sie die Funktionen auf Symmetrie.

   (b) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten der Funktionen in Abhängigkeit von t.

   (c) Geben Sie gegebenenfalls die x-Koordinaten der Extrema, Wendepunkte und Terrassenpunkte in Abhängigkeit von t an.

   (d) Geben Sie die Ortslinie der Wendepunkte an.

   (e) Zeichnen Sie die Funktion für $t = 2$.

   (f) Zeichnen Sie die Funktionsschar und die Ortslinie der Wendepunkte mit einer geeigneten Software.

5. Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - t^2x$.
   (a) Untersuchen Sie die Funktionen auf Symmetrie.
   (b) Geben Sie die Nullstellen der Funktionen in Abhängigkeit von t an.
   (c) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten der Funktionen in Abhängigkeit von t.
   (d) Geben Sie gegebenenfalls Extrema, Wendepunkte und Terassenpunkte der Funktion in Abhängigkeit von t an.
   (e) Geben Sie die Ortslinien der Extrema an.
   (f) Zeichnen Sie die Funktionsschar.

6. Wir betrachten die Funktionenschar $f_a(x) = x^2 + \dfrac{a}{x}$. P_a sei ein Punkt auf G_{f_a} mit waagrechter Tangente. Berechnen Sie die Koordinaten von P_a! Auf welcher Kurve liegen alle Punkte P_a mit $a \in \mathbb{R}$?

7. g sei die Menge aller Scheitelpunkte von nach unten geöffneten und verschobenen Normalparabeln $f_a(x) = -x^2 + b\,x + c$, die **die** Normalparabel $n(x) = x^2$ im Punkt $\mathrm{P}_a\left(a \middle| a^2\right)$ berühren. Berechnen Sie zuerst die Koeffizienten b und c in $f_a(x)$ und stellen Sie dann die Funktionsgleichung von g auf.

8. Durch die Funktionenschar $f_a(x) = x^2 + b\,x + c$ wird die Menge aller verschobenen Normalparabeln beschrieben, die den Graphen der Funktion $h(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $\mathrm{P}_a\left(a \middle| \frac{1}{a}\right)$ berühren.
   (a) Stellen Sie die Gleichung der Schar f_a auf, d.h. drücken Sie b und c durch a aus!
   (b) Beweisen Sie, daß der Scheitel des Graphen von f_a durch

$$\mathrm{S}\left(x_\mathrm{S} \middle| y_\mathrm{S}\right) \quad \text{mit} \quad x_\mathrm{S} = \frac{2\,a^3 + 1}{2\,a^2} \quad \text{und} \quad y_\mathrm{S} = \frac{4\,a^3 - 1}{4\,a^4}$$

   gegeben ist!
   (c) Zeichnen Sie die Graphen von h und f_a für $a \in \{-5\,;\,-1\,;\,-0{,}5\,;\,0{,}5\,;\,1\,;\,5\}$ in **ein** Koordinatensystem!
   (d) g sei die Menge aller Scheitelpunkte der Parabeln f_a. Füllen Sie folgende Wertetabelle aus und zeichen Sie dann den Graphen von g!

a	-5,0	-2,0	-1,0	-0,5	-0,4	0,4	0,5	0,7	1,0	1,5	2,0	4,0
x_S												
y_S												

   Ist g eine Funktion? Die Darstellung von g durch die beiden Funktionen $x_S(a)$ und $y_S(a)$ nennt man *Parameterdarstellung* von g mit dem Parameter a.

9. Wir betrachten die Funktionenschar f_n mit der Gleichung

$$f_n(x) = \sqrt{x} - x^n \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

   (a) Wie lautet die maximale Definitionsmenge von f_n? Berechnen Sie die Nullstellen von f_n.

   (b) Der Graf G_n von f_n enthält einen Punkt $\mathrm{P}_n(x_n|y_n)$ mit waagrechter Tangente. Berechnen Sie die Koordinaten von P_n.

   (c) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n'(x)$.

   (d) Berechnen Sie die Koordinaten von P_1 und P_4 und die Ableitungen $f_1'(1)$ und $f_4'(1)$. Zeichnen Sie dann die Grafen von f_1 und f_4 im Intervall $[\,0\,;\,1\,]$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in **ein** Koordinatensystem. Verwenden Sie die Einheit 5 cm.

10. Wir betrachten die Funktionenschar f_n mit der Gleichung

$$f_n(x) = \sqrt{x} + \frac{n}{x} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

   (a) Wie lautet die maximale Definitionsmenge von f_n? Untersuchen Sie f_n auf Nullstellen. Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)$.

   (b) Der Graf G_n von f_n enthält einen Punkt $\mathrm{P}_n(x_n|y_n)$ mit waagrechter Tangente. Berechnen Sie die Koordinaten von P_n.

   (c) Berechnen Sie die Koordinaten von P_1 und P_4. Zeichnen Sie dann die Grafen von f_1 und f_4 im Intervall $[\,0\,;\,10\,]$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in **ein** Koordinatensystem. Verwenden Sie die Einheit 1 cm.

   (d) Auf welcher Kurve liegen die Punkte P_n?

11. Wir betrachten die Funktionenschar $f_a(x) = \dfrac{a^3}{x} + 2\sqrt{x}$ mit $a > 0$.

   (a) Berechnen Sie die Definitionsmenge D_{f_a} sowie die Grenzwerte von $f_a(x)$ für $x \to 0^+$ und $x \to +\infty$.

   (b) Für $a > 0$ sei P_a der Punkt von G_{f_a} mit waagrechter Tangente. Berechnen Sie die Koordinaten von P_a. Der Graph der Funktion g ist die Menge aller P_a mit $a > 0$. Leiten Sie die Funktionsgleichung $g(x)$ her.

   (c) Zeichnen Sie die Graphen von f_1, f_2 und g im x-Intervall $[\,0\,;9\,]$ in **ein** Koordinatensystem.

   (d) Für welches a ist der Schnittwinkel zwischen den Graphen von g und f_a gleich $30°$?

2.6.3 Ortskurven besonderer Punkte

1. Wir betrachten die Funktionenschar f_a mit

$$f_a(x) = \frac{ax+2}{2\mathrm{e}^x}, \quad D_{f_a} = \mathbb{R} \text{ und } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

   (a) Bestimme in Anhängigkeit des Scharparameters a die Nullstellen von f_a und das Verhalten von f_a für $x \to \pm\infty$.

   (b) Zeige, dass alle Grafen der Funktionenschar genau einen Punkt gemeinsam haben und gib seine Koordinaten an.

   (c) Bestimme die Koordinaten der lokalen Extrema und der Wendepunkte der Funktionenschar in Abhängigkeit von a.

   (d) Zeichne die Grafen der Funktionen $f_{0,5}$, f_2, f_{20} und f_{-4} in ein geeignetes Koordinatensystem. Stelle vorher die Nullstellen und die Koordinaten der Extremwerte und Wendepunkte in einer Tabelle zusammen.

   (e) Unter welchem spitzen Winkel α schneiden sich die Grafen der beiden Funktionen $f_{0,5}$ und f_{20}?

   (f) Auf welcher Kurve $y = g(x)$ liegen die Extremwerte der Scharfunktionen? Zeichne sie in das schon bestehende Koordinatensystem ein.

   (g) Auf welcher Kurve $y = h(x)$ liegen die Wendepunkte der Scharfunktionen? Zeichne sie in das schon bestehende Koordinatensystem ein.

2. Gegeben ist ein Dreieck mit den Ecken A(0|0), B(1|0) und C(c|1).

   (a) Zeichnen Sie für $c = -0{,}2;\ 0;\ 0{,}2;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ 1;\ 1{,}2$ in verschiedenen Farben das Dreieck und tragen Sie jeweils den Höhenschnittpunkt rot ein ($1 \mathrel{\widehat{=}} 5\text{cm}$).
   Auf welcher Kurve könnten die Schnittpunkte der Höhen liegen?

   (b) Geben Sie die Gleichungen der Geraden an, auf denen die Höhen h_a und h_c liegen.

   (c) Berechnen Sie die Koordinaten des Höhenschnittpunkts H.

   (d) Beweisen Sie, dass sich der Höhenschnittpunkt für variables c auf einer Parabel bewegt.

   (e) Geben Sie die Lage des Scheitels der Parabel an und vergleichen Sie das Ergebnis mit Teilaufgabe (a).

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2$ ($D = \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$).

   (a) Bestimmen Sie allgemein die Nullstellen der Funktion.

   (b) Bestimmen Sie allgemein die Koordinaten der Extrema.

(c) Zeichnen Sie die Funktion für $a = 1$ und $b = 3$.

(d) Zeichnen Sie für $b = 3$ und für zehn verschiedene Werte von a die Extrema in ein Koordinatensystem ein. Was fällt auf?

(e) Beweisen Sie, dass für festes b und variables a die Extrema auf einer Parabel liegen.

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^3 + bx$ ($D = \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$).

   (a) Bestimmen Sie allgemein die Nullstellen der Funktion.

   (b) Bestimmen Sie allgemein die Koordinaten der Extrema.

   (c) Zeichnen Sie die Funktion für $a = -\frac{1}{3}$ und $b = 1$.

   (d) Zeichnen Sie für $b = 1$ und für $a = -0{,}1$, $-0{,}2$, ... $-0{,}9$ die Extrema in ein Koordinatensystem ein. Was fällt auf?

   (e) Beweisen Sie, dass für festes b und variables a die Extrema auf einer Ursprungsgeraden liegen.

5. Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^4 + bx^2$ ($D = \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$).

   (a) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion achsensymmetrisch ist.

   (b) Bestimmen Sie allgemein die Lage der Extrema.
   Welche Bedingung muss für die Variablen a und b gelten, damit der Graph der Funktion drei Extrema hat?

   (c) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion für

      i. $a = \frac{1}{2}$ und $b = -4$.

      ii. $a = \frac{1}{2}$ und $b = 4$.

   (d) Zeichnen Sie für $a = \frac{1}{2}$ und $b = -1, -4, -9, -16, -25$ die Extrema in ein Koordinatensystem. Auf welcher Kurve könnten die Extrema mit $x \neq 0$ liegen?

   (e) Berechnen Sie die Ortskurve der Extrema für festes a und variables b.

6. Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^4 + bx^2$ ($D = \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$).

   (a) Bestimmen Sie allgemein die Lage der Extrema.
   Welche Bedingung muss für die Variablen a und b gelten, damit der Graph der Funktion drei Extrema hat.

   (b) Zeichnen Sie für $a = 2$ und $b = -1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{25}$ die Extrema in ein Koordinatensystem. Auf welcher Kurve könnten die Extrema mit $x \neq 0$ liegen?

   (c) Berechnen Sie die Ortskurve der Extrema für festes b und variables a.

7. Berechnen Sie für folgende Funktionen die Ortskurve der Extrema.
   (a) $f(x) = x^3 + x^2 + kx$
   (b) $f(x) = x^3 + kx^2 + x$
   (c) $f(x) = kx^3 + x^2 + x$

8. Berechnen Sie für folgende Funktionen die Ortskurve der Wendepunkte.
   (a) $f(x) = x^3 + x^2 + kx$
   (b) $f(x) = x^3 + kx^2 + x$
   (c) $f(x) = kx^3 + x^2 + x$

9. Wir betrachten die Funktionenschar $f_a(x) = x^2 + \dfrac{a}{x}$. P_a sei ein Punkt auf G_{f_a} mit waagrechter Tangente. Berechnen Sie die Koordinaten von P_a! Auf welcher Kurve liegen alle Punkte P_a mit $a \in \mathbb{R}$?

10. g sei die Menge aller Scheitelpunkte von nach unten geöffneten und verschobenen Normalparabeln $f_a(x) = -x^2 + b\,x + c$, die **die** Normalparabel $n(x) = x^2$ im Punkt $\mathrm{P}_a\left(a\middle|a^2\right)$ berühren. Berechnen Sie zuerst die Koeffizienten b und c in $f_a(x)$ und stellen Sie dann die Funktionsgleichung von g auf.

11. Durch die Funktionenschar $f_a(x) = x^2 + b\,x + c$ wird die Menge aller verschobenen Normalparabeln beschrieben, die den Graphen der Funktion $h(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $\mathrm{P}_a\left(a\middle|\frac{1}{a}\right)$ berühren.
    (a) Stellen Sie die Gleichung der Schar f_a auf, d.h. drücken Sie b und c durch a aus!
    (b) Beweisen Sie, daß der Scheitel des Graphen von f_a durch
    $$\mathrm{S}\left(x_\mathrm{S}\middle|y_\mathrm{S}\right) \quad \text{mit} \quad x_\mathrm{S} = \frac{2\,a^3+1}{2\,a^2} \quad \text{und} \quad y_\mathrm{S} = \frac{4\,a^3-1}{4\,a^4}$$
    gegeben ist!
    (c) Zeichnen Sie die Graphen von h und f_a für $a \in \{-5\,; -1\,; -0{,}5\,; 0{,}5\,; 1\,; 5\}$ in **ein** Koordinatensystem!
    (d) g sei die Menge aller Scheitelpunkte der Parabeln f_a. Füllen Sie folgende Wertetabelle aus und zeichen Sie dann den Graphen von g!

a	-5,0	-2,0	-1,0	-0,5	-0,4	0,4	0,5	0,7	1,0	1,5	2,0	4,0
x_S												
y_S												

Ist g eine Funktion? Die Darstellung von g durch die beiden Funktionen $x_S(a)$ und $y_S(a)$ nennt man *Parameterdarstellung* von g mit dem Parameter a.

12. Gegeben ist die Funktionenschar $f(x) = ax^4 + bx^2$, $a, b \neq 0$, $D = \mathbb{R}$.
    (a) Für welche Werte von a und b hat der Graph der Funkion Extrema?
    (b) Berechnen sie die Ortskurve der Extrema für festes a und variables b.
    (c) Für welche Werte von a und b hat der Graph der Funkion Wendepunkte?
    (d) Zeichnen sie die Graphen der Funktionen für $a = \frac{1}{2}$ und $b = -4, -1, 1, 4$. Achten sie darauf, dass die Lage der Extrema (soweit vorhanden) richtig eingetragen ist. Tragen sie die Ortskurve der Extrema in das Diagramm ein.
    (e) Betrachten sie nun für $a = \frac{1}{2}$ und $b = -4$ den Graph der Funktion. Die y-Achse zerlegt das von der Verbindungsstrecke der Extrema (nicht $(0|0)$) und dem Graph der Funktion eingeschlossene Flächenstück in zwei Teile. Vergleichen sie die beiden Teilflächen. Begründen sie ihre Antwort.

13. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$. G_t sei die Tangente an G_f im Punkt A $(-a|f(-a))$ und G_h die Tangente an G_f im Punkt B $\left(\frac{a}{5}\middle|f\left(\frac{a}{5}\right)\right)$.
    (a) Stellen Sie die Funktionsgleichungen von t und h auf und berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktionen.
    (b) Berechnen Sie die Koordinaten x_a und y_a des Schnittpunktes S_a von G_t und G_h.
    (c) Zeichnen Sie den Graphen von f und ermitteln Sie zeichnerisch sowie rechnerisch den Punkt $\mathrm{S}_{2,5}$.
    (d) Die Menge aller Punkte S_a mit $a \in \mathbb{R}$ ist der Graph einer Funktion g. Ermitteln Sie die Gleichung von g.

14. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$. G_g sei die Tangente an G_f im Punkt A $(b|f(b))$ und G_h die Tangente an G_f im Punkt B $\left(-\frac{b}{7}\middle|f\left(-\frac{b}{7}\right)\right)$.
    (a) Stellen Sie die Funktionsgleichungen von g und h auf und berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktionen.
    (b) Berechnen Sie die Koordinaten x_b und y_b des Schnittpunktes S_b von G_g und G_h.
    (c) Zeichnen Sie den Graphen von f und ermitteln Sie zeichnerisch sowie rechnerisch den Punkt $\mathrm{S}_{3,5}$.
    (d) Die Menge aller Punkte S_b mit $b \in \mathbb{R}$ ist der Graph einer Funktion k. Ermitteln Sie die Gleichung von k.

2.6.4 Kurvendiskussion mit dem Computer

1. In den verschiedensten Bereichen der Physik, wie z. B. der Akustik und der Elektrodynamik, treten Schwingungen auf. Wird ein schwingungsfähiges System von außen

mit der Frequenz f angeregt (maximale Anregungskraft konstant), hängt seine Reaktion (Amplitude) stark von der Anregungsfrequenz f ab.
Die Amplitude $A(f)$ kann durch folgende Formel beschrieben werden:

$$A(f) = \frac{C}{\sqrt{({f_0}^2 - f^2)^2 + (f\gamma)^2}}$$

Neben Konstanten des Systems (C enthält die maximale Anregungskraft und den Reibungsfaktor γ) hängt $A(f)$ von der Eigenfrequenz f_0 des Systems und der Anregungsfrequenz f ab. Hier werden nur Fälle mit $\gamma < \frac{f_0}{\sqrt{2}}$ betrachtet.

(a) Untersuchen Sie, wie sich die Amplitude $A(f)$ für $f \to 0$ und für $f \to \infty$ verhält und interpretieren Sie die Ergebnisse.

(b) Berechnen Sie allgemein die Resonanzfrequenz (Frequenz, bei der die Amplitude maximal ist) f_R des Systems.

(c) Von welchen Parametern hängt die Resonanzfrequenz in welcher Weise ab? Skizzieren Sie qualitativ die Resonanzfrequenz in Abhängigkeit vom Reibungsfaktor.

(d) Stellen Sie $A(f)$ für $C = 50$, $f_0 = 5$ und $\gamma = 1{,}1$ für $f \in [0; 15]$ graphisch dar.

(e) Diskutieren Sie mit Hilfe einer geeigneten Software, wie sich der Verlauf von $A(f)$ in Abhängigkeit von den vorkommenden Parametern ändert.

2. Die Stromstärke durch eine Schaltung aus einem Widerstand, einer Spule und einem Kondensator hängt von der Frequenz f und der anliegenden Wechselspannung ($\omega = 2\pi f$) ab. Sie berechnet sich nach der Formel

$$I(\omega) = \sqrt{\frac{100 - 2\omega^2}{100R^2 + \omega^2} + 0{,}01\omega^2} \qquad D = \mathbb{R}_0^+.$$

Für R setzt man dazu die Maßzahl des enthaltenen ohmschen Widerstandes und für f die Maßzahl der Frequenz ein. $I(\omega)$ liefert dann die Maßzahl der Stromstärke.

(a) Betrachten Sie die Funktion $I(\omega)$ zunächst für $R = 0$.

i. Vereinfachen Sie die Funktionsgleichung und geben Sie die Nullstellen der Funktion an.

ii. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion für ω gegen Null und gegen Unendlich.

iii. Untersuchen Sie, ob die Funktion im gesamten Definitionsbereich differenzierbar ist.

iv. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion.

v. Zeichnen Sie die Funktion für $\omega \in [0; 25]$.

(b) Betrachten Sie nun die allgemeine Form der Funktion

i. Berechnen Sie $I(10)$ in Abhängigkeit von R.

ii. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion für ω gegen Null und gegen Unendlich.

iii. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion.

iv. Zeichnen Sie die Funktion für $R = 0{,}2$.

v. Zeichnen Sie $I(\omega)$ mit einer geeigneten Software für $R \in \{0; 0{,}1; 0{,}2; ...\}$ und beschreiben Sie die Veränderungen der Funktion.

vi. Für welche Frequenz ist $I(\omega)$ unabhängig von R?

Hinweis: Die diskutierte Funktion beschreibt den Anregungsstrom eines Parallelschwingkreises mit $L = 0{,}1$ und $C = 0{,}1$. Die allgemeine Funktion heißt

$$I_{\text{ges}} = \sqrt{\frac{1 - 2LC\omega^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + \omega^2 C^2}.$$

3. Überlegen Sie, wie der Graph der Funktion f für verschiedene Werte der Parameter a, b und c qualitativ verläuft und skizzieren Sie den Graphen.
Überprüfen Sie Ihre Überlegungen mit Hilfe einer geeigneten Software.

(a) i. $f(x) = x^3 + ax$ mit $a \in \mathbb{R}^+$

ii. $f(x) = x^3 + ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$

iii. $f(x) = x^4 + ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}^+$

iv. $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$

v. $f(x) = x^5 + ax^3 + bx$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$

vi. $f(x) = x^5 + ax^3 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

(b) i. $f(x) = x - \frac{a}{x}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$

ii. $f(x) = x^2 - \frac{a}{x} + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$

iii. $f(x) = x^3 - \frac{a}{x^2} + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$

(c) i. $f(x) = x \sin(x)$

ii. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \sin(x)$

iii. $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$

iv. $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}$

4. (a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$.

(b) Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen in das Koordinatensystem von (a):

i. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 2$
ii. $f(x) = (x+1)^3 + 4(x+1)^2 + 4(x+1)$
iii. $f(x) = (x+1)^3 + 4(x+1)^2 + 4(x+1) + 2$
iv. $f(x) = (x-2)^3 + 4(x-2)^2 + 4(x-2)$
v. $f(x) = (x-2)^3 + 4(x-2)^2 + 4(x-2) - 3$
vi. $f(x) = (x+4)^3 + 4(x+4)^2 + 4(x+4)$
vii. $f(x) = (x+4)^3 + 4(x+4)^2 + 4(x+4) + 4$

(c) Überprüfen Sie Ihre Zeichnungen mit einer geeigneten Software.

5. (a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \sin(x)$.
   (b) Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen in das Koordinatensystem von (a):
      i. $f(x) = \sin(x) + 2$
      ii. $f(x) = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)$
      iii. $f(x) = \sin(x + \frac{1}{2}\pi) + 2$
      iv. $f(x) = 2 \cdot \sin(x)$
      v. $f(x) = 2 \cdot \sin(x + \pi)$
      vi. $f(x) = \sin(2x)$
      vii. $f(x) = \sin(2x) - 3$
   (c) Überprüfen Sie Ihre Zeichnungen mit einer geeigneten Software.

6. (a) Welche Bedingung müssen die Variablen a, b und c erfüllen, damit der Graph der Funktion $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($D = \mathbb{R}$) drei waagrechte Tangenten hat. Zeichnen Sie mit einer geeigneten Software die Graphen von $f(x)$ für $a = c = 1$ und verschiedene Werte für b.
   (b) Wieviele waagrechte Tangenten hat der Graph der Funktion
   $f(x) = x^5 + bx^3 - x$, $b \in \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}$?
   Zeichnen Sie mit einer geeigneten Software die Graphen von $f(x)$ für verschiedene Werte für b.
   (c) Wieviele waagrechte Tangenten hat der Graph der Funktion
   $f(x) = x^5 + bx^3 + x$, $b \in \mathbb{R}$ und $b^2 > \frac{20}{9}$, $D = \mathbb{R}$?
   Zeichnen Sie mit einer geeigneten Software die Graphen von $f(x)$ für verschiedene Werte für b.

7. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}\ ,\ D_f =]\,0\,;\,1\,]$$

   (a) Untersuchen Sie f auf Monotonie!

   (b) Wie viele Terassenpunkte hat f und wie lauten deren Koordinaten?

   (c) Zeichnen Sie den Graphen von f

      i. im Intervall $]\,0\,;\,1\,]$ ($x = 1 \mathrel{\widehat{=}} 10\,\text{cm}$ und $y = 20 \mathrel{\widehat{=}} 10\,\text{cm}$)

      ii. im Intervall $]\,0\,;\,0{,}08\,]$ ($x = 0{,}01 \mathrel{\widehat{=}} 1\,\text{cm}$ und $y = 100 \mathrel{\widehat{=}} 10\,\text{cm}$).

   Für das Zeichnen der Graphen ist ein Computer natürlich sehr nützlich!

8. Zerodur ist eine Glaskeramik, die über einen weiten Temperaturbereich nur eine sehr kleine Temperaturausdehnung aufweist. Aus diesem Grund findet es Anwendung als Spiegelträger in der Lasertechnik und in Teleskopen.
   Die Längenausdehnung $f(T)$ (in $\frac{\mu\text{m}}{°\text{C}}$) eines 10 m langen Zerodurstabes in Abhängigkeit von der Temeratur T in °C lässt sich näherungsweise durch folgende Funktion beschreiben:

$$f(T) = -0{,}6 + 1{,}63 \cdot \frac{T}{100\,°\text{C}} - 2{,}91 \cdot \left(\frac{T}{100\,°\text{C}}\right)^2 - 2{,}49 \cdot \left(\frac{T}{100\,°\text{C}}\right)^3$$

   (a) Untersuchen Sie den Kurvenverlauf von $f(T)$.

   (b) Zeichnen Sie $f(T)$ mit einer geeigneten Software im Bereich von $-100\,°\text{C}$ bis $100\,°\text{C}$.

   (c) Eine exaktere Beschreibung der Längenausdehnung liefert:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(T) &= f(T) + \\ &\quad +2{,}74 \cdot \left(\frac{T}{100\,°\text{C}}\right)^4 + 1{,}43 \cdot \left(\frac{T}{100\,°\text{C}}\right)^5 - \\ &\quad -0{,}62 \cdot \left(\frac{T}{100\,°\text{C}}\right)^6 - 0{,}26 \cdot \left(\frac{T}{100\,°\text{C}}\right)^7\end{aligned}$$

   Zeichnen Sie $\tilde{f}(T)$ mit einer geeigneten Software und vergleichen Sie den Graphen mit dem von $f(T)$. Diskutieren Sie das Ergebnis.

   Literatur: *Mathematikaufgaben, Anwendungen aus der modernen Technik und Arbeitswelt*, Werner Schmidt, Ernst Klett Verlag, 1984

9. Eine Lemniskate ist die Menge aller Punkte P, für die für die Abstände zu zwei gegebenen Punkten $A(-c|0)$ und $B(c|0)$ gilt: $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = c^2$

(a) Bestimmen sie eine Gleichung zur Beschreibung einer Lemniskate.
(b) Bestimmen sie die Nullstellen einer Lemiskate.
(c) Bestimmen sie die Punkte mit waagrechten Tangenten.
(d) Zeichnen sie die Lemniskaten für $c = 1, 2, 3, 4, 5$ mit einer geeigneten Software.

3 Stochastik: Binomialverteilung und beurteilende Statistik

3.1 Urnenmodell - Ziehen mit und ohne Zurücklegen

1. **Pokern**

   Beim Pokern wird ein Kartenspiel mit 52 Blatt verwendet. Es gibt die 13 Kartenwerte 2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K,A und die Farben Pik, Kreuz, Karo und Herz. Jeder Spieler erhält fünf Karten. Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Pokerblätter:

   (a) Royal Flush: 10,J,Q,K,A in einer Farbe

   (b) Straight Flush: A,2,3,4,5 oder 2,3,4,5,6 oder 3,4,5,6,7 oder ... oder 9,10,J,Q,K, alle in einer Farbe

   (c) Vierer: vier gleiche Werte

   (d) Full House: Dreier und Paar, z.B. K,K,K,3,3

   (e) Flush: Alle Karten von der gleichen Farbe

   (f) Straight: A,2,3,4,5 oder 2,3,4,5,6 oder 3,4,5,6,7 oder ... oder 10,J,Q,K,A, nicht alle in einer Farbe

   (g) Dreier: drei gleiche Werte aber kein Full House

   (h) Zwei Paare: z.B. A,A,3,3,7

   (i) Ein Paar: zwei gleiche Werte, die restlichen Karten verschiedene Werte

2. **Schafkopf**

   Beim Schafkopfen wird ein Kartenspiel mit 32 Blatt verwendet. Es gibt die acht Kartenwerte 7,8,9,10,U,O,K,A und die Farben Gras, Eichel, Schell und Herz. Jeder Spieler erhält acht Karten. Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Schafkopfblätter:

   (a) Buam-Solo-Du („du“ entspricht „tout“): alle Ober und alle Unter

   (b) Vier Ober und zusätzlich vier Herzkarten

   (c) Keinen Ober und keinen Unter

   (d) Acht Trümpfe für ein Herz-Solo (es gibt 14 Trümpfe: 4O, 4U, Herzkarten)

(e) Ein Spieler hat folgendes Blatt: $\mathrm{O_E}$,$\mathrm{O_G}$,$\mathrm{O_S}$,$\mathrm{U_E}$,$\mathrm{U_G}$, $\mathrm{U_H}$,$\mathrm{U_S}$,$\mathrm{A_H}$. Der Spieler gewinnt das „Solo-Du“, wenn die Gegner keinen Stich machen, d.h. wenn der Gegner, der den Herzober hat, höchstens noch einen weiteren Trumpf besitzt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der „Du“ zu gewinnen?

3. n ununterscheidbare Würfel werden einmal geworfen. Wie groß muss n mindestens sein, damit die Zahl der verschiedenen Ausgänge dieses Experiments größer als eine Million ist?

4. Aus einem Kartenspiel (52 Blatt) werden solange Kartenpaare gezogen und beiseite gelegt, bis das Spiel aufgebraucht ist.
   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jedes gezogene Paar genau aus einer roten und einer schwarzen Karte besteht?
   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei jedem gezogenen Paar die erste Karte rot und die zweite Karte schwarz ist?
   (c) Die erste gezogene Kartes eines jeden Paares wird auf Stapel 1, die zweite auf Stapel 2 gelegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Spiel so in einen roten und in einen schwarzen Stapel getrennt?

5. Rudi Ratlos steht mit fünf Gepäckstücken vor zwanzig leeren Schließfächern. Auf wie viele verschiedene Arten kann er die Gepäckstücke unter folgenden Bedingungen verteilen:
   (a) Pro Schließfach nur ein Gepäckstück, die Gepäckstücke sind ununterscheidbar.
   (b) Pro Schließfach beliebig viele ununterscheidbare Gepäckstücke.
   (c) Pro Schließfach nur ein Gepäckstück, die Gepäckstücke sind unterscheidbar.
   (d) Pro Schließfach beliebig viele unterscheidbare Gepäckstücke.
   (e) Pro Schließfach höchstens zwei der unterscheidbaren Gepäckstücke.
   (f) Pro Schließfach höchstens zwei der ununterscheidbaren Gepäckstücke.

6. **Das Geburtstagsparadoxon**
   (a) Berechne die Wahrscheinlichkeit $p(n)$, dass unter n zufällig ausgesuchten Personen mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben. Es darf angenommen werden, dass das Jahr 365 Tage hat und jeder Tag als Geburtstag gleichwahrscheinlich ist. Berechne speziell $p(2)$ bis $p(10)$, $p(20)$, $p(40)$ und $p(60)$.
   (b) Ab welcher Personenanzahl ist es bei einer Party günstig darauf zu wetten, dass mindestens zwei der Gäste am gleichen Tag Geburtstag haben?

7. Eine Klasse mit 25 Schülern besuchen 15 Buben und zehn Mädchen. Für einen Wettbewerb wird eine Gruppe von acht Schülern der Klasse zufällig ausgewählt.
   (a) Berechne die Zahl N der verschiedenen möglichen Gruppen.
   (b) Wie viele verschiedene Gruppenfotos mit nebeneinander aufgestellten Schülern sind möglich, wenn man alle möglichen Gruppen berücksichtigt?
   (c) Wie viele verschiedene Gruppen mit genau x Mädchen und damit $8 - x$ Buben gibt es? Berechne die Wahrscheinlichkeit $P(x)$, dass eine Gruppe genau x Mädchen enthält und stelle $P(x)$ als Säulendiagramm grafisch dar. Wertetabelle nicht vergessen!

8. **Der runde Tisch**
   (a) n Personen ($n \leqq s$) nehmen an einem runden Tisch mit s Stühlen Platz. Berechne die Anzahl der verschiedenen Sitzordnungen. Es gibt zwei Arten, das Wort *Sitzordnung* zu deuten; rechne mit beiden Möglichkeiten.
   (b) Wie groß ist bei zufälligem Hinsetzen die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Freunde unter den Platznehmenden nebeneinander sitzen?
   (c) Wie (b), aber für drei Freunde!
   (d) Rechne (a), (b) und (c) noch einmal für eine lange, nicht geschlossene Sitzreihe.
   (e) Aus n Personen ($n \geqq s$) werden s ausgewählt und zufällig auf s nummerierte Stühle verteilt. Berechne die Anzahl der verschiedenen Sitzordnungen.

9. (a) Wie viele Wörter kann man bilden, die jeden Buchstaben des Alphabets genau einmal enthalten?
   (b) Wie viele Sätze kann man bilden, die jeden Buchstaben des Alphabets genau einmal enthalten, wenn zusätzlich zu den Buchstaben ein Leerzeichen zwischen zwei Wörtern erlaubt ist (keine Satzzeichen)?
   (c) Wie viele fünfbuchstabige Wörter kann man bilden?
   (d) Wie viele fünfbuchstabige Wörter kann man bilden, die keinen Buchstaben mehr als einmal enthalten?

10. Ein beschwipster Zecher schleudert drei Wurfpfeile auf eine Zielscheibe, die aus fünf gleich großen Feldern besteht. Die Trefferwahrscheinlichkeit für jedes der nummerierten Felder ist gleich. Wie viele verschiedene Ausgänge kann das Pfeilwerfen haben, wenn vorausgesetzt wird, dass jeder Wurf die Scheibe trifft und
    (a) die Reihenfolge der Treffer von Bedeutung ist
    (b) die Reihenfolge der Treffer nicht von Bedeutung ist?

Wie groß ist in beiden Fällen die Wahrscheinlichkeit, dass alle Pfeile das gleiche Feld treffen?

11. Eine Trommel enthält a rote und b blaue Kugeln. Mit einem Griff werden k Kugeln gezogen. Mit $P(x)$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass unter den gezogenen Kugeln genau x blaue sind.
    (a) Beweise: $P(x) = \dfrac{\binom{a}{k-x}\binom{b}{x}}{\binom{a+b}{k}}$.
    (b) Berechne $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ und $P(4)$ für $a = 10$, $b = 4$ und $k = 6$.

12. Aus einem Kartenspiel (52 Blatt) werden nacheinander mit Zurücklegen k Karten ausgewählt. Für jede Wahl wird ein Zeitbedarf von einer Minute veranschlagt. Wie groß darf k höchstens gewählt werden, damit im Zeitraum von

    (a) einem Jahr (b) 1000 Jahren (c) 13,7 Milliarden Jahren

    alle Möglichkeiten durchgespielt werden können?

13. Ordne folgenden Problemen die richtige Grundaufgabe der Kombinatorik zu und berechne dann die Anzahl der Möglichkeiten:
    (a) Aus den 26 Buchstaben des Alphabets werden beliebige Wörter der Länge fünf gebildet.
    (b) Wie (a), jedoch jeder Buchstabe höchstens einmal.
    (c) Lotto „6 aus 49“.
    (d) Zehn Personen stellen sich in einer Reihe auf.
    (e) Zehn Kugeln mit den Ziffern 0 bis 9 auf drei Urnen verteilen.
    (f) Zehn Elektronen (ununterscheidbar) auf drei verschiedene Atome verteilen.
    (g) Zehn Elektronen (ununterscheidbar) auf drei gleiche Atome verteilen.

3.2 Bernoulli-Experiment und -Kette

1. **Aufgaben zur Anwendung**

   Walter zinkt Würfel so, dass äußerlich keine Veränderung zu erkennen ist, die Wahrscheinlichkeit für „6“ aber $0,25$ beträgt. Seine Frau Trude testet die Würfel folgendermaßen: Sie würfelt zwölfmal mit jedem Würfel. Wirft Sie mit einem Würfel mehr als dreimal eine „6“, so legt sie ihn zu den gezinkten, sonst zu den idealen.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein idealer Würfel zu den gezinkten gelegt wird?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein gezinkter Würfel zu den idealen gelegt wird?

(c) Wie könnte Trude die Fehlerquote verringern?

2. **Aufgaben zur Anwendung**

Ein Ko-Frosch sitzt auf einem Gitterpunkt eines Koordinatensystems und kann jeweils nur zum nächsten Gitterpunkt nach oben oder nach rechts springen und zwar jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$.
Beispiel: Befindet sich der Ko-Frosch auf dem Gitterpunkt (4|3), dann kann er nur nach (4|4) oder (5|3) springen.

(a) Der Ko-Frosch sitzt auf dem Gitterpunkt (0|0).

i. Auf welchen Gitterpunkten kann er sich nach 5 Sprüngen befinden?

ii. Wie viele Sprünge benötigt er, um den Gitterpunkt (18|17) zu erreichen?

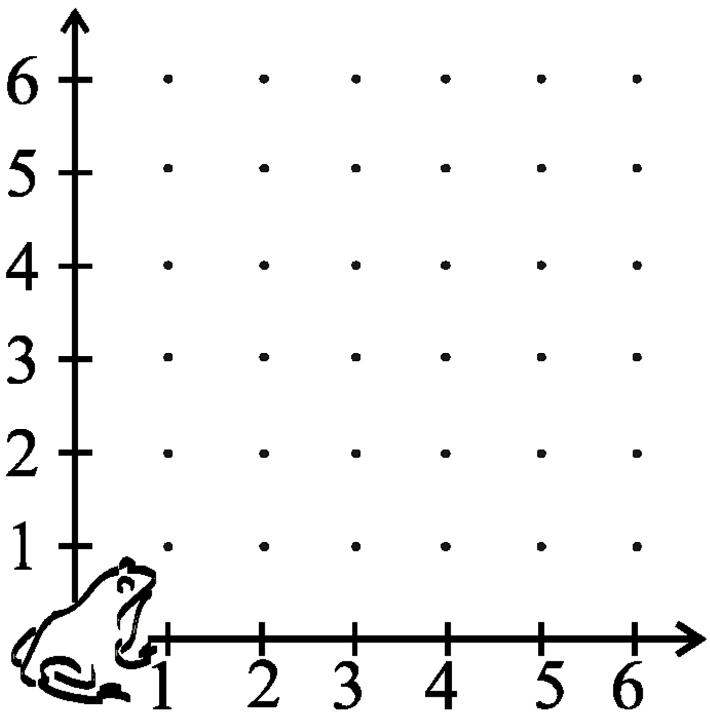
iii. Denk dir weitere zwei weitere Fragen aus und beantworte sie.

(b) Der Ko-Frosch sitzt auf dem Gitterpunkt (0|0) des Koordinatensystems und kann jeweils nur zum nächsten Gitterpunkt nach oben oder nach rechts springen und zwar jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$

i. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht er den Gitterpunkt (4|0), den Gitterpunkt (8|1), den Gitterpunkt (2|2)?

ii. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzt er nach 20 Sprüngen nicht auf einer Koordinatenachse?

iii. Denk dir weitere zwei weitere Fragen aus und beantworte sie.



3.3 Binomialkoeffizient, Binomialverteilung

1. Eine Laplace-Münze wird n-mal geworfen, „Kopf“ ist ein Treffer, „Zahl“ eine Niete.
   (a) Zeichne ein Histogramm von $B(n, p, k)$ für $n = 10$. Zeige, dass das Histogramm für beliebiges n symmetrisch ist.
   (b) Wir betrachten das Histogramm für ein gerades n. Zeige, dass die Nachbarsäulen der mittleren Säule weniger hoch sind als die mittlere Säule.
   (c) Wie oft muss die Münze mindestens geworfen werden, damit mit mindestens 90%-er Sicherheit mindestens einmal „Kopf“ geworfen wird? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das „mindestens einmal Kopf werfen“ dann genau?

2. Ein Laplace-Würfel wird n-mal geworfen, eine Sechs ist ein Treffer, alles andere eine Niete.
   (a) Zeichne ein Histogramm von $B(n, p, k)$ für $n = 10$.
   (b) Wie oft muss der Würfel mindestens geworfen werden, damit mit mindestens 90%-er Sicherheit mindestens ein Treffer erzielt wird? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für „mindestens ein Treffer“ dann genau?

3. Magdalena hat beim Stehendschießen die Trefferwahrscheinlichkeit $p = 80\%$.
   (a) Magdalena schießt zwanzigmal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_1, dass sie folgende Serie schießt: 10011 11011 10111 01111?
   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_2, dass sie bei zwanzig Schüssen genau 15 Treffer landet?
   (c) Eine Serie besteht aus fünf Schüssen, eine Topserie aus fünf Treffern. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_T schießt Lena eine Topserie? Wie viele Serien muss Magdalena mindestens schießen, damit mit mindestens 95%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens eine Topserie dabei ist?

4. An wie vielen Ziehungen muss man beim Lotto „6 aus 49“ mit jeweils einem Tipp mindestens teilnehmen, um mit mindestens 90%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal sechs Richtige zu haben?

5. Beim genetischen Fingerabdruck werden mehrere Abschnitte der DNA vervielfältigt und auf ihre Länge hin untersucht. Nehmen wir an, dass zehn Abschnitte untersucht werden und jeder Abschnitt zufällig verteilt fünf verschiedene Längen haben kann (die Realität ist komplizierter).
   (a) An einem Tatort werden DNA-Spuren des Täters gesichert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass der genetische Fingerabdruck einer beliebigen Person mit dem des Täters übereinstimmt?
   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10 000 Verurteilungen auf Grund des genetischen Fingerabdrucks mindestens ein Unschuldiger dabei ist?
   (c) Ab wie vielen Verurteilungen auf Grund des genetischen Fingerabdrucks ist mit einer mindestens 50%-igen Wahrscheinlichkeit mindestens ein Unschuldiger ins Gefängnis gewandert?

6. Aus einem Kartenspiel mit 32 Blatt wird mit Zurücklegen immer eine Karte gezogen. Ein Treffer (mit 1 bezeichnet) liegt vor, wenn die gezogene Karte ein Ass ist, sonst eine Niete (mit 0 bezeichnet).
   (a) Der Versuch wird zehnmal ausgeführt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt das Ergebnis 0001001001 ein?
   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind beim zehnmaligen Kartenziehen genau drei Treffer dabei?
   (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist beim zehnmaligen Kartenziehen mindestens ein Treffer dabei?
   (d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind beim zehnmaligen Kartenziehen mindestens drei Treffer dabei?

(e) Wie viele Karten muss man mindestens ziehen, um mit mindestens 90%-iger Sicherheit mindestens einen Treffer zu landen?

(f) Wie viele Karten muss man mindestens ziehen, um mit mindestens 90%-iger Sicherheit mindestens zwei Treffer zu landen?

(g) Eine Casino bietet das zehnmalige Kartenziehen mit Zurücklegen als Spiel an. Der Spieler gewinnt, wenn er ein Trefferpaar (zwei Treffer hintereinander) und sonst nur Nieten zieht. In diesem Fall erhält der Spieler den zwanzigfachen Einsatz zurück, sonst ist der Einsatz verloren. Welche Rendite (Gewinn pro Einsatz) wirft dieses Spiel für die Bank ab?

7. Ein Laplacewürfel wird n-mal geworfen.

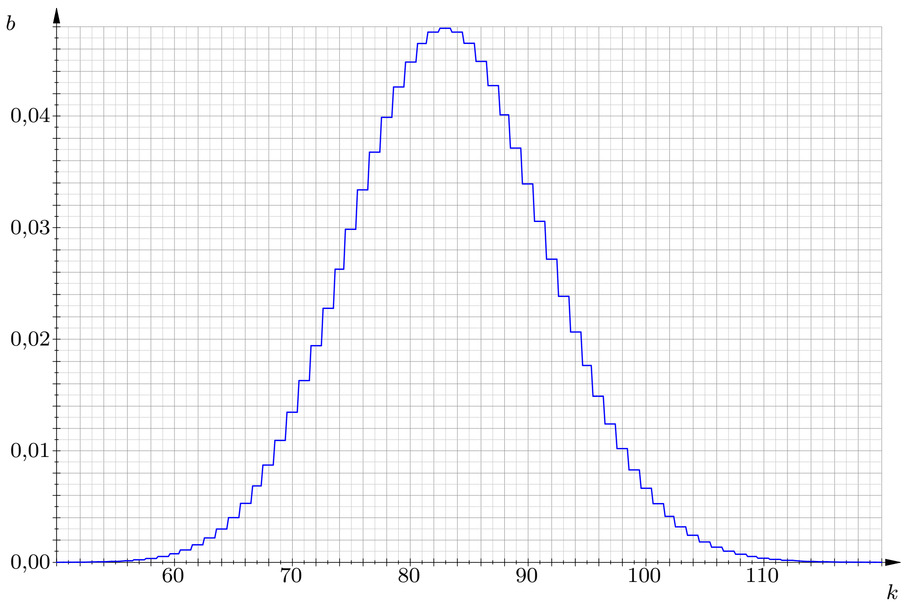
   (a) Wie groß muss n mindestens sein, damit mit mindestens 99,99%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein Sechser dabei ist?

   Jetzt wird der Würfel 500-mal geworfen. Wir betrachten die Ereignisse

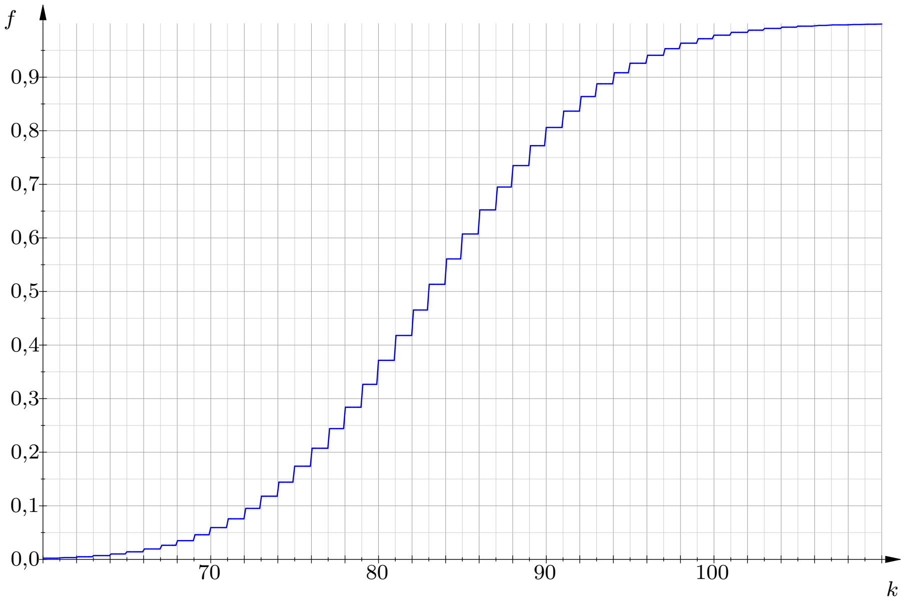
   E_1 :„höchstens 70 Sechser“ E_3 : „mindestens 78 und höchstens 93 Sechser“

   E_2 :„mindestens 90 Sechser“ E_4 : „mindestens 78 und höchstens m Sechser“

   (b) Die Abbildung zeigt den Grafen von $b(k) = B(500, \frac{1}{6}, k)$. Veranschauliche im Grafen die Wahrscheinlichkeiten $p_1 = P(E_1)$ und $p_2 = P(E_2)$ und schätze in nachvollziehbarer Weise ihre Werte ab.



   (c) Die Abbildung zeigt den Grafen von $f(k) = F_{\frac{1}{6}}^{500}(k)$. Drücke $p_3 = P(E_3)$ durch f aus, zeichne p_3 in den Grafen ein und gib den ungefähren Wert von p_3 an. Ermittle ebenfalls mit dem Grafen das kleinste m mit $p_4 = P(E_4) \geqq 50\%$.



3.4 Anwendungen der Binomialverteilung, u. a. einseitiger Signifikanztest

1. Für den Flug München-New York hat eine Gesellschaft ein Platzangebot von 240 Plätzen. Erfahrungsgemäß erscheinen 10% Passagiere nicht zum gebuchten Flug.
   (a) Mit welche Wahrscheinlichkeit erscheinen zum Abflug mindestens 219 und höchstens 240 Fluggäste, wenn 255 Buchungen akzeptiert werden
   (b) Schätzen sie die Wahrscheinlichkeit aus (a) mit einer Tschebyschow-Abschätzung ab.

2. Eine Biathletin hat im stehenden Anschlag die Trefferwahrscheinlichkeit $p_s = 70\%$ und im liegenden Anschlag $p_l = 80\%$. Dem Trainer liegt das Ergebnis einer Serie von 200 Schuss vor, die alle in einer Anschlagsart abgegeben wurden, er weiß aber nicht in welcher. Die Zahl der Treffer in dieser Serie bezeichnen wir mit X.
   (a) Formuliere eine Entscheidungsregel, wie sich der Trainer entweder für die Hypothese $\mathrm{H_s}$: „stehender Anschlag“ oder $\mathrm{H_l}$: „liegender Anschlag“ entscheiden kann.
   (b) F_s sei die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Trainer fälschlicherweise für $\mathrm{H_s}$ entscheidet und F_l die Wahrscheinlichkeit, dass er sich für $\mathrm{H_l}$ entscheidet, obwohl $\mathrm{H_s}$ wahr wäre. Für welche Entscheidungsregel ist die Summe der beiden Fehlerwahrscheinlichkeiten minimal?

4 Geometrie: Geraden und Ebenen im Raum

4.1 Lineare Abhängigkeit von Vektoren

1. Untersuche auf lineare Abhängigkeit:

   (a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1{,}6 \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ -2{,}1 \end{pmatrix}$,

   (b) $\vec{e} = \begin{pmatrix} -1{,}6 \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$ und $\vec{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3{,}6 \end{pmatrix}$

   (c) Stelle, wenn möglich, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8{,}8 \\ -8 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzw. $\vec{e}$ und $\vec{f}$ dar.

2. Untersuche auf lineare Abhängigkeit:

   (a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 21 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

   (b) $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{g} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$

   (c) Stelle, wenn möglich, $\vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bzw. $\vec{e}$, $\vec{f}$ und $\vec{g}$ dar.

3. Berechne die Lösungsmenge:

   (a)
   $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 7 \\ -4x_1 + 31x_2 + 7x_3 &= -9 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 14x_1 - 21x_2 - 7x_3 &= 49 \\ -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 &= -24 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 14x_1 - 21x_2 - 7x_3 &= 49 \\ -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 &= 21 \end{aligned}$$

4. Berechne die Lösungsmenge:

(a)
$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - x_3 &= 15 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -13 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 16 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - x_3 &= 15 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -13 \\ -15x_1 - 9x_2 + 3x_3 &= -45 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - x_3 &= 15 \\ 10x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 30 \\ -15x_1 - 9x_2 + 3x_3 &= -45 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - x_3 &= 15 \\ 10x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 30 \\ -15x_1 - 9x_2 + 3x_3 &= -42 \end{aligned}$$

4.2 Geraden und Ebenen

1. (a) Stelle die Gleichung der Geraden $g = \mathrm{AB}$ mit $\mathrm{A}(7|-1|2)$ und $\mathrm{B}(3|4|5)$ auf.

   (b) Bestimme die Koordinaten von drei Punkten R, S und T auf der Geraden g so, dass R zwischen A und B, S auf der Halbgeraden [AB mit $\overline{\mathrm{AS}} > \overline{\mathrm{AB}}$ und T auf der Halbgeraden [BA mit $\overline{\mathrm{BT}} > \overline{\mathrm{AB}}$ liegt.

   (c) Bestimme die restlichen Koordinaten von $\mathrm{C}(-3|c_2|c_3)$ so, dass $\mathrm{C} \in g$ gilt.

   (d) s_1, s_2 und s_3 sind die senkrechten Projektionen von g auf die x_2x_3-, x_1x_3- und x_1x_2-Ebene. Stelle die Gleichungen der drei Geraden s_1, s_2 und s_3 in der Parameterform auf.

   (e) Schreibe die Gleichung von s_3 in der Form $x_2 = f(x_1)$.

(f) Veranschauliche alle gegebenen und berechneten Größen in einem Schrägbild.

2. Geben Sie die Hesse-Normalform der Ebene E an.

$$E : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3. Die Punkte $A(1|1|1)$, $B(2|2|5)$ und $C(4|8|2)$ bestimmen das Dreieck $\triangle ABC$.
   (a) Berechnen Sie den Winkel α und die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$.
   (b) Wo liegen alle Punkte C' für die das Dreieck $\triangle ABC'$ die gleiche Fläche hat wie das Dreieck $\triangle ABC$. Geben Sie die Gleichung der Ortskurve an.
   (c) Berechnen Sie die Schnittgerade der von A, B und C aufgespannten Ebene E mit der Ebene $F : x_1 + x_3 = 0$.

4. Gegeben sind die Ebenen $F : 8x_1 - 4x_2 + x_3 - 81 = 0$ und $G : 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 1 = 0$. Darüber hinaus ist für jedes $a \in R$ eine Kugel K_a gegeben durch
$K_a : (x_1 - a)^2 + (x_2 - 2a)^2 + x_3^2 - 81 = 0$.
   (a) Unter welchem Winkel schneiden sich die Ebenen F und G?
   (b) Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden der Ebenen F und G.
   (c) Begründen Sie, dass alle Kugeln K_a mit der x_1x_2-Ebene gleichgroße Schnittkreise aufweisen und geben Sie deren Radius an. Für welche Punkte von a hat die Kugel K_a mit der x_1x_3-Ebene mehr als einen Punkt gemeinsam?
   (d) Für welche Werte für a liegt der Punkt $D(4| - 4|7)$ auf der Kugel K_a. Bestimmen Sie die Gleichungen der zugehörigen Tangentialebenen an die Kugel K_a im Punkt D.

5. Gegeben sind die Punkte $A(0|2|3)$, $B(1|-2|6)$ und $C(-4|2|15)$ und die Geradenschar

$$g_a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a-2 \end{pmatrix}$$

   (a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C.
   (b) Geben Sie die Schnittpunkte der Ebene E mit den drei Koordinatenachsen und die Gleichung der Spurgeraden in der x_2x_3-Ebene an.

(c) Für welchen Wert von a ist die Gerade g_a parallel zu E. Prüfen Sie ob diese in E enthalten ist.

(d) Beschreiben Sie die Lage der Geraden aus der Geradenschar.

6. (a) Verwandle in die Normalenform: $E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (b) Verwandle in die Parameterform: $E: \quad -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 20 = 0$

4.3 Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

1. Gegeben sind die Ebene

$$E: \quad 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 20 = 0$$

und die Gerade

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   (a) Berechne die Koordinaten der Achsenpunkte A_1, A_2 und A_3 von E sowie der Durchstoßpunkte D_1, D_2 und D_3 der Geraden g durch die Koordinatenebenen.

   (b) Veranschauliche E und g in einem Schrägbild.

   (c) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S von g mit E und zeichne S in das Schrägbild ein.

2. Gegeben sind die Punkte A(5|−3|−2), B(−3|2|4), C(1|6|2) und D(4|1|4). Durch A, B und C ist die Ebene E_1, durch A, B und D die Ebene E_2 festgelegt. Mit E_{ik} wird die x_ix_k-Ebene bezeichnet.

   (a) Stelle die Gleichungen der beiden Ebenen E_1 und E_2 in Normalenform auf.

   (b) Berechne die Achsenpunkte der Ebenen E_1 und E_2 (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen).

   (c) Die Schnittgeraden der Ebenen E_1 und E_2 mit der x_1x_2-Ebene (Spurgeraden) sind $g_1 = E_1 \cap E_{12}$ und $g_2 = E_2 \cap E_{12}$. Stelle die Gleichungen dieser Geraden in der Form $x_2 = f(x_1)$ auf.

   (d) $F(5|4|f_3) \in E_1$ und $G(1|g_2|3) \in E_2$. Berechne die fehlenden Koordinaten.

   (e) Veranschauliche die Lage der Ebenen in einem Schrägbild. Zeichne alle beschriebenen Punkte ein.

(f) Berechne den (spitzen) Schnittwinkel der Ebenen E_1 und E_2.

3. Berechne die Schnittmenge der Geraden

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit den Ebenen

(a) x_1x_2-Ebene

(b) x_1x_3-Ebene

(c) x_2x_3-Ebene

(d) $E_1: \quad 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 20 = 0$

(e) $E_2:$ Ebene durch A$(-1\,|\,0\,|{-3})$, B$(-5\,|\,2\,|\,1)$ und C$(-1\,|\,4\,|{-3})$

(f) $E_3:$ Ebene durch F$(5{,}8\,|\,0\,|\,0)$, G$(0\,|\,\frac{29}{8}\,|\,0)$ und H$(0\,|\,0\,|{-5{,}8})$

Veranschauliche den ganzen Sachverhalt in einem Schrägbild.

4. Bestimme k so, dass sich die Geraden

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

schneiden und berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S.

5. Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 20 \\ -25 \\ 30 \end{pmatrix},$$

$$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -12 \\ 15 \\ -18 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 3{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Fertige ein Schrägbild des Sachverhalts.

6. Die Ebene E enthält die Punkte A (3|3|3), B (7|6|2) und C (2|7|4), die Gerade g geht durch die Punkte F (14|15|8) und G (13|10|4).

(a) Stelle die Gleichungen von E und g in der Parameterform auf.

(b) Berechne die Koordinaten der Achsenpunkte von E.

(c) Berechne die Koordinaten der Spurpunkte von g.

(d) Berechne die Schnittmenge von E und g.

(e) Stelle die Gleichung einer Ebene E' auf, die parallel zu g ist, den Punkt A enthält und deren Spurgerade in der x_1x_2-Ebene parallel zur x_2-Achse verläuft.

Veranschauliche den ganzen Sachverhalt in einem Schrägbild.

7. Gegeben sind die Punkte A $(3|-2|1)$, B $(1|4|4)$ und C $(5|6|2)$ sowie der Vektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ z \end{pmatrix}.$$

Die Gerade g enthält die Punkte A und B, die Gerade h enthält den Punkt C und ist parallel zu $\vec{u}$.

(a) Stelle die Gleichungen von g und h auf.

(b) Berechne die Koordinaten des Spurpunktes G von g in der x_1x_2-Ebene. g' und h' sind die Projektionen von g und h, parallel zur x_3-Achse, in die x_1x_2-Ebene. Stelle die Gleichungen von g' und h' in der Parameterform auf.

(c) z wird so gewählt, dass sich g und h schneiden. Berechne z und die Koordinaten des Schnittpunktes S.

(d) Erstelle ein Schrägbild mit allen gegebenen und berechneten geometrischen Größen.

(e) Berechne die Koordinaten des Spurpunktes H von h in der x_1x_2-Ebene. F ist der Fußpunkt des Lotes von S auf die x_1x_2-Ebene. Berechne das Volumen der Pyramide GHFS.

8. Gegeben sind die Ebenen E_1 und E_2 durch die Gleichungen

$$E_1: \quad 5x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 20 = 0$$
$$E_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Koordinaten der Achsenpunkte A_1, A_2 und A_3 von E_1 und gib eine Gleichung von E_1 in der Parameterform an.

(b) Gib eine Gleichung von E_2 in der Normalenform an.

[Ein mögliches Ergebnis: $-3x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 12 = 0$]

(c) Die Achsenpunkte von E_2 seien B_1, B_2 und B_3. Wie lauten ihre Koordinaten?

[Zur Kontrolle: $B_2\,(0|4|0)$]

(d) Die Gerade g ist das Lot auf E_2 in B_2. Schreibe die Gleichung von g hin und Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S von g mit E_1.

(e) Zeichne die Spurgeraden der beiden Ebenen sowie und S und g in ein Schrägbild.

(f) Berechne das Volumen der Pyramide $B_1B_2B_3S$.

9. Gegeben sind die Ebenen

$$E_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_3: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E_4: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Berechne alle Schnittmengen zwischen jeweils zwei der gegebenen Ebenen.

10. Berechne die Schnittmengen der Ebene $E: \; 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 20 = 0$ mit den Ebenen

$$E_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E_2: \quad -x_1 + 5x_2 - x_3 - 22 = 0$$

4.4 Abstand- und Winkelbestimmung

1. F ist der Fußpunkt des Lotes von P auf E, P′ ist der an E gespiegelte Punkt P. Bestimme die HNF von E und berechne den Abstand $d(\mathrm{P}, E)$ und die Koordinaten von F und P′.

(a) $E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{P}\,(-4|5|-2)$

(b) $E: \quad 9x_1 + 12x_2 + 20x_3 - 205 = 0$, $\mathrm{P}\,(-6|22|31)$

(c) E enthält die parallelen Geraden

$$g: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } h: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{P}\,(5|4|-3)$$

2. Gegeben sind die Punkte $A(0|2|3)$, $B(1|-2|6)$ und $C(-4|2|15)$ und die Geradenschar

$$g_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} \text{-1} \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \text{a} \\ 1 \\ \text{a-2} \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C.

(b) Geben Sie die Schnittpunkte der Ebene E mit den drei Koordinatenachsen und die Gleichung der Spurgeraden in der x_2x_3-Ebene an.

(c) Für welchen Wert von a ist die Gerade g_a parallel zu E. Prüfen Sie ob diese in E enthalten ist.

(d) Beschreiben Sie die Lage der Geraden aus der Geradenschar.

3. Die Ebene E_1 enthält die Punkte A $(3|6|1)$, B $(-3|6|5)$ und C $(-3|-3|3)$.

(a) Stelle die Gleichung von E_1 in der vektorfreien Normalenform mit möglichst kleinen ganzen Zahlen auf.

(b) Eine weitere Ebene E_2 ist durch die Gleichung

$$E_2: \quad 6x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 15 = 0$$

gegeben. Berechne den (spitzen) Schnittwinkel der Ebenen E_1 und E_2.

(c) Untersuche, ob C $\in E_2$ gilt.

(d) s_1 und s_2 sind die Spurgeraden von E_1 und E_2 in der x_1x_2-Ebene. Schreibe die Gleichungen von s_1 und s_2 in der Form $x_2 = f(x_1)$ und berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Spurgeraden.

(e) Zeichne alle bisher gegebenen und berechneten Größen in ein Schrägbild. Zeichne auch die noch fehlenden Spurgeraden von E_2 ein.

(f) Zeichne die Schnittmenge $E_1 \cap E_2$ in das Schrägbild ein. Gib eine kurze Begründung deines Vorgehens.

4. Gegeben sind die Geraden

$$g: \quad \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u},\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h: \quad \vec{x} = \vec{b} + \mu\vec{v},\ \mu \in \mathbb{R}$$

mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Koordinaten der Spurpunkte der beiden Geraden und zeichne die Geraden mit Spurpunkten in ein Schrägbild (verwende für die Zeichnung eine ganze Seite im Hochformat). Zeichne auch die Projektionen g' und h' der beiden Geraden in die x_1x_2-Ebene ein. Wo schneiden sich g' und h'?

(b) Zeige, dass die Geraden windschief sind und berechne ihren Abstand d.

(c) Berechne die Koordinaten der Punkte $\mathrm{P} \in g$ und $\mathrm{Q} \in h$ mit $\overline{\mathrm{PQ}} = d$ und zeichne sie in das Schrägbild ein.

(d) Wir stellen uns g und h als straff gespannte Stahlseile vor. An h ist ein weiteres Seil der Länge s befestigt, das senkrecht nach unten hängt (parallel zur x_3-Achse) und dessen Aufhängepunkt frei auf h gleitet. Wie groß darf s höchstens sein, damit das untere Ende des gleitenden Seils die Gerade g niemals berührt?

5. Gegeben sind die beiden Geraden

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } h: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und der Punkt $\mathrm{P}\,(5|4|-3)$.

(a) Berechne den Abstand $d(g,h)$ der beiden Geraden.

(b) Berechne die Abstände $d(\mathrm{P},g)$ und $d(\mathrm{P},h)$.

(c) Wie lauten die Koordinaten der Fußpunkte F_g und F_h der Lote von P auf g und h?

(d) Spiegelt man P einmal an g und einmal an h, erhält man P_g und P_h . Berechne die Koordinaten dieser Spiegelpunkte. Schrägbild!

6. Gegeben sind die Punkte $\mathrm{A}\,(5|-2|1)$ und $\mathrm{P}\,(2|3|0)$, der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Gerade

$$g: \ \vec{x} = \vec{A} + \lambda\vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(a) Berechne den Abstand $d(\mathrm{P},g)$ des Punktes P von der Geraden g.

(b) Berechne die Koordinaten des Fußpunktes F des Lotes von P auf g.

(c) Spiegelt man P an g, dann erhält man den Spiegelpunkt P′. Berechne seine Koordinaten.

(d) Stelle den ganzen Sachverhalt in einem Schrägbild dar.

7. Vom Quader ABCDPQRS kennt man $\mathrm{A}\,(0|0|0)$, $\mathrm{B}\,(6|0|0)$, $\mathrm{C}\,(6|10|0)$ und $\mathrm{S}\,(0|10|4{,}5)$.

(a) Wie lauten die Koordinaten der anderen Punkte des Quaders?

(b) Gib eine Gleichung für die Gerade $g = \mathrm{PC}$ in der Parameterform an.

Zeichne ein Schrägbild des Quaders und zeichne g ein.

(c) Die Ebene E_1 enthält den Punkt S und steht senkrecht auf g. Stelle in nachvollziehbarer Weise eine Gleichung von E_1 in der (vektorfreien) Normalenform auf, deren Koeffizienten möglichst kleine ganze Zahlen sind.

[Zur Kontrolle: $E_1: \quad 24x_1 + 40x_2 - 18x_3 - 319 = 0$]

(d) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes F von E_1 mit g und berechne damit den Abstand $d(\mathrm{S}, g)$ des Punktes S von der Geraden g. Zeichne F in das Schrägbild ein.

(e) Berechne den Abstand $d(\mathrm{B}, E_1)$ des Punktes B von der Ebene E_1.

(f) In welcher Beziehung steht die Ebene

$$E_2: \quad -3x_1 + 4x_3 = 0$$

zu unserem Quader?

(g) Wir betrachten die Geraden $a = \mathrm{AD}$ (x_2-Achse) und $h = \mathrm{QR}$. Berechne die Koordinaten der Punkte A_2 und T mit $\{\mathrm{A}_2\} = E_1 \cap a$ und $\{\mathrm{T}\} = E_1 \cap h$. Weiter gilt $\{\mathrm{Y}\} = E_1 \cap \mathrm{BC}$ mit $\mathrm{Y}\left(6 \middle| \frac{35}{8} \middle| 0\right)$ (Beweis nicht erforderlich). Veranschauliche die Ebenen E_1 und E_2, indem du die Schnittmengen dieser Ebenen mit unserem Quader (Parallelogramme) mit verschiedenen Farben in das Schrägbild einzeichnest.

(h) Stelle eine Gleichung der Schnittgeraden $s = E_1 \cap E_2$ mit möglichst einfachen Zahlenwerten auf. Zeichne s in das Schrägbild ein.

8. Das Quadrat ABCD mit A$(0|0|0)$, B$(76|0|0)$, C$(76|76|0)$ und D$(0|76|0)$ ist die Grundfläche einer geraden Pyramide mit der Spitze S$(38|38|56)$ (die Zahlenwerte verstehen sich in Metern). Weiter sind folgende Punkte gegeben:

M_1 : Mittelpunkt von [AC]
M_2 : Mittelpunkt von [CD]
M_3 : Mittelpunkt von [DS]
M_4 : Mittelpunkt von [M_2S]

(a) Zeige durch Rechnung: $\mathrm{M}_3\,(19|57|28)$ und $\mathrm{M}_4\,(38|57|28)$.

(b) Entlang der Geraden $g = \mathrm{M}_1\mathrm{M}_3$ und $h = \mathrm{BM}_4$ verlaufen zwei Gänge durch die Pyramide. Stelle die Gleichungen von g und h auf und erstelle ein Schrägbild der Pyramide mit den Gängen (Einheit: $10\,\mathrm{m} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$).

(c) Die Ebene E_1 enthält den Punkt S und steht senkrecht auf h. Stelle in nachvollziehbarer Weise eine Gleichung von E_1 in der (vektorfreien) Normalenform auf, deren Koeffizienten möglichst kleine ganze Zahlen sind.

[Zur Kontrolle: $E_1: \quad -38x_1 + 57x_2 + 28x_3 - 2290 = 0$]

(d) Eine Grabkammer G befindet an der Stelle im Gang h, die von der Spitze S die kleinste Entfernung hat. Berechne diese kleinste Entfernung d und die Koordinaten von G. Zeichne G in das Schrägbild ein.

(e) Eine Ratte lebt im Gang g, eine Maus im Gang h. Wie nah können sich die beiden Tiere kommen?

4.5 Anwendungen

1. Von einem brettebenen Slalomhang (Ebene E) sind die Punkte A(0|0|40), B(50|20|0) und C(−20|55|20) bekannt (alle Koordinaten verstehen sich in Metern).

   (a) Stelle die Gleichung von E in der vektorfreien Normalenform mit möglichst kleinen ganzen Zahlen auf.

   (b) Berechne die fehlende Koordinate des Startpunktes S($-10|s_2|60$) auf dem Hang.

   (c) Berechne die Koordinaten der Achsenpunkte A_1 und A_2 von E (Schnittpunkte von E mit der x_1- und x_2-Achse). Zeichne alle bisher behandelten Punkte und die Spurgeraden der Ebene E in ein Schrägbild (Einheit: $10\,\mathrm{m} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$).

   (d) Welchen spitzen Winkel φ schließt E mit der x_1x_2-Ebene (Talboden) ein? Welche Steigung (in Prozent) hat demnach der Slalomhang?

   (e) Zeige, dass die Spurgerade t von E in der x_1x_2-Ebene (wir nennen sie die *Tallinie*) durch die Gleichung
   $$t: \quad x_2 = 70 - x_1$$
   beschrieben wird.

   (f) Ein Abfahrer fährt geradlinig und auf dem kürzesten Weg vom Start S ins Tal und erreicht die Tallinie im Punkt Y($y_1|y_2|0$). Berechne die Koordinaten von Y und die Länge $\overline{\mathrm{SY}}$.

   Tipp: Verwende den Vektor $\overrightarrow{A_1A_2}$.

   (g) Ein Bauer, dem das viereckige Grundstück A_1A_2CS gehört, möchte es als Baugrund für 400 € pro m² verkaufen. Welchen Preis würde er dabei erzielen?

2. (a) Versuche, möglichst viel über die Lösungsmenge der Gleichung
   $$\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$$
   mit dem unbekannten Vektor $\vec{x}$ herauszufinden. Verwende eine sauber beschriftete Zeichnung als Überlegungsfigur und die gängigen Formeln für das Kreuzprodukt. Unterscheide die Fälle $\vec{a} \perp \vec{b}$ und $\vec{a} \not\perp \vec{b}$.

(b) Gib mindestens zwei Elemente der Lösungsmenge von

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}$$

an (am besten natürlich die ganze Lösungsmenge).

3. **Auf Kollisionskurs**

Ein Körper K bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$, zur Zeit t_1 befindet er sich am Ort $\vec{x}_1$. Der Ort von K zur Zeit t ist dann

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_1 + (t - t_1)\vec{v},$$

die Gleichung der Bahnkurve (Gerade g) von K lautet:

$$g: \quad \vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda\vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Aus dem Protokoll einer Flugüberwachung:

Flugzeug	Zeit	x in m	y in m	z in m	v_x in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	v_y in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	v_z in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
Airbus	00:00:00	10000	2000	3000	-50	-100	20
Kampfjet	00:00:39	9500	1000	1600	-100	-200	120

(a) Berechne die Beträge der Flugzeuggeschwindigkeiten.

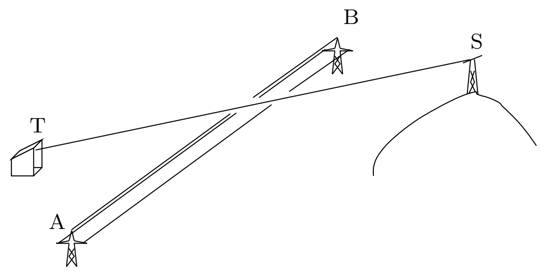
(b) Unter welchem Winkel, gegebenenfalls nach einer Parallelverschiebung, schneiden sich die Flugbahnen?

(c) Wo sind die beiden Flugzeuge, gerade Flugbahnen vorausgesetzt, auf der Höhe null gestartet?

(d) Untersuche, ob sich die Flugbahnen der beiden Maschinen schneiden und ob es zu einer Kollision kommt.

(e) Berechne die minimale Entfernung der beiden Flugzeuge.

4. Eine straff gespannte Überlandleitung führt von A $(120|40|20)$ nach B $(40|100|30)$, das ebenfalls (idealisierterweise) als geradlinig verlaufende Seil einer Bergbahn von der Talstation T $(78|-5|14)$ zur Spitze S $(78|135|s)$ des ersten Mastens. Alle Koordinaten verstehen sich in Metern.



(a) Stelle die Gleichungen der Geraden $g = \mathrm{AB}$ und $h = \mathrm{TS}$ auf.

(b) Für welches $s = s_1$ schneiden sich g und h?

(c) Stelle den Abstand d der Geraden g und h als Funktion von s dar.

(d) Eine Vorschrift besagt, dass d mindestens $15\,\mathrm{m}$ betragen muss. Für welches $s = s_2$ ist d genau $15\,\mathrm{m}$?

(e) Es gilt jetzt $s = s_2$. Für welches $\mathrm{P} \in g$ und $\mathrm{Q} \in h$ gilt $\overline{\mathrm{PQ}} = d$?

(f) Stelle den ganzen Sachverhalt in einem Schrägbild dar.

5 Anwendungen der Differential- und Integralrechnung

5.1 Integrale in der Physik

1. Wird ein Körper unter dem Einfluss der konstanten Kraft F parallel zur Kraftrichtung um die Strecke Δx verschoben, dann wird die Arbeit $\Delta W = F \cdot \Delta x$ verrichtet. Für eine konstante Kraft gilt also
$$\frac{\Delta W}{\Delta x} = F\,.$$
Ist F nicht konstant sondern eine Funktion von x, dann gilt diese Beziehung nur noch im Grenzfall $\Delta x \to 0$:
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = W'(x) = F$$
Bei bekannter Kraftfunktion $F(x)$ ist also die Arbeit, um den Körper von x_1 nach x_2 zu bringen:
$$\Delta W = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x$$
   (a) x bezeichne die Dehnung einer Feder mit der Federkonstanten D. Berechne die Arbeit ΔW, um die Dehnung der Feder von x_1 auf x_2 zu erhöhen.

   (b) Für ein Gummiseil gilt im x-Intervall $[0; 1{,}2\,\mathrm{m}]$ der Kraft-Weg-Zusammenhang
$$F(x) = Dx + Cx^{20} \quad \text{mit} \quad D = 50\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \quad \text{und} \quad C = 105\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^{20}}.$$
Zeichne den Grafen von F im Intervall $[0; 1{,}0\,\mathrm{m}]$. Berechne die Arbeit $W(x)$, um das Gummiband von null bis x zu dehnen. Berechne speziell $W(1{,}0\,\mathrm{m})$ und $W(1{,}2\,\mathrm{m})$.

   (c) Die Gravitationskraft auf einen Körper der Masse m in der Entfernung r zum Erdmittelpunkt ist für $r \geqq R$ ($R = 6380\,\mathrm{km}$ ist der Erdradius)
$$F(r) = \frac{GMm}{r^2}$$
mit $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$ (Gravitationskonstante) und $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ (Erdmasse). Berechne die Arbeit $W(r)$, um die Masse m von der Erdoberfläche bis

in die Entfernung r vom Erdmittelpunkt zu befördern. Wie groß ist $W(r)$ für $r \to \infty$? Mit welcher Mindestgeschwindigkeit v_0 müsste man einen Körper an der Erdoberfläche senkrecht nach oben abschießen (keine Luftreibung), damit er die Erde endgültig verlassen kann?

2. $x(t)$ ist der Ort eines Körpers zur Zeit t. Seine Geschwindigkeit ist definiert durch $v(t) = \dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ und seine Beschleunigung durch $a(t) = \dot{v}(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.
   (a) Die Beschleunigung a ist eine bekannte Funktion von t. Drücke $v(t)$ und $x(t)$ durch Integralfunktionen mit der unteren Grenze t_0 aus.
   (b) a ist jetzt konstant. Drücke $v(t)$ und $x(t)$ durch die Anfangswerte $v_0 = v(t_0)$ und $x_0 = x(t_0)$ aus.
   (c) Die Masse eines Lastwagens, der stetig Sand verliert, ist $m(t) = m_0 - \alpha t$ für $0 \leqq t \leqq t_1$ mit $m(t_1) = \frac{m_0}{2}$. Für $0 \leqq t \leqq t_1$ wirkt die konstante Antriebskraft F auf den LKW. Berechne $v(t)$ und $x(t)$.

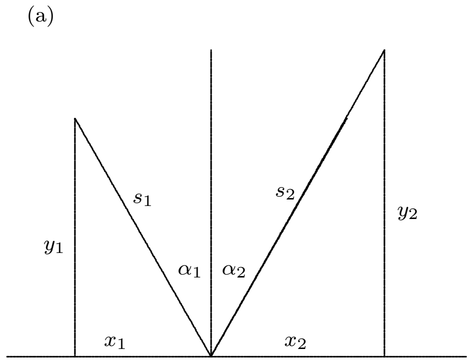
   Zeichne für $F = 10^4\,\mathrm{N}$, $\alpha = 100\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$, $v(0) = 0$, $x(0) = 0$ und $m_0 = 10^4\,\mathrm{kg}$ die Grafen von v und x im Intervall $0 \leqq t \leqq t_1$. Zeichne zum Vergleich die Grafen der Geschwindigkeit und des Ortes eines gleichartigen LKWs, der keinen Sand verliert.

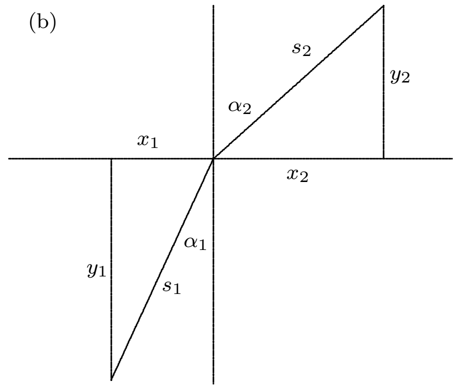
5.2 Extremwertaufgaben

1. Der letzte Weg des Bären Bruno wird durch die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ und $D_f = \mathbb{R}^+$ beschrieben.
   (a) Zeichnen Sie den Grafen von f mit der Einheit 5 cm im x-Intervall $[0{,}8; 2]$.
   (b) Der Bär wandert gemächlich von links nach rechts auf dem Grafen von f. Im Ursprung O des Koordinatensystems sitzt ein feiger Jaga, der Bruno genau dann erlegt, wenn er von ihm die kleinste Entfernung hat. Drücken Sie die Entfernung s zwischen dem Bären und dem Schützen durch die x-Koordinate des Bären aus und berechnen Sie die Koordinaten von Brunos Schicksalsort $\mathrm{B}\,(x_0|y_0)$. Nachweis nicht vergessen, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt!
   (c) Wie lang ist die tatsächliche Schussweite $s_0 = \overline{\mathrm{OB}}$, wenn der in (a) gezeichnete Weg einer Karte im Maßstab 1:2000 entspricht?

2. Die Lichtgeschwindigkeit für verschiedene Medien beträgt $\frac{c}{n}$, wobei $c = 3{,}0 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und n die Brechungszahl des Mediums ist. Zeigen

Sie, dass die Aussage „das Licht nimmt den Weg mit der minimalen Laufzeit“ äquivalent zu folgenden Gesetzen der geometrischen Optik ist:





(a) Bei der Reflexion von Licht ist der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel.

(b) Bei der Brechung von Licht an Grenzflächen gilt $\dfrac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \dfrac{n_2}{n_1}$.

3. **Die optimale Dose**
   (a) Aus Metall soll eine zylindrische Dose mit einem vorgegebenem Volumen V hergestellt werden. Für welchen Radius ist der Materialverbrauch minimal? Für die Rechnung soll der Materialverbrauch für Falze unberücksichtigt bleiben.
   (b) Aus Metall soll eine zylindrische Dose mit einer vorgegebenen Oberfläche A hergestellt. Für welchen Radius ist das Volumen maximal?

4. Zerlegen Sie 15 so in eine Summe, dass das Produkt maximal ist.

5. Aus einem Draht der Länge 120 cm wird das Kantenmodell eines Quaders hergestell. Die Seite b ist doppelt so lang wie die Seite c. Wie groß muss die Länge der Seite c gewählt werden, damit das Volumen des Quaders maximal wird.

6. Aus einem quadratischem Stück Karton der Seitenlänge 1 m soll eine quaderförmige Schachtel (ohne Deckfläche) mit der Höhe x hergestellt werden.
   (a) Drücken Sie das Volumen der Schachtel durch x aus. Bei der Rechnung soll die für Klebelaschen benötigte Fläche unberücksichtigt bleiben.
   (b) Für welche Höhe x ist das Volumen der Schachtel maximal?
   (c) Geben Sie das maximale Volumen der Schachtel an.

7. Aus einem quadratischem Stück Karton der Seitenlänge a soll eine quaderförmige Schachtel (ohne Deckfläche) mit der Höhe x hergestellt werden.
   (a) Drücken Sie das Volumen der Schachtel durch x aus. Bei der Rechnung soll die für Klebelaschen benötigte Fläche unberücksichtigt bleiben.
   (b) Für welche Höhe x ist das Volumen der Schachtel maximal?
   (c) Geben Sie das maximale Volumen der Schachtel an.

8. Aus einem rechteckigem Stück Karton der Seitenlängen a und b soll eine quaderförmige Schachtel mit der Höhe x hergestellt werden.
   (a) Drücken Sie das Volumen der Schachtel durch x aus. Bei der Rechnung soll die für Klebelaschen benötigte Fläche unberücksichtigt bleiben.
   (b) Für welche Höhe x ist das Volumen der Schachtel maximal?

9. Die Punkte $(x|f(x))$ auf dem Graphen der Funktion $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ erzeugen mit den Punkten $\mathrm{X}(x|0)$, $\mathrm{Y}(0|f(x))$ und dem Koordinatenursprung $\mathrm{O}(0|0)$ ein Rechteck der Fläche $A(x)$.
   (a) Berechnen Sie die Punkte des Graphen der Funktion $f(x)$ mit waagrechter Tangente.
   (b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ und zeichnen Sie für einen Punkt das zugehörige Rechteck ein.
   (c) Geben Sie die Koordinaten des Punktes P an, bei dem die Fläche des Rechtecks maximal ist.

10. In einen Kreis mit Radius 2 um den Koordinatenursprung $(0|0)$ soll ein Trapez mit möglichst großer Fläche einbeschrieben werden. Zwei Punkte des Trapezes liegen auf der x-Achse.
   (a) Drücken Sie die Koordinaten der vier Ecken des Trapezes in Polarkoordinaten aus.
   (b) Geben Sie einen Term zur Berechnung der Fläche des Trapezes an.
   (c) Berechnen Sie die Fläche für $\varphi = 30°, 45°, 60°$ und $90°$ (φ ist der Winkel zwischen der x-Achse und der rechten oberen Trapezecke).
   (d) Für welchen Winkel φ ist die Fläche des Trapezes maximal?

11. Betrachten Sie ein Dreieck mit den Ecken $\mathrm{A}(-a|b)$, $\mathrm{B}(a|b)$ und $\mathrm{C}(0|1)$, dessen Ecken auf dem Einheitskreis mit Mittelpunkt $\mathrm{M}(0|0)$ und Radius 1 liegen ($a \geq 0$).

(a) Zeichnen Sie die Dreiecke für $a = 0{,}2;\ 0{,}5;\ 0{,}7$ ($1 \mathrel{\widehat{=}} 5$cm).

(b) Berechnen Sie allgemein die Fläche $A(\varphi)$ des Dreiecks. Verwenden Sie zur Beschreibung den Winkel φ zwischen MB und der x-Achse ($\varphi < 0$, wenn B oberhalb der x-Achse).

(c) Für welchen Winkel ist die Fläche des Dreiecks maximal?
TIP: Verwenden Sie $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$ und den Satz von Vieta!

12. Aus einem Baumstamm mit kreisförmiger Querschnittsfläche (Durchmesser d, Länge l) soll ein Balken (Breite b, Höhe h, Länge l)

(a) mit maximalem Volumen herausgeschnitten werden. Welcher Prozentsatz des Balkens wird genutzt?

(b) mit maximaler Tragfähigkeit herausgeschnitten werden. Die Tragfähigkeit eines Balkens ist proportional zu bh^2. Welcher Prozentsatz des Balkens wird genutzt?

13. Mit dem Tröpfchenmodell zur Beschreibung eines Atomkerns läßt sich die Bindungsenergie des Kerns in Abhängigkeit von der Neutronenzahl N und der Protonenzahl Z berechnen. Für die Bindungsenergie erhält man:

$$W(Z,N) = (m_p Z + m_n N)\ c^2 - 6\varepsilon A + 6\varepsilon A^{2/3} + \beta\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \eta\frac{(A-2Z)^2}{A}$$

(a) Geben Sie die Bindungsenergie für feste Nukleonenzahl $A = Z + N$ an.

(b) Für welche Protonenzahl ist bei fester Nukleonenzahl A die Bindungsenergie mininal? Verwenden Sie dazu $\alpha = (m_n - m_p)\ c^2 = 0{,}78\,\text{MeV}$, $\beta = 0{,}639\,\text{MeV}$ und $\eta = 21{,}7\,\text{MeV}$.

(c) Vergleichen Sie das in (b) erhaltene Ergebnis mit der einfachen Annahme, dass sich in einem Atomkern etwa gleich viele Protonen und Neutronen befinden.

14. **Schwerpunkt einer Limonadendose**

(a) Wo liegt der Schwerpunkt einer vollen und einer leeren Dose?

(b) Bis zu welcher Höhe muss man die Dose austrinken, damit der Schwerpunkt möglichst niedrig liegt und daher die Dose am besten stehen bleibt.

(c) Welcher Wert ergibt sich für die Schwerpunktshöhe, wenn die Dose eine Höhe von 16 cm und eine Masse von 100 g hat. Die ganze Limonade soll eine Masse von 500 g haben.

15. Bauen Kinder aus Sand zylindrische Türme, sinken diese ab einer gewissen Höhe in sich zusammen. Dabei rutscht der obere Teil fast immer längs einer schrägen Fläche, die um 45° gegen die Horizontale geneigt ist nach unten. Wie läßt sich dies erklären? Nehmen Sie dazu an, dass für das Abrutschen eine gewisse Schubspannung

$$\sigma = \frac{\text{Kraft parallel zur Fläche } F_{||}}{\text{Abrutschfläche } A}$$

erreicht werden muss.

16. (a) Wann wird das Produkt zweier Zahlen mit konstanter Summe maximal?
    (b) Wann wird die Summe zweier Zahlen mit konstantem Produkt minimal?

17. Legen Sie die Punkte M und N auf den Schenkeln eines Winkels α mit Scheitel S so fest, dass bei konstanter Fläche des Dreiecks $\triangle$ SMN die Länge $\overline{\mathrm{MN}}$ minimal ist.

18. Wie muss man einen Stab der Länge l in zwei Stücke zerbrechen, damit das aus den Teilstücken gebildete Dreieck maximale Fläche hat?

19. Aus einem rechteckigen Stück Karton mit Seitenlängen 8 cm und 5 cm werden an den Ecken kongruente Quadrate herausgeschnitten. Biegt man die Randstücke hoch, erhält man eine quaderförmige, oben offene Schachtel. Wie lang muss man die Quadratseite wählen, damit der Inhalt der Dose möglichst groß wird.

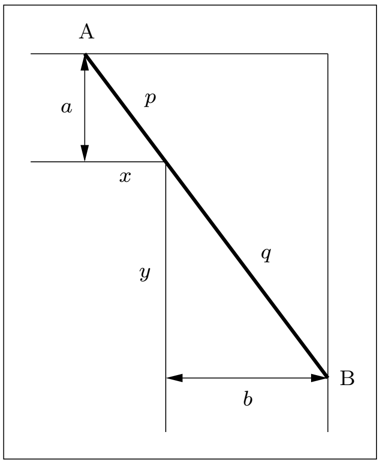
20. In welchem Rechteck mit gegebenem Flächeninhalt A hat die Diagonale minimale Länge?

21. Welcher Punkt des Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{2}x^2}$ hat vom Punkt P(0|3) minimalen Abstand?

22. Beweisen Sie, dass von allen Rechtecken mit gegebener Fläche A das Quadrat den kleinsten Umfang hat.

23. Wie muss ein kegelförmiges Sektglas gestaltet werden, damit bei gegebenem Volumen V möglichst wenig Material benötigt wird?

24. Zwei Kanäle mit den Breiten a und b stoßen rechtwinklig zusammen. Wir suchen die maximale Länge L, die ein Baumstamm haben kann, damit er gerade noch *um die Ecke* gebracht werden kann. Wir rechnen mit einem idealisierten Stamm der Dicke null.

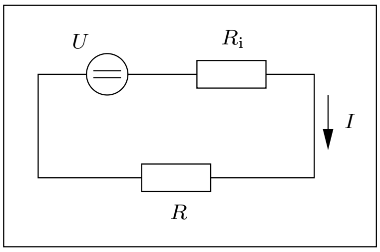


   (a) Drücken Sie $r = \overline{\mathrm{AB}} = p + q$ durch x aus und berechnen Sie L.

   (b) Berechnen Sie L speziell für die Fälle $a = b$, $a \ll b$ und $b = 2a$.

   (c) Zeichnen Sie $r(x)$ für $a = 1$ und $b = 2$. Beweisen Sie für diesen Fall, dass $g(x) = x + 2$ eine Asymptote von $r(x)$ ist.

25. An eine Stromquelle mit dem Innenwiderstand R_i wird ein Verbraucher mit dem Widerstand R angeschlossen. P sei die im Verbraucher umgesetzte Leistung.



   (a) Für welche Wahl des Widerstandes R ist P maximal? Wie groß ist das maximale P?

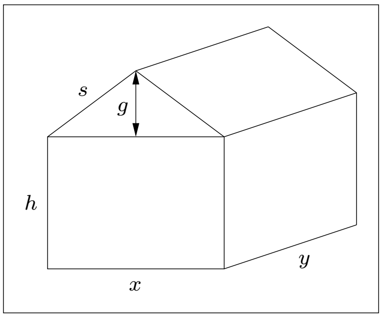
   (b) Zeichnen Sie $P(R)$ für $U = 1\,\mathrm{V}$ und $R_\mathrm{i} = 1\,\Omega$.

26. In einer Gemeinde gilt aus gestalterischen und wärmetechnischen Gründen für die Maße eines Hauses folgende **Verordnung** (siehe Abbildung):

V sei das Volumen des Hauses (umbauter Raum ohne Keller) und A die gesamte Oberfläche einschließlich Dach aber *ohne* die Grundfläche. Die Breite x, die Wandhöhe h, die Giebelhöhe g und die Länge y müssen so gewählt werden, dass

$$g = \frac{3}{8} \cdot x \quad ; \quad h = \frac{5}{8} \cdot x$$

und A bei gegebenem V minimal ist.



   (a) Drücken Sie V durch x und y aus und lösen Sie das Ergebnis nach V auf. Drücken Sie s durch x aus und beweisen Sie dann mit einer detaillierten Rechnung folgende Beziehung:

$$A(x) = \frac{13}{8} \cdot x^2 + \frac{40\,V}{13\,x}$$

(b) Für welches x, ausgedrückt durch V, ist die Bauordnung erfüllt? Nachweis der Art des Extremums nicht vergessen! Berechnen Sie auch das Verhältnis $k = \dfrac{y}{x}$ für ein Haus, das den Forderungen der Bauordnung genügt.

(c) Berechnen Sie x, y, h und g für ein der Bauordnung genügendes Haus mit dem Volumen $V = 540{,}8\,\mathrm{m}^3$ und zeichnen Sie die Vorderfront des Hauses im Maßstab $1 : 200$.

27. Wir betrachten alle möglichen Quader mit den Kantenlängen x, y und z und dem konstanten Volumen V. Gesucht ist der Quader mit der kleinsten Oberfläche.

(a) Drücken Sie die Oberfläche A eines Quaders durch x, y und V aus.

(b) A kann als Funktion von x mit dem Parameter y aufgefasst werden, d.h. $A = A_y(x)$. Für welches $x = x_y$ ist $A_y(x)$ minimal?

(c) Die Funktion $F(y)$ ist definiert durch $F(y) = A_y(x_y)$. $F(y)$ ist also die Oberfläche des Quaders mit der Kante y, dessen Oberfläche minimal ist. Den Quader mit der insgesamt kleinsten Oberfläche bei gegebenem Volumen V findet man durch Minimieren von F. Um welchen Quader handelt es sich dabei?

28. Zerlegen Sie die positive Zahl a so in eine Summe, dass das Produkt der beiden Summanden maximal wird.

29. **Warum Lastwagenfahrer so rasen**

Die Kosten für eine Lastwagenfahrt setzen sich aus den Treibstoffkosten und dem Fahrerlohn zusammen. Der Dieselverbrauch pro km ist die Summe aus einem konstanten Term a (Rollreibung) und einem zum Geschwindigkeitsquadrat proportionalen Term bv^2 (Luftwiderstand). Der Fahrerlohn F ist natürlich zur Fahrzeit t proportional, d.h. $F = ct$.

(a) Drücken Sie die Gesamtkosten G für eine Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit v über die Strecke s durch a, b, c, s, v und den Dieselpreis B pro Liter aus.

(b) Für welche Geschwindigkeit v_0 sind die Gesamtkosten minimal?

(c) Als konkretes Beispiel betrachten wir eine Fahrt über $s = 100\,\mathrm{km}$ mit den Daten

$$a = 0{,}04\,\frac{\text{Liter}}{\text{km}}, \quad b = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{Liter}\,\text{h}^2}{\text{km}^3}, \quad c = 80\,\frac{€}{\text{h}} \quad \text{und} \quad B = 2\,\frac{€}{\text{Liter}}.$$

Berechnen Sie v_0 und den minimalen Gesamtpreis G_0. Zeichnen Sie $G(v)$ im Intervall zwischen 0 und $300\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$.

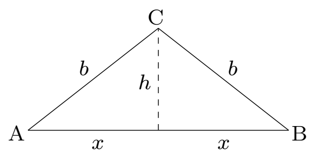
30. Skizzieren Sie den ungefähren Verlauf der Funktion $f(x) = a - |x|^n$ mit $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Eine Parallele zur x-Achse im Abstand d mit $0 \leqq d \leqq a$ schneidet G_f in A und B (A links von B). Für welches $d = d_0$ ist die Fläche F des Dreiecks AOB maximal, wobei O den Ursprung des Koordinatensystems bezeichnet?

    Hinweis: Drücken Sie F durch die x-Koordinate von B aus!

31. Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x) = x^2 - 2ax$ mit $a > 0$. Die Gerade $g:\ g(x) = c$ mit $c \geqq -a^2$ schneidet G_f in A und B (A links von B). Für welche c ist die Fläche F des Dreiecks AOB (O = Ursprung des Koordinatensystems) extremal?

    Hinweis: Drücken Sie F durch c aus und skizzieren Sie den ungefähren Verlauf von $F(c)$!

32. Ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basislänge $2x$ und den Schenkellängen b wird aus einem Draht der Länge L gebogen, d.h. $2x+2b = L$.



    (a) Beweise für die Dreiecksfläche A die Beziehung

$$A(x) = \frac{\sqrt{L}}{2}\sqrt{Lx^2 - 4x^3}$$

    (b) Berechne $x = x_0$ so, dass $A(x_0)$ die maximale Dreiecksfläche ist. Untersuche, um welches besondere Dreieck es sich im Fall $x = x_0$ handelt.

    (c) Drücke die maximale Fläche $A(x_0)$ durch L aus und vereinfache so weit wie möglich.

33. Für den Bauherrn einer kleinen Fabrikhalle stellt sich die Frage nach der Wirtschaftlichkeit einer Wärmedämmung. Die gesamte zu isolierende Außenfläche ist $A = 500\,\mathrm{m}^2$, der Quadratmeterpreis einer Dämmplatte der Dicke 1 cm wird mit

$$\alpha = 0{,}8\,\frac{€}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{cm}}$$

    angegeben, das Verlegen von einem Quadratmeter kostet 50 €. Weil der Gesamtpreis für die Dämmung über einen Kredit finanziert wird, muss dieser Preis noch mit 1,5 Multipliziert werden um die gesamten anfallenden Kosten für die Dämmung zu erhalten. Wenn die ganze Fläche A mit einer Dämmung der Dicke $d = x\,\mathrm{cm}$ versehen ist, beträgt der Energieverlust pro m^2 Außenfläche und pro Jahr

$$\frac{\Delta W}{A \cdot \Delta t} = \frac{\beta}{\frac{1}{3} + \frac{x}{2}} \quad \text{mit} \quad \beta = 100\,\frac{\mathrm{kWh}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{a}}$$

Die Halle soll $\Delta t = 20\,\mathrm{a}$ lang genutzt und mit Öl beheizt werden. Ein Liter Heizöl liefert die Energie 10 kWh und soll 1,20 € kosten (Mittelwert für die nächsten 20 Jahre). Mit $k(x)$ bezeichnen wir den Term für die gesamten Energiekosten in den zwanzig Jahren (Wärmedämmung plus Heizkosten).

(a) Beweise mit begründeten Ansätzen:

$$k(x) = p + qx + \frac{r}{\frac{1}{3} + \frac{x}{2}} \quad \text{mit} \quad p = 37\,500\,€, \quad q = 600\,€, \quad r = 120\,000\,€$$

(b) Berechne die Dicke x_0 der Dämmung, für die $k(x)$ minimal wird. Rechne bis zum Ergebnis mit den allgemeinen Größen p, q und r.

(c) Die Dämmplatten gibt es nur in geradzahligen Werten von x. Ermittle die günstigste existierende Dämmstärke x_1. Um wieviel Prozent ist $k(x_1)$ kleiner als die Gesamtkosten $k(0)$ ohne Dämmung?

5.3 Wachstums- und Zerfallsprozesse

1. Die Anzahl der Bakterien in einer Population wird in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) näherungsweise durch $n(t) = 30 + t^2 \cdot e^{5-t}$; $0 \le t \le 8$, beschrieben.

   (a) Berechnen Sie den Wert t_A für den $n(t)$ maximal ist.

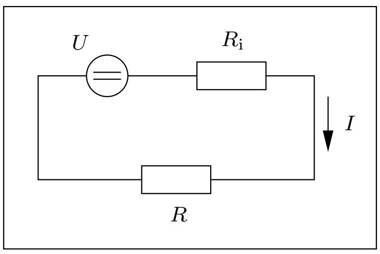
   (b) Berechnen Sie den Wert t_B für den die Zuwachsrate von $n(t)$ maximal ist.

5.4 Optimierung

5.5 verknüpfte Funktionen

5.6 Anwendungen der Kurvendiskussion

1. An eine Stromquelle mit dem Innenwiderstand R_i wird ein Verbraucher mit dem Widerstand R angeschlossen. P sei die im Verbraucher umgesetzte Leistung.



   (a) Für welche Wahl des Widerstandes R ist P maximal? Wie groß ist das maximale P?

   (b) Zeichnen Sie $P(R)$ für $U = 1\,\mathrm{V}$ und $R_\mathrm{i} = 1\,\Omega$.

2. Zur Messung der elektrischen Stromstärke verwendet man in der Regel Drehspulinstrumente. Der Strom fließt durch eine im Magnetfeld drehbar aufgehängte Spule, die durch die magnetische Wirkung des Stroms ausgelenkt wird. In einem speziellen Drehspulinstrument kann zwischen zwei Messmethoden gewählt werden:
I: Die Stärke des Magnetfeldes ist konstant und der Strom fließt nur durch die drehbare Spule.
II: Das Magnetfeld wird durch eine stromdurchflossene Spule erzeugt, die mit der drehbaren Spule in Serie geschaltet ist.

   Der Zusammenhang zwischen Stromstärke I und Auslenkung x der drehbaren Spule wird für $x < 90°$ durch folgende Funktionsgleichung beschrieben:
   $I_I(x) = 0{,}04\,\dfrac{x}{\cos(x)}$ bzw. $I_{II}(x) = 0{,}2\sqrt{\dfrac{x}{\cos(x)}}$, I jeweils in A, x Maßzahl des Winkels im Gradmaß.

   (a) Für welche Ströme ist die Auslenkung mit der ersten Methode größer?
   (b) Welche Ströme müssen jeweils fließen, damit man die Auslenkungswinkel 10°, 20°, 40°, 60° und 80° erhält?
   (c) Zeichnen Sie die Funktionen für $x \in [\,0\,;\,90°\,[$.
   (d) Unter der Empfindlichkeit eines Stromstärkemessgerätes versteht man den Quotienten $\frac{\Delta x}{\Delta I}$. Erklären Sie, warum diese Definition sinnvoll ist.
   Formulieren Sie einen Zusammenhang zwischen der Ableitung $I'(x)$ der Funktion und der Empfindlichkeit.
   (e) Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen und stellen Sie sie mit einer geeigneten Software graphisch dar. Diskutieren sie folgende Punkte:
   Für welche Auslenkungswinkel bzw. Stromstärken ist die Messanordnung I empfindlicher?
   Für welchen Auslenkungswinkel bzw. für welche Stromstärke ist die Empfindlichkeit der Messanordnung II maximal?

3. In den verschiedensten Bereichen der Physik, wie z. B. der Akustik und der Elektrodynamik, treten Schwingungen auf. Wird ein schwingungsfähiges System von außen mit der Frequenz f angeregt (maximale Anregungskraft konstant), hängt seine Reaktion (Amplitude) stark von der Anregungsfrequenz f ab.
Die Amplitude $A(f)$ kann durch folgende Formel beschrieben werden:

$$A(f) = \frac{C}{\sqrt{({f_0}^2 - f^2)^2 + (f\gamma)^2}}$$

   Neben Konstanten des Systems (C enthält die maximale Anregungskraft und den Reibungsfaktor γ) hängt $A(f)$ von der Eigenfrequenz f_0 des Systems und der Anregungsfrequenz f ab. Hier werden nur Fälle mit $\gamma < \frac{f_0}{\sqrt{2}}$ betrachtet.

(a) Untersuchen Sie, wie sich die Amplitude $A(f)$ für $f \to 0$ und für $f \to \infty$ verhält und interpretieren Sie die Ergebnisse.

(b) Berechnen Sie allgemein die Resonanzfrequenz (Frequenz, bei der die Amplitude maximal ist) f_R des Systems.

(c) Von welchen Parametern hängt die Resonanzfrequenz in welcher Weise ab? Skizzieren Sie qualitativ die Resonanzfrequenz in Abhängigkeit vom Reibungsfaktor.

(d) Stellen Sie $A(f)$ für $C = 50$, $f_0 = 5$ und $\gamma = 1{,}1$ für $f \in [0; 15]$ graphisch dar.

(e) Diskutieren Sie mit Hilfe einer geeigneten Software, wie sich der Verlauf von $A(f)$ in Abhängigkeit von den vorkommenden Parametern ändert.

4. Reale Gase lassen sich durch die Van-der-Waals-Gleichung $(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$ beschreiben. Dabei ist p der Druck, V das Volumen pro *kmol* ($6{,}022 \cdot 10^{26}$ Teilchen) und T die Temperatur des Gases. a und b sind Materialkonstanten des Gases und R ist die allgemeine Gaskonstante ($8{,}3144 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{Kkmol}}$).

   (a) Zeigen Sie, dass die Van-der-Waals-Gleichung für große Volumina (d. h. $V \gg a, b$) in die bekannte Zustandsgleichung idealer Gase $\frac{p \cdot V}{T} = \text{const}$ übergeht.

   (b) Lösen Sie die Van-der Waals-Gleichung nach p auf.

   (c) Für Temperaturen oberhalb eines kritischen Wertes T_k lassen sich Gase auch bei sehr hohem Druck nicht mehr verflüssigen. Für diese Temperatur hat die Funktion $p(V)$ genau einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente.
   Bestimmen Sie V_k, T_k und p_k allgemein aus der Van-der-Waals-Gleichung.

   (d) Berechnen Sie V_k, T_k und p_k für Sauerstoff ($a = 137 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{Nm}^4}{\mathrm{kmol}^2}$, $b = 0{,}0316 \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kmol}}$).

5. Die Stromstärke durch eine Schaltung aus einem Widerstand, einer Spule und einem Kondensator hängt von der Frequenz f und der anliegenden Wechselspannung ($\omega = 2\pi f$) ab. Sie berechnet sich nach der Formel

$$I(\omega) = \sqrt{\frac{100 - 2\omega^2}{100R^2 + \omega^2} + 0{,}01\omega^2} \qquad D = \mathbb{R}_0^+.$$

   Für R setzt man dazu die Maßzahl des enthaltenen ohmschen Widerstandes und für f die Maßzahl der Frequenz ein. $I(\omega)$ liefert dann die Maßzahl der Stromstärke.

   (a) Betrachten Sie die Funktion $I(\omega)$ zunächst für $R = 0$.

      i. Vereinfachen Sie die Funktionsgleichung und geben Sie die Nullstellen der Funktion an.

      ii. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion für ω gegen Null und gegen Unendlich.

   iii. Untersuchen Sie, ob die Funktion im gesamten Definitionsbereich differenzierbar ist.
   iv. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion.
   v. Zeichnen Sie die Funktion für $\omega \in [0; 25]$.

(b) Betrachten Sie nun die allgemeine Form der Funktion
   i. Berechnen Sie $I(10)$ in Abhängigkeit von R.
   ii. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion für ω gegen Null und gegen Unendlich.
   iii. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion.
   iv. Zeichnen Sie die Funktion für $R = 0{,}2$.
   v. Zeichnen Sie $I(\omega)$ mit einer geeigneten Software für $R \in \{0; 0{,}1; 0{,}2; ...\}$ und beschreiben Sie die Veränderungen der Funktion.
   vi. Für welche Frequenz ist $I(\omega)$ unabhängig von R?

Hinweis: Die diskutierte Funktion beschreibt den Anregungsstrom eines Parallelschwingkreises mit $L = 0{,}1$ und $C = 0{,}1$. Die allgemeine Funktion heißt

$$I_{\text{ges}} = \sqrt{\frac{1 - 2LC\omega^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + \omega^2 C^2}.$$

6. Mit dem Tröpfchenmodell zur Beschreibung eines Atomkerns läßt sich die Bindungsenergie des Kerns in Abhängigkeit von der Neutronenzahl N und der Protonenzahl Z berechnen. Für die Bindungsenergie erhält man:

$$W(Z, N) = (m_p Z + m_n N)\, c^2 - 6\varepsilon A + 6\varepsilon A^{2/3} + \beta \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \eta \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$

   (a) Geben Sie die Bindungsenergie für feste Nukleonenzahl $A = Z + N$ an.
   (b) Für welche Protonenzahl ist bei fester Nukleonenzahl A die Bindungsenergie mininal? Verwenden Sie dazu $\alpha = (m_n - m_p)\, c^2 = 0{,}78\,\text{MeV}$, $\beta = 0{,}639\,\text{MeV}$ und $\eta = 21{,}7\,\text{MeV}$.
   (c) Vergleichen Sie das in (b) erhaltene Ergebnis mit der einfachen Annahme, dass sich in einem Atomkern etwa gleich viele Protonen und Neutronen befinden.

7. Zerodur ist eine Glaskeramik, die über einen weiten Temperaturbereich nur eine sehr kleine Temperaturausdehnung aufweist. Aus diesem Grund findet es Anwendung als Spiegelträger in der Lasertechnik und in Teleskopen.
   Die Längenausdehnung $f(T)$ (in $\frac{\mu\text{m}}{°\text{C}}$) eines 10 m langen Zerodurstabes in Abhängigkeit von der Temeratur T in °C lässt sich näherungsweise durch folgende Funktion beschreiben:

$$f(T) = -0{,}6 + 1{,}63 \cdot \frac{T}{100\,°\mathrm{C}} - 2{,}91 \cdot \left(\frac{T}{100\,°\mathrm{C}}\right)^2 - 2{,}49 \cdot \left(\frac{T}{100\,°\mathrm{C}}\right)^3$$

(a) Untersuchen Sie den Kurvenverlauf von $f(T)$.

(b) Zeichnen Sie $f(T)$ mit einer geeigneten Software im Bereich von $-100\,°\mathrm{C}$ bis $100\,°\mathrm{C}$.

(c) Eine exaktere Beschreibung der Längenausdehnung liefert:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(T) \;=\; & f(T) + \\ & +2{,}74 \cdot \left(\frac{T}{100\,°\mathrm{C}}\right)^4 + 1{,}43 \cdot \left(\frac{T}{100\,°\mathrm{C}}\right)^5 - \\ & -0{,}62 \cdot \left(\frac{T}{100\,°\mathrm{C}}\right)^6 - 0{,}26 \cdot \left(\frac{T}{100\,°\mathrm{C}}\right)^7\end{aligned}$$

Zeichnen Sie $\tilde{f}(T)$ mit einer geeigneten Software und vergleichen Sie den Graphen mit dem von $f(T)$. Diskutieren Sie das Ergebnis.

Literatur: *Mathematikaufgaben, Anwendungen aus der modernen Technik und Arbeitswelt*, Werner Schmidt, Ernst Klett Verlag, 1984

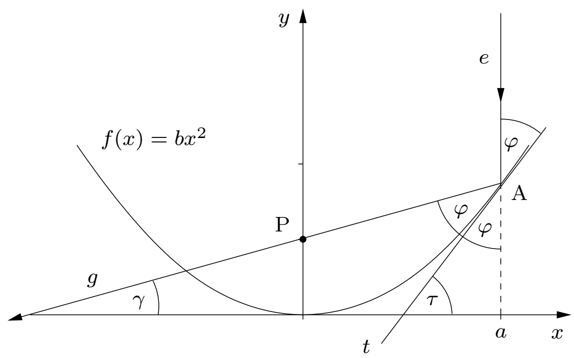
5.7 Anwendungen in der Geometrie

5.8 Aus der Physik

1. Licht fällt parallel zur y-Achse in einen Parabolspiegel, dessen spiegelnde Fläche durch

$$f(x) = bx^2$$

beschrieben wird. Wir betrachten einen Lichtstrahl, der den Spiegel im Punkt A $(a|f(a))$ trifft. Nach dem Reflexionsgesetz schließen der einfallende Strahl e und der reflektierte Strahl g mit der Tangente t an G_f im Punkt A den gleichen Winkel φ ein. Beweisen Sie, dass *jeder* zur y-Achse parallel einfallende Strahl die y-Achse im selben Punkt P $(0|p)$ (dem *Brennpunkt*) trifft und berechnen Sie p.



Benutzen Sie die trigonometrische Formel: $\tan 2\varphi = \dfrac{2\,\tan\varphi}{1 - \tan^2\varphi}$.

2. Ein Elektron in einer Fernsehröhre bewegt sich nach folgendem Weg-Zeit-Gesetz:

$$s(t) = 2 \cdot 10^{14}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 + 3 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t + 5\,\mathrm{cm} \quad \text{mit} \quad t \geqq 0$$

   Welche Geschwindigkeit hat das Elektron beim Erreichen von $s = 0{,}7\,\mathrm{m}$?

3. Ein Zug bewegt sich im Zeitintervall $[\,0\,\mathrm{h}\,, 4\,\mathrm{h}\,]$ nach dem Zeit-Weg-Gesetz

$$x(t) = 10\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}^4} \cdot t^4 - 80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}^3} \cdot t^3 + 160\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}^2} \cdot t^2$$

   Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Geschwindigkeit $v(t)$! Zeichnen Sie die Graphen von $x(t)$ und $v(t)$!
   Berechnen Sie die maximale Entfernung des Zuges vom Ausgangspunkt sowie seine maximale Geschwindigkeit.

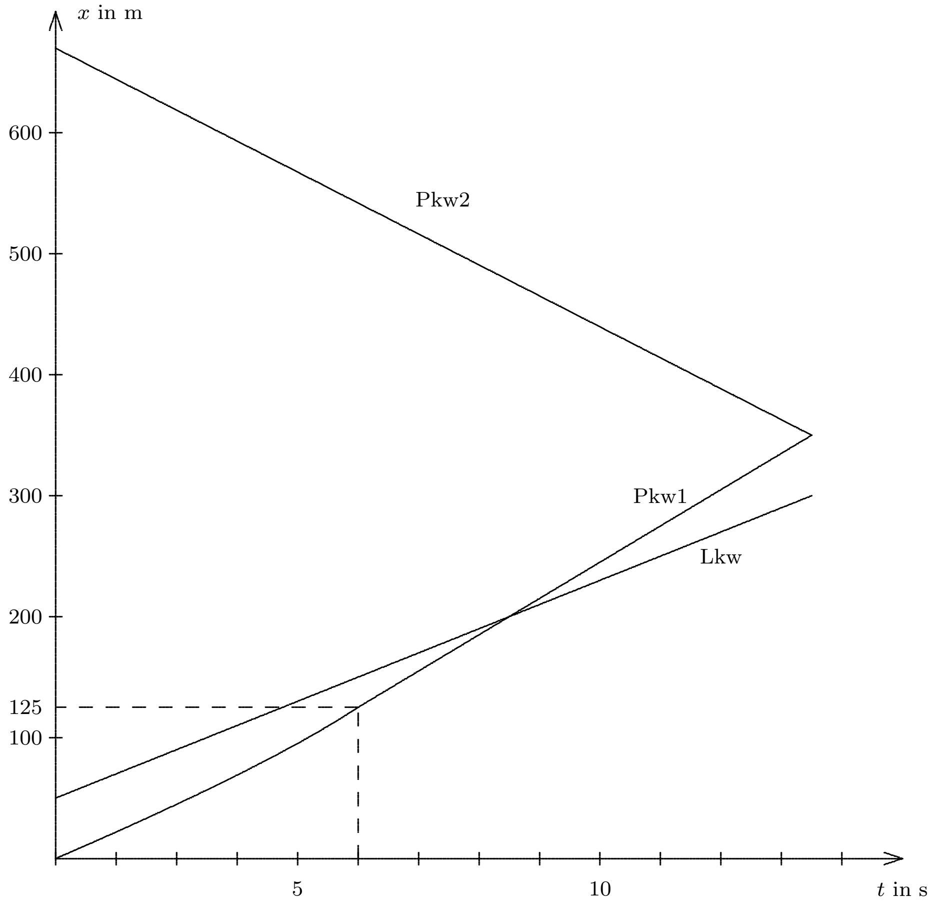
4. Zur Messung der elektrischen Stromstärke verwendet man in der Regel Drehspulinstrumente. Der Strom fließt durch eine im Magnetfeld drehbar aufgehängte Spule, die durch die magnetische Wirkung des Stroms ausgelenkt wird. In einem speziellen Drehspulinstrument kann zwischen zwei Messmethoden gewählt werden:
   I: Die Stärke des Magnetfeldes ist konstant und der Strom fließt nur durch die drehbare Spule.
   II: Das Magnetfeld wird durch eine stromdurchflossene Spule erzeugt, die mit der drehbaren Spule in Serie geschaltet ist.

   Der Zusammenhang zwischen Stromstärke I und Auslenkung x der drehbaren Spule wird für $x < 90°$ durch folgende Funktionsgleichung beschrieben:

   $I_I(x) = 0{,}04\,\dfrac{x}{\cos(x)}$ bzw. $I_{II}(x) = 0{,}2\sqrt{\dfrac{x}{\cos(x)}}$, I jeweils in A, x Maßzahl des Winkels im Gradmaß.

   (a) Für welche Ströme ist die Auslenkung mit der ersten Methode größer?
   (b) Welche Ströme müssen jeweils fließen, damit man die Auslenkungswinkel 10°, 20°, 40°, 60° und 80° erhält?
   (c) Zeichnen Sie die Funktionen für $x \in [\,0\,; 90°\,[$.
   (d) Unter der Empfindlichkeit eines Stromstärkemessgerätes versteht man den Quotienten $\frac{\Delta x}{\Delta I}$. Erklären Sie, warum diese Definition sinnvoll ist.
   Formulieren Sie einen Zusammenhang zwischen der Ableitung $I'(x)$ der Funktion und der Empfindlichkeit.
   (e) Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen und stellen Sie sie mit einer geeigneten Software graphisch dar. Diskutieren sie folgende Punkte:
   Für welche Auslenkungswinkel bzw. Stromstärken ist die Messanordnung I empfindlicher?
   Für welchen Auslenkungswinkel bzw. für welche Stromstärke ist die Empfindlichkeit der Messanordnung II maximal?

5. In der Abbildung ist die Zeit-Ort-Funktion für einen Überholvorgang dargestellt.



(a) Berechnen Sie die Geschwindigkeiten des LKW's und von PKW2 sowie die Geschwindigkeit des überholenden PKW's zur Zeit $t > 6\,\text{s}$.

(b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit von PKW1 zur Zeit $t = 0$ unter der Annahme, dass PKW1 im Zeitintervall $1\,\text{s} \leqq t \leqq 6\,\text{s}$ eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung ausführt, sonst aber mit konstanter Geschwindigkeit fährt.

(c) Zeichnen Sie ein Zeit-Geschwindigkeitsdiagramm für PKW1.

6. Die Schwingung einer Masse m an einer Feder mit der Federhärte D wird durch die Gleichung $m \cdot \ddot{s}(t) + D \cdot s(t) = 0$ beschrieben. $\ddot{s}(t)$ ist die zweite Ableitung von $s(t)$ nach der Zeit. Zeigen Sie durch Ableiten und Einsetzen, dass folgende Funktionen Lösungen der Schwingungsgleichung sind.

(a) $s(t) = s_0 \sin(\omega t) \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{D}{m}$

(b) $s(t) = s_0 \cos(\omega t) \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{D}{m}$

(c) $s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{mit } \omega^2 = \frac{D}{m}$

(d) Wie entscheidet man, welche Lösung eine beobachtete Schwingung richtig beschreibt?

7. Die Schwingung einer Masse m an einer Feder mit der Federhärte D und der Dämpfungszahl k wird durch die Gleichung $m \cdot \ddot{s}(t) + k \cdot \dot{s}(t) + D \cdot s(t) = 0$ beschrieben. Zeigen Sie durch Ableiten und Einsetzen, dass die Funktion

$$s = s_0 \, e^{-\frac{k}{2m}t} \cdot \sin(\omega t) \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2}$$

eine Lösung der Schwingungsgleichung ist:

Bemerkung zur Schreibweise: Mit $\dot{s}(t)$ und $\ddot{s}(t)$ ist die erste und die zweite Ableitung von $s(t)$ nach der Zeit gemeint!

8. Viele Größen in Naturwissenschaft und Technik sind zueinander direkt proportional. Stellt man den Zusammenhang zweier solcher Größen graphisch dar, erhält man eine Ursprungsgerade.
Bei Experimenten treten aber immer Messfehler auf, so dass die Messwerte $(a_i|b_i)$ in der Regel nicht exakt auf einer Gerade liegen. C. F. Gauß hat nun vorgeschlagen die Steigung einer Ausgleichsgerade $f(x) = mx$ so zu wählen, dass die Summe der Fehlerquadrate $(f(a_i) - b_i)^2$ minimal wird.
   (a) Berechnen Sie für folgende Messwerte die Summe der Fehlerquadrate $S(m)$ und bestimmen Sie die Steigung der Ausgleichsgerade.
      i. (50|30), (100|55), (150|95)
      ii. (20|40), (40|75), (60|115)
      iii. (10|30), (30|86), (50|140), (70|205)
      iv. (5|1,5), (10|3,2), (15|4,3), (20|5,9)
   (b) Zeigen Sie allgemein, dass die Summe der Fehlerquadrate in der Form $S(m) = pm^2 - 2qm + r$ geschrieben werden kann.
   (c) Geben Sie an, wie p, q und r aus den Messwerten berechnet werden.
   (d) Geben Sie allgemein die Steigung m der Ausgleichsgerade an.

9. **Stauentwicklung**
Ein einfaches Modell zur Untersuchung der Stauentwicklung erhält man, indem man annimmt, dass alle Autos mit gleicher konstanter Geschwindigkeit v und gleichem Sicherheitsabstand $s(v)$ fahren. Zusätzlich sollen alle Autos die gleiche Länge $l = 5$m haben.

(a) Geben Sie einen Term $n(v)$ zur Berechnung der Anzahl der Autos an, die eine Beobachtungsstelle in einer Stunde passieren.

(b) Der Sicherheitsabstand $s(v)$ sollte mindestens so groß sein, wie der Anhalteweg $s_A(v)$ eines Autos. Dieser lässt sich nach der Formel

$$s_A(v) = v \cdot 1\ \mathrm{s} + \frac{1}{2b} v^2$$

berechnen. Dabei ist v die Anfangsgeschwindigkeit in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und b die Beschleunigung in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Berechnen Sie den Anhalteweg $s(v)$ eines Autos mit der Anfangsgeschwindigkeit $30\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, $50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, $80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und $100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

i. für trockene ($b = 7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$) Straße.

ii. für nasse ($b = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$) Straße.

(c) Berechnen Sie $n(v)$ für die Geschwindigkeit $30\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, $50\,\frac{km}{h}$, $80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und $100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Der Sicherheitsabstand soll gleich dem Anhalteweg sein.

i. für trockene ($b = 7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$) Straße.

ii. für nasse ($b = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$) Straße.

Wie verändert sich $n(v)$ bei zunehmender Geschwindigkeit?

(d) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von $n(v)$.
Bei welcher Geschwindigkeit ist $n(v)$ für trockene bzw. nasse Straßse maximal?

(e) Diskutieren Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe (d).

10. Im Eisenbahnbau werden im Flachland für die Bahnstrecke normalerweise Krümmungsradien von 1000 m oder mehr genommen. Darüberhinaus wird die Bahnstrecke so gewählt, dass an der Übergangsstelle kein Knick entsteht, die Krümmung stetig ist und sich proportional zum zurückgelegten Weg ändert.
Bestimmen sie den Übergangsbogen der Länge 200 m einer geradlinigen Bahnlinie zu einem Kreisbogen mit Radius 1000 m. Verwenden sie dazu als Näherung Polynome. Als Länge der Kurve darf näherungsweise die x-Koordinate verwendet werden.

Hinweis:
Die Krümmung $k(x)$ einer Kurve ist der Kehrwert des zugehörigen Krümmungsradius $\varrho(x)$:

$$k(x) = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \varrho(x) = \frac{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}$$

Literatur: A. Kirsch, *Übergangsbögen bei Eisenbahngleisen als Thema für den Mathematikunterricht*, MNU 50/3, S. 144-150

11. Für die Geschwindigkeit eines Motorrades, das zur Zeit $t = 0$ startet, gilt die Beziehung (t in Sekunden, v in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$)

$$v(t) = \frac{60\,t^2 + 20\,t^3}{(1+t)^3} \quad .$$

   (a) Berechnen Sie $v_\infty = \lim\limits_{t \to +\infty} v(t)$, ohne darauf einzugehen, von welcher Seite sich v an den Grenzwert annähert.

   (b) Berechnen Sie die Beschleunigung $a(t) = \dot{v}(t)$ des Motorrades.
   Berechnen Sie $a_\infty = \lim\limits_{t \to +\infty} a(t)$.

   (c) Welche Aussage kann man über das Vorzeichen von $a(t)$ für $t > 0$ treffen? Leiten Sie daraus her, von welcher Seite sich $v(t)$ mit $t \to +\infty$ an v_∞ annähert. Berechnen Sie $v(0)$ und $a(0)$ und erstellen Sie eine Skizze des groben Verlaufs von $v(t)$ unter Einbeziehung aller gewonnenen Ergebnisse.

12. Welche Kraft wirkt auf einen Körper der Masse m, der sich nach dem Gesetz

$$x(t) = \alpha \cdot t^3 - \beta \cdot t$$

bewegt?