
SMART

**Sammlung mathematischer Aufgaben
als Hypertext mit T_EX**

Jahrgangsstufe 12 (Gymnasium)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

21. September 2014

*Die Aufgaben stehen für private und unterrichtliche Zwecke zur Verfügung. Eine kommerzielle Nutzung bedarf der vorherigen Genehmigung.

Inhaltsverzeichnis

1	Integration	3
1.1	bestimmtes Integral	3
1.2	Integralfunktion	11
1.3	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	18
1.4	Stammfunktion und unbestimmtes Integral	19
1.5	Berechnung von Flächeninhalten	22
2	Funktionen und deren Graphen	38
2.1	Höhere Ableitungen	38
2.2	Graph und Funktion	39
2.3	Ableitungsfunktion und Integralfunktion	39
2.4	Krümmungsverhalten und Wendepunkte	39
2.5	Wirtschaft	51
2.6	Kurvendiskussion	58
2.6.1	Diskussion einzelner Funktionen	58
2.6.2	Diskussion von Funktionenscharen	85
2.6.3	Ortskurven besonderer Punkte	91
2.6.4	Kurvendiskussion mit dem Computer	99
3	Stochastik: Binomialverteilung und beurteilende Statistik	106
3.1	Urnenmodell - Ziehen mit und ohne Zurücklegen	106
3.2	Bernoulli-Experiment und -Kette	118
3.3	Binomialkoeffizient, Binomialverteilung	120
3.4	Anwendungen der Binomialverteilung, u. a. einseitiger Signifikanztest . . .	127
4	Geometrie: Geraden und Ebenen im Raum	128
4.1	Lineare Abhängigkeit von Vektoren	128
4.2	Geraden und Ebenen	134
4.3	Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen	137
4.4	Abstand- und Winkelbestimmung	150
4.5	Anwendungen	163
5	Anwendungen der Differential- und Integralrechnung	172
5.1	Integrale in der Physik	172
5.2	Extremwertaufgaben	175
5.3	Wachstums- und Zerfallsprozesse	190
5.4	Optimierung	191

Inhaltsverzeichnis

5.5	verknüpfte Funktionen	191
5.6	Anwendungen der Kurvendiskussion	191
5.7	Anwendungen in der Geometrie	197
5.8	Aus der Physik	197

1 Integration

1.1 bestimmtes Integral

1. (a) $\int_0^1 x^n dx$ (b) $\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} A \sin \omega t dt$ (c) $\int_1^4 \frac{dx}{x^3}$ (d) $\int_{-1}^{-2} \left(\frac{x^5}{3} - \frac{3}{x^7} \right) dx$
(e) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \frac{x}{3} dx$ (f) $\int_0^3 (x^2 + 1)(2x^2 - x) dx$ (g) $\int_0^1 \sqrt[3]{x} dx$ (h) $\int_1^3 \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 + x^3} dx$

Lösung: (a) $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} A \sin \omega t dt = \left[-\frac{A}{\omega} \cos \omega t \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} = -\frac{A}{\omega} \cos \pi + \frac{A}{\omega} \cos 0 = \frac{2A}{\omega}$

(c) $\int_1^4 \frac{dx}{x^3} = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^4 = -\frac{1}{2 \cdot 4^2} + \frac{1}{2} = \frac{15}{32}$

(d) $\int_{-1}^{-2} \left(\frac{x^5}{3} - \frac{3}{x^7} \right) dx = \left[\frac{x^6}{18} + \frac{1}{2x^6} \right]_{-1}^{-2} = \frac{32}{9} + \frac{1}{128} - \frac{1}{18} - \frac{1}{2} = \frac{385}{128}$

(e) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \frac{x}{3} dx = \left[3 \sin \frac{x}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 3 \left[\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6} \right] = \frac{3}{2} (1 + \sqrt{3})$

(f) $\int_0^3 (2x^4 - x^3 + 2x^2 - x) dx = \left[\frac{2x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \frac{1809}{20} = 90,45$

(g) $\int_0^1 x^{\frac{1}{3}} dx = \left[\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \right]_0^1 = \frac{3}{4}$

(h)

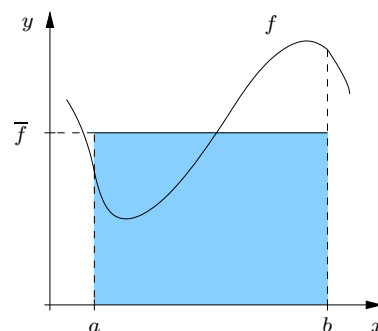
$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 + x^3} dx &= \int_1^3 \frac{(x+1)^2}{x^3(x+1)} dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx = \\ &= \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \right]_1^3 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{18} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{10}{9} \end{aligned}$$

2. Mittelwerte von Funktionen

Der Mittelwert einer Funktion f im Intervall $[a, b]$ ist definiert als

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Berechne die Mittelwerte folgender Funktionen im Intervall $[a, b]$ und veranschauliche das Ergebnis am Grafen der Funktion:



- (a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $a = \frac{1}{2}, b = 4$ (b) $f(x) = 4 - \frac{x^4}{4}$, $a = -2, b = 2$
 (c) $f(x) = \sin x$, $a = 0, b = 2\pi$ (d) $f(x) = \sin x$, $a = 0, b = \pi$
 (e) $f(x) = \cos x$, $a = 0$; für welches b ist $\bar{f} = \frac{1}{2}$?

Lösung: (a) $\bar{f} = \frac{1}{4 - \frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{7} \left[-\frac{1}{x} \right]_{\frac{1}{2}}^4 = \frac{2}{7} \left[-\frac{1}{4} + 2 \right] = \frac{1}{2}$

(b) $f(-x) = f(x) \implies f$ ist symmetrisch zur y -Achse:

$$\bar{f} = \frac{1}{2 - (-2)} \int_{-2}^2 \left(4 - \frac{x^2}{4} \right) dx \stackrel{\text{Symmetrie}}{=} \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \int_0^2 \left(4 - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{1}{2} \left[4x - \frac{x^3}{12} \right]_0^2 = \frac{11}{3}$$

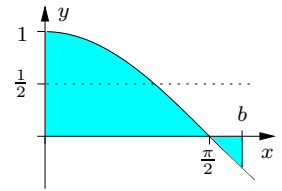
$$(c) \bar{f} = \frac{1}{2\pi - 0} \int_0^{2\pi} \sin x dx = \frac{1}{2\pi} [-\cos x]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} [-1 + 1] = 0$$

$$(d) \bar{f} = \frac{1}{\pi - 0} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{1}{\pi} [-\cos x]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi} [1 + 1] = \frac{1}{\pi}$$

1.1 bestimmtes Integral

$$(e) \quad \bar{f} = \frac{1}{b-0} \int_0^b \cos x \, dx = \frac{1}{b} [\sin x]_0^b = \frac{\sin b}{b} = \frac{1}{2}$$

Die Gleichung $\frac{\sin b}{b} = \frac{1}{2}$ ist nur numerisch lösbar, z.B. mit dem Newtonverfahren oder einfach durch Ausprobieren mit dem TR: $b \approx 1,895$.



3. Ein Stein wird vom Boden aus ($y = 0$) mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen. Für seine Höhe y in Abhängigkeit von der Zeit t gilt

$$y(t) = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$$

Berechne die mittlere Höhe $\bar{h}$ während der Flugphase, ausgedrückt durch die maximale Höhe h .

Lösung: $y(t) = t \left(v_0 - \frac{gt}{2} \right) = 0 \implies t_{01} = 0, \quad t_{02} = \frac{2v_0}{g}$

Maximale Höhe zur Zeit $t_1 = \frac{t_{02}}{2} = \frac{v_0}{g}$: $h = y(t_1) = \frac{v_0^2}{2g}$

$$\bar{h} = \frac{1}{t_{02} - t_{01}} \int_{t_{01}}^{t_{02}} \left(v_0 t - \frac{g}{2} t^2 \right) dt = \frac{g}{2v_0} \left[\frac{v_0 t^2}{2} - \frac{g}{6} t^3 \right]_0^{\frac{2v_0}{g}} = \frac{v_0^2}{3g} = \frac{2}{3} h$$

4. (a) $\int \sqrt[3]{x} \, dx$ (b) $\int_R^\infty \frac{dx}{x^2}$

(c) Berechne den Mittelwert von $f(x) = x^n$ ($n > 0$) im Intervall $[0, a]$.

Lösung: (a) $\int \sqrt[3]{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{3}} \, dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + C$

(b) $\int_R^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_R^a x^{-2} \, dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_R^a = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{a} + \frac{1}{R} \right] = \frac{1}{R}$

(c) $\bar{f} = \frac{1}{a} \int_0^a x^n \, dx = \frac{1}{a} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^a = \frac{a^{n+1}}{a(n+1)} = \frac{a^n}{n+1}$

5. Berechne folgende Integrale und veranschauliche sie als Flächeninhalte:

(a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (b) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (c) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ (d) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$

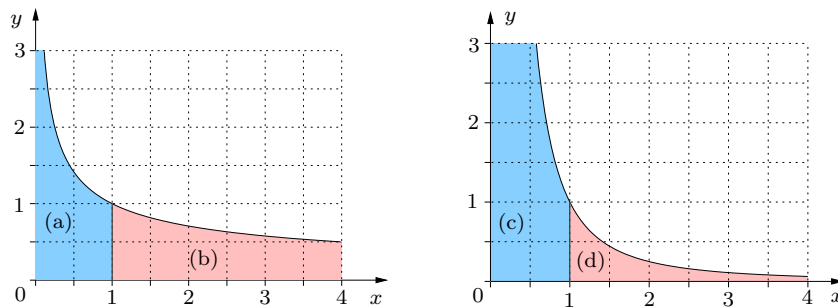
1.1 bestimmtes Integral

Lösung: (a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{a}) = 2$

(b) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} [2\sqrt{x}]_1^a = \lim_{a \rightarrow \infty} (2\sqrt{a} - 1) = +\infty$

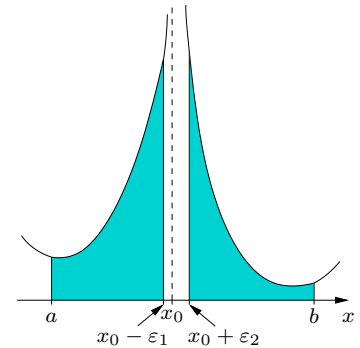
(c) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 x^{-2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(-1 + \frac{1}{a}\right) = +\infty$

(d) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a x^{-2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{a} + 1\right) = 1$



6. Enthält das Integrationsintervall $[a, b]$ des bestimmten Integrals $I = \int_a^b f(x) dx$ eine Polstelle bei x_0 , dann definiert man (uneigentliches Integral):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{x_0 - \varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{x_0 + \varepsilon_2}^b f(x) dx$$



(a) Berechne $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$

(b) Der Wert von $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$ hängt davon ab, wie ε_1 und ε_2 zusammenhängen.

Berechne I für

- $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ (Cauchyscher Hauptwert)

1.1 bestimmtes Integral

- $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$

Gib ein Beispiel für die Wahl von ε_1 und ε_2 an, für das $I = +\infty$ ist.

Lösung: (a) Pol bei $x_0 = 0 \implies$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x} \right]_{\varepsilon_2}^1 = \\ &= \underbrace{\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 \right]}_{+\infty} + \underbrace{\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \left[-1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right]}_{+\infty} = +\infty \end{aligned}$$

(b) Pol bei $x_0 = 0 \implies$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^3} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_{\varepsilon_2}^1 = \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{2\varepsilon_1^2} + \frac{1}{2} \right] + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon_2^2} \right] = \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\varepsilon_2^2} - \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\varepsilon_1^2} \end{aligned}$$

- $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \implies I = 0$

- $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 \implies I = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{8\varepsilon_1^2} - \frac{1}{2\varepsilon_1^2} \right] = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \left[-\frac{3}{8\varepsilon_1^2} \right] = -\infty$

z.B. $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 \implies I = \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2\varepsilon_2^2} - \frac{1}{8\varepsilon_2^2} \right] = \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \left[\frac{3}{8\varepsilon_2^2} \right] = +\infty$

7. Für welche n ist $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$ bzw. $I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{x^n}$ endlich?

Lösung: $I_1 = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^n} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a x^{-n} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(1-n)x^{n-1}} \right]_1^a = \frac{1}{n-1} \cdot \lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{a^{n-1}} \right)$

$$\implies I_1 = \frac{1}{n-1} \text{ für } n > 1 \text{ und } I_1 = \infty \text{ für } n < 1$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{x^n} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 x^{-n} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{1-n}}{1-n} \right]_a^1 = \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{a \rightarrow 0^+} (1 - a^{1-n})$$

$$\implies I_2 = \frac{1}{1-n} \text{ für } n < 1 \text{ und } I_2 = \infty \text{ für } n > 1$$

8. Berechne numerisch mit Untersummen (S_u), mit Obersummen (S_o) und mit der Midpoint-Rule (S_m) (n Teilintervalle). Berechne den relativen Fehler der drei Ergebnisse und des Mittelwertes $\bar{S}$ von S_u und S_o (genaue Ergebnisse in Klammern).

1.1 bestimmtes Integral

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \int_1^5 \frac{dx}{x}, \quad n = 4 \quad (1,609437912) & \text{(b)} \quad & \int_0^2 2^{-x^2} dx, \quad n = 4 \quad (1,04474066) \\
 \text{(c)} \quad & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx, \quad n = 4 \quad (0,3465735903) & \text{(d)} \quad & \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx, \quad n = 5 \quad (1,851937052)
 \end{aligned}$$

Lösung: (a) $\Delta x = \frac{5-1}{4} = 1$, f monoton fallend im Integrationsintervall

$$S_u = [f(2) + f(3) + f(4) + f(5)] \cdot 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{77}{60} = 1,28\bar{3}$$

$$S_o = [f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] \cdot 1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} = 2,08\bar{3}$$

$$\bar{S} = \frac{S_u + S_o}{2} = \frac{101}{60} = 1,68\bar{3}$$

$$S_m = [f(1,5) + f(2,5) + f(3,5) + f(4,5)] \cdot 1 = \frac{1}{1,5} + \frac{1}{2,5} + \frac{1}{3,5} + \frac{1}{4,5} \approx 1,574603$$

I bezeichnet den angegebenen genauen Wert;

$$\delta_u = \frac{S_u - I}{I} = -20,3\%, \quad \delta_o = 29,4\%, \quad \delta_{\bar{S}} = 4,6\%, \quad \delta_m = -2,2\%,$$

(b) $\Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$, f monoton fallend im Integrationsintervall

$$S_u = [f(0,5) + f(1) + f(1,5) + f(2)] \cdot \frac{1}{2} = 0,8068102595$$

$$S_o = [f(0) + f(0,5) + f(1) + f(1,5)] \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{12} = 1,2755602$$

$$\bar{S} = \frac{S_u + S_o}{2} = 1,04118526$$

$$S_m = [f(0,25) + f(0,75) + f(1,25) + f(1,75)] \cdot \frac{1}{2} = 1,046497675$$

I bezeichnet den angegebenen genauen Wert;

$$\delta_u = \frac{S_u - I}{I} = -22,8\%, \quad \delta_o = 22,1\%, \quad \delta_{\bar{S}} = -0,34\%, \quad \delta_m = 0,17\%,$$

(c) $\Delta x = \frac{\pi}{16}$, f monoton steigend im Integrationsintervall

$$S_u = \left[f(0) + f\left(\frac{\pi}{16}\right) + f\left(\frac{\pi}{8}\right) + f\left(\frac{3\pi}{16}\right) \right] \cdot \frac{\pi}{16} = 0,2515835636$$

$$S_o = \left[f\left(\frac{\pi}{16}\right) + f\left(\frac{\pi}{8}\right) + f\left(\frac{3\pi}{16}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] \cdot \frac{\pi}{16} = 0,4479331044$$

$$\bar{S} = \frac{S_u + S_o}{2} = 0,349758334$$

$$S_m = \left[f\left(\frac{\pi}{32}\right) + f\left(\frac{3\pi}{32}\right) + f\left(\frac{5\pi}{32}\right) + f\left(\frac{7\pi}{32}\right) \right] \cdot \frac{\pi}{16} = 0,3449916438$$

1.1 bestimmtes Integral

I bezeichnet den angegebenen genauen Wert;

$$\delta_u = \frac{S_u - I}{I} = -27,4\%, \quad \delta_o = 29,2\%, \quad \delta_{\bar{S}} = 0,92\%, \quad \delta_m = -0,46\%,$$

(d) $\Delta x = \frac{\pi}{5}$, f monoton fallend im Integrationsintervall

$$S_u = \left[f\left(\frac{\pi}{5}\right) + f\left(\frac{2\pi}{5}\right) + f\left(\frac{3\pi}{5}\right) + f\left(\frac{4\pi}{5}\right) + f(\pi) \right] \cdot \frac{\pi}{5} = 1.527278662$$

$$S_o = \left[f(0) + f\left(\frac{\pi}{5}\right) + f\left(\frac{2\pi}{5}\right) + f\left(\frac{3\pi}{5}\right) + f\left(\frac{4\pi}{5}\right) \right] \cdot \frac{\pi}{5} = 2.155597193$$

$$\bar{S} = \frac{S_u + S_o}{2} = 1.841437928$$

$$S_m = \left[f\left(\frac{\pi}{10}\right) + f\left(\frac{3\pi}{10}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{7\pi}{10}\right) + f\left(\frac{9\pi}{10}\right) \right] \cdot \frac{\pi}{5} = 1.857196808$$

I bezeichnet den angegebenen genauen Wert;

$$\delta_u = \frac{S_u - I}{I} = -17,5\%, \quad \delta_o = 16,4\%, \quad \delta_{\bar{S}} = -0,57\%, \quad \delta_m = 0,28\%,$$

$$9. \quad (a) \int_1^e \frac{dx}{x} \quad (b) \int_0^{\ln 2} 5e^{3t} dt \quad (c) \int_{e+1}^{e^2-1} \frac{dx}{x-1} \quad (d) \int_1^2 \frac{dx}{-3x+1}$$

$$(e) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \quad (f) \int_4^5 (4x+5)^n dx \quad (g) \int_1^e \ln x dx \quad (h) \int_0^1 \frac{x^4 - x^2 + 1}{x+1} dx$$

Lösung: (a) $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} A \sin \omega t dt = \left[-\frac{A}{\omega} \cos \omega t \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} = -\frac{A}{\omega} \cos \pi + \frac{A}{\omega} \cos 0 = \frac{2A}{\omega}$

(c) $\int_1^4 \frac{dx}{x^3} = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^4 = -\frac{1}{2 \cdot 4^2} + \frac{1}{2} = \frac{15}{32}$

(d) $\int_{-1}^{-2} \left(\frac{x^5}{3} - \frac{3}{x^7} \right) dx = \left[\frac{x^6}{18} + \frac{1}{2x^6} \right]_{-1}^{-2} = \frac{32}{9} + \frac{1}{128} - \frac{1}{18} - \frac{1}{2} = \frac{385}{128}$

(e) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \frac{x}{3} dx = \left[3 \sin \frac{x}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 3 \left[\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6} \right] = \frac{3}{2} (1 + \sqrt{3})$

1.1 bestimmtes Integral

$$(f) \int_0^3 (2x^4 - x^3 + 2x^2 - x) dx = \left[\frac{2x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = \frac{1809}{20} = 90,45$$

$$(g) \int_0^1 x^{\frac{1}{3}} dx = \left[\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

(h)

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 + x^3} dx &= \int_1^3 \frac{(x+1)^2}{x^3(x+1)} dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx = \\ &= \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \right]_1^3 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{18} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{10}{9} \end{aligned}$$

$$10. (a) \int e^{ax+b} dx \quad (b) \int_1^{\sqrt{7}} \frac{2x}{x^2-4} dx$$

$$(c) \text{ Berechne numerisch (3 Intervalle): } \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$$

Lösung: (a) $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$

$$\begin{aligned} (b) \int_1^{\sqrt{7}} \frac{2x}{x^2-4} dx &= \int_1^{\sqrt{7}} \frac{(x^2-4)'}{x^2-4} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left([\ln |x^2-4|]_1^{2-\varepsilon} + [\ln |x^2-4|]_{2+\varepsilon}^{\sqrt{7}} \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln |-4\varepsilon + \varepsilon^2| - \ln 3 + \ln 3 - \ln |4\varepsilon + \varepsilon^2|) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left| \frac{\varepsilon(-4+\varepsilon)}{\varepsilon(4+\varepsilon)} \right| = \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

$$(c) \int_0^{\pi} \sin^2 x dx \approx \frac{\pi}{3} \left(\sin^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{5\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$11. (a) \int \frac{x^3}{5x^4+3} dx \quad (b) \int \frac{x^{n-1}}{x^n+a} dx \quad (c) \int_2^3 \frac{x^2}{x^3-1} dx$$

$$(d) \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} \quad (e) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx \quad (f) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

Lösung: (a) $\int \frac{x^3}{5x^4+3} dx = \frac{1}{20} \int \frac{20x^3}{5x^4+3} dx = \frac{1}{20} \int \frac{(5x^4+3)'}{5x^4+3} dx = \frac{1}{20} \ln |5x^4+3| + C$

1.2 Integralfunktion

$$(b) \int \frac{x^{n-1}}{x^n + a} dx = \frac{1}{n} \int \frac{nx^{n-1}}{x^n + a} dx = \frac{1}{n} \int \frac{(x^n + a)'}{x^n + a} dx = \frac{1}{n} \ln |x^n + a| + C$$

$$(c) \int_2^3 \frac{x^2}{x^3 - 1} dx = \frac{1}{3} \int_2^3 \frac{3x^2}{x^3 - 1} dx = \frac{1}{3} \int_2^3 \frac{(x^3 - 1)'}{x^3 - 1} dx = \left[\frac{1}{3} \ln |x^3 - 1| \right]_2^3 = \frac{1}{3} \ln \frac{26}{7}$$

$$(d) \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \int_e^{e^2} \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx = [\ln |\ln x|]_e^{e^2} = \ln 2$$

$$(e) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x} dx = - [\ln |\sin x + \cos x|]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$(f) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = - [\ln |\sin x + \cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = - \ln \sqrt{2} + \ln 1 = -\frac{1}{2} \ln 2$$

$$12. (a) \int (ax + b)^{99} dx \quad (b) \int_1^2 \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx \quad (c) \text{ Berechne } x: \int_2^x \frac{dt}{t} = 1$$

$$\text{Lösung: } (a) \int (ax + b)^{99} dx = \frac{(ax + b)^{100}}{100a} + C$$

$$(b) \int_1^2 \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx = \int_1^2 \frac{(x^3 + 1)'}{x^3 + 1} dx = [\ln |x^3 + 1|]_1^2 = \ln 9 - \ln 2 \approx 1,50$$

$$(c) \int_2^x \frac{dt}{t} = \ln x - \ln 2 = \ln \frac{x}{2} = 1 \implies x = 2e$$

1.2 Integralfunktion

1. Schreibe folgende Funktionen als Integralfunktion. Achte auch auf die Definitionsmenge!

$$(a) f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \quad (b) g(x) = \cos x \quad (c) h(x) = \tan x$$

$$\text{Lösung: Allgemein gilt: } f(x) = \int_a^x f'(x) dx \text{ mit } f(a) = 0.$$

$$(a) f(x) = 0 \implies x_{01} = 2, \quad x_{02} = 6, \text{ also } f(x) = \int_2^x (x - 4) dx = \int_6^x (x - 4) dx$$

1.2 Integralfunktion

$$(b) \quad g(x) = 0 \quad \implies \quad x_{0k} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, \text{ also } g(x) = - \int_{x_{0k}}^x \sin x \, dx$$

(c) $h(x) = 0 \implies x_{0k} = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Um nicht über eine Polstelle zu integrieren, muss man unendlich viele Fälle unterscheiden:

$$h(x) = \int_{x_{0k}}^x \frac{dx}{\cos^2 x} \quad \text{für } x \in \left] x_{0k} - \frac{\pi}{2}, x_{0k} + \frac{\pi}{2} \right[$$

2. Wie unterscheiden sich folgende Integralfunktionen.

$$(a) \quad f(x) = \int_{\frac{\pi}{6}}^x \cos t \, dt \quad \text{und} \quad g(x) = \int_{\frac{\pi}{3}}^x \cos t \, dt$$

$$(b) \quad f(x) = \int_2^x h(t) \, dt \quad \text{und} \quad g(x) = \int_{-2}^x h(t) \, dt \quad \text{mit} \quad h(t) = \frac{1}{t^2} + t.$$

Zeichne die Grafen von h , f und g .

Lösung: (a) $f(x) = \int_{\frac{\pi}{6}}^x \cos t \, dt = \sin x - \sin \frac{\pi}{6} = \sin x - \frac{1}{2}$

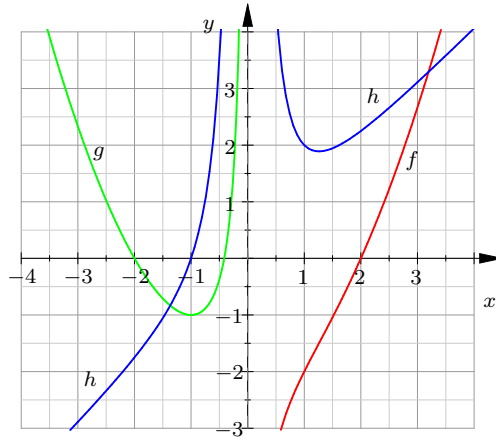
$$g(x) = \int_{\frac{\pi}{3}}^x \cos t \, dt = \sin x - \sin \frac{\pi}{3} = \sin x - \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\implies f(x) = g(x) + \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

$$(b) \quad f(x) = \int_2^x \left(\frac{1}{t^2} + t \right) dt = \left[-\frac{1}{t} + \frac{t^2}{2} \right]_2^x = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} \quad \text{für } x > 0$$

$$g(x) = \int_{-2}^x \left(\frac{1}{t^2} + t \right) dt = \left[-\frac{1}{t} + \frac{t^2}{2} \right]_{-2}^x = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2} \quad \text{für } x < 0$$

1.2 Integralfunktion



3. (a) Warum sind alle Stammfunktionen von f mit $f(x) = x^2$ auch Integralfunktionen von f ?
- (b) Welche Stammfunktionen von f mit $f(x) = x^3$ sind keine Integralfunktionen von f ?

Lösung: (a) $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ hat für alle $C \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle ($x_0 = \operatorname{sgn}(-3C) \cdot (|3C|)^{\frac{1}{3}}$) und ist damit auch Integralfunktion von f .

- (b) $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$ hat nur für $C \leq 0$ eine Nullstelle. Für $C > 0$ ist F also keine Integralfunktion von f .

4. Schreibe $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$ als Integralfunktion. Achtung, Fallunterscheidung!

Lösung: Nullstellen von f : $x_{01} = -1$, $x_{02} = 1$. Wegen der Polstelle Fallunterscheidung:

$$f(x) = \begin{cases} -\int_{-1}^x \frac{2}{t^3} dt & \text{für } x < 0 \\ -\int_1^x \frac{2}{t^3} dt & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

5. Schreibe $f(x) = \frac{1}{x}$ als Integralfunktion.

Lösung: $I_a(x) = -\int_a^x \frac{dt}{t^2} = \left[\frac{1}{t} \right]_a^x = \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \implies f(x) = \lim_{a \rightarrow \pm\infty} I_a(x)$

1.2 Integralfunktion

Um nicht über die Polstelle integrieren zu müssen:

$$f(x) = \begin{cases} -\int \frac{dt}{t^2} & \text{für } x < 0 \\ -\int \frac{dt}{t^2} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Mit der Polstelle $x_0 = 0$ im Integrationsintervall wäre das Integral unendlich, z.B.:

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{t^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dt}{t^2} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dt}{t^2} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{-\varepsilon} + \frac{1}{-1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{\varepsilon} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{2}{\varepsilon} - 2 \right] = +\infty$$

6. Schreibe die Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{5} - \sqrt{1-x^2}$ als Integralfunktion:

$$f(x) = \int_a^x g(t) dt \quad (2 \text{ Lösungen!})$$

Zeichne den Grafen der Integrandenfunktion g mit der Einheit 2 cm auf beiden Achsen. Veranschauliche mit Hilfe des Grafen am speziellen Beispiel $f(0,8)$, warum beide Lösungen gleichwertig sind.

Lösung: (a) $g(x) = f'(x) = -\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, Nullstellen von f : $\pm \frac{3}{5} = \pm 0,6 \implies$

$$f(x) = \int_{-\frac{3}{5}}^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{\frac{3}{5}}^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

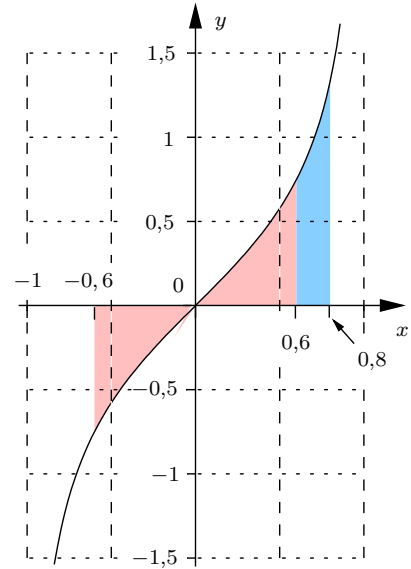
1.2 Integralfunktion

(b)

x	$g(x)$
0	0
$\pm 0,1$	$\pm 0,101$
$\pm 0,2$	$\pm 0,204$
$\pm 0,3$	$\pm 0,314$
$\pm 0,4$	$\pm 0,436$
$\pm 0,5$	$\pm 0,577$
$\pm 0,6$	$\pm 0,750$
$\pm 0,7$	$\pm 0,980$
$\pm 0,8$	$\pm 1,333$
$\pm 0,9$	$\pm 2,065$

Wegen $f(-x) = f(x)$ ist G_f achsensymmetrisch zur y -Achse.

Wegen $g(-x) = -g(x)$ ist G_g punktsymmetrisch zum Ursprung.



$$\begin{aligned}
 f(0,8) &= \int_{-\frac{3}{5}}^{0,8} g(x) \, dt = \int_{-\frac{3}{5}}^{\frac{3}{5}} g(x) \, dt + \int_{\frac{3}{5}}^{0,8} g(x) \, dt = \\
 &= \underbrace{f\left(\frac{3}{5}\right) - f\left(-\frac{3}{5}\right)}_{0 \text{ (Symmetrie)}} + \int_{\frac{3}{5}}^{0,8} g(x) \, dt = \int_{\frac{3}{5}}^{0,8} g(x) \, dt
 \end{aligned}$$

Argumentation mit einer der beiden Symmetrien oder mit $f\left(\frac{3}{5}\right) = f\left(-\frac{3}{5}\right) = 0$.

7. Schreibe die Funktion f mit $f(x) = 5 - \sqrt{9 + x^2}$ als Integralfunktion:

$$f(x) = 5 - \sqrt{9 + x^2} = \int_a^x g(t) \, dt$$

(2 Lösungen). Zeichne den Grafen der Integrandenfunktion g im Intervall $[-5, 5]$ (Einheiten: 1 cm auf der x -Achse, 2 cm auf der y -Achse) und veranschauliche am Beispiel $f(5)$ mit Hilfe des Grafen, warum beide Lösungen gleichwertig sind.

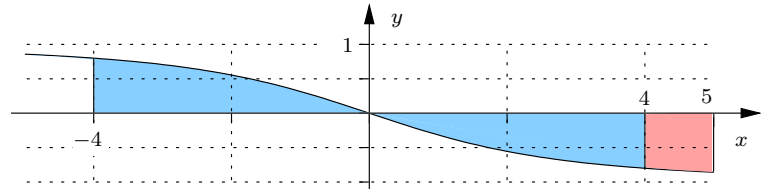
Lösung: (a) $g(x) = f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{9 + x^2}}$, Nullstellen von f : $\pm 4 \implies$

$$f(x) = -\int_{-4}^x \frac{t}{\sqrt{9 + t^2}} \, dt = -\int_4^x \frac{t}{\sqrt{9 + t^2}} \, dt$$

1.2 Integralfunktion

(b)

x	$g(x)$
0	0
± 1	$\mp 0,316$
± 2	$\mp 0,555$
± 3	$\mp 0,707$
± 4	$\mp 0,800$
± 5	$\mp 0,857$



Wegen $f(-x) = f(x)$ ist G_f achsensymmetrisch zur y -Achse.

Wegen $g(-x) = -g(x)$ ist G_g punktsymmetrisch zum Ursprung.

$$\begin{aligned}
 f(5) &= \int_{-4}^5 g(x) \, dt = \int_{-4}^4 g(x) \, dt + \int_4^5 g(x) \, dt = \\
 &= \underbrace{f(4) - f(-4)}_{0 \text{ (Symmetrie)}} + \int_4^5 g(x) \, dt = \int_4^5 g(x) \, dt
 \end{aligned}$$

8. (a) Von der Funktion f weiß man

$$f'(x) = g(x) \quad \text{und} \quad f(a) = b$$

mit einer bekannten Funktion g . Schreibe $f(x)$ mit Hilfe einer Integralfunktion.

(b) Berechne $f(x)$ aus

$$f'(x) = \sqrt[3]{x^4} \quad \text{und} \quad f(8) = -\frac{1}{7}.$$

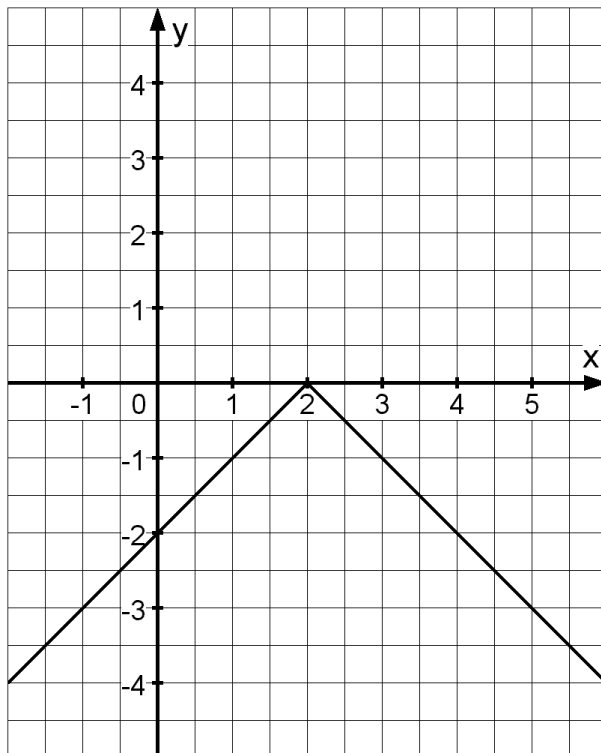
Lösung: (a) f ist Stammfunktion von g :

$$\int_a^x g(t) \, dt = f(x) - \underbrace{f(a)}_b \implies f(x) = b + \int_a^x g(t) \, dt$$

$$(b) \quad f(x) = -\frac{1}{7} + \int_8^x t^{\frac{4}{3}} \, dt = -\frac{1}{7} + \left[\frac{3}{7} t^{\frac{7}{3}} \right]_8^x = -\frac{1}{7} + \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} - \underbrace{\frac{3}{7} 8^{\frac{7}{3}}}_{\frac{384}{7}} = \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} - 55$$

9. Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}$, der kongruent zum Graphen der Betragsfunktion, $g : x \rightarrow |x|$, $D_g = \mathbb{R}$ ist.

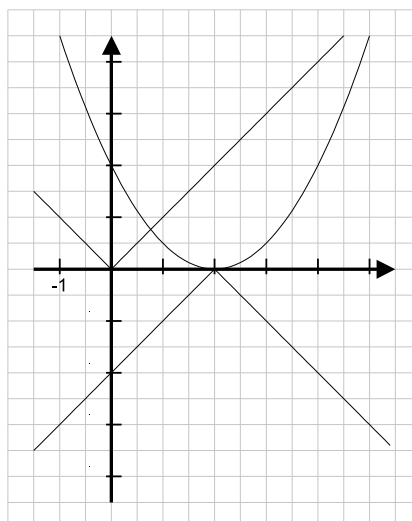
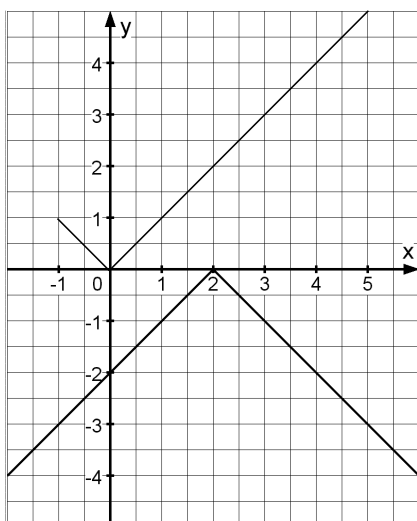
1.2 Integralfunktion



- (a) Zeichnen Sie den Graphen der Betragsfunktion g ein und beschreiben Sie, wie G_f aus dem Graphen von g entsteht.
- (b) Zeichnen Sie den Graphen der Integralfunktion $F : x \rightarrow \int_2^x f(t)dt$ für $-1 \leq x \leq 5$ in das gegebene Diagramm ein. (Hinweis: Eine integralfreie Darstellung der Funktion F ist hierzu nicht notwendig.)

Quelle: Handreichung für den Mathematikunterricht am Gymnasium, Das Abitur im Fach Mathematik am achtjährigen Gymnasium, Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung Abteilung Gymnasium, August 2008, www.isb.bayern.de

Lösung: f entsteht aus g durch Verschiebung um 2 nach rechts und Spiegelung an der x-Achse.



1.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

1. Geben Sie die Stammfunktion von $\frac{\sin x}{4+2\cos x}$ an.

Lösung: $F(x) = -\frac{1}{2} \ln(4 + 2 \cos x) + C$

2. (a) Von der Funktion f kennt man die Ableitung

$$f'(x) = 9 - x^2$$

und den Funktionswert $f(3) = 10$. Berechne $f(1)$.

- (b) Von der Funktion g kennt man die Ableitung

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

und den Funktionswert $g(1) = 1$. Berechne die Gleichung von g und stelle sie in der Wurzelschreibweise dar.

Lösung: (a) $f(x) = \int (9 - x^2) dx = 9x - \frac{x^3}{3} + C$

$$f(3) = 27 - \frac{27}{3} + C = 18 + C = 10 \implies C = -8 \implies f(x) = 9x - \frac{x^3}{3} - 8$$

$$f(1) = 9 - \frac{1}{3} - 8 = \frac{2}{3}$$

$$(b) \quad g(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$$

$$g(1) = -2 + C = 1 \implies C = 3 \implies g(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} + 3$$

3. Beweise mittels einer sehr ausführlichen Rechnung:

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin x \cos x}{2} + C$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin x \cos x}{2} + C \right)' &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (\cos x \cos x + \sin x (-\sin x)) = \\ &= \frac{1}{2} [1 - (\cos^2 x - \sin^2 x)] = \frac{1}{2} [1 - \cos^2 x + \sin^2 x] = \\ &= \frac{1}{2} [\sin^2 x + \sin^2 x] = \sin^2 x \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

1.4 Stammfunktion und unbestimmtes Integral

4. (a) Beweise die Integralformel: $\int \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2a} \sin ax \cos ax + C$
- (b) Berechne den Mittelwert der Funktion $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$ im Intervall $[0, \pi]$.

Lösung: (a) Beweis durch Ableiten der rechten Seite (RS):

$$\begin{aligned} \text{RS}' &= \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2a} \sin ax \cos ax + C \right)' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a} (a \cos^2 ax - a \sin^2 ax) = \\ &= \frac{1}{2} (\underbrace{1 - \sin^2 ax}_{\cos^2 ax} + \cos^2 ax) = \cos^2 ax \end{aligned}$$

- (b) Mit $a = \frac{1}{2}$ folgt aus der bewiesenen Integralformel:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 \left(\frac{1}{2}x \right) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right]_0^\pi = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 - 0 \right] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

1.4 Stammfunktion und unbestimmtes Integral

1. Beweise: F und G mit $F(x) = \sqrt{x+1}$ und $G(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}$ sind Stammfunktionen der gleichen Funktion f .

Lösung: Wir müssen zeigen, dass, $F(x) - G(x)$ eine Konstante ist:

$$\begin{aligned} F(x) - G(x) &= \sqrt{x+1} - \frac{x}{1+\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1}) - x}{1+\sqrt{x+1}} = \\ &= \frac{\sqrt{x+1} + x + 1 - x}{1+\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1} + 1}{1+\sqrt{x+1}} = 1 \quad \text{q.e.d} \end{aligned}$$

2. Beweise: $\int x^2 \cos ax \, dx = \frac{2x}{a^2} \cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \sin ax + C$

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{2x}{a^2} \cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \sin ax + C \right] &= \\ \frac{2}{a^2} \cos ax - \frac{2x}{a} \sin ax + \frac{2x}{a} \sin ax + \left(x^2 - \frac{2}{a^2} \right) \cos ax &= x^2 \cos ax \quad \text{q.e.d} \end{aligned}$$

1.4 Stammfunktion und unbestimmtes Integral

3. (a) $\int nx^{n-1} dx$ (b) $\int t^{10} dx$ (c) $\int t^{10} dt$
 (d) $\int \frac{dx}{x^n}$ (e) $\int |x| dx$ (f) $\int \frac{2x^6 + 3x^5 + 3x^3 + 1}{x^5} dx$
 (g) $\int (ax + a) dx$ (h) $\int (ax + a) da$ (i) $\int (ax + a) dt$

Lösung: (a) $x^n + C$ (b) $t^{10} \cdot x + C$ (c) $\frac{1}{11}t^{11} + C$
 (d) $\frac{x^{1-n}}{1-n} + C$ (e) $\begin{cases} \frac{x^2}{2} + C & \text{für } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2} + C & \text{für } x < 0 \end{cases}$ (f) $x^2 + 3x - \frac{3}{x} - \frac{1}{4x^4} + C$
 (g) $\frac{a}{2}x^2 + ax + C$ (h) $\frac{x+1}{2}a^2 + C$ (i) $a(x+1)t + C$

4. (a) $\int x^{999} dx$ (b) $\int \sqrt[3]{x} dx$ (c) $\int \sqrt[n]{x^m} dx$ (d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$
 (e) $\int \cos 3x dx$ (f) $\int A \sin \omega t dt$ (g) $\int \frac{dx}{a^2}$ (h) $\int \frac{da}{a^2}$

Lösung: (a) $\frac{x^{1000}}{1000} + C$ (b) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$ (c) $\frac{n}{n+m}\sqrt[n]{x^{n+m}} + C$ (d) $2\sqrt{x} + C$
 (e) $\frac{1}{3}\sin 3x + C$ (f) $-\frac{A}{\omega}\cos \omega t + C$ (g) $\frac{x}{a^2} + C$ (h) $-\frac{1}{a} + C$

5. (a) $\int e^x dx$ (b) $\int e^{3x} dx$ (c) $\int \sqrt{e^x} dx$ (d) $\int \frac{dx}{e^x}$
 (e) $\int ae^{ax} dx$ (f) $\int Ae^{-bt} dt$ (g) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$ (h) $\int (2x^2 + 3e^{-3x}) dx$

Lösung: (a) $e^x + C$ (b) $\frac{1}{3}e^{3x} + C$ (c) $2\sqrt{e^x} + C$ (d) $-e^{-x} + C$
 (e) $e^{ax} + C$ (f) $-\frac{A}{b}e^{-bt} + C$ (g) $-2e^{-\frac{x}{2}} + C$ (h) $\frac{2}{3}x^3 - e^{-3x} + C$

6. Beweise: (a) $\int xe^x dx = (x-1)e^x + C$
 (b) $\int x^2e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$
 (c) $\int x^3e^{ax} dx = \frac{a^3x^3 - 3a^2x^2 + 6ax - 6}{a^4} \cdot e^{ax} + C$

Lösung: (a) $\frac{d}{dx}[(x-1)e^x + C] = e^x + (x-1)e^x = xe^x$

1.4 Stammfunktion und unbestimmtes Integral

$$(b) \quad \frac{d}{dx} [(x^2 - 2x + 2)e^x + C] = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^x = x^2 e^x$$

$$(c) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{a^3 x^3 - 3a^2 x^2 + 6ax - 6}{a^4} \cdot e^{ax} + C \right] &= \\ &= \frac{3a^3 x^2 - 6a^2 x + 6a}{a^4} \cdot e^{ax} + \frac{a^3 x^3 - 3a^2 x^2 + 6ax - 6}{a^4} \cdot a e^{ax} = \\ &= \frac{3a^2 x^2 - 6ax + 6}{a^3} \cdot e^{ax} + \frac{a^3 x^3 - 3a^2 x^2 + 6ax - 6}{a^3} \cdot e^{ax} = x^3 e^{ax} \end{aligned}$$

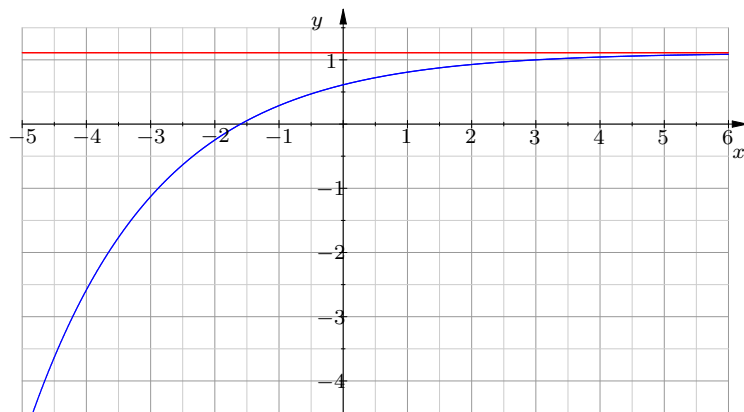
7. Von der Funktion f kennt man die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}$ und den Funktionswert $f(3) = 1$. Ermittle die Gleichung, berechne die Nullstelle und zeichne den Grafen von f .

Lösung: $f(x) = \int f'(x) dx = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + C$

$$f(3) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}} + C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 1 + \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}} \approx 1,11$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + 1 + \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}$$

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = -2 \ln \left(2 + e^{-\frac{3}{2}} \right) \approx -1,60$$



8. Der Graf von F mit $F'(x) = f(x)$ enthält den Punkt P. Wie lautet $F(x)$ für

$$(a) \quad f(x) = \cos x + 1, \quad P(\pi|\pi) \quad (b) \quad f(x) = x^{-\frac{2}{3}}, \quad P(8|0)$$

Lösung: (a) $F(x) = \int f(x) dx = \sin x + x + C, \quad F(\pi) = \pi + C = \pi \quad \Rightarrow \quad C = 0$

$$\Rightarrow \quad F(x) = \sin x + x$$

$$(b) \quad F(x) = \int f(x) dx = 3x^{\frac{1}{3}} + C, \quad F(8) = 6 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -6$$

$$\Rightarrow \quad F(x) = 3x^{\frac{1}{3}} - 6$$

1.5 Berechnung von Flächeninhalten

9. Löse folgende Anfangswertprobleme:

$$(a) F'(x) = \frac{3}{8}x(4-x), \quad F(4) = 4 \quad (b) \dot{x} = \frac{t}{4} + \frac{1}{t^2}, \quad x(2) = 0$$

Lösung: (a) $F(x) = \int \left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{8}x^2 \right) dx = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + C, \quad F(4) = 4 + C = 4 \implies C = 0$

$$\implies F(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3$$

(b) $x(t) = \int \left(\frac{t}{4} + \frac{1}{t^2} \right) dt = \frac{t^2}{8} - \frac{1}{t} + C, \quad x(2) = 0 + C = 0 \implies C = 0$

$$\implies x(t) = \frac{t^2}{8} - \frac{1}{t}$$

10. (a) $\int (ax+b)^n dx$ (b) $\int \sqrt[3]{7-x} dx$ (c) $\int \sqrt[n]{(a-bx)^m} dx$
 (d) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-3}}$ (e) $\int \cos(3x-4) dx$ (f) $\int A \sin(\omega t + \varphi) dt$
 (g) $\int e^{2x-3} dx$ (h) $\int \frac{dt}{8-2t}$ (i) $\int_0^2 e^{\frac{x}{2}-1} dx$

Lösung: (a) $\frac{x^{n+1}}{a(n+1)} + C$ (b) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(7-x)^4} + C$

(c) $-\frac{n}{b(n+m)}\sqrt[n]{(a-bx)^{n+m}} + C$ (d) $\frac{2}{5}\sqrt{5x-3} + C$

(e) $\frac{1}{3}\sin(3x-4) + C$ (f) $-\frac{A}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) + C$

(g) $\frac{1}{2}e^{2x-3} + C$ (h) $-\frac{1}{2}\ln|8-2t| + C$

(i) $\left[2e^{\frac{x}{2}-1} \right]_0^2 = 2 \left(1 - \frac{1}{e} \right)$

1.5 Berechnung von Flächeninhalten

1. Berechne die Fläche A , die von G_f , der x -Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen wird. Zeichne den Grafen und veranschauliche A .

(a) $f(x) = 2x + 1, a = -2, b = 1$ (b) $f(x) = x^2 - 4, a = -3, b = 0$

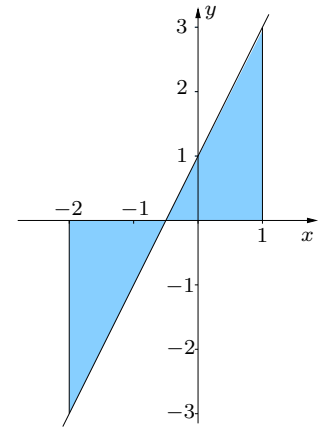
(c) $f(x) = |x^3 + 1|, a = -2, b = 1$ (d) $f(x) = x^{-2} + x^{-3}, a = -2, b = -0,5$

1.5 Berechnung von Flächeninhalten

Lösung: (a) Nullstelle im Integrationsintervall: $x_0 = -\frac{1}{2}$

$$f(x) < 0 \text{ für } x < -\frac{1}{2}, \quad f(x) > 0 \text{ für } x > -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 |f(x)| \, dx = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} [-f(x)] \, dx + \int_{-\frac{1}{2}}^1 f(x) \, dx = \\ &= \left[-x^2 - x \right]_{-2}^{-\frac{1}{2}} + \left[x^2 + x \right]_{-\frac{1}{2}}^1 = \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 4 - 2 + 1 + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 4,5 \end{aligned}$$

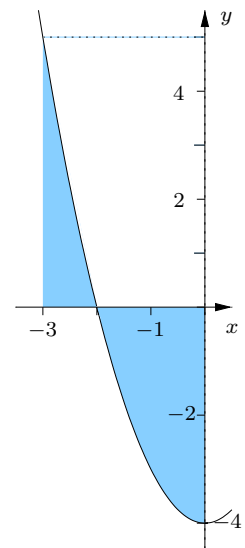


elementargeometrisch: $A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 3 = 4,5$

(b) Nullstelle im Integrationsintervall: $x_0 = -2$

$$f(x) > 0 \text{ für } x < -2, \quad f(x) < 0 \text{ für } x > -2$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^0 |f(x)| \, dx = \int_{-3}^{-2} f(x) \, dx + \int_{-2}^0 [-f(x)] \, dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-3}^{-2} + \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^0 = \\ &= -\frac{8}{3} + 8 + 9 - 12 - \frac{8}{3} + 8 = 7\frac{2}{3} \end{aligned}$$



1.5 Berechnung von Flächeninhalten

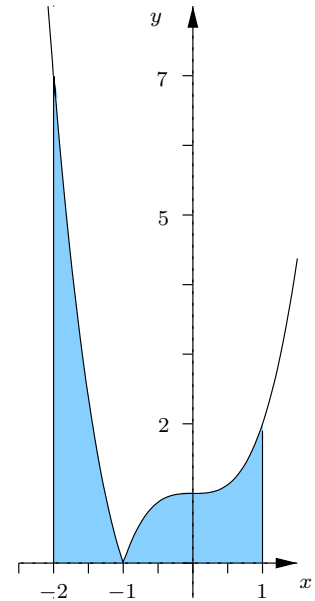
(c) Nullstelle von $x^3 + 1$: $x_0 = -1 \implies$

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 - 1 & \text{für } x < -1 \\ x^3 + 1 & \text{für } x \geq -1 \end{cases}$$

$$A = \int_{-2}^{-1} (-x^3 - 1) dx + \int_{-1}^1 (x^3 + 1) dx =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} - x \right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^4}{4} + x \right]_{-1}^1 =$$

$$= -\frac{1}{4} + 1 + 4 - 2 + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} + 1 = 4,75$$



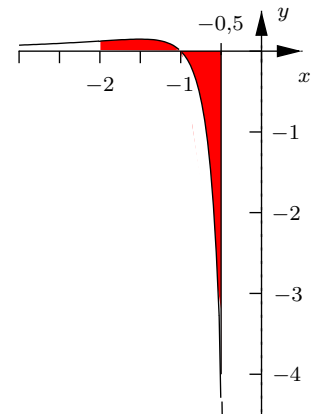
(d) Nullstelle im Integrationsintervall: $x_0 = -1$

$$f(x) > 0 \text{ für } x < -1, \quad f(x) < 0 \text{ für } -1 < x < 0$$

$$A = \int_{-2}^{-0,5} |f(x)| dx = \int_{-2}^{-1} f(x) dx - \int_{-1}^{-0,5} f(x) dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} \right]_{-1}^{-0,5} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - 2 + 2 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$



2. Wir betrachten die Funktion f mit $f(x) = 4 - x^2$.

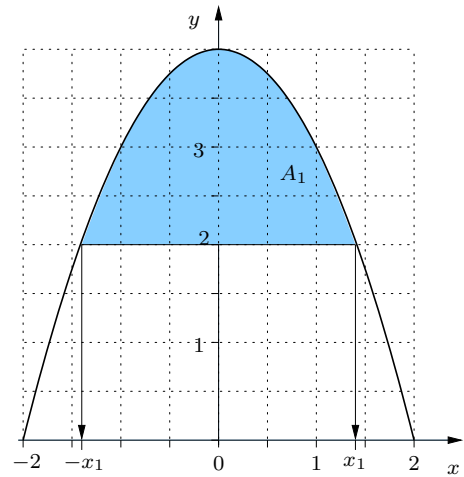
- (a) Zeichne den Grafen von f im Intervall $[-2; 2]$ und berechne den Inhalt A_0 des endlichen Flächenstücks, das G_f mit der x -Achse einschließt.
- (b) Eine Parallele zur x -Achse durch den Punkt $P(0, a)$ mit $0 < a < 4$ teilt das eben betrachtete Flächenstück in zwei Teile, das obere davon hat den Inhalt A_1 . Veranschauliche den Sachverhalt für $a = 2$ im schon vorhandenen Grafen und berechne dann A_1 in Abhängigkeit von a (also *nicht* für den speziellen Wert $a = 2$).

Für welches a ist $A_1 = \frac{1}{2}A_0$?

1.5 Berechnung von Flächeninhalten

Lösung: (a)

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_{-2}^2 f(x) \, dx = 2 \int_0^2 (4 - x^2) \, dx = \\ &= 2 \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$



(b) NS von f : $x_1 = \sqrt{4-a}$, $x_2 = -x_1$

$$\begin{aligned} A_1 &= 2 \int_0^{x_1} f(x) \, dx - 2ax_1 = 2 \left(4x_1 - \frac{x_1^3}{3} \right) - 2ax_1 = 2(4-a)x_1 - \frac{2}{3}x_1^3 = \\ &= 2(4-a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(4-a)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}(4-a)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{A_0}{2} \implies \frac{4}{3}(4-a)^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3} \implies (4-a)^{\frac{3}{2}} = 4$$

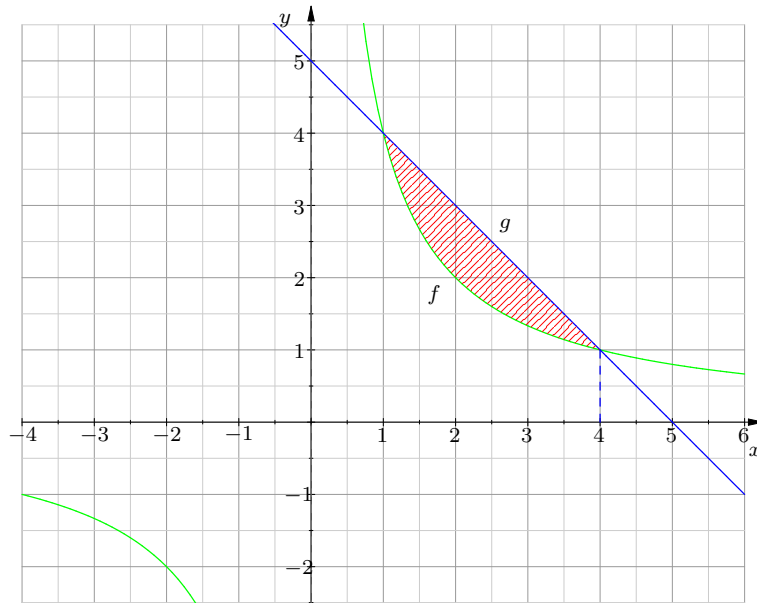
$$a = 4 - \sqrt[3]{16} \approx 1,48$$

3. Die Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{4}{x}$ und $g(x) = 5 - x$ schließen ein endliches Flächenstück mit dem Inhalt A ein. Zeichne die Grafen der beiden Funktionen und berechne A .

Lösung: Schnittpunkte: $f(x) = g(x) \implies x^2 - 5x = -4 \implies x_1 = 1, \quad x_2 = 4$

$$A = \int_1^4 |g(x) - f(x)| \, dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 4 \ln x \right]_1^4 = \frac{15}{2} - 8 \ln 2 \approx 1,95$$

1.5 Berechnung von Flächeninhalten



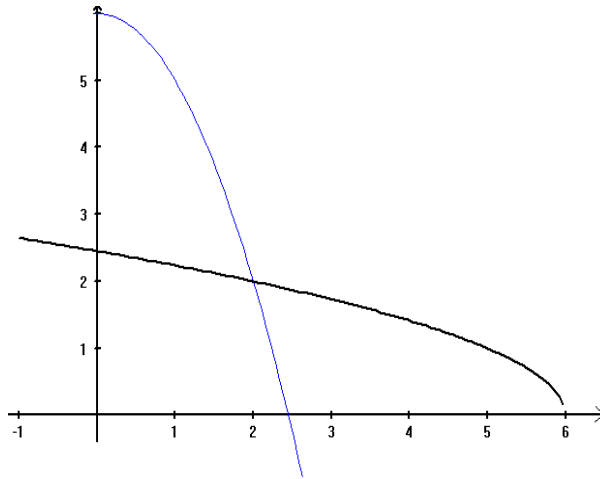
4. Gegeben ist die Funktion $f : x \rightarrow \sqrt{6-x}$ in ihrem maximalen Definitionsbereich D_f .
- Geben Sie D_f an und begründen Sie, dass f umkehrbar ist.
 - Geben Sie den Definitions- und Wertebereich der Umkehrfunktion an, und bestimmen Sie den Term der Umkehrfunktion. Zeichnen Sie die Graphen von f und f^{-1} in ein gemeinsames Koordinatensystem.
 - Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem sich die beiden Graphen schneiden, sowie den Inhalt des „herzförmigen“ Flächenstücks, das von den Graphen von f und f^{-1} sowie den Koordinatenachsen im I. Quadranten eingeschlossen wird.

Quelle: Handreichung für den Mathematikunterricht am Gymnasium, Das Abitur im Fach Mathematik am achtjährigen Gymnasium, Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung Abteilung Gymnasium, August 2008, www.isb.bayern.de

Lösung: (a) $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{6-x}} < 0$, also streng monoton fallend und damit umkehrbar

(b) $D_{f^{-1}} = W_f = [0; \infty[$, $W_{f^{-1}} = D_f =]-\infty; 6]$, $f^{-1}(x) = 6 - x^2$

1.5 Berechnung von Flächeninhalten



(c) $S(2|2), A = 2 \int_0^2 (6 - x^2) dx - 4 = 14\frac{2}{3}$

5. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{3x-2}{3(x-1)^2}$.

- (a) Zeigen Sie dass der Graph der Funktion für $x > \frac{2}{3}$ oberhalb der x -Achse verläuft.
- (b) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion nur bei $x = \frac{1}{3}$ ein Minimum hat.
- (c) Berechnen Sie das Integral $\int_2^6 f(x) dx$

Lösung: (a) Nenner und Zähler positiv für $x > \frac{2}{3}$

(b) $f'(x) = \frac{3-9x}{9(x-1)^3} = 0$ für $x = \frac{1}{3}$ und dort auch Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$, also Maximum

(c) $\int_2^6 f(x) dx = \int_1^5 \frac{3t+1}{3t^2} dt = [\ln z - \frac{1}{3t}]_1^5 = \ln 5 + \frac{4}{15}$

6. Der Querschnitt einer Staumauer wird dargestellt durch die Koordinatenachsen, der Gerade $y = 10$ und dem Graphen der Funktion $s(x) = a + b \ln x$. Der Graph von s geht durch die Punkte $A(e^2|0)$ und $B(e|10)$

- (a) Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b .
- (b) Unter welchem Winkel schneidet der Graph der Funktion die x -Achse.
- (c) Skizzieren Sie den Querschnitt der Staumauer und schätzen Sie den Querschnitt der Staumauer ab.
- (d) Berechnen Sie den Querschnitt der Staumauer exakt.

Lösung: (a) $a = 20, b = -10$

(b) -53°

(c)

(d) $A = 47$

1.5 Berechnung von Flächeninhalten

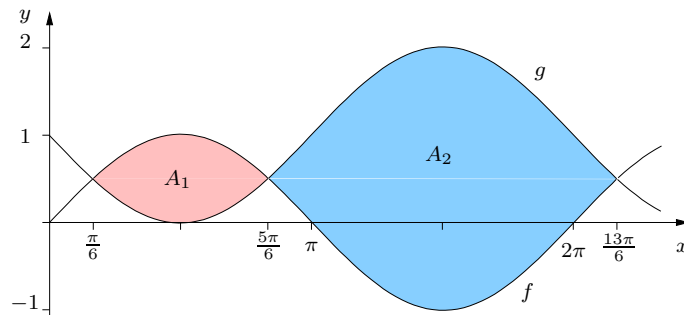
7. Zeichne die Grafen der Funktionen f und g mit

$$f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = 1 - \sin x$$

im Intervall $[0, \frac{7\pi}{3}]$ in ein Koordinatensystem (Einheit 2 cm). Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Funktionen im angegebenen Intervall. Die beiden Grafen schließen, jeweils zwischen einem Schnittpunkt und dem darauf folgenden Schnittpunkt, zwei verschieden große Flächenstücke ein. Berechne ihre Inhalte A_1 und A_2 .

Lösung: Schnittpunkte der beiden Grafen:

$$f(x) = g(x) \implies \sin x = \frac{1}{2} \implies x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6}, \quad x_3 = \frac{13\pi}{6}$$



$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| \, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2 \sin x - 1) \, dx = \left[-2 \cos x - x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \\ &= -2 \cos \frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} + 2 \cos \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} = \\ &= 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} \approx 1,37 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{x_2}^{x_3} |f(x) - g(x)| \, dx = \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{13\pi}{6}} (1 - 2 \sin x) \, dx = \left[2 \cos x + x \right]_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{13\pi}{6}} = \\ &= 2 \cos \frac{13\pi}{6} + \frac{13\pi}{6} - 2 \cos \frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = \sqrt{3} + \frac{13\pi}{6} + \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6} = \\ &= 2\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3} \approx 7,65 \end{aligned}$$

1.5 Berechnung von Flächeninhalten

8. Wir betrachten die drei Funktionen f_1 , f_2 und f_3 mit den Gleichungen

$$f_1(x) = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad f_3(x) = \frac{1}{x^{1-\varepsilon}}$$

mit $0 < \varepsilon < 1$.

- (a) Zeichne die Grafen von f_1 , f_2 und f_3 im Intervall $[0,1; 10]$ für $\varepsilon = 0,01$. Was fällt auf?
- (b) Welche Ungleichungen verbinden $f_1(x)$, $f_2(x)$ und $f_3(x)$? Untersuche das Verhalten der drei Funktionen am Rand ihres Definitionsbereichs.
- (c) Berechne die Stammfunktionen F_1 , F_2 und F_3 der Funktionen f_1 , f_2 und f_3 mit

$$F_1(1) = F_2(1) = F_3(1) = 0.$$

Welche geometrische Bedeutung haben $F_1(x)$, $F_2(x)$ und $F_3(x)$?

Untersuche das Verhalten von F_1 , F_2 und F_3 für $x \rightarrow 0^+$ und $x \rightarrow +\infty$.

- (d) Zeichne die Grafen von F_1 , F_2 und F_3 im Intervall $[1; 10^{80}]$ mit einem logarithmischen Maßstab auf der x -Achse (statt x wird $0,1 \lg x$ angetragen, d.h. bei 3 cm z.B. ist $x = 10^{30}$, bei 6 cm $x = 10^{60}$).

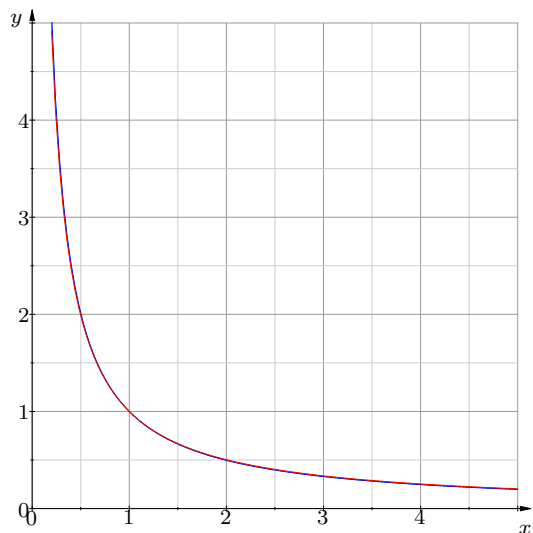
Warum ist der Graf von F_2 in dieser Darstellung eine Gerade?

Lösung: (a)

x	0,2	1	2	5
f_1	5,08	1,00	0,497	0,197
f_2	5,00	1,00	0,500	0,200
f_3	4,92	1,00	0,503	0,203

Die maximale gemeinsame Definitionsmenge aller drei Funktionen ist $\mathbb{R}^+$.

Die Grafen der drei Funktionen sind kaum zu unterscheiden.



- (b) Für $0 < x < 1$ gilt $\frac{1}{x} > 1$ und daher wegen $1 - \varepsilon > 0$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{1-\varepsilon} < 1 \quad \implies \quad f_1(x) < f_2(x) < f_3(x) < 1$$

Für $k \in \{1, 2, 3\}$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_k(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = 0^+$$

1.5 Berechnung von Flächeninhalten

(c) $|F_k(x)|$ ist gleich der Fläche zwischen G_{f_k} und der x -Achse im Intervall $[1, x]$.

$$F_1(x) = \int_1^x t^{-1+\varepsilon} dt = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon}$$

$$F_2(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

$$F_3(x) = \int_1^x t^{-1-\varepsilon} dt = \frac{x^\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow 0^+} F_1(x) = -\infty, & \lim_{x \rightarrow 0^+} F_2(x) = -\infty, & \lim_{x \rightarrow 0^+} F_3(x) = -\frac{1}{\varepsilon} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} F_1(x) = \frac{1}{\varepsilon}, & \lim_{x \rightarrow \infty} F_2(x) = +\infty, & \lim_{x \rightarrow \infty} F_3(x) = +\infty \end{array}$$

(d)

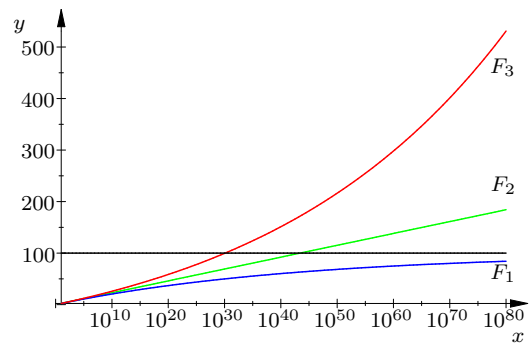
$$F_1(x) = 100 - \frac{100}{\sqrt[100]{x}}$$

$$F_2(x) = \ln x$$

$$F_3(x) = 100 \sqrt[100]{x} - 100$$

Die tatsächliche Strecke auf der x -Achse ist $X = 0,1 \lg x$:

$$F_2(x) = \ln x = \frac{\lg x}{\lg e} = \frac{10}{\lg e} \cdot X$$



9. Die harmonische Reihe

Die Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \dots$$

heißt *harmonische* Reihe, die Teilsummen bezeichnen wir mit

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

(a) Berechne H_n für alle n mit $1 \leq n \leq 20$.

(b) Veranschauliche H_n durch die Fläche unter einer Treppenfunktion und zeichne auch die Grafen von $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = \frac{1}{x-1}$ ein. Zeige durch den Vergleich

1.5 Berechnung von Flächeninhalten

mit einem geeignet gewählten Integral, dass die harmonische Reihe konvergiert, d.h. dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \infty$$

gilt.

(c) Beweise mit Hilfe des schon erstellten Grafen:

$$\ln(1+n) < H_n < 1 + \ln n$$

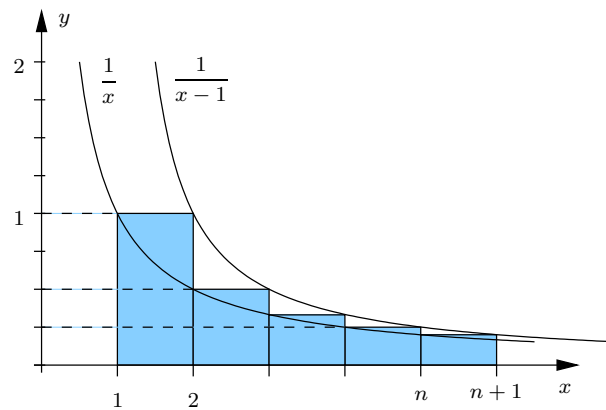
Zeige, dass die Breite b des Intervalls, in dem H_n liegt, kleiner als eins ist. Wie groß ist b für $n \gg 1$? Zeichne die Punkte $(n|H_n)$ und die Grafen von $r(x) = \ln(1+x)$ und $s(x) = 1 + \ln x$ für $1 \leq x \leq 20$ in ein Koordinatensystem.

(d) In welchem Intervall liegt n , wenn H_n gegeben ist? Berechne dieses Intervall konkret für $H_n \approx 100$.

Lösung:

(a)	n	H_n
	1	1,0
	2	1,5
	3	1,83333333
	4	2,08333333
	5	2,28333333
	6	2,45
	7	2,592857143
	8	2,717857143
	9	2,828968254
	10	2,928968254
	11	3,019877345
	12	3,103210678
	13	3,180133755
	14	3,251562327
	15	3,318228993
	16	3,380728993
	17	3,439552523
	18	3,495108078
	19	3,547739657
	20	3,597739657

(b)



$$H_n > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(1+n)$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1+n) = \infty$ gilt auch $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \infty$.

(b)

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} < H_n < 1 + \int_2^{n+1} \frac{dx}{x-1}$$

$\frac{1}{x-1}$ ist die um 1 nach rechts verschobene Funktion $\frac{1}{x}$. Daraus folgt

$$\int_2^{n+1} \frac{dx}{x-1} = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$$

1.5 Berechnung von Flächeninhalten

und somit

$$\ln(1+n) < H_n < 1 + \ln n$$

$$\ln(1+n) = \ln \left[n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] = \ln n + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

Daraus folgt für die Intervallbreite:

$$b = 1 + \ln n - \ln(1+n) = 1 - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

Wegen $1 < 1 + \frac{1}{n} < 2$ gilt $0 < \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \ln 2$ und daher

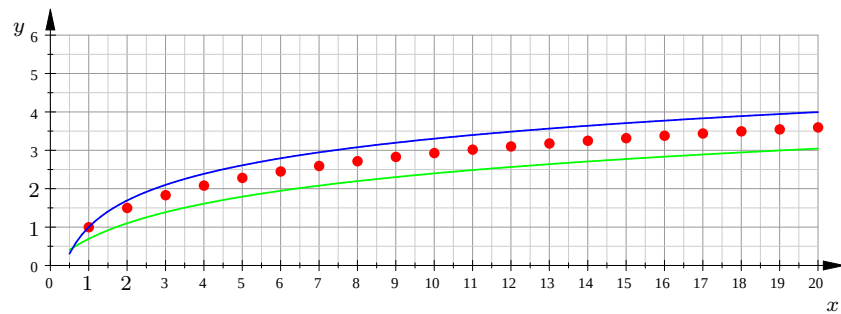
$$1 - \ln 2 < b < 1$$

Die lineare Näherung $f(1+x) \approx f(1) + f'(1) \cdot x$ für $|x| \ll 1$ liefert wegen $n \gg 1$, d.h. $\frac{1}{n} \ll 1$:

$$\ln(1+x) \approx 0 + 1 \cdot x = x \quad \text{oder} \quad \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \approx \frac{1}{n}$$

und damit

$$b \approx 1 - \frac{1}{n} \quad \text{für} \quad n \gg 1$$



(c) Auflösen nach n :

$$e^{H_n-1} < n < e^{H_n} - 1$$

$$H_n \approx 100 \quad \Rightarrow \quad e^{99} < n < e^{100} - 1 \quad \Rightarrow \quad 9,89 \cdot 10^{42} < n < 2,87 \cdot 10^{43}$$

10. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{20 \ln x}{x^2} \quad \text{mit} \quad D_f = \mathbb{R}^+.$$

- Berechne die Nullstellen von f und untersuche das Verhalten von f an den Rändern von D_f .
- Untersuche f auf Monotonie und Extremwerte und Zeichne den Grafen von f im x -Intervall $[0, 9; 6]$.

1.5 Berechnung von Flächeninhalten

(c) Beweise, dass F mit

$$F(x) = \frac{-20(1 + \ln x)}{x}$$

eine Stammfunktion von f ist und stelle F als Integralfunktion von f dar.

(d) Berechne den Inhalt A der endlichen Fläche, die von G_f , der x -Achse, der Nullstelle und der Geraden $x = \sqrt{e}$ begrenzt wird.

Lösung: (a) $f(x) = 0 \implies \ln x = 0 \implies x_0 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \left(\frac{-\infty}{0^+} \right) = -\infty$

de l'Hospital: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = 20 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = 20 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = 0^+$

(b) $f'(x) = 20 \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = 20 \cdot \frac{x - \ln x \cdot 2x}{x^4} = 20 \cdot \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$

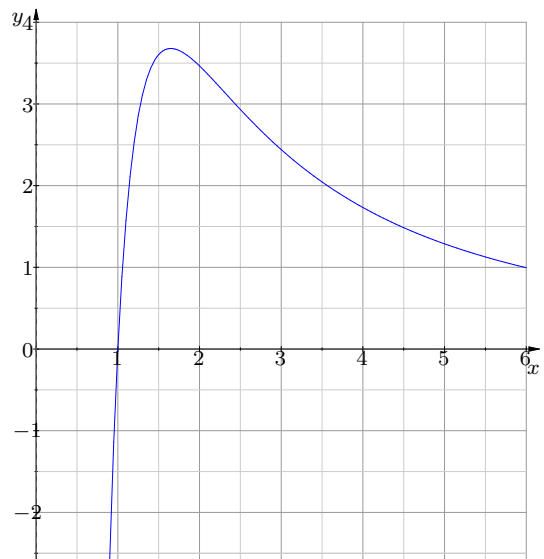
$f'(x) = 0 \implies \ln x = \frac{1}{2} \implies x_1 = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \approx 1,65$

$0 < x < x_1 \implies f'(x) > 0 \implies f \text{ streng steigend}$

$x > x_1 \implies f'(x) < 0 \implies f \text{ streng fallend}$

$\implies$ rel. Maximum bei $(x_1|y_1)$ mit $y_1 = f(x_1) = \frac{10}{e} \approx 3,68$

x	$f(x)$
0,9	$\approx -2,60$
1	$= 0$
2	$5 \ln 2 \approx 3,47$
3	$\frac{20 \ln 3}{9} \approx 2,44$
4	$\frac{5 \ln 4}{4} \approx 1,73$
5	$\frac{4 \ln 5}{5} \approx 1,29$
6	$\frac{5 \ln 6}{9} \approx 0,995$



(c) $F'(x) = -20 \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (1 + \ln x) \cdot 1}{x^2} = -20 \cdot \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} = \frac{20 \ln x}{x^2} = f(x) \quad \text{q.e.d.}$

NS von F muss untere Grenze des Integrals sein: $F(x) = 0 \implies x = e^{-1}$

$$F(x) = \int_{e^{-1}}^x \frac{20 \ln t}{t^2} dt$$

1.5 Berechnung von Flächeninhalten

$$(d) \quad A = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{20 \ln t}{t^2} dt = F(\sqrt{e}) - F(1) = \frac{-20(1 + \frac{1}{2})}{\sqrt{e}} - \frac{-20(1 + 0)}{1} = 20 - \frac{30}{\sqrt{e}} \approx 1,80$$

11. Gegeben sind die Funktionen f, g und h mit $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{4}{3}(x+1)$ und $h(x) = \frac{1}{x}$.

- (a) Berechne die Koordinaten aller Schnittpunkte der drei Funktionen und zeichne die Grafen der Funktionen in ein Koordinatensystem ($-2 \leq x \leq 2,5$).
- (b) Die Grafen von f und g schließen ein endliches Flächenstück mit dem Inhalt A ein. Berechne A .
- (c) In welchem Verhältnis teilt der Graf von h das in Teilaufgabe (b) behandelte Flächenstück?

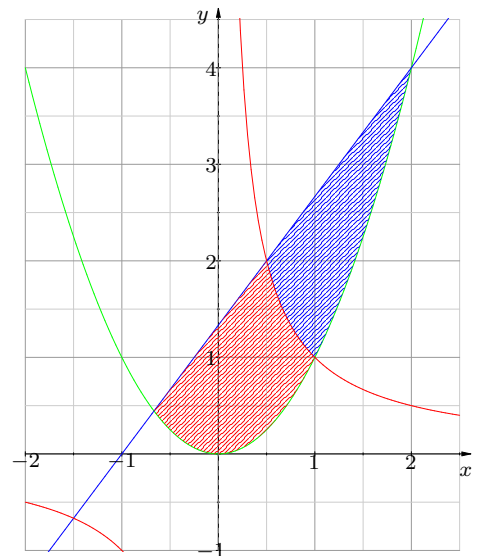
Lösung: (a) $f(x) = g(x) \implies$

$$S_1 \left(-\frac{2}{3} \middle| \frac{4}{9} \right), \quad S_2 (2|4)$$

$g(x) = h(x) \implies$

$$S_3 \left(-\frac{3}{2} \middle| -\frac{2}{3} \right), \quad S_4 \left(\frac{1}{2} \middle| 2 \right)$$

$f(x) = h(x) \implies S_5 (1|1)$



$$(b) \quad A = \int_{-\frac{2}{3}}^2 \left(\frac{4}{3}x + \frac{4}{3} - x^2 \right) dx = \left[\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-\frac{2}{3}}^2 = \frac{256}{81} = 3\frac{13}{81}$$

$$(c) \quad A_1 = \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{3}x + \frac{4}{3} - x^2 \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{x} - x^2 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{2}} + \left[\ln x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{833}{648} + \ln 2 - \frac{7}{24} = \frac{161}{162} + \ln 2$$

$$A_2 = A - A_1 = \frac{13}{6} - \ln 2 \implies \frac{A_1}{A_2} = \frac{161 + \ln 2}{351 - \ln 2} \approx 1,145$$

1.5 Berechnung von Flächeninhalten

12. Gegeben sind die Funktionen f , g und h mit $f(x) = \frac{x^2}{8}$, $g(x) = \sqrt{x}$ und $h(x) = \frac{1}{x}$ mit den Definitionsmengen $\mathbb{R}_0^+$ (f und g) bzw. $\mathbb{R}^+$.

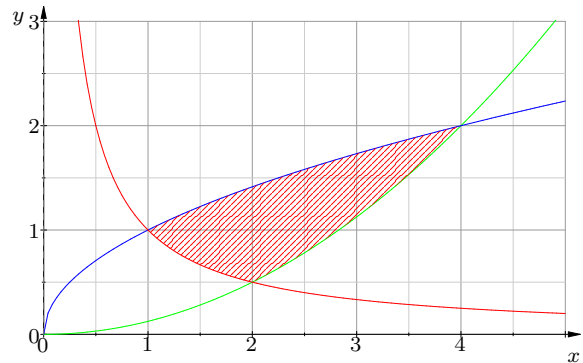
- (a) Berechne die Koordinaten aller Schnittpunkte der drei Funktionen und zeichne die Grafen der Funktionen in ein Koordinatensystem ($0 \leq x \leq 5$, Einheit 2 cm).
- (b) Die Grafen aller drei Funktionen schließen für $x \geq 1$ ein endliches Flächenstück ein. Berechne seinen Inhalt A .

Lösung: (a) $f(x) = g(x) \implies \frac{x^2}{8} = \sqrt{x}$
 $x^4 = 64x \implies x(x^3 - 64) = 0$

$$S_1(0|0), \quad S_2(4|2)$$

$$f(x) = h(x) \implies \frac{x^2}{8} = \frac{1}{x}$$

$$x^3 = 8 \implies S_3\left(2 \middle| \frac{1}{2}\right)$$



$$g(x) = h(x) \implies \sqrt{x} = \frac{1}{x} \implies x^3 = 1 \implies S_4(1|1)$$

(b)

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x} \right) dx + \int_2^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x^2}{8} \right) dx = \\ &= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \ln x \right]_1^2 + \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{24} \right]_2^4 = \\ &= \frac{2}{3} 2^{\frac{3}{2}} - \ln 2 - \frac{2}{3} + \ln 1 + \frac{2}{3} 4^{\frac{3}{2}} - \frac{4^3}{24} - \frac{2}{3} 2^{\frac{3}{2}} + \frac{2^3}{24} = \\ &= -\ln 2 - \frac{2}{3} + \frac{16}{3} - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} - \ln 2 \approx 1,64 \end{aligned}$$

13. Die Grafen der beiden Funktionen f und g mit

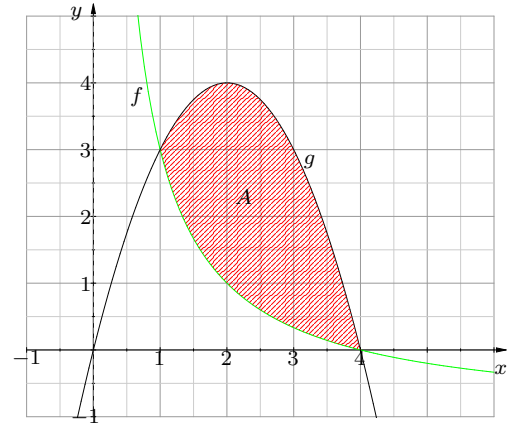
$$f(x) = \frac{4}{x} - 1 \quad \text{und} \quad g(x) = 4x - x^2$$

schließen für $x > 0$ ein Flächenstück mit endlichem Inhalt A ein. Berechne die Nullstellen der beiden Funktionen und zeichne ihre Grafen im x -Intervall $]0; 5]$. Weise nach, dass die der Zeichnung entnommenen Schnittpunkte tatsächlich die gemeinsamen Punkte der beiden Funktionsgraphen sind und berechne dann A .

1.5 Berechnung von Flächeninhalten

Lösung: $f(x) = 0 \implies x_{f0} = 4$
 $g(x) = 0 \implies x_{g1} = 0, \quad x_{g2} = 4$
 $x_1 = 1: \quad f(x_1) = 3, \quad g(x_1) = 3$
 $x_2 = 4: \quad f(x_2) = 0, \quad g(x_2) = 0$

$$\begin{aligned} A &= \int_1^4 (g(x) - f(x)) \, dx = \\ &= \int_1^4 \left(4x - x^2 - \frac{4}{x} + 1 \right) \, dx = \\ &= \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} - 4 \ln x + x \right]_1^4 \\ &= 32 - \frac{64}{3} - 4 \ln 4 + 4 - 2 + \frac{1}{3} - 1 = 12 - 4 \ln 4 \approx 6,455 \end{aligned}$$



14. (a) Zeichne die Grafen der Funktionen f , g und h mit

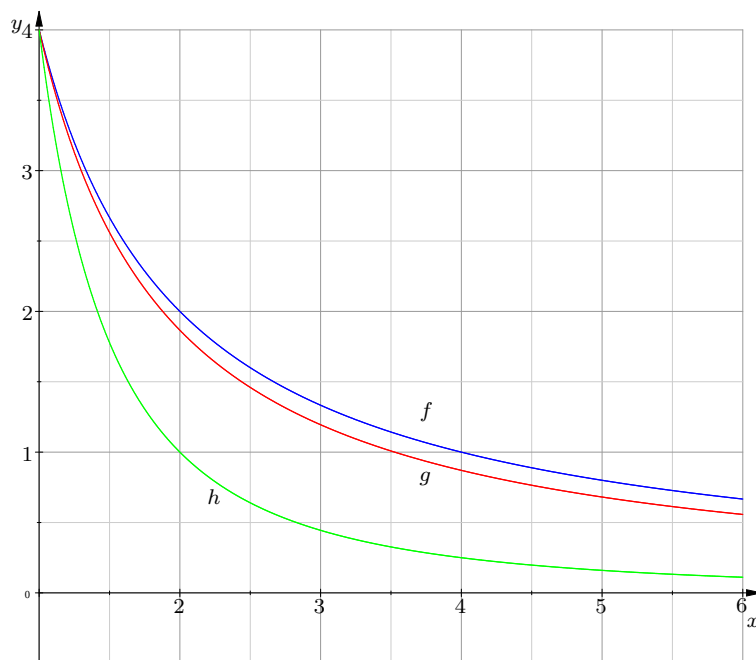
$$f(x) = \frac{4}{x}, \quad g(x) = \frac{4}{x^{1,1}} \quad \text{und} \quad h(x) = \frac{4}{x^2}$$

im x -Intervall $[1; 6]$ in ein Koordinatensystem (Einheit: 2 cm).

- (b) Mit g_x bezeichnen wir das Lot auf die x -Achse bei x . $A_1(x)$ ist die Fläche, die von G_f , G_g und g_x eingeschlossen wird, $A_2(x)$ wird von G_g , G_h und g_x eingeschlossen. Stelle die Gleichungen von A_1 und A_2 auf.
- (c) Welche Ungleichung vermutet man zwischen $A_1(x)$ und $A_2(x)$, wenn man die Grafen der Funktionen betrachtet? Bestätige die Vermutung durch das Aufstellen einer Wertetabelle für $A_1(x)$ und $A_2(x)$ mit $x \in \{5, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5\}$.
- (d) Berechne die Grenzwerte von $A_1(x)$ und $A_2(x)$ mit $x \rightarrow \infty$. Wie vertragen sich diese Ergebnisse mit der Vermutung aus Teilaufgabe (c)? Erweitere die Wertetabelle für $A_1(x)$ und $A_2(x)$ und bestimme möglichst genau den „kritischen Punkt“.

Lösung: (a)

1.5 Berechnung von Flächeninhalten



$$(b) \quad A_1(x) = \int_1^x f(t) - g(t) \, dt = 4 \ln x + \frac{40}{x^{0,1}} - 40$$

$$A_2(x) = \int_1^x g(t) - h(t) \, dt = \frac{4}{x} - \frac{40}{x^{0,1}} + 36$$

(c) Man vermutet $A_1(x) < A_2(x)$.

x	5	10	10^2	10^3	10^4	10^5
$A_1(x)$	0,49	0,98	3,66	7,68	12,77	18,70
$A_2(x)$	2,75	4,63	10,80	15,96	20,08	23,35

$$(d) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} A_1(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} A_2(x) = 36$$

x	10^6	10^7	$1,5 \cdot 10^6$	$1,5 \cdot 10^6$	1 374 268	1 374 269
$A_1(x)$	25,31	32,45	26,53	26,10	26,2668644	26,2668666
$A_2(x)$	25,95	28,02	26,35	26,21	26,2668657	26,2668664

$A_1(x) < A_2(x)$ für $x < x_0$ und $A_1(x) > A_2(x)$ für $x > x_0$ mit $x_0 \approx 1\,374\,269$

2 Funktionen und deren Graphen

2.1 Höhere Ableitungen

1. Berechnen Sie die m -te Ableitung von $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: $f^{(m)}(x) = \frac{n!}{(n-m)!} \cdot x^{n-m}$

2. Berechnen Sie die ersten fünf Ableitungen von $f(x) = \sin x$.
Wie lautet die n -te Ableitung von f ?

Lösung: $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

3. Berechnen Sie die ersten vier Ableitungen von $f(x) = \frac{1}{x}$.
Wie lautet die n -te Ableitung von f ?

Lösung: $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)}$

4. Berechnen Sie die ersten fünf Ableitungen von $f(x) = x^4 - x^2 + \sqrt{x}$.
Wie lautet die n -te Ableitung von f für $n \geq 5$?

Lösung: $f'(x) = 4x^3 - 2x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$$f''(x) = 12x^2 - 2 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = 24x + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-\frac{5}{2}}$$

$$f^{(4)}(x) = 24 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) x^{-\frac{7}{2}}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n} \cdot x^{-\frac{2n-1}{2}} \text{ für } n \geq 5$$

5. Nennen Sie mindestens zwei Funktionen, deren n -te Ableitung 1 ist.

Lösung: $f(x) = \frac{x^n}{n!} + \text{Polynom vom Grad } n-1$

2.2 Graph und Funktion

2.3 Ableitungsfunktion und Integralfunktion

2.4 Krümmungsverhalten und Wendepunkte

1. Berechne die Ableitungen folgender Funktionsterme:

$$(a) \ g(x) = e^{-x} \quad (b) \ h(x) = e^{x^2} \quad (c) \ k(x) = e^{-x^2} \quad (d) \ f(x) = 5xe^{-x^2}$$

(e) Untersuche f auf Nullstellen, Symmetrie, relative Extrema und Wendepunkte. Zeichne den Grafen von f im x -Intervall $[-3, 3]$.

Es darf, ohne nachzurechnen, $f'''(x) = -10(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}$ verwendet werden.

Lösung: (a) $g'(x) = -e^{-x}$ (b) $h'(x) = 2xe^{x^2}$ (c) $k(x) = -2xe^{-x^2}$

(d) $f'(x) = 5e^{-x^2} - 10x^2e^{-x^2} = 5(1 - 2x^2)e^{-x^2}$

(b) Nullstelle: $x_0 = 0$

$$f(-x) = -5xe^{-(-x)^2} = -5xe^{-x^2} = -f(x) \implies \text{Punktsymmetrie zum Ursprung}$$

$$f'(x) = 0 \implies 1 - 2x^2 = 0 \implies x_{11} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad x_{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$f''(x) = -10xe^{-x^2} - 20xe^{-x^2} + 20x^3e^{-x^2} = 10x(2x^2 - 3)e^{-x^2}$$

$$f''(x_{12}) = -10\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} < 0 \implies \text{rel. Max. bei } \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \mid \frac{5}{2}\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}\right) \approx (0,71 \mid 2,14)$$

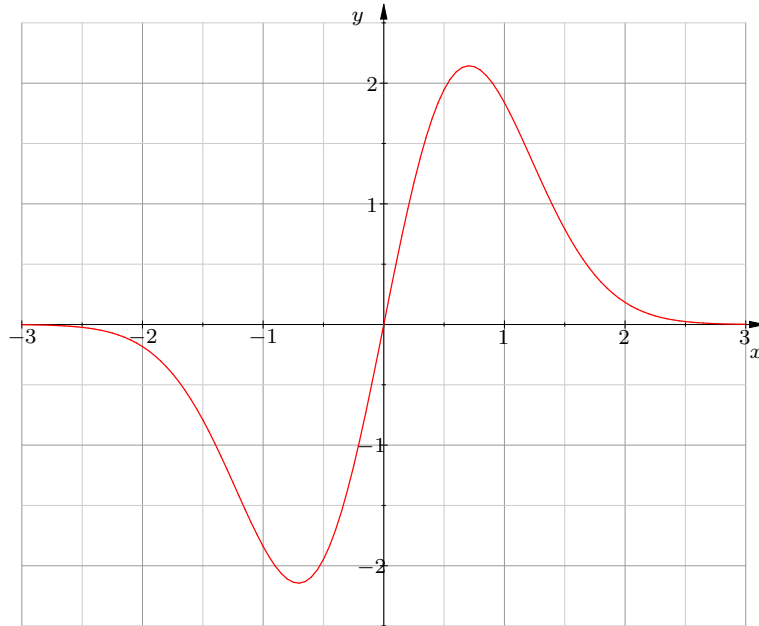
$$\text{Symmetrie} \implies \text{rel. Min. bei } \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} \mid -\frac{5}{2}\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}\right) \approx (-0,71 \mid -2,14)$$

$$f''(x) = 0 \implies 2x^2 - 3 = 0 \implies x_{21} = -\frac{1}{2}\sqrt{6}, \quad x_{22} = \frac{1}{2}\sqrt{6}, \quad x_{23} = 0$$

$$f'''(x_{22}) = 60e^{-\frac{3}{2}} \neq 0, \quad f'''(0) = -30 \neq 0 \text{ und Symmetrie} \implies$$

$$\text{Wendepunkte bei } \left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{6} \mid \pm\frac{5}{2}\sqrt{6}e^{-\frac{3}{2}}\right) \approx (\pm 1,22 \mid \pm 1,37) \text{ und } (0 \mid 0).$$

2.4 Krümmungsverhalten und Wendepunkte



2. Krümmung

$P_1(x_1 | f(x_1))$ und $P_2(x_2 | f(x_2))$ mit $x_2 = x_1 + \Delta x$ sind zwei benachbarte Punkte auf dem Graphen von f . Die Normalen auf G_f in P_1 und P_2 schneiden sich in M . Wenn P_2 immer näher zu P_1 wandert, gilt

$$\overline{MP_2} \approx \overline{MP_1} =: R$$

und wegen „ $\Delta\varphi$ sehr klein“:

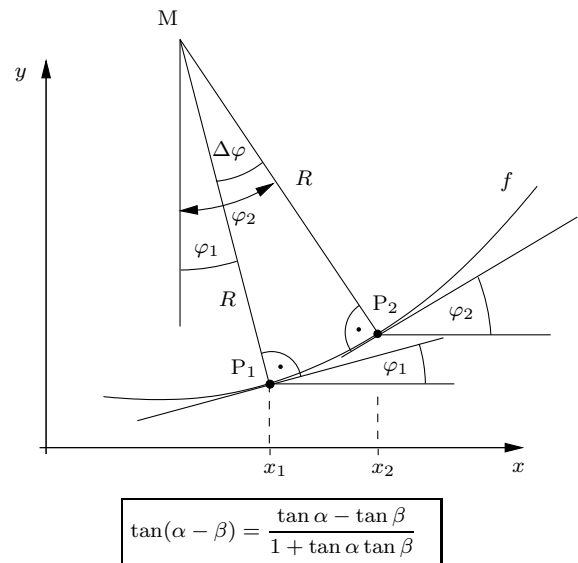
$$\Delta\varphi \approx \tan \Delta\varphi \approx \frac{\Delta s}{R}$$

mit $\Delta s = \overline{P_1P_2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

(a) Beweise unter Verwendung der angegebenen trigonometrischen Formel:

$$R(x) = \frac{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}$$

$R(x)$ heißt *Krümmungsradius* von f an der Stelle x . $R(x)$ ist der Radius eines Kreises, der G_f in einer kleinen Umgebung von x am besten annähert. Als



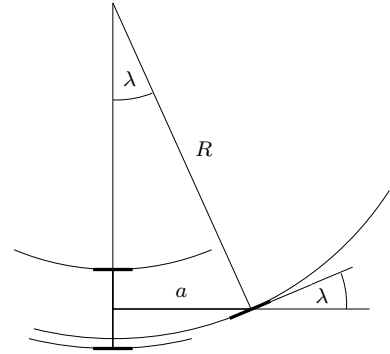
2.4 Krümmungsverhalten und Wendepunkte

Krümmung von f an der Stelle x definiert man

$$k(x) = \frac{f''(x)}{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Welche Beziehung besteht zwischen $R(x)$ und $k(x)$?

- (b) Die Bedeutung der Krümmung kann man sich wie folgt veranschaulichen: Ein Dreirad, dessen Achsabstand a so klein ist, dass sich die Krümmung k von f zwischen Vorderrad und Hinterrädern kaum ändert, fährt entlang des Grafen von f . Wie hängt die Krümmung $k(x)$ mit dem Lenkwinkel λ zusammen, wenn $\lambda < 0$ Ausschlag nach rechts und $\lambda > 0$ Ausschlag nach links bedeutet?



- (c) Ein Auto mit dem Achsabstand $a = 4$ fährt langsam durch eine S-Kurve mit der Gleichung

$$f(x) = 10 \sin\left(\frac{\pi}{30} \cdot x\right) \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 60$$

(die Zahlenwerte für a , x und $f(x)$ verstehen sich in Metern). Zeichne die Grafen von $f(x)$ und $\lambda(x)$.

Lösung: (a) Mit $x_1 = x$, $x_2 = x + \Delta x$, $\tan \varphi = f'(x)$ und $\tan(\varphi + \Delta\varphi) = f'(x + \Delta x)$ folgt ($\Delta\varphi$ kann auch negativ sein, R aber muss positiv sein):

$$\begin{aligned} R(x) &= \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{|\tan \Delta\varphi|} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\tan(\varphi + \Delta\varphi - \varphi)} \right| = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} (1 + \tan \varphi \tan(\varphi + \Delta\varphi))}{\tan(\varphi + \Delta\varphi) - \tan \varphi} \right| = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} (1 + f'(x)f'(x + \Delta x))}{\frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}} \right| = \\ &= \left| \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2} (1 + f'(x)^2)}{f''(x)} \right| = \frac{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|} \\ R(x) &= \frac{1}{|k(x)|} \end{aligned}$$

- (b) Zunächst einmal gilt für den Betrag von λ

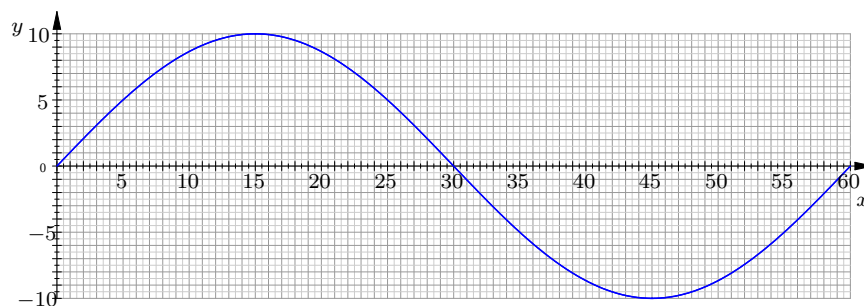
$$\sin |\lambda| = \frac{a}{R(x)} = a \cdot |k(x)|$$

2.4 Krümmungsverhalten und Wendepunkte

$\lambda < 0$ bedeutet Rechtskurve, d.h. $f''(x) < 0$ und umgekehrt; das Vorzeichen von λ ist also gleich dem Vorzeichen von $f''(x)$ und damit auch dem von $k(x)$:

$$\sin \lambda = a \cdot k(x)$$

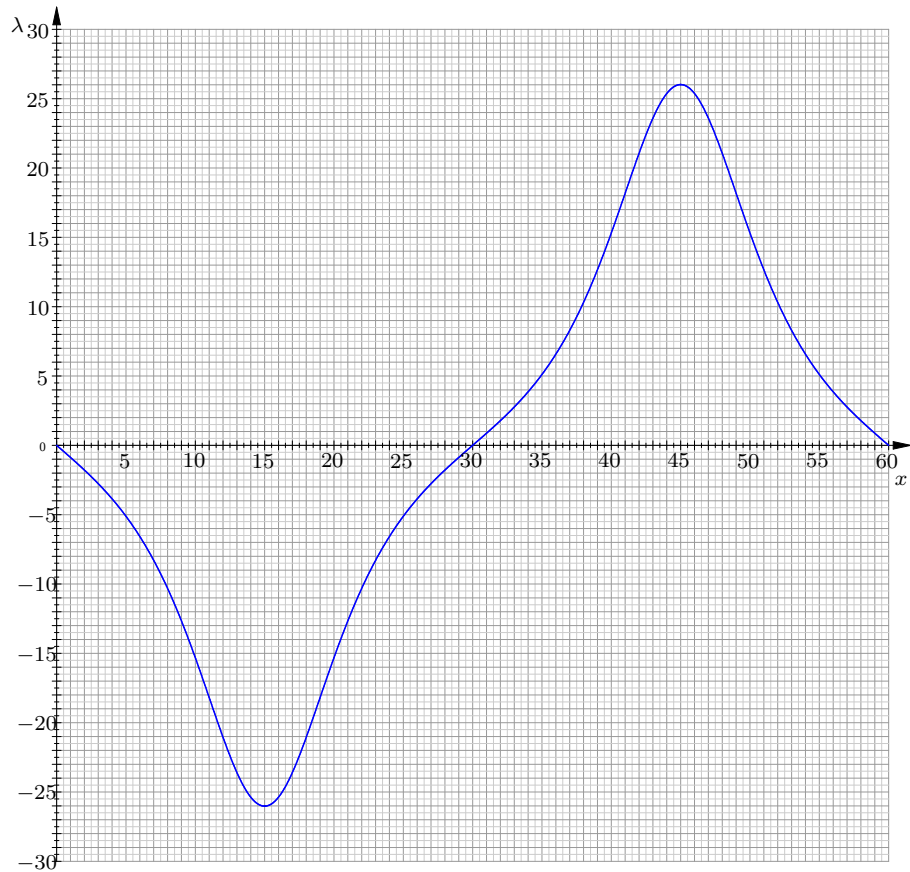
(c) Die Periodenlänge von f ist $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{30}} = 60$.



Mit $f'(x) = \frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{30} \cdot x\right)$ und $f''(x) = -\frac{\pi^2}{90} \sin\left(\frac{\pi}{30} \cdot x\right)$ folgt

$$\lambda(x) = a \cdot k(x) = \frac{-2\pi^2 \sin\left(\frac{\pi}{30} \cdot x\right)}{45 \left[1 + \frac{\pi^2}{9} \cos^2\left(\frac{\pi}{30} \cdot x\right)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Maximaler Lenkwinkel: $\lambda_{\max} = \lambda(45) \approx 26,0^\circ$



3. Schuldenwachstum

Die Funktion f mit $f(t) = -\frac{1}{8}((t - 2002)^3 - 3)(t - 2005) + 4$ beschreibt im Intervall $t \in [2001; 2005]$ die Entwicklung der Staatsschulden (in Mio EUR) eines fiktiven Landes zwischen den Jahren 2001 und 2005.

- Bestimme die Wendepunkte der Funktion.
- Zur Schlagzeile „Die Neuverschuldung sinkt!“ nimmt ein Politiker Stellung: „...damit sinkt die Schuldenlast für unsere Bürger“. Beurteile die Aussage des Experten mit Hilfe der in a) bestimmten Punkte.

Quelle: Veränderungen verstehen - aus qualitativer Sicht, Stefan Hußmann, PM Heft 31, Februar 2010, 52.Jg, S. 4-8

Lösung: (a) Substitution: $x = t - 2002 \Rightarrow$
 $f(x) = -\frac{1}{8}(x^3 - 3)(x - 3) + 4 = -\frac{1}{8}(x^4 - 3x^3 - 3x + 9)$
 $f'(x) = -\frac{1}{8}(4x^3 - 9x^2 - 3)$, $f''(x) = -\frac{1}{8}(12x^2 - 18x) \Rightarrow$
 Wendepunkte bei $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{3}{2}$
 bzw. $t_1 = 2002$ und $t_2 = 2003,5$

2.4 Krümmungsverhalten und Wendepunkte

- (b) Am Wendepunkt von f hat die Neuverschuldung f' ein Extremum. Die Neuverschuldung ist minimal bei $x_1 = 0$ bzw. $t_1 = 2002$ und maximal $x_2 = \frac{3}{2}$ bzw. $t_2 = 2003,5$. Ist das Maximum überschritten, also nach $t_2 = 2003,5$ sinkt die Neuverschuldung, der Schuldenzuwachs also abnimmt. D. h. die Schulden wachsen langsamer, die Schulden nehmen aber zu!

4. Berechnen Sie für folgende Funktionen die Ortskurve der Wendepunkte.

(a) $f(x) = x^3 + x^2 + kx$

(b) $f(x) = x^3 + kx^2 + x$

(c) $f(x) = kx^3 + x^2 + x$

- Lösung:* (a) Wendepunkte bei $x_W = -\frac{1}{3}$
 (b) Wendepunkte bei $x_W = -\frac{k}{3} \Rightarrow k = -3x \Rightarrow f(x_W) = x^3 - 3x \cdot x + x = -2x^3 + x$
 (c) Wendepunkte bei $x_W = -\frac{1}{3k} \Rightarrow k = -\frac{1}{3k} \Rightarrow f(x_W) = -\frac{1}{3k}x^3 + x^2 + x = \frac{2}{3}x^2 + x$

5. Gegeben ist die Funktion $g(x) = x^4 + 6x^3 - 24x^2 + 2x + 7$

- (a) Berechnen Sie die Gleichungen der zwei Wendetangenten von $g(x)$.
 (b) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Wendetangenten.

- Lösung:* (a) Wendepunkte $W_1(1 | -8)$, $W_2(-4 | -513)$
 $t_1(x) = -24x + 16$, $t_2(x) = 226x + 391$
 (b) $S(-1\frac{1}{2} | 52)$

6. Bestimmen Sie für folgende Funktionen die Lage der Extrema und Wendepunkte ($D = \mathbb{R}$).

(a) $f_1(x) = \frac{x}{1+x^2}$

(b) $f_2(x) = \frac{x}{1+x^4}$

(c) $f(x) = \frac{x}{1+x^n}$, $n \in \mathbb{N}$ und n gerade

- Lösung:* (a) $H\left(1 \mid \frac{1}{2}\right)$, $T\left(-1 \mid -\frac{1}{2}\right)$, $W_1(0|0)$, $W_2\left(\sqrt{3} \mid \frac{1}{4}\sqrt{3}\right)$, $W_3\left(-\sqrt{3} \mid -\frac{1}{4}\sqrt{3}\right)$
 (b) $H\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}} \mid \frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)$, $T\left(-\sqrt[4]{\frac{1}{3}} \mid -\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)$, $W_1(0|0)$, $W_2\left(\sqrt[4]{\frac{5}{3}} \mid \frac{3}{8}\sqrt[4]{\frac{5}{3}}\right)$, $W_3\left(-\sqrt[4]{\frac{5}{3}} \mid -\frac{3}{8}\sqrt[4]{\frac{5}{3}}\right)$
 (c) $H\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n-1}} \mid \frac{n-1}{n}\sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}\right)$, $T\left(-\sqrt[n]{\frac{1}{n-1}} \mid -\frac{n-1}{n}\sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}\right)$, $W_1(0|0)$, $W_2\left(\sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}} \mid \frac{n-1}{2n}\sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}}\right)$,
 $W_3\left(-\sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}} \mid -\frac{n-1}{2n}\sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}}\right)$

7. Bestimmen Sie für folgende Funktionen die Lage der Extrema und Wendepunkte und Untersuchen Sie das Verhalten an den Grenzen der Definitionsmenge.

(a) $f_1(x) = \frac{x}{1+x}$

(b) $f_2(x) = \frac{x}{1+x^3}$

(c) $f(x) = \frac{x}{1+x^n}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ und } n \text{ ungerade}$

Lösung: (a) kein Extremum, kein Wendepunkt,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \infty$$

(b) $H\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \mid \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right), W_1\left(\sqrt[3]{2} \mid \frac{1}{3}\sqrt[3]{2}\right)$, kein Wendepunkt bei (0|0)!!

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \infty$$

(c) $H\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n-1}} \mid \frac{n-1}{n}\sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}\right), W_1\left(\sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}} \mid \frac{n-1}{2n}\sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}}\right)$

kein Wendepunkt bei (0|0)!!

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \infty$$

8. Bestimmen Sie bei folgenden Funktionen Nullstellen, Extrema und Wendepunkte.

(a) $f(x) = -x^3 + 9x + 10$

(b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 14x + 15$

(c) $f(x) = 3x^3 + 9x^2 - x - 3$

(d) $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + x - 2$

(e) $f(x) = 3x^3 - x^2 - 7x + 5$

(f) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$

Lösung: (a) $N_1(-2|0), N_2(-1,45|0), N_3(3,45|0)$,

Extrema: $T(-1,73|-0,39), H(1,73|20,39)$,

Wendepunkt $W(0|10)$

(b) $N_1(-2,5|0), N_2(1|0), N_3(3|0)$,

Extrema: $H(-1,11|24,11), T(2,11|-9,11)$,

Wendepunkt $W(0,50|7,50)$

(c) $N_1(-3|0), N_2(-0,58|0), N_3(0,58|0)$,

Extrema: $H(-2,05|11,03), T(0,05|-3,03)$,

Wendepunkt $W(-1,00|4,00)$

(d) $N_1(2|0)$, Extrema: $H(0,07|-1,97), T(1,27|-5,44)$,

Wendepunkt $W(0,67|-3,70)$

2.4 Krümmungsverhalten und Wendepunkte

- (e) $N_1(1|0)$, $N_2(-1,67|0)$,
Extrema: $H(-0,78|8,43)$, $T(1|0)$,
Wendepunkt $W(0,11|4,21)$
- (f) $N_1(-1,62|0)$, $N_2(-1|0)$, $N_3(0,61|0)$,
Extrema: $H(-1,33|0,19)$, $T(0|-1)$,
Wendepunkt $W(-0,67|-0,41)$

9. Berechne für folgende Funktionen die Gleichung der Tangente im Wendepunkt.

Für die Teilaufgaben (d)-(g):

Wie verändert sich die Tangente, wenn die vorkommenden Parameter variiert werden?

Zeichnen Sie mit einer geeigneten Software die zugehörigen Kurvenscharen.

- (a) $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 3x + 1$
(b) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 9$
(c) $f(x) = 3x^3 - x + 7$
(d) $f(x) = ax^3 + x^2 + x + 1, a \neq 0$
(e) $f(x) = x^3 + bx^2 + x + 1$
(f) $f(x) = x^3 + x^2 + cx + 1$
(g) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Lösung: (a) $t(x) = 2x + 1\frac{1}{9}$

(b) $t(x) = 8$

(c) $t(x) = -x + 7$

(d) $t(x) = \left(1 - \frac{1}{3a}\right) \cdot x - \frac{1}{27a^2} + 1$

1. Fall: $a < 0$: Für steigendes a , wird die Steigung der Tangente größer. Die Tangentensteigung ist immer > 1 . Der y -Abschnitt wird für steigendes a kleiner.

2. Fall: $a > 0$: Für steigendes a , wird die Steigung der Tangente größer. Die Tangentensteigung ist immer < 1 . Der y -Abschnitt wird für steigendes a größer.

(e) $t(x) = \left(-\frac{b^2}{3} + 1\right) \cdot x - \frac{b^3}{27} + 1$

1. Fall: $b > 0$: Für steigendes b , wird die Steigung der Tangente kleiner und der y -Abschnitt ebenfalls kleiner.

2. Fall: $b < 0$: Für steigendes b , wird die Steigung der Tangente größer und der y -Abschnitt kleiner.

(f) $t(x) = \left(-\frac{1}{3} + c\right) \cdot x + \frac{26}{27}$

Für steigendes c , wird die Steigung der Tangente größer und der y -Abschnitt bleibt unverändert.

2.4 Krümmungsverhalten und Wendepunkte

$$(g) \quad t(x) = \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right) \cdot x - \frac{b^3}{27a^2} + d$$

10. Geben Sie jeweils den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion an, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (a) $f(-2) = 0, f(-1) = 0, f(3) = 0, f(0) = 2$
- (b) $f(-3) = 0, f(1) = 0, f(0) = 2$
- (c) $f(1) = 0, f(5) = 0$, Maximum bei $(3|2)$
- (d) Maximum bei $(2|4)$, Minimum bei $(1|1)$
- (e) Terrassenpunkt bei $(0|0)$, Maximum bei $(-6|27)$

Lösung: (a) $f(x) = -\frac{1}{3}(x+2)(x+1)(x-3)$

(b) $f(x) = -\frac{2}{3}(x+3)(x-1)$

(c) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$

(d) $f(x) = -6x^3 + 27x^2 - 36x + 16$

(e) $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^3$

11. Im Eisenbahnbau werden im Flachland für die Bahnstrecke normalerweise Krümmungsradien von 1000 m oder mehr genommen. Darüberhinaus wird die Bahnstrecke so gewählt, dass an der Übergangsstelle kein Knick entsteht, die Krümmung stetig ist und sich proportional zum zurückgelegten Weg ändert. Bestimmen sie den Übergangsbogen der Länge 200 m einer geradlinigen Bahnlinie zu einem Kreisbogen mit Radius 1000 m. Verwenden sie dazu als Näherung Polynome. Als Länge der Kurve darf näherungsweise die x -Koordinate verwendet werden.

Hinweis:

Die Krümmung $k(x)$ einer Kurve ist der Kehrwert des zugehörigen Krümmungsradius $\varrho(x)$:

$$k(x) = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \varrho(x) = \frac{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}$$

Literatur: A. Kirsch, *Übergangsbögen bei Eisenbahngleisen als Thema für den Mathematikunterricht*, MNU 50/3, S. 144-150

Lösung: Für $x < 0$ kann die Bahnlinie mit $f_1(x) = 0$ beschrieben werden.

Bedingung für die Bahnlinie:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0 \quad (I), \quad k(x) \propto x \quad (II)$$

$$\text{Ansatz für } x \geq 0: f_2(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \dots \implies$$

$$f_2'(x) = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + \dots, \quad f_2''(x) = 2c + 6dx + 12ex^2 + \dots$$

2.4 Krümmungsverhalten und Wendepunkte

Aus (I) folgt $a = b = c = 0$. (II) kann mit diesem Polynomansatz nicht exakt erfüllt werden, da man mit obigem Ansatz $k(x) = \frac{6dx + 12ex^2 + \dots}{(1 + (3dx^2 + 4ex^3 + \dots)^2)^{\frac{3}{2}}}$ erhält.

Für kleine x ist jedoch $f'(x)$ sehr klein und kann vernachlässigt werden. Man erhält $k(x) \approx f''(x)$. Für diese Näherung liefert $f_2(x) = dx^3$ eine Lösung.

Bestimmung von d (Einheit: km) aus $\frac{1}{r} = k(x) \approx f''(x) = 6dx$:

$$k(0,2) \approx 6d \cdot 0,2 = \frac{1}{1} \implies d = \frac{5}{6}$$

Betrachtung der Abweichung von der exakt berechneten Krümmung bei $x = 0,2$:

$$k(0,2) = \frac{6 \cdot \frac{5}{6} \cdot 0,2}{(1 + (3 \cdot \frac{5}{6} \cdot 0,2^2)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1,015}$$

Bei $x = 0,2$ wird der Krümmungsradius von 1000 m nicht exakt erreicht. Dies macht sich in einem kleinen Ruck im Zug an der Übergangsstelle bemerkbar. In der Praxis werden solche Abweichungen toleriert, da der entstehende Ruck geringer als das übliche Rütteln des Zuges ist.

12. Bestimmen sie die Gleichung einer Funktion $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$, deren Graph bei $x = v$ eine Nullstelle und bei $x = u$ einen Terrassenpunkt hat.

Lösung: $f(v) = v^3 + bv^2 + cv + d = 0$, $f'(u) = 3u^2 + 2bu + c = 0$, $f''(u) = 6u + 2b = 0$, $f'''(x) = 6 \neq 0 \implies$
 $b = -3u$, $c = 3u^2$, $d = 3uv^2 - 3u^2v - v^3$

13. Der Graph einer Polynomfunktion vierten Grades hat folgende Eigenschaft:

- Maximum bei $M(0|0)$
- Wendepunkt bei $W(2|0)$ mit einer zur Geraden $y = -4x$ parallelen Tangente.

Geben sie die Funktionsgleichung der Polynomfunktion an.

Lösung: Bedingungen:

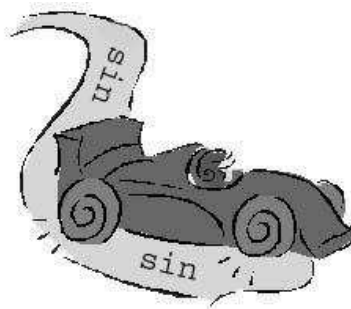
$$f(0) = 0, f'(0) = 0, f(2) = 0, f''(2) = 0, f'(2) = -4 \\ \implies f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$$

14. Sinus und Kosinus

Wenn du dir vorstellst, auf der Sinuskurve $f(x) = \sin \alpha$ von links nach rechts zu fahren, folgen abwechselnd Rechts- und Linkskurven aufeinander.

- (a) Skizziere die Sinuskurve und die Kosinuskurve für $0^\circ \leq \alpha \leq 720^\circ$ und teile sie in Rechts- und Linkskurven ein.
- (b) Gib die Teilintervalle an, in denen beide Kurven Linkskurven sind.

- (c) Gib die Teilintervalle an, in denen die Sinuskurve eine Linkskurve und die Kosinuskurve eine Rechtskurve ist.



15. **Beweisen Sie:** Ist x_1 Nullstelle des Polynoms $P(x)$ und gilt $P'(x_1) = 0$, dann ist x_1 eine r -fache Nullstelle mit $r \geq 2$.

Hinweis: Schreiben Sie $P(x)$ als Produkt und differenzieren Sie.

Lösung: $P(x) = (x - x_1)^r \cdot P_1(x)$ mit $P_1(x_1) \neq 0$

$$P'(x) = (x - x_1)^{r-1} \cdot P_1(x) + (x - x_1)^r \cdot P_1'(x)$$

Da der zweite Summand von P' für $x = x_1$ null ist, muss es auch der erste Summand sein; das ist aber nur für $r \geq 2$ möglich.

16. Suchen Sie alle Extremwerte der Funktion $f(x) = x^2 - 2 \cdot |x - 2| - 3x$.

Lösung:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 4 & \text{für } x < 2 \\ x^2 - 5x + 4 & \text{für } x \geq 2 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{für } x < 2 \\ 2x - 5 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

rel. Minimum bei $(0,5 | -4,25)$ und $(2,5 | -2,25)$.

$f'_-(2) = 3$ und $f'_+(2) = -1$, d.h. rel. Maximum bei $(2 | -2)$.

17. Die im Unterricht angegebenen **hinreichenden** Kriterien für einen Extremwert sind keine **notwendigen** Kriterien. Es gibt z.B. Funktionen mit einem relativen Minimum in x_0 , für die es kein noch so kleines positives h gibt mit f monoton fallend in $]x_0 - h; x_0[$ und f monoton steigend in $]x_0; x_0 + h[$. Als Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot (2 + \sin \frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

2.4 Krümmungsverhalten und Wendepunkte

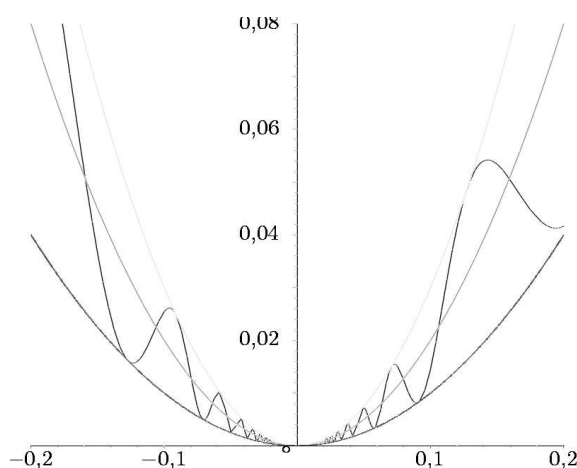
- (a) Berechnen Sie alle x_{0k} mit $f(x) = 2x^2$, alle x_{1k} mit $f(x) = 3x^2$ sowie alle x_{2k} mit $f(x) = x^2$ und zeichnen Sie dann die Graphen von x^2 , $2x^2$, $3x^2$ und f mit den Einheiten $0,1 \hat{=} 4 \text{ cm}$ auf der x -Achse und $0,01 \hat{=} 1 \text{ cm}$ auf der y -Achse im Bereich $-0,2 < x < 0,2$.
- (b) Zeigen Sie, dass f bei $x = 0$ stetig ist und dort ein absolutes und relatives Minimum besitzt.
- (c) Berechnen Sie $f'(x)$ für $x \neq 0$.
- (d) Berechnen Sie $f'(0)$ mit der Definition der Ableitung.
- (e) Zeigen Sie, dass f' bei $x = 0$ unstetig ist und in jeder noch so kleinen Umgebung von 0 unendlich oft das Vorzeichen wechselt.

Lösung: (a) $x_{00} = 0$, $x_{0k} = \frac{1}{k\pi}$ für $k \neq 0$

$$x_{1k} = \frac{1}{(0,5 + 2k)\pi}$$

$$x_{2k} = \frac{1}{(1,5 + 2k)\pi}$$

k	x_{0k}	x_{1k}	x_{2k}
0	0,000	0,637	0,212
1	0,318	0,127	0,091
2	0,159	0,071	0,058
3	0,106	0,049	0,042
4	0,080	0,037	0,034
5	0,064	0,030	0,028
6	0,053	0,025	0,024
7	0,045	0,022	0,021



$$(b) \quad x^2 \leq f(x) \leq 3x^2 \implies \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \leq \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 \implies$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0), \text{ d.h. } f \text{ ist stetig bei } x = 0.$$

$$f(x) > 0 \text{ für alle } x \neq 0 \text{ und } f(0) = 0 \implies \text{absol. und rel. Min. bei } (0|0).$$

$$(c) \quad f'(x) = 4x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

$$(d) \quad f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \left(2 + \sin \frac{1}{h} \right) - 0}{h} = 0$$

$$(e) \quad f'(x) = \begin{cases} 4x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}, \quad \text{aber } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \text{ existiert nicht.}$$

f ist in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, aber f' ist bei $x = 0$ unstetig!

Da $x \sin \frac{1}{x}$ für $|x| \ll 1$ gegen $\cos \frac{1}{x}$ vernachlässigt werden kann, wechselt f' in jeder noch so kleinen Umgebung von 0 unendlich oft das Vorzeichen!

2.5 Wirtschaft

1. Eine Elektronikfirma produziert Walkmans. Die Produktionskosten von x Geräten werden durch die Funktion $K(x) = 10^{-8} \cdot x^3 - 0,003x^2 + 200x$ beschrieben. Der Nachfragepreis des Gerätes (in €) wurde zu $n(x) = 332 - 0,006 \cdot x$ ermittelt, d.h. bei einem Verkaufspreis von $n(x)$ pro Stück sind x Leute bereit, das Gerät zu kaufen. Ermitteln Sie den maximal möglichen Gewinn der Firma. Bei welcher Stückzahl x_0 und bei welchem Verkaufspreis $n(x_0)$ wird der maximale Gewinn erzielt?

Lösung: Gewinn: $G(x) = x \cdot n(x) - K(x) = -10^{-8} \cdot x^3 - 0,003x^2 + 132x$
 $G'(x) = -3 \cdot 10^{-8}x^2 - 0,006x + 132 = 0 \implies x_0 = 20\,000 \quad (x_0 = -220\,000)$
 $n(x_0) = 212, \quad G(x_0) = 1,36 \cdot 10^6$

2. In einer Marktwirtschaft wird der Preis einer Ware durch Angebot und Nachfrage bestimmt. In Modellen zur Beschreibung marktwirtschaftlicher Mechanismen spricht man vom Angebotspreis, den der Anbieter verlangt und vom Nachfragepreis, den der Käufer bereit ist zu zahlen. Oft werden Angebotspreis und Nachfragepreis durch Funktionen $a(x)$ und $n(x)$ beschrieben. x ist dabei die Nachfrage.

(a) Wie hängen Angebotspreis und der Nachfragepreis mit der Nachfrage x zusammen? Was bedeutet dies für das Monotonieverhalten von $a(x)$ bzw. $n(x)$? Wie erhält man den Verkaufspreis einer Ware?

- (b) Bestimmen Sie den Verkaufspreis einer Ware graphisch und rechnerisch für

- i. $a(x) = 20\sqrt{x}$ und $n(x) = 100 - 7x$.
- ii. $a(x) = 15\sqrt{x}$ und $n(x) = 200 - 23x$.
- iii. $a(x) = 20x + 50$ und $n(x) = 200 - 5x^2$.
- iv. $a(x) = 200x + 300$ und $n(x) = 970 - 13x^2$.
- v. $a(x) = 30x + 100$ und $n(x) = \frac{400}{x} + 200$.
- vi. $a(x) = 7x + 200$ und $n(x) = \frac{5000}{x} - 130$.

2.5 Wirtschaft

Lösung: (a) Bei zunehmender Nachfrage x nimmt der Angebotspreis $a(x)$ zu. D. h. $a(x)$ ist monoton steigend.

Die Nachfrage x nach einer Ware nimmt zu, wenn der Nachfragepreis $n(x)$ sinkt. D. h. $n(x)$ ist monoton fallend.

Bedingung für Verkaufspreis: $a(x) = n(x)$

(b) Graphische Lösung: $a(x)$ und $n(x)$ zeichnen. Der y-Wert des Schnittpunktes der Funktionen ist der Preis.

Rechnerische Lösung: $a(x) = n(x)$ nach x auflösen. Der zugehörige Funktionswert ist der Preis.

i. $x = 6,82 \Rightarrow y = 52$

ii. $x = 6,97 \Rightarrow y = 40$

iii. $x = 3,8 \Rightarrow y = 127$

iv. $x = 2,83 \Rightarrow y = 866$

v. $x = 5,68 \Rightarrow y = 270$

vi. $x = 12,06 \Rightarrow y = 284$

In allen Fällen liefert die Gleichung zwei Lösungen, von denen marktwirtschaftlich nur eine Lösung sinnvoll ist. Durch Runden der Zwischenergebnisse sind kleine Abweichungen im Ergebnis möglich.

3. Der Preis einer Ware reguliert in einer Marktwirtschaft die Nachfrage. Steigt der Preis, so geht die Nachfrage zurück.

Für den Anbieter ist es wichtig zu wissen, wie stark oder schwach die Nachfrage x auf eine Preisänderung reagiert. Die Funktion $n(x)$ gibt den Nachfragepreis an, den der Käufer bereit ist zu zahlen.

(a) Bei welchen Gütern ist eine starke bzw. schwache Veränderung der Nachfrage bei einem veränderten Preis zu erwarten?

(b) Um die Stärke dieser Reaktion auszudrücken führt man den Elastizitätskoeffizienten $\varepsilon(x)$ einer Funktion ein. Er gibt die relative Änderung der Nachfrage x pro relativer Änderung des Nachfragepreises $n(x)$ an.

Begründen Sie, warum es nicht sinnvoll ist die absolute Änderung des Arguments pro absoluter Änderung des Funktionswertes anzugeben.

(c) Drücken Sie $\varepsilon(x)$ der Nachfragefunktion $n(x)$ durch x , $n(x)$ und $n'(x)$ aus.

(d) Berechnen Sie die Elastizität folgender Nachfragefunktionen.

i. $n(x) = 100 - 7x$.

ii. $n(x) = 200 - 23x$.

iii. $n(x) = 200 - 5x^2$.

iv. $n(x) = 970 - 13x^2$.

v. $n(x) = \frac{400}{x} + 200$.

2.5 Wirtschaft

vi. $n(x) = \frac{5000}{x} - 130$.

- (e) Zeigen Sie, dass der Umsatz $U(x) = x \cdot n(x)$ bei fallendem Preis steigt, wenn die Elastizität ε der Nachfragefunktion kleiner als -1 ist. Überlegen Sie dazu, wie sich ein fallender Preis auf die Nachfrage x auswirkt.
- (f) Wie kann der Umsatz erhöht werden, wenn die Elastizität ε der Nachfragefunktion größer als -1 ist? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (g) Geben Sie für die Nachfragefunktionen aus Teilaufgabe (d) die Bereiche an, in denen der Umsatz durch Preissteigerung- bzw. Preissenkung erhöht werden kann.

Lösung: (a) Bei lebensnotwendigen Gütern wird sich die Nachfrage weniger verändern, als bei Luxusgütern.

- (b) Betrachtet man z. B. die Nachfragefunktion einer Ware, ist klar, dass eine Preisänderung von 5 DM bei einem Auto eine andere Bedeutung hat, als bei einem kg Butter. Im Vergleich zum Preis eines Autos sind 5 € zu vernachlässigen und damit hat die Preisänderung praktisch keine Auswirkung. Bei einem kg Butter hingegen haben 5 € eine Bedeutung. Damit ist es nicht sinnvoll die Auswirkung als Preisänderung pro Änderung der Nachfrage anzugeben, sondern zu relativen Größen überzugehen.

(c)

$$\varepsilon(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{n(x+\Delta x)-n(x)}{n(x)}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{n(x)}{x \frac{n(x+\Delta x)-n(x)}{\Delta x}} = \frac{n(x)}{x n'(x)}$$

- (d) i. $\varepsilon(x) = 1 - \frac{100}{7x}$
 ii. $\varepsilon(x) = 1 - \frac{200}{23x}$
 iii. $\varepsilon(x) = \frac{1}{2} - \frac{20}{x^2}$
 iv. $\varepsilon(x) = \frac{1}{2} - \frac{485}{13x^2}$
 v. $\varepsilon(x) = -1 - \frac{1}{2}x$
 vi. $\varepsilon(x) = -1 + \frac{13}{500}x$

- (e) Preis fällt $\Rightarrow$ Nachfrage x steigt.

$$U'(x) = n(x) + x n'(x) > 0 \Leftrightarrow \varepsilon(x) = \frac{n(x)}{x n'(x)} < -1, \text{ da } n'(x) < 0 \text{ und } x > 0!$$

- (f) $\varepsilon(x) > -1 \Leftrightarrow \frac{n(x)}{x n'(x)} > -1 \Leftrightarrow n(x) < -x n'(x)$, da $n'(x) < 0 \Leftrightarrow U'(x) = n(x) - x n'(x) < 0$. Also ist $U(x)$ monoton fallend. Eine Preiserhöhung reduziert die Nachfrage x und erhöht damit den Umsatz.

(g)

	Preiserhöhung $\varepsilon > -1$	Preissenkung $\varepsilon < -1$
i	$]7\frac{1}{7}; \infty[$	$]0; 7\frac{1}{7}[$
ii	$]4\frac{8}{23}; \infty[$	$]0; 4\frac{8}{23}[$
iii	$] \sqrt{13\frac{1}{3}}; \infty[$	$]0; \sqrt{13\frac{1}{3}}[$
iv	$] \sqrt{\frac{970}{39}}; \infty[$	$]0; \sqrt{\frac{970}{39}}[$
v	-	$\mathbb{R}^+$
vi	$\mathbb{R}^+$	-

4. Die Produktionskosten $K(x)$ und der Umsatz $U(x) = x \cdot n(x)$ eines Unternehmens hängen von der Nachfrage x auf dem Markt ab. $n(x)$ ist der Nachfragepreis einer Ware.

- (a) Leiten Sie eine Gleichung zur Berechnung des maximal möglichen Gewinns her. Deuten Sie das Ergebnis geometrisch.
- (b) Berechnen Sie für folgende Fälle den maximal möglichen Gewinn. Geben Sie jeweils den Preis der Ware im Gewinnmaximum an.
- $n(x) = 500 + \frac{120}{x}$, $K(x) = 300 + 20x + 3x^2$
 - $n(x) = 60 + \frac{4000}{x}$, $K(x) = 70 + 2x + 0,4x^2$
 - $n(x) = 100 - 60x$, $K(x) = 3 + 10x - 2x^2 + 0,2x^3$
 - $n(x) = 500 - 12x$, $K(x) = 300 + 20x - x^2 + 0,1x^3$

Lösung: (a) $U(x) = xn(x) \Rightarrow$ Maximum des Gewinns $G(x) = U(x) - K(x) \Leftrightarrow G'(x) = 0 = U'(x) - K'(x)$ und $G''(x) = U''(x) - K''(x) < 0$;
Maximum des Gewinns, wenn $G(x)$ eine waagrechte Tangente hat.

- (b) i. $G'(x) = 480 - 6x, G''(x) = -6 < 0 \Rightarrow$ Maximum für $x = 80$, $G(80)=19020$, Preis $n(x) = 501,5$
- ii. $G'(x) = 58 - 0,8x, G''(x) = -0,8 < 0 \Rightarrow$ Maximum für $x = 72,5$, $G(72,5)=6032,5$, Preis $n(x) = 115$
- iii. $G'(x) = 90 - 116x - 0,6x^2, G''(x) = -116 - 1,2x \Rightarrow$ Maximum für $x = 0,77$ (die zweite Lösung der Gleichung ist nicht sinnvoll, da < 0 !), $G(0,77)=32$, Preis $n(x) = 54$
- iv. $G'(x) = 480 - 22x - 0,3x^2, G''(x) = -22 - 0,6x \Rightarrow$ Maximum für $x = 17,596 \approx 17,6$ (die zweite Lösung der Gleichung ist nicht sinnvoll, da < 0 !), $G(17,6)=4195$, Preis $n(x) = 289$

5. Eine Elektronikfirma produziert Walkmans. Die Produktionskosten von x Geräten werden durch die Funktion $K(x) = 10^{-8} \cdot x^3 - 0,003x^2 + 200x$ beschrieben. Der Nachfragepreis des Gerätes (in €) wurde zu $n(x) = 332 - 0,006 \cdot x$ ermittelt, d.h. bei einem Verkaufspreis von $n(x)$ pro Stück sind x Leute bereit, das Gerät zu kaufen.

2.5 Wirtschaft

Ermitteln Sie den maximal möglichen Gewinn der Firma. Bei welcher Stückzahl x_0 und bei welchem Verkaufspreis $n(x_0)$ wird der maximale Gewinn erzielt?

Lösung: Gewinn: $G(x) = x \cdot n(x) - K(x) = -10^{-8} \cdot x^3 - 0,003 x^2 + 132 x$
 $G'(x) = -3 \cdot 10^8 x^2 - 0,006 x + 132 = 0 \implies x_0 = 20\,000$ ($x_0 = -220\,000$)
 $n(x_0) = 212$, $G(x_0) = 1,36 \cdot 10^6$

6. Die Produktionskosten pro Stück $K_D(x) = \frac{K(x)}{x}$ eines Unternehmens hängen von der Menge der produzierten Ware x ab.

(a) Berechnen Sie für folgenden Kostenfunktionen die Menge x , für die die Kosten pro Stück minimal sind. Geben Sie die minimalen Produktionskosten pro Stück an.

i. $K(x) = 300 + 3x^2 + 20x$

ii. $K(x) = 70 + 2x + 0,8x^2$

(b) Zur Bestimmung des Minimums der Produktionskosten pro Stück verwendet man häufig die Grenzkosten $K'(x)$. Zeigen Sie, dass $K'(x)$ die Funktion $K_D(x)$ in einem Punkt mit waagrechter Tangente schneidet.

Welche weitere Bedingung muss erfüllt sein, damit die Produktionskosten pro Stück ein Minimum haben?

(c) Berechnen Sie für folgende Kostenfunktionen die Menge x , für die die Kosten pro Stück minimal sind. Geben Sie die minimalen Produktionskosten pro Stück an.

i. $K(x) = 20 + 3x + x^2 + x^3$

ii. $K(x) = 144 + 2x + x^2 + \frac{5}{2}x^3$

iii. $K(x) = 350 + 5x + 4x^2 + x^3$

Lösung: (a) $K_D(x)$ nach x ableiten und gleich Null setzen liefert zwei Lösungen, von denen nur eine sinnvoll ist. Für diesen Wert ist $K_D'' > 0$.

i. $x = 10$, $K_D(10) = 80$

ii. $x = 9,4$, $K_D(9,4) = 17$

(b) $K_D(x)' = \frac{K(x)'}{x} - \frac{K(x)}{x^2} = \frac{K(x)' - K_D(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow K(x)' = K_D(x)$.

Minimum, wenn $K_D(x)'' = \dots = \frac{K(x)''}{x} > 0$

(c) $K(x)' = K_D(x)$ verwenden! Die Gleichung kann durch raten gelöst werden.

i. $x = 2$, $K_D(2) = 19$

ii. $x = 3$, $K_D(3) = 75,5$

iii. $x = 5$, $K_D(5) = 120$

7. Nach dem Einkommensteuergesetz §32a der Bundesrepublik Deutschland (1997) beträgt die Einkommensteuer

bis 12 095 DM (Grundfreibetrag) 0 DM.

von 12 096 DM bis 55 727 DM in DM: $(86,63 \cdot y + 2\,590) \cdot y$

von 55 728 DM bis 120 041 DM in DM: $(151,91 \cdot z + 3\,346) \cdot z + 12\,949$

von 120 042 DM an in DM: $0,53 \cdot x - 22\,842$

Das zu versteuernde Einkommen ist auf den nächsten durch 54 ohne Rest teilbaren Betrag abzurunden, wenn es nicht bereits durch 54 ohne Rest teilbar ist.

y ist ein Zehntausendstel des 12 042 DM übersteigenden Teils des abgerundeten zu versteuernden Einkommens.

z ist ein Zehntausendstel des 55 674 DM übersteigenden Teils des abgerundeten zu versteuernden Einkommens.

x ist das abgerundete zu versteuernden Einkommen.

- (a) Berechnen Sie die zu zahlende Einkommensteuer für ein zu versteuerndes Einkommen von 13 000 DM, 23 000 DM, 56 000 DM, 66 000 DM, 130 000 DM und 150 000 DM.
- (b) Berechnen Sie für die zu versteuernden Einkommen aus Teilaufgabe (a), welchen Prozentsatz des Einkommens die Steuern betragen.
- (c) Stellen Sie die zu bezahlende Einkommensteuer S in DM in Abhängigkeit vom zu versteuernden Einkommen E in DM für folgende Intervalle graphisch dar:
 - i. $E \in [12\,000; 12\,400]$
 - ii. $E \in [70\,200; 70\,469]$
 - iii. $E \in [124\,200; 124\,469]$
- (d) Im Absatz (5) des Einkommensteuergesetz heißt es:

„Bei Ehegatten... beträgt die tarifliche Einkommensteuer... das Zweifache des Steuerbetrags, der sich für die Hälfte ihres gemeinsam zu versteuernden Einkommens... ergibt.“

Geben Sie für ein zu versteuerndes Einkommen von 130 000 DM die bei Ehegatten zu zahlende Einkommensteuer an. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Teilaufgabe (a).

- Lösung:*
- (a) 238 DM, 2 928 DM, 13 058 DM, 16 562 DM, 46 046 DM, 55 136 DM
 - (b) 1,8%, 12,7%, 23,3%, 25,1%, 35,4%, 37,8%
 - (c)
 - (d) Bei Ehegatten sind nur 32 376 DM zu zahlen.

8. Nach dem Einkommensteuergesetz §32a der Bundesrepublik Deutschland (1997) beträgt die Einkommensteuer

bis 12 095 DM (Grundfreibetrag) 0 DM.

von 12 096 DM bis 55 727 DM in DM: $(86,63 \cdot y + 2\,590) \cdot y$

von 55 728 DM bis 120 041 DM in DM: $(151,91 \cdot z + 3\,346) \cdot z + 12\,949$

von 120 042 DM an in DM: $0,53 \cdot x - 22\,842$

y ist ein Zehntausendstel des 12 042 DM übersteigenden Teils des abgerundeten zu versteuernden Einkommens.

z ist ein Zehntausendstel des 55 674 DM übersteigenden Teils des abgerundeten zu versteuernden Einkommens.

x ist das abgerundete zu versteuernden Einkommen.

Das zu versteuernde Einkommen ist auf den nächsten durch 54 ohne Rest teilbaren Betrag abzurunden, wenn es nicht bereits durch 54 ohne Rest teilbar ist.

- Geben Sie die im Einkommensteuergesetz definierte Funktion ohne Berücksichtigung der Rundungsregel als intervallweise definierte Funktion $f(x)$ auf $\mathbb{R}_0^+$ in Abhängigkeit vom zu versteuernden Einkommen x in DM an. Wählen Sie folgende Intervallgrenzen: $< 12\,096$, $< 55\,728$ und $< 120\,042$.
- Untersuchen Sie f und die dem Gesetz exakt entsprechende Funktion g auf Stetigkeit.
- Zeichnen Sie f und die im Einkommensteuergesetz definierte Funktion g für $x < 12800$.
- Stellen Sie die Funktion f mit einer geeigneten Software für $x < 150000$ graphisch dar.
- Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f .
- Stellen Sie f' mit einer geeigneten Software für $x < 150000$ graphisch dar und interpretieren Sie das Diagramm.

Lösung: (a)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 12\,096 \\ 86,63 \cdot 10^{-8}x^2 + 0,238136x - 2993,26 & \text{falls } 12\,096 \leq x < 55\,728 \\ 151,91 \cdot 10^{-8}x^2 + 0,165451x - 970,93 & \text{falls } 55\,728 \leq x < 120\,042 \\ 0,53x - 22\,842 & \text{falls } x \geq 120\,042 \end{cases}$$

- (b) $f(x)$ ist unstetig für $x = 12\,096$, $x = 55\,728$ und $x = 120\,042$, sonst stetig.
 $g(x)$ ist unstetig für $12\,096 + k \cdot 54$ mit $k \in \mathbb{Z}_0$, sonst stetig.

(e)

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 12\,096 \\ 173,26 \cdot 10^{-8}x + 0,238136 & \text{falls } 12\,096 < x < 55\,728 \\ 303,82 \cdot 10^{-8}x + 0,165451 & \text{falls } 55\,728 < x < 120\,042 \\ 0,53 & \text{falls } x > 120\,042 \end{cases}$$

2.6 Kurvendiskussion

2.6.1 Diskussion einzelner Funktionen

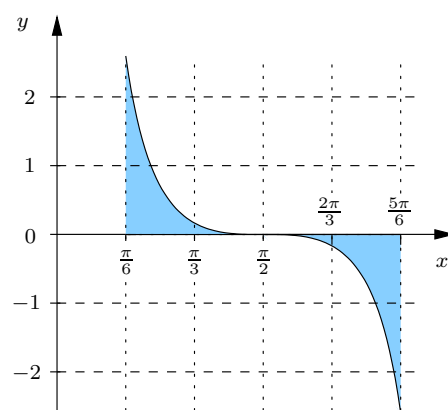
1. Wir betrachten die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$$

- (a) Berechne $f(x)$ für $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ und zeichne den Graphen von f im x -Intervall $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$. Einheiten: 2 cm auf der y -Achse, $\pi \hat{=}$ 6 cm auf der x -Achse.
- (b) Beweise: $\int f(x) dx = -\sin x - \frac{1}{\sin x} + C$
- (c) Berechne die Fläche, die von G_f , der x -Achse und den beiden Geraden $x = \frac{\pi}{6}$ und $x = \frac{5\pi}{6}$ eingeschlossen wird.

Lösung: (a)

x	$f(x)$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2,60$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{6} \approx 0,167$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{6} \approx -0,167$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3}{2}\sqrt{3} \approx -2,60$



(b) $\frac{d}{dx} \left(-\sin x - \frac{1}{\sin x} + C \right) = -\cos x - \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x \overbrace{(1 - \sin^2 x)}^{\cos^2 x}}{\sin^2 x} = \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$

(c) Nullstelle von f bei $x_0 = \frac{\pi}{2}$ und $f(x) < 0$ für $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} f(x) dx = \left[-\sin x - \frac{1}{\sin x} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\sin x - \frac{1}{\sin x} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} = \\ &= -1 - 1 + \frac{1}{2} + 2 - \left(-\frac{1}{2} - 2 + 1 + 1 \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

2. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = 1 - 3,3 \cdot e^{-\frac{x^2}{8}}.$$

2.6 Kurvendiskussion

Untersuche f zunächst auf Symmetrie, berechne dann die Nullstellen und die Grenzwerte für $x \rightarrow \pm\infty$ und ermittle die Koordinaten der relativen Extremwerte und der Wendepunkte. Zeichne den Grafen von f im Intervall $[-6; 6]$.

Lösung: $f(-x) = f(x) \implies$ Symmetrie zur y -Achse

$$f(x) = 0 \implies e^{-\frac{x^2}{8}} = \frac{1}{3,3} \implies -\frac{x^2}{8} = \ln \frac{1}{3,3} = -\ln 3,3$$

$$x_0 = \pm 2\sqrt{2 \ln 3,3} \approx \pm 3,09$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1^-$$

$$f'(x) = \frac{33}{40} \cdot x e^{-\frac{x^2}{8}}$$

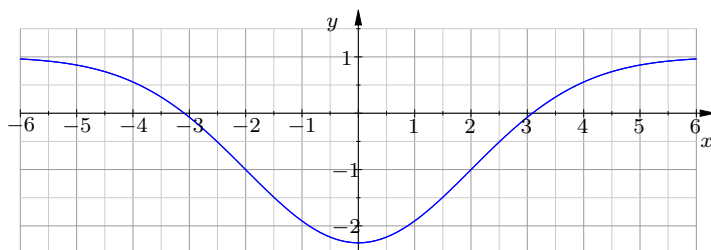
$$f''(x) = \frac{33}{40} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) e^{-\frac{x^2}{8}}$$

$$f'(0) = 0 \text{ und } f''(0) > 0 \implies \text{Tiefpunkt bei } T(0 | -2,3)$$

$$f''(x) = 0 \implies x_2 = \pm 2$$

$$f'''(x) = \frac{33}{40} \left(-\frac{3x}{4} + \frac{x^3}{16}\right) e^{-\frac{x^2}{8}} = \frac{33}{160} \left(-3 + \frac{x^2}{4}\right) x e^{-\frac{x^2}{8}}$$

$$f'(\pm 2) = 0 \text{ und } f'''(\pm 2) \neq 0 \implies \text{Wendepunkte bei } W_{1,2} \left(\pm 2 \mid \underbrace{1 - \frac{3,3}{\sqrt{e}}}_{\approx -1,00} \right)$$



3. Von der Funktion f ist bekannt:

$$f'(x) = \frac{x^2}{x^3 + 1} \quad \text{und} \quad f(0) = 1$$

- Diskutiere f (Nullstellen, Grenzwerte, Extremwerte, Wendepunkte, Graf).
- Zeige, dass sich der Graf von f für große x beliebig nahe an den Grafen von g mit $g(x) = 1 + \ln x$ annähert. Zeichne den Grafen von g in das schon vorhandene Diagramm ein.
- Für welche x unterscheidet sich $g(x)$ um weniger als ein Hundertstel von $f(x)$?

2.6 Kurvendiskussion

Lösung: (a) $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{\frac{1}{3} \cdot (x^3 + 1)'}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \ln(x^3 + 1) + C$

$$f(0) = C = 1 \implies C = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{3} \ln(x^3 + 1) + 1$$

$$f(x) = 0 \implies x_0 = - (1 - e^{-3})^{\frac{1}{3}} \approx -0,983121$$

$$\text{Definitionsmenge: } x^3 + 1 > 0 \implies D_f =] - 1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 0 \implies x_1 = 0$$

In ganz D_f gilt $f'(x) \geq 0$, f ist also in ganz D_f monoton steigend. Also Terrassenpunkt bei T (0|1).

$$f''(x) = \frac{2x(x^3 + 1) - x^2 \cdot 3x^2}{(x^3 + 1)^2} = \frac{x(2 - x^3)}{(x^3 + 1)^2}$$

$$f''(x) = 0 \text{ für } x_{21} = 0 \text{ und } x_{22} = \sqrt[3]{2}.$$

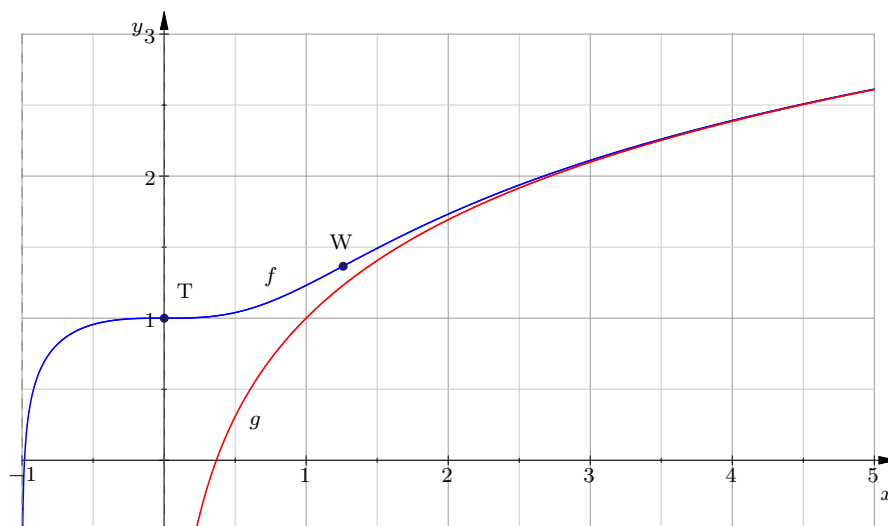
	$-1 < x < x_{21}$	$x_{21} < x < x_{22}$	$x_{22} < x$
x	-	+	+
$2 - x^3$	+	+	-
$f''(x)$	-	+	-

Also VZW von f'' bei x_{21} und x_{22} , d.h. Wendepunkte bei T (0|1) und W ($\sqrt[3]{2}$ | $\frac{1}{3} \ln 3 + 1$).

(b)

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{1}{3} \ln(x^3 + 1) - \ln x = \frac{1}{3} \ln(x^3 + 1) - \frac{1}{3} \ln x^3 = \\ &= \frac{1}{3} \ln \frac{x^3 + 1}{x^3} = \frac{1}{3} \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - g(x)| = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) = \frac{1}{3} \cdot \ln 1 = 0$$



2.6 Kurvendiskussion

$$(c) \quad |f(x) - g(x)| = \frac{1}{3} \ln \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) < \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{x^3} < e^{0,03} - 1$$

$$x > \frac{1}{\sqrt[3]{e^{0,03} - 1}} \approx 3,2$$

4. Die beiden Funktionen f und g mit

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \quad \text{und} \quad g(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x f(t) dt, \quad D_f = D_g = \mathbb{R}^+$$

schließen ein endliches Flächenstück mit dem Inhalt A ein. Diskutiere die beiden Funktionen, zeichne ihre Grafen und berechne A .

Lösung: Diskussion von f :

$$\text{Nullstelle: } x_{f0} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} - 2 \right) = (0^+ \cdot (-1)) = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} - 2 \right) = ((+\infty) \cdot (+\infty)) = +\infty$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^2} = \frac{2x-2}{x^3}, \quad f'(x) = 0 \implies x_{f1} = 1$$

$$f''(x) = \frac{6}{x^4} - \frac{4}{x^3} = \frac{6-4x}{x^4}, \quad f''(x) = 0 \implies x_{f2} = \frac{3}{2}$$

$$f''(x_{f1}) = 2 > 0 \implies \text{Tiefpunkt bei } (1 \mid -1).$$

$$f'''(x) = -\frac{24}{x^5} + \frac{12}{4^3} = \frac{12x-24}{x^5}$$

$$f'''(x_{f2}) = -\frac{64}{81} \neq 0 \implies \text{WP bei } \left(\frac{3}{2} \mid -\frac{8}{9} \right)$$

$$g(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x \left(\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} \right) dt = \left[-\frac{1}{t} - 2 \ln t \right]_{\frac{1}{2}}^x = -\frac{1}{x} - 2 \ln x + 2 + 2 \ln \frac{1}{2}$$

$$g(x) = 2(1 - \ln 2) - \frac{1}{x} - 2 \ln x$$

Diskussion von g :

$$\text{Untere Grenze der Integralfunktion ist Nullstelle: } x_{g0} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^-$$

2.6 Kurvendiskussion

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[2(1 - \ln 2) - \frac{1}{x} \left(1 + 2 \underbrace{x \ln x}_{\rightarrow 0} \right) \right] = \left(2(1 - \ln 2) - \frac{1}{0^+} \right) = -\infty$$

$$g'(x) = f(x) \implies x_{1g} = x_{f0} = \frac{1}{2}$$

$$g''(x_{1g}) = f'(x_{1g}) = -8 < 0 \implies$$

HP bei $(\frac{1}{2} | 0)$

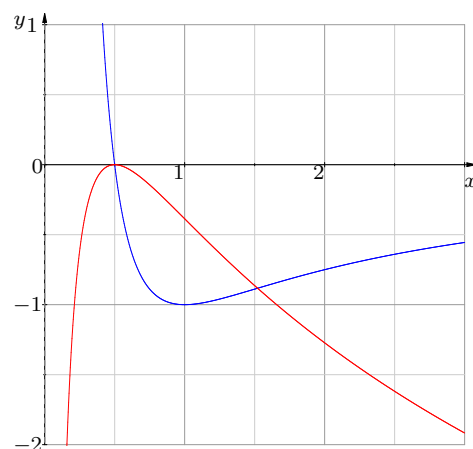
$$g''(x) = 0 \implies x_{g2} = x_{f1} = 1$$

$$g'''(x_{g2}) = f''(1) = 2 \neq 0 \implies$$

WP bei $(1 | 1 - 2 \ln 2) \approx (1 | -0,39)$

$$f(x) = g(x) \implies$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = 2(1 - \ln 2) - \frac{1}{x} - 2 \ln x$$



Der erste Schnittpunkt ist die Nullstelle beider Funktionen: $x_1 = \frac{1}{2}$.

Zweite Nullstelle mit dem Newton-Verfahren:

$$h(x) = g(x) - f(x) = 2(1 - \ln 2) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 2 \ln x = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} = x_n - \frac{2(1 - \ln 2) + \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n^2} - 2 \ln x_n}{-\frac{1}{x_n^2} + \frac{2}{x_n^3} - \frac{2}{x_n}}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n [3 - 2x_n + 2x_n^2(-2 + \ln 2x_n)]}{2 - x_n - 2x_n^2}$$

$$X_1 = 1,5$$

$$X_2 = 1,521091763$$

$$X_3 = 1,521148687$$

$$X_4 = 1,521148688 = x_2$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_1}^{x_2} (g(x) - f(x)) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(2(1 - \ln 2) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 2 \ln x \right) dx = \\ &= \left[2(1 - \ln 2)x + \ln x + \frac{1}{x} - 2x(\ln x - 1) \right]_{\frac{1}{2}}^{x_2} = \\ &= 2(1 - \ln 2)x_2 + \ln x_2 + \frac{1}{x_2} - 2x_2(\ln x_2 - 1) - 4 + \ln 2 = 0,4697 \end{aligned}$$

5. Wir betrachten die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x, \quad D = \mathbb{R}^+$$

- (a) Berechne $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ darf für das Weitere vorausgesetzt werden.
 (b) Untersuche f auf Extremwerte und Wendepunkte und zeichne den Graphen von f im x -Intervall $]0; 5]$ (Einheit 2 cm).
 (c) Eine weitere Funktion ist g mit

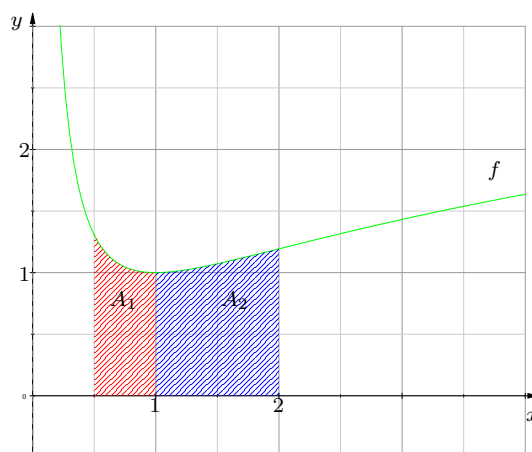
$$g(x) = \int_1^x f(t) dt$$

Schreibe $g(x)$ in einer integralfreien Darstellung. Welche Nullstelle hat g ?

- (d) A_1 ist der Inhalt der Fläche, die von G_f , der x -Achse und den Geraden $x = \frac{1}{2}$ und $x = 1$ eingeschlossen wird, A_2 dagegen wird von G_f , der x -Achse und den Geraden $x = 1$ und $x = 2$ eingeschlossen. Berechne A_1 und A_2 mit Hilfe der Funktion g und berechne exakt das Verhältnis der beiden Flächeninhalte.

Lösung: (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = (0 + \infty) = +\infty$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad f'(x) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2} \\ f'(x) = 0 &\implies x_1 = 1 \\ f''(x) &= \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{2-x}{x^3} \\ f''(x) = 0 &\implies x_2 = 2 \\ f''(1) &= 1 > 0 \implies \text{TP bei } (1|1) \\ f'''(x) &= -\frac{6}{x^4} + \frac{2}{x^3} = \frac{2x-6}{x^4} \\ f'''(2) &= -\frac{1}{8} \neq 0 \implies \\ \text{WP bei } (2|\frac{1}{2} + \ln 2) &\approx (2|1,19) \end{aligned}$$



$$\text{(c)} \quad g(x) = \int_1^x \left(\frac{1}{t} + \ln t \right) dt = [\ln t + t(\ln t - 1)]_1^x = \ln x + x(\ln x - 1) - \ln 1 - 1 \cdot (\ln 1 - 1)$$

$$g(x) = 1 - x + (1 + x) \ln x \quad \text{mit} \quad g(1) = 0$$

$$\text{(d)} \quad A_1 = \left| g\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \ln \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \ln 2 \right| = \frac{\ln 8 - 1}{2} \approx 0,53972$$

$$A_2 = g(2) = -1 + 3 \ln 2 = \ln 8 - 1 = 2A_1 \implies \frac{A_2}{A_1} = 2$$

6. Wir betrachten die Funktion f mit

$$f(x) = xe^{-x}, \quad D = \mathbb{R}$$

- (a) Berechne die Nullstelle von f und untersuche das Verhalten von f an den Rändern von D .
- (b) Untersuche f auf Extremwerte und Wendepunkte und zeichne den Grafen von f im x -Intervall $] -1; 5]$ (Einheit 2 cm).
 [Nur zur Kontrolle: $f'(x) = (1-x)e^{-x}$, $f''(x) = (x-2)e^{-x}$]
- (c) Eine weitere Funktion ist g mit

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Beweise:

$$g(x) = 1 - (x+1)e^{-x}$$

Welche Nullstelle hat g ?

- (d) Verwende bereits vorhandene Ergebnisse, um die Extremwerte und Wendepunkte von g zu bestimmen. Zeichne den Grafen von g im x -Intervall $] -1; 5]$ (Einheit 2 cm).
- (e) Berechne $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. Interpretiere das Ergebnis geometrisch, einmal bezüglich des Grafen von f und einmal bezüglich des Grafen von g .

Lösung: (a) $xf_0 = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (-\infty \cdot \infty) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = 0^+$$

(b) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$

$$f'(x) = 0 \implies x_{f1} = 1$$

$$f''(x) = -2e^{-x} + xe^{-x} = (x-2)e^{-x}$$

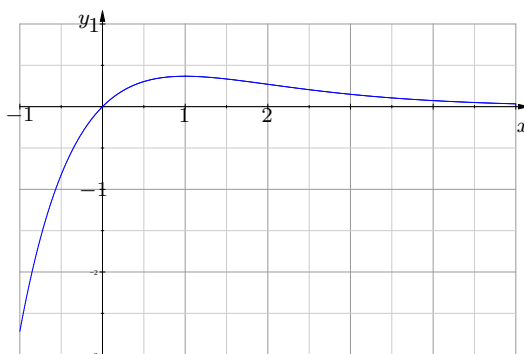
$$f''(x) = 0 \implies x_{f2} = 2$$

$$f''(1) = -\frac{1}{e} < 0 \implies \text{HP bei } \left(1 \mid \frac{1}{e}\right)$$

$$f'''(x) = 3e^{-x} - xe^{-x} = (3-x)e^{-x}$$

$$f'''(2) = \frac{1}{e} \neq 0 \implies$$

$$\text{WP bei } \left(2 \mid \frac{2}{e^2}\right) \approx (2 \mid 0,27)$$



2.6 Kurvendiskussion

(c) Zu zeigen ist $g'(x) = f(x)$ und $g(0) = 0$ (Untergrenze).

$$g'(x) = -e^{-x} - (x+1)(-e^{-x}) = -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} = xe^{-x} = f(x)$$

$$g(0) = 1 - (0+1)e^0 = 1 - 1 = 0$$

$$(d) \quad g'(x) = f(x) \implies x_{g1} = x_{f0} = 0$$

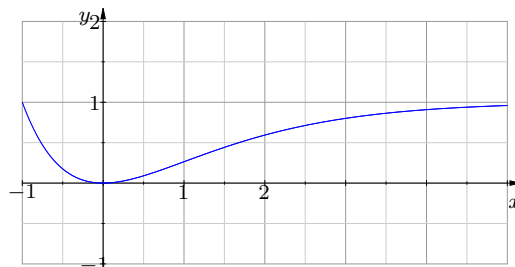
$$g''(x) = f'(x) \implies x_{g2} = x_{f1} = 1$$

$$g''(0) = f'(0) = 1 > 0 \implies$$

TP bei $(0|0)$

$$g'''(1) = f''(1) = -\frac{1}{e} \neq 0 \implies$$

WP bei $(1|\frac{1}{e})$



$$(e) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{e^x} = 1 - 0 = 1$$

Die Fläche zwischen G_f und der x -Achse im Intervall $[0, +\infty[$ ist 1.

G_g hat die waagrechte Asymptote $y = 1$.

7. Untersuche die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{2}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Nullstellen, Verhalten an den Rändern von D_f , Monotonie, Extremwerte und Wendepunkte. Zeichne den Grafen von f im Intervall $[-2; 4,5]$.

Für welche x -Werte gilt $f(x) = -2$?

$$\text{Lösung: } f(x) = \frac{x^3}{8} \cdot (x-4) = 0 \implies x_{01} = 0, \quad x_{02} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3}{8} \cdot (x-4) \right] = ((-\infty) \cdot (-\infty)) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{8} \cdot (x-4) \right] = ((+\infty) \cdot (+\infty)) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \cdot (x-3), \quad f''(x) = \frac{3x^2}{2} - 3x = \frac{3x}{2} \cdot (x-2)$$

$$f'(x) = 0 \implies x_{11} = 0, \quad x_{12} = 3, \quad f''(x) = 0 \implies x_{21} = 0, \quad x_{22} = 2$$

$$f'(x) > 0 \text{ für } x > 3 \text{ und } f'(x) \leq 0 \text{ für } x \leq 3 \implies$$

f streng fallend in $] -\infty; 3[$ und f streng steigend in $]3; +\infty[$.

$$f'(x_{12}) = 0 \text{ und } f''(x_{12}) = \frac{9}{2} > 0 \implies \text{Tiefpunkt bei T } (3|\frac{27}{8})$$

$$f'''(x) = 3x - 3 = 3(x-1)$$

$$f'(x_{11}) = 0 \text{ und } f''(x_{11}) = 0 \text{ und } f'''(x_{11}) = -3 \neq 0 \implies \text{Terrassenpunkt bei F } (0|0)$$

2.6 Kurvendiskussion

$f''(x_{22}) = 0$ und $f'''(x_{22}) = 3 \neq 0 \implies$ Wendepunkt bei W (2 | -2)

$f(x) = -2 \implies g(x) = x^4 - 4x^3 + 16 = 0$, eine Lösung ist $X_1 = 2$, die zweite Lösung findet man mit dem Newtonverfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - 4x_n^3 + 16}{4x_n^3 - 12x_n^2}$$

$$x_0 = 3,5$$

$$x_1 = 3,721938776$$

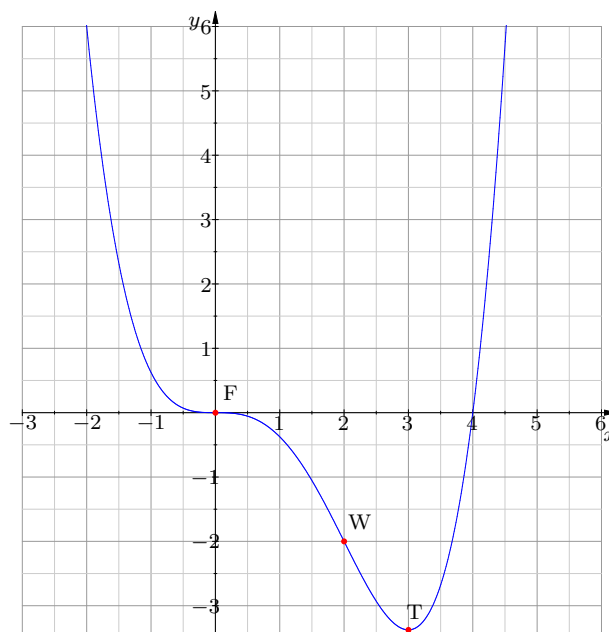
$$x_2 = 3,680359091$$

$$x_3 = 3,678576718$$

$$x_4 = 3,678573510$$

$$x_5 = 3,678573510$$

$$X_2 \approx 3,678573510$$



8. Untersuche die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2, \quad D_f = \mathbb{R}$$

auf Symmetrie, Nullstellen, Verhalten an den Rändern von D_f , Extremwerte und Wendepunkte. Zeichne den Grafen von f im Intervall $[-3; 3]$.

Für welche x -Werte gilt $f(x) = -2$?

Lösung: $f(-x) = f(x) \implies f$ symmetrisch zur y -Achse

$$f(x) = \frac{x^2}{4} \cdot (x^2 - 8) = 0 \implies x_{01} = 0, \quad x_{02} = -2\sqrt{2}, \quad x_{03} = 2\sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^2}{4} \cdot (x^2 - 8) \right] = ((+\infty) \cdot (+\infty)) = +\infty$$

2.6 Kurvendiskussion

$$f'(x) = x^3 - 4x = x \cdot (x^2 - 4), \quad f''(x) = 3x^2 - 4, \quad f'''(x) = 6x$$

$$f'(x) = 0 \implies x_{11} = 0, \quad x_{12} = -2, \quad x_{13} = 2$$

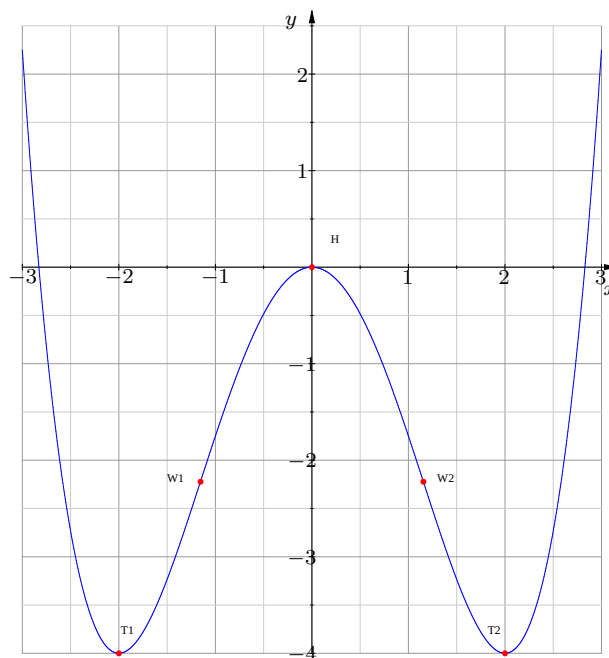
$$f''(x) = 0 \implies x_{21} = 0, \quad x_{22} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}, \quad x_{23} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$f'(x_{11}) = 0 \text{ und } f''(x_{11}) = -4 < 0 \implies \text{Hochpunkt bei } H(0|0)$$

$$f'(x_{13}) = 0 \text{ und } f''(x_{13}) = 8 > 0 \implies \text{Tiefpunkte bei } T_{1,2}(\pm 2 | -4)$$

$$f''(x_{22}) = 0 \text{ und } f'''(x_{22}) = 4\sqrt{3} \neq 0 \implies \text{Wendepunkte bei } W_{1,2}(\pm \frac{2}{3}\sqrt{3} | -\frac{20}{3})$$

$$f(x) = -2 \implies x^4 - 8x^2 = -2 \text{ hat die vier Lösungen } x = \pm\sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}}.$$



9. Untersuche die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 2x + 1, \quad D_f = \mathbb{R}$$

auf Nullstellen, Verhalten an den Rändern von D_f , Monotonie, Extremwerte und Wendepunkte. Zeichne den Graphen von f im Intervall $[-1; 6]$.

Lösung: $f(x) = 0 \implies x_{01} = 2$ (durch Probieren)

$$f(x) : (x - 2) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{2} \implies x_{02,3} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{33}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3}{4} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right)}_{\rightarrow 1} \right] = \pm\infty$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + 2, \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}, \quad f'''(x) = \frac{3}{2}$$

2.6 Kurvendiskussion

$$f'(x) = 0 \implies x_{11} = \frac{2}{3}, \quad x_{12} = 4, \quad f''(x) = 0 \implies x_{21} = \frac{7}{3}$$

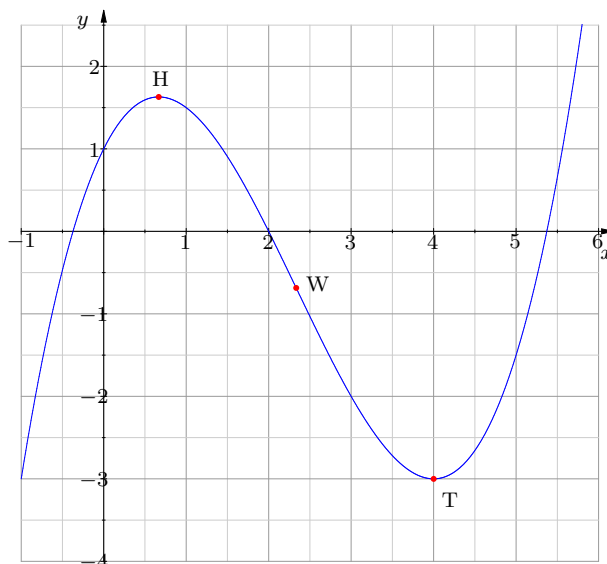
Da der Graf von f' eine nach oben geöffnete Parabel ist, folgt $f'(x) > 0$ für $x < \frac{2}{3}$ und $x > 4$, $f'(x) < 0$ für $\frac{2}{3} < x < 4 \implies$

f streng steigend in $\left]-\infty; \frac{2}{3}\right[$ und $]4; +\infty[$, f streng fallend in $\left]\frac{2}{3}; 4\right[$.

$$f'(x_{11}) = 0 \text{ und } f''(x_{11}) = -\frac{5}{2} < 0 \implies \text{Hochpunkt bei } H\left(\frac{2}{3} \mid \frac{44}{27}\right)$$

$$f'(x_{12}) = 0 \text{ und } f''(x_{12}) = \frac{5}{2} > 0 \implies \text{Tiefpunkt bei } T(4 \mid -3)$$

$$f''(x_{21}) = 0 \text{ und } f'''(x_{21}) = \frac{3}{2} \neq 0 \implies \text{Wendepunkt bei } W\left(\frac{7}{3} \mid -\frac{37}{54}\right)$$



10. Untersuche die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^2}{e^{x-1}}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

auf Symmetrie, Nullstellen, Verhalten an den Rändern von D_f , Monotonie, Extremwerte und Terrassenpunkte. Zeichne den Grafen von f im Intervall $[-1; 6]$.

Lösung: Einzige Nullstelle bei $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \left(\frac{\infty}{0^+}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^{x-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^{x-1}} = 0^+$$

2.6 Kurvendiskussion

$$f(x) = x^2 \cdot e^{1-x}$$

$$f'(x) = 2xe^{1-x} - x^2e^{1-x} = x(2-x)e^{1-x}$$

$$f''(x) = 2e^{1-x} - 2xe^{1-x} - 2xe^{1-x} + x^2e^{1-x} = (2-4x+x^2)e^{1-x}$$

$$f'''(x) = -2e^{1-x} - 4e^{1-x} + 4xe^{1-x} + 2xe^{1-x} - x^2e^{1-x} = (-x^2 + 6x - 6)e^{1-x}$$

$$f'(x) = 0 \implies x_{11} = 0, \quad x_{12} = 2, \quad f''(x) = 0 \implies x_{21} = 2 - \sqrt{2}, \quad x_{22} = 2 + \sqrt{2}$$

Da der Graf von $x(2-x)$ eine nach unten geöffnete Parabel ist, folgt

$$f'(x) < 0 \text{ für } x < 0 \text{ und } x > 2, \quad f'(x) > 0 \text{ für } 0 < x < 2 \implies$$

f streng fallend in $] -\infty; 0[$ und $]2; +\infty[$, f streng steigend in $]0; 2[$.

$$f'(x_{11}) = 0 \text{ und } f''(x_{11}) = 2e > 0 \implies \text{Tiefpunkt bei T } (0|0)$$

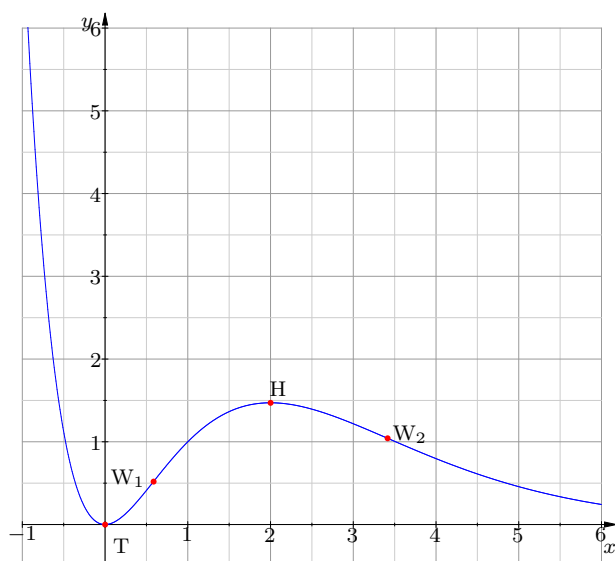
$$f'(x_{12}) = 0 \text{ und } f''(x_{12}) = -2e^{-1} < 0 \implies \text{Hochpunkt bei H } \left(2 \middle| \frac{4}{e}\right)$$

Da der Graf von $2-4x+x^2$ eine Parabel ist, liegt bei den Nullstellen von f'' ein Vorzeichenwechsel vor, d.h. Wendepunkte bei

$$W_1 \left(\underbrace{2-\sqrt{2}}_{0,59} \middle| \underbrace{(2-\sqrt{2})^2 e^{-1+\sqrt{2}}}_{0,52} \right) \quad \text{und} \quad W_2 \left(\underbrace{2+\sqrt{2}}_{3,41} \middle| \underbrace{(2+\sqrt{2})^2 e^{-1-\sqrt{2}}}_{1,04} \right)$$

Alternativ über dritte Ableitung:

$$f'''(x_{21}) = -2\sqrt{2}e^{-1+\sqrt{2}} \neq 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_{22}) = 2\sqrt{2}e^{-1-\sqrt{2}} \neq 0$$



11. Untersuche die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{20 \ln x}{x^2}, \quad D_f = \mathbb{R}^+$$

2.6 Kurvendiskussion

auf Nullstellen, Verhalten an den Rändern von D_f , Monotonie, Extremwerte und Wendepunkte. Zeichne die Grafen von f , f' und f'' im Intervall $[0,9;6]$ in ein Diagramm. Veranschauliche die Zusammenhänge zwischen den Nullstellen der Ableitungsfunktionen und den besonderen Stellen im Grafen von f .

Lösung: Einzige Nullstelle bei $x_0 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \left(\frac{-\infty}{0^+} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{20}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10}{x^2} = 0^+$$

$$f'(x) = \frac{20(1 - 2 \ln x)}{x^3}, \quad f''(x) = \frac{20(-5 + 6 \ln x)}{x^4}, \quad f'''(x) = \frac{40(13 - 12 \ln x)}{x^5}$$

$$f'(x) = 0 \implies x_0 = \sqrt{e}, \quad f'(x) > 0 \implies x < \sqrt{e} \implies$$

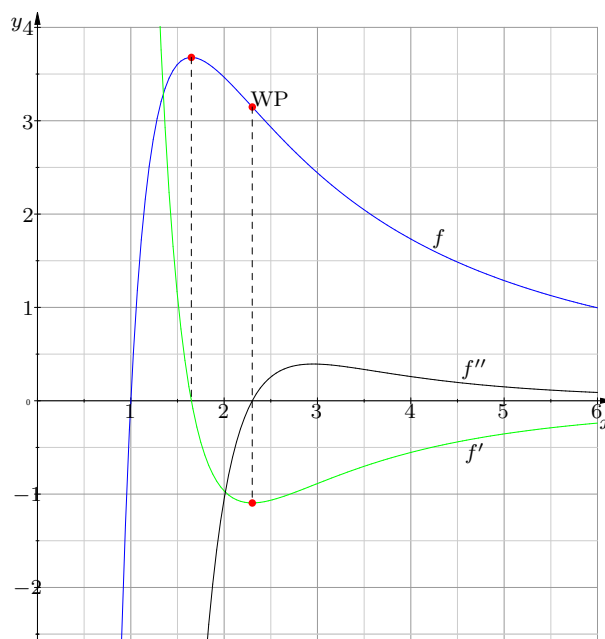
$$f \text{ streng steigend in }]0; \sqrt{e}[\text{ und } f \text{ streng fallend in }]\sqrt{e}; +\infty[\implies$$

$$\text{Hochpunkt bei } H \left(\sqrt{e} \left| \frac{10}{e} \right. \right) \approx H(1,65 | 3,68)$$

$$f''(x) = 0 \implies x_0 = e^{\frac{5}{6}}, \quad f''(x) > 0 \implies x > e^{\frac{5}{6}} \implies$$

$$f \text{ rechtsgekrümmt in }]0; e^{\frac{5}{6}}[\text{ und } f \text{ linksgekrümmt in }]e^{\frac{5}{6}}; +\infty[\implies$$

$$\text{Wendepunkt bei } W \left(e^{\frac{5}{6}} \left| \frac{50}{3} e^{-\frac{5}{3}} \right. \right) \approx W(2,30 | 3,15)$$



12. Untersuche die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 3}$$

auf maximale Definitionsmenge, Nullstellen, Verhalten an den Rändern von D_f , Extremwerte und Wendepunkte. Zeichne den Grafen von f und eventuelle Asymptoten im Intervall $[-1; 7]$.

Lösung: $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 3} = \frac{(x - 2)^2}{x - 3}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}, \quad \text{Nullstelle bei } x_0 = 2$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - 4 + \frac{x}{4}}{1 - \frac{3}{x}} = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow 3^\pm} f(x) = \left(\frac{1}{0^\pm} \right) = \pm\infty$$

Polynomdivision $\Rightarrow f(x) = x - 1 + \frac{1}{x - 3} \Rightarrow$ Asymptote: $a : x \rightarrow x - 1$

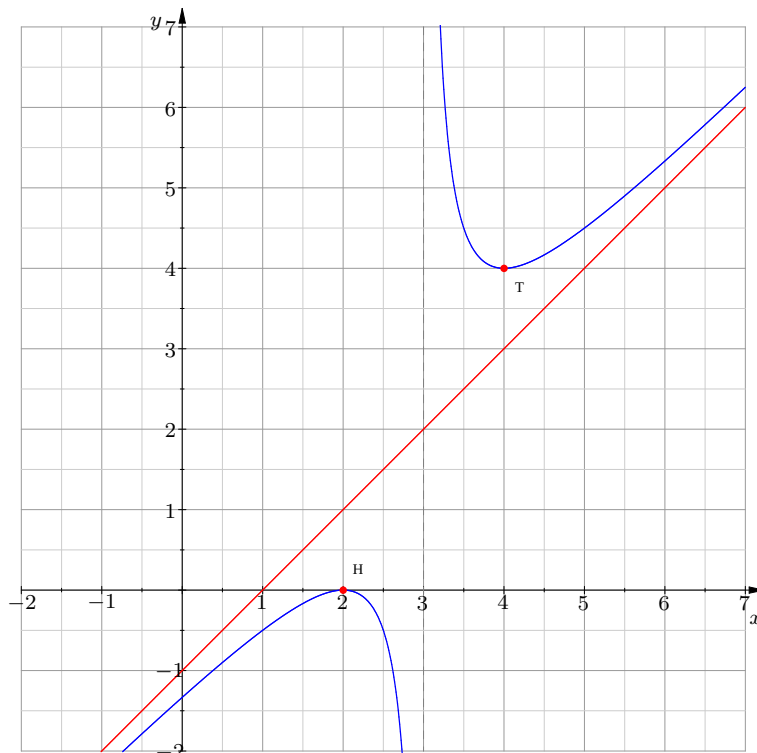
$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 3)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(x - 3)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_{11} = 2, \quad x_{12} = 4$$

$$f''(x_{11}) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } H(2|0)$$

$$f''(x_{12}) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } T(4|4)$$

Keine Nullstellen von f'' , keine Wendepunkte.



13. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{16}(x^4 - 10x^2 + 9).$$

- (a) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion auf Symmetrie.
- (b) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $(-3 | ?)$. Zeichnen sie die Tangente in ein Koordinatensystem mit $x \in [-5; 5]$ und $y \in [-3; 6]$ ein.
- (c) Unter welchem Winkel schneidet die Tangente im Punkt $(\frac{3}{2} | ?)$ die x-Achse?
- (d) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.
- (e) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion. Wo liegen Extrema und Terrassenpunkte?
- (f) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion im Intervall $[-4; 4]$ in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe (b).

Lösung: (a) $f(x) = f(-x)$, also achsensymmetrisch.

(b) $t(x) = -3x - 9$

(c) $\alpha = 45,9^\circ$

(d) $N_1(-3|0), N_2(-1|0), N_3(1|0), N_4(3|0)$

(e) Maximum bei $P(0|\frac{9}{16})$, Minima bei $Q(-\sqrt{5}|-1)$ und bei $R(\sqrt{5}|-1)$

14. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x(x - 3)^2$.

- (a) Untersuchen Sie die Funktion auf Symmetrie.
- (b) Bestimmen Sie die Lage der Extrema und Wendepunkte.
- (c) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten.
- (d) Skizzieren Sie die Funktion.

Lösung: (a) keine Symmetrie

(b) Minimum bei $(3|0)$, Maximum bei $(1|4)$, Wendepunkt bei $(2|2)$

15. Gegeben ist die Funktion $g(x) = \frac{1}{20}(x^4 - 24x^2 + 80)$.

- (a) Untersuchen Sie die Funktion auf Symmetrie- und Monotonieverhalten.
- (b) Bestimmen Sie die Lage der Nullstellen.
- (c) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten.
Geben Sie die Lage der Extrema und Wendepunkte an.
- (d) Skizzieren Sie die Funktion.

Lösung: (a) achsensymmetrisch

2.6 Kurvendiskussion

- (b) $N_1(2|0)$, $N_2(-2|0)$, $N_3(\sqrt{20}|0)$, $N_4(-\sqrt{20}|0)$
 (c) Maximum bei $(0|4)$, Minima bei $(\pm\sqrt{12}| -3\frac{1}{5})$

16. Gegeben sind die Funktionen $f_+(x) = tx + \sqrt{25 - x^2}$ und $f_-(x) = tx - \sqrt{25 - x^2}$.
- Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktionen an.
 - Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktionen f_+ und f_- .
 - Zeigen Sie, dass zu jedem Punkt $(x_+|y_+)$ auf dem Graphen von f_+ eine dazu punktsymmetrischen Punkt $(x_-|y_-)$ auf dem Graphen von f_- gibt.
 - Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f_+ und f_- und bestimmen sie Art und Lage der Extrema.
 - Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Funktionen.
 - Zeichnen Sie $f_+(x)$ und $f_-(x)$ für $t = 2$.
 - Stellen Sie mit einer geeigneten Software $f_+(x)$ und $f_-(x)$ für verschiedene Werte von t graphisch dar.

Lösung: (a) $D_{\pm} = [-5, 5]$
 (b) $f_+ : (-\frac{5}{\sqrt{1+t^2}}|0)$, $f_- : (\frac{5}{\sqrt{1+t^2}}|0)$
 (c) $f_-(x) = -f_+(x)$
 (d) f_+ : Maximum bei $(\frac{5t}{\sqrt{1+t^2}}|5\sqrt{1+t^2})$
 f_- : Minimum bei $(-\frac{5t}{\sqrt{1+t^2}}|-5\sqrt{1+t^2})$
 senkrechte Tangenten bei $x = \pm 5$
 (e) $f_+''(x) < 0$, also f_+ immer rechtsgekrümmt.
 $f_-''(x) > 0$, also f_- immer linksgekrümmt.

17. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin 2x - \cos x$ mit $D_f = [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$.
 Berechnen Sie die Nullstellen und die Punkte mit waagrechter Tangente. Zeichnen Sie G_f .

Lösung: Nullstellen: $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$
 $f'(x) = 2 \cos 2x + \sin x = -4 \sin^2 x + \sin x + 2 = 0 \implies$
 $\sin x = \frac{1}{8} \pm \frac{\sqrt{33}}{8}$
 Waagrechte Tangenten bei $-0,202\pi, 0,319\pi, 0,681\pi$ und $1,202\pi$.

18. Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$ mit $a > 0$ und $D = \mathbb{R}$.
- Geben Sie die Nullstellen der Funktion an.
 Für welche Werte a erhält man drei, zwei bzw. eine Nullstelle?

2.6 Kurvendiskussion

- (b) Berechnen Sie die x-Koordinaten der Punkte mit waagrechten Tangenten.
Für welche Werte a erhält man zwei, einen bzw. keinen Punkt mit waagrechter Tangente?
- (c) Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.
- (d) Berechnen Sie die Ortskurve der Wendepunkte für festes b und variables a .
- (e) Geben Sie für $a = \frac{3}{4}$ und $b = 2$ die Funktionsgleichung, Lage der Extrema und Wendepunkte an.
- (f) Zeichnen Sie die Funktion mit den Parameterwerten aus (e).

- Lösung:*
- (a) $x_1 = 0, x_{2/3} = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4a})$,
eine Nullstelle, wenn $x_{2/3}$ nicht existiert, also wenn $a > \frac{1}{4}b^2$
zwei Nullstellen, wenn $x_2 = x_3$, also wenn $a = \frac{1}{4}b^2$
drei Nullstellen, wenn x_2 und x_3 existieren und verschieden sind, also wenn $a < \frac{1}{4}b^2$
 - (b) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{4/5} = \frac{1}{3a}(-b \pm \sqrt{b^2 - 3a})$
keine waagrechte Tangente, wenn $x_{4/5}$ nicht existieren, also wenn $a > \frac{1}{3}b^2$
eine waagrechte Tangente, wenn $x_4 = x_5$, also wenn $a = \frac{1}{3}b^2$
zwei waagrechte Tangenten, wenn x_4 und x_5 existieren und verschieden sind, also wenn $a < \frac{1}{3}b^2$
 - (c) $x_W = -\frac{b}{3a}, y_W = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{b}{3a}$
 - (d) $y_w = \frac{2}{3}bx_w^2 + x_w$
 - (e) $f(x) = \frac{3}{4}x^3 + 2x^2 + x, N_1(0|0), N_2(-2|0), N_3(-\frac{2}{3}|0),$
 $E_1(-0,30|-0,14), E_2(-1,48|0,47), W_1(-0,89|0,16)$
 - (f)

19. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^5 - 5x^4 + 1$.

- (a) Diskutieren Sie qualitativ, wie der Graph von $f(x)$ aussieht.
- (b) Bestimmen Sie Extrema und Wendepunkte der Funktion.
- (c) Skizzieren Sie den Graph der Funktion.
- (d) Bei Polynomen fünften Grades können die Nullstellen nicht mehr analytisch bestimmt werden. Ein Verfahren zur numerischen Nullstellenbestimmung ist das Newton-Verfahren:

An den Graphen der Funktion wird in einem Punkt $(x_i|y_i)$, in der Nähe einer Nullstelle, eine Tangente gelegt. Deren Schnittpunkt mit der x-Achse liefert x_{i+1} . Zu diesem x -Wert wird der zugehörige Funktionswert y_{i+1} berechnet. Nun beginnt das Verfahren erneut. Die Folge $x_1, x_2, x_3 \dots$ konvergiert gegen die Nullstelle, wenn $|f'' \cdot f / f'^2| < 1$ ist.

Machen Sie sich dieses Verfahren der Nullstellenbestimmung anhand einer Skizze klar.

2.6 Kurvendiskussion

- (e) Zeichnen Sie den Graph der Funktion im Intervall $[0,1]$ (Maßstab für x -Richtung: $1 \hat{=} 10\text{cm}$) und bestimmen Sie in diesem Intervall graphisch die Nullstelle.
- (f) Leiten Sie eine Formel zur numerischen Iteration der Nullstelle her.
- (g) Wenden Sie die Formel auf obige Funktion an. Starten Sie bei $x_1 = 1$ und rechnen Sie bis $i=6$.

Lösung: (a) Für x gegen minus (plus) unendlich geht der Graph von $f(x)$ gegen minus (plus) unendlich. Der Graph kann kein, zwei oder vier Extrema haben. Der Graph kann einen, zwei oder drei Wendepunkte haben.

- (b) $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 = 5x^3(x - 4)$, $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x - 3) \Rightarrow$
Maximum bei $H(0|1)$, Minimum bei $T(4| - 255)$, Wendepunkt bei $W(3| - 161)$

(c)

(d)

(e)

- (f) $t_{x_i}(x) = f'(x_i)(x - x_i) + f(x_i) = 0 \Rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{y_i}{f'(x_i)}$

- (g) $x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^5 - 5x_i^4 + 1}{5x_i^4 - 20x_i^3} \Rightarrow$
 $x_1 = 1, x_2 = 0,8, x_3 = 0,712070..., x_4 = 0,694818...,$
 $x_5 = 0,694204, x_6 = 0,6942032$

20. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{1}{8} \cdot x^3 - \frac{3}{2} \cdot x - 2$ mit der Nullstelle $x_{01} = -2$.

- (a) Berechnen Sie die restlichen Nullstellen von f und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f . Schreiben Sie die vollständige Zerlegung von f in Linearfaktoren hin.
- (b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f und berechnen Sie die Koordinaten der relativen Extremwerte.
- (c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von f und berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.
- (d) Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[-4; 5]$.

Lösung: (a) $f(x) = \frac{1}{8}(x+2)^2(x-4)$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

- (b) $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2} = \frac{3}{8}(x^2 - 4)$

f steigend in $] -\infty; -2[$ und in $] 2; +\infty[$, fallend in $] -2; 2[$.

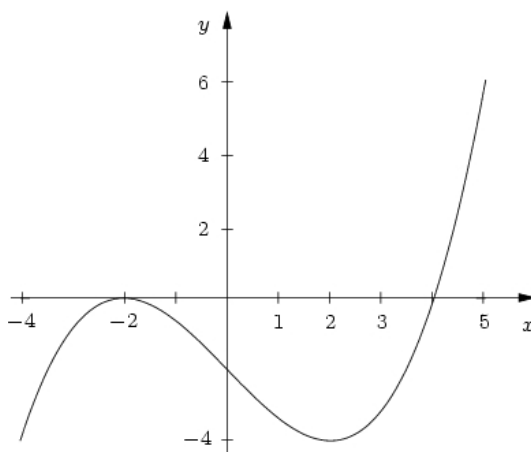
Relatives Maximum bei $(-2|0)$, relatives Minimum bei $(2| - 4)$

- (c) $f''(x) = \frac{3}{4}x$. Rechtsgekrümmt in $] -\infty; 0[$, linksgekrümmt in $] 0; +\infty[$

Wendepunkt: $(0| - 2)$

(d)

2.6 Kurvendiskussion



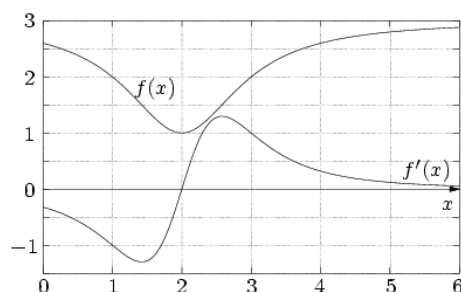
21. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x + 5} + 2$$

- Berechnen Sie $f'(x)$ und die Koordinaten des Punktes mit waagrechter Tangente.
- Zeichnen Sie die Graphen von f und f' im x -Intervall $[0; 6]$ in ein Koordinatensystem (Einheit auf der x -Achse 1 cm, auf der y -Achse 2 cm). Wertetabelle!
- Beweisen Sie durch Rechnung, dass der Graph von f achsensymmetrisch ist. Die Achse ist der Zeichnung zu entnehmen!

Lösung:

- $f'(x) = \frac{4(x-2)}{(x^2 - 4x + 5)^2}$
waagrechte Tangente bei $(2 | 1)$.
- $f(2-h) = \frac{1+3h^2}{1+h^2} = f(2+h)$



22. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 11}{x^2 + 4x + 5}$$

- Berechnen Sie $f'(x)$ und die Koordinaten der Punkte mit waagrechter Tangente.
- Erstellen Sie eine Wertetabelle und zeichnen Sie die Graphen von f und f' im Intervall $[-5; 1]$ (Einheit auf der x -Achse 1 cm, auf der y -Achse 2 cm).

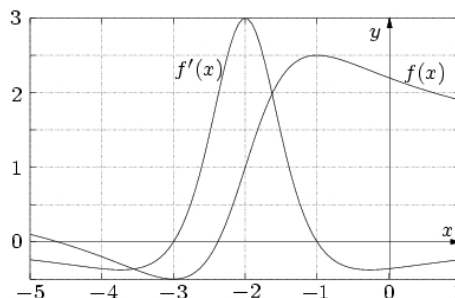
- (c) Beweisen Sie durch Rechnung, dass der Graph von f punktsymmetrisch ist. Das Zentrum $Z(z_1|z_2)$ ist der Zeichnung zu entnehmen.

Lösung:

$$(a) f'(x) = \frac{-3(x^2 + 4x + 3)}{(x^2 + 4x + 5)^2}$$

waagrechte Tangenten bei $(-3|-0,5)$ und $(-1|2,5)$.

$$(c) 1 - f(-2 - h) = \frac{3h}{1 + h^2} = f(-2 + h) - 1$$



23. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{(1-x)^2}{1+x^2}$$

- (a) Wie lautet die maximale Definitionsmenge von f ? Untersuchen Sie f auf Nullstellen. Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.
- (b) Zeigen Sie, dass der Graph von f zum Punkt $Z(0|1)$ symmetrisch ist.
- (c) Berechnen Sie die Ableitung von f und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Suchen Sie die Koordinaten der Punkte mit waagrechter Tangente.
- (d) Zeichnen Sie den Graphen von f im x -Intervall $[-4, 4]$. Verwenden Sie auf der x -Achse die Einheit 1 cm und auf der y -Achse die Einheit 2 cm.
- (e) Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses von Teilaufgabe (c) die Ableitung der Funktion g mit der Gleichung $g(x) = \sqrt{f(x)}$ und vereinfachen Sie das Ergebnis.
- (f) Untersuchen Sie das Verhalten von g' in der Umgebung von $x = 1$ und zeichnen Sie den Graphen von g in das schon vorhandene Koordinatensystem ein.

Lösung: (a) $D_f = \mathbb{R}$, Nullstelle: $x_0 = 1$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1^\mp$

$$\begin{aligned} (b) \quad G_f \text{ symmetrisch zu } Z &\iff f(-h) - 1 = 1 - f(h) \\ &\iff f(h) + f(-h) = 2 \\ &\iff \frac{(1-h)^2}{1+h^2} + \frac{(1+h)^2}{1+h^2} = 2 \\ &\iff 2 = 2 \end{aligned}$$

$$(c) f'(x) = -\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

waagrechte Tangente bei $(-1|2)$ und bei $(1|0)$

(d)

- (e) $g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = -\frac{(1-x)(1+x)}{|1-x|(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} g'(x) = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (Spitze von g bei $x = 1$)

24. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$.

- (a) Wie lautet die Definitionsmenge von f ? Berechnen Sie die Nullstellen von f im Intervall $I = [-3\pi, 4\pi]$.
- (b) Weisen Sie nach, dass der Graph von f zur Achse $x = \frac{\pi}{2}$ symmetrisch ist.
- (c) Zeigen Sie, dass die Definitionslücke von f stetig geschlossen werden kann und schreiben Sie die stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ hin.
- (d) Berechnen Sie die Funktionswerte von f in der Mitte zwischen den Nullstellen und zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall I mit Kennzeichnung der Definitionslücke ($x = \pi \hat{=} 2 \text{ cm}$, $y = 1 \hat{=} 5 \text{ cm}$).
- (e) Zeigen Sie, dass die Nullstellen von f' der Gleichung

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\pi}{2} - x$$

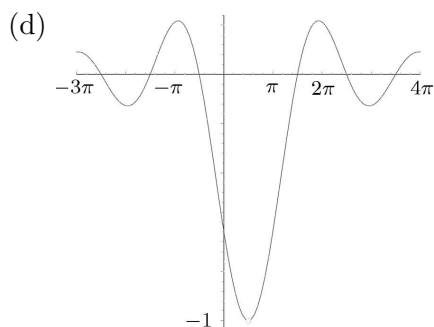
genügen. Bestimmen Sie graphisch die ungefähre Lage der Maxima und Minima von f .

Lösung: (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$ Nullstellen: $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$

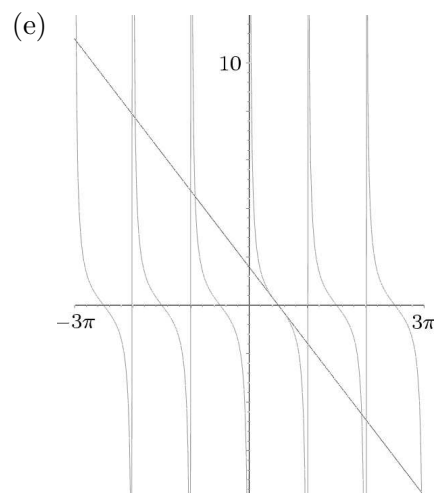
(b) $f\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right)}{-h} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}{h} = f\left(\frac{\pi}{2} + h\right)$

(c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{de l'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{1} = -1$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in D_f \\ -1 & \text{für } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



Für die Nullstellen von f' gilt rechts von π die Näherung $x_k \approx k\pi$, und zwar umso genauer, je größer x ist.



25. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 8}{x^2 - 2x + 2}$.

(a) Beweisen Sie, dass der Graph G_f symmetrisch zur Achse $x = 1$ ist.

(b) Zeichnen Sie G_f in der Einheit 1 cm im Intervall $[-2; 4]$.
Verwenden Sie das Ergebnis von (a)!

(c) Berechnen Sie $f'(x)$ und die x -Koordinate des Punktes mit waagrechter Tangente von G_f .

Lösung: (a) $f(1+h) = f(1-h) = \frac{h^2 + 7}{h^2 + 1}$

(b)

(c) $f'(x) = -\frac{12(x-1)}{(x^2 - 2x + 2)^2} \implies$ waagrechte Tangente bei $(1|7)$

26. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 8}{x^2 - 4x + 5}$.

(a) Beweisen Sie, daß der Graph G_f symmetrisch zur Achse $x = 2$ ist.

(b) Zeichnen Sie G_f in der Einheit 1 cm im Intervall $[-1; 5]$.
Verwenden Sie das Ergebnis von (a)!

(c) Berechnen Sie $f'(x)$ und die x -Koordinate des Punktes mit waagrechter Tangente von G_f .

Lösung: (a) $f(2+h) = f(2-h) = \frac{h^2 + 4}{h^2 + 1}$

(b)

(c) $f'(x) = -\frac{6(x-2)}{(x^2 - 4x + 5)^2} \implies$ waagrechte Tangente bei $(2|4)$

27. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

- (a) Berechnen Sie die Definitionsmenge D_f sowie die Grenzwerte von $f(x)$ an den Rändern von D_f .
- (b) Berechnen Sie mit Hilfe der Ableitung die Monotoniebereiche sowie die Koordinaten der Punkte mit waagrechter Tangente von f .
- (c) Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[-6; 4]$ (Einheit 1cm).
- (d) Beweisen Sie, dass G_f zum Punkt $Z(-1 | -2)$ symmetrisch ist.

Lösung: (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^\pm} = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = \pm\infty$

(b) $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$, waagrechte Tangenten bei $(0|0)$ und $(-2|-4)$

f streng steigend in $] -\infty; -2[$ und in $] 0; +\infty[$

f streng fallend in $] -2; -1[$ und in $] -1; 0[$

(d) $f(-1+h) + 2 = f(-1-h) - 2$

28. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

- (a) Berechnen Sie D_f und untersuchen Sie das Verhalten von f am Rande von D_f .
- (b) Berechnen Sie $f'(x)$ und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Berechnen Sie die notwendigen Grenzwerte von f' und zeichnen Sie dann den Graphen von f (Einheit auf der x-Achse 5 cm ; Einheit auf der y-Achse 2,5 cm).

Lösung: (a) $D_f =]-1; 1[$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0^+$

(b) $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\infty$

29. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{1}{10}(x-3)(x+1)^3$.

- (a) Schreiben Sie die Definitionsmenge und die Nullstellen von f hin! Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f .
- (b) Untersuchen Sie f auf Monotonie und Extremwerte. f' ist als Produkt von Linearfaktoren darzustellen!
- (c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von f und berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.
- (d) Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $-3 \leq x \leq 3,5$ (Einheit 1cm).

Lösung: (a) $D_f = \mathbb{R}$, Nullstellen von f : $x_{01} = -1$, $x_{02} = 3$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$

- (b) $f'(x) = \frac{2}{5}(x+1)^2(x-2)$, Nullstellen von f' : $x_{11} = -1$, $x_{12} = 2$
 $f'(x) \leq 0$ in $] -\infty; 2]$, $f'(x) \geq 0$ in $[2; +\infty[$, rel. Min. bei $(2 | -2,7)$
- (c) $f''(x) = \frac{6}{5}(x+1)(x-1)$, Nullstellen von f'' : $x_{21} = -1$, $x_{22} = 1$
 $f''(x) > 0$ in $] -\infty; -1[$ und in $] 1; +\infty[$, $f''(x) < 0$ in $] -1; 1[$
Wendepunkte bei $(-1 | 0)$ (Terrassenpunkt) und bei $(1 | -1,6)$

30. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{1}{50}(x+3)(x-2)^4$.

- (a) Schreiben Sie die Definitionsmenge und die Nullstellen von f hin.
 Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f .
- (b) Untersuchen Sie f auf Monotonie und Extremwerte.
 f' ist als Produkt von Linearfaktoren darzustellen!
- (c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von f und berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.
- (d) Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $-3,5 \leq x \leq 4,5$ (Einheit 1cm).

Lösung: (a) $D_f = \mathbb{R}$, Nullstellen von f : $x_{01} = -3$, $x_{02} = 2$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

- (b) $f'(x) = \frac{1}{10}(x-2)^3(x+2)$, Nullstellen von f' : $x_{11} = -2$, $x_{12} = 2$
 $f'(x) \geq 0$ in $] -\infty; -2]$ und in $[2; +\infty[$, $f'(x) \leq 0$ in $[-2; 2]$
 rel. Min. bei $(-2 | 0)$, rel. Max. bei $(2 | 5,12)$
- (c) $f''(x) = \frac{2}{5}(x-2)^2(x+1)$, Nullstellen von f'' : $x_{21} = -1$, $x_{22} = 2$
 $f''(x) < 0$ in $] -\infty; -1[$, $f''(x) > 0$ in $] -1; +\infty[$
 Wendepunkt bei $(-1 | 3,24)$, das Minimum bei $(2 | 0)$ ist ein Flachpunkt.

31. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{3}|x| \cdot \left(\frac{1}{3}x^2 - x \right) - x$$

- (a) Wie lautet die maximale Definitionsmenge von f ? Geben Sie eine betragsfreie Darstellung von f an und berechnen Sie die Nullstellen von f . Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion an den Rändern von D_f .
- (b) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.
- (c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion und berechnen Sie die Koordinaten der Extrema.

- (d) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Funktion und berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.
- (e) Berechnen Sie noch ein paar geeignete Funktionswerte und zeichnen Sie den Graphen von f im x -Intervall $[-2; 6]$ in der Einheit 2 cm auf beiden Achsen.
- (f) Wie lauten die Gleichungen der Wendetangenten und wo schneiden sie sich?

Lösung: (a) $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x \cdot \left(\frac{1}{3}x^2 - x\right) - x = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - x & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{1}{3}x \cdot \left(\frac{1}{3}x^2 - x\right) - x = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$$x \leq 0: \quad -x \left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{3}x + 1 \right) = -x \left[\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] = 0$$

$$x > 0: \quad x \left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{3}x - 1 \right) = x \left[\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{5}{4} \right] = 0$$

Nullstellen bei $x_{01} = 0$ und $x_{02} = \frac{3}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 4,85$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$$

(b) f ist in ganz $\mathbb{R}$ stetig.

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 1 = -\frac{1}{3}[(x-1)^2 + 2] & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 = \frac{1}{3}[(x-1)^2 - 4] & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1, \text{ d.h. } f \text{ ist in ganz } \mathbb{R} \text{ differenzierbar.}$$

(c) $f'(x) < 0$ für $x < 3$, $f'(3) = 0$, $f'(x) > 0$ für $x > 3 \implies$

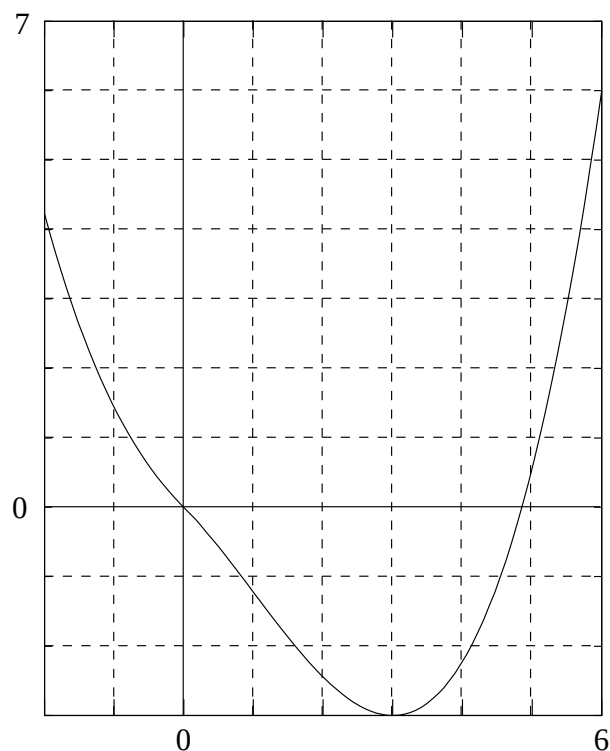
relatives Minimum bei $(3 | -3)$

$$(d) \quad f''(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}(x-1) & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(x-1) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$f''(x) > 0$ für $x < 0$ und für $x > 1$, $f''(x) < 0$ für $0 < x < 1 \implies$ Wendepunkte bei $(0|0)$ und $(1 | -\frac{11}{9})$

(e)

x	-2	-1	2	4	5	6
$f(x)$	4,22	1,44	-2,44	-2,22	0,55	6



(f) $f'(0) = -1 \implies t_1(x) = -x$
 $f'(1) = -\frac{4}{3} \implies t_2(x) = -\frac{11}{9} - \frac{4}{3}(x-1) = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{9}$
 Schnittpunkt von t_1 und t_2 bei $(\frac{1}{3} | -\frac{1}{3})$

32. Diskutieren Sie die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

nach allen Regeln der Kunst und zeichnen Sie ihren Graphen.

Lösung: NS: $x_{01} = 2 - \sqrt{22} \approx -2,69$, $x_{02} = 0$, $x_{03} = 2 + \sqrt{22} \approx 6,69$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$$

$$f''(x) = x^2 - 2x - 3$$

rel. Minimum bei $(\frac{3}{2}(1 - \sqrt{5}) | \frac{9}{8}(-13 + 5\sqrt{5})) \approx (-1,85 | -2,05)$

rel. Maximum bei $(0 | 0)$

rel. Minimum bei $(\frac{3}{2}(1 + \sqrt{5}) | \frac{9}{8}(-13 - 5\sqrt{5})) \approx (4,85 | -27,2)$

Wendepunkt bei $(-1 | -\frac{13}{12}) = (-1 | -1,08\bar{3})$

Wendepunkt bei $(3 | -\frac{63}{4}) = (3 | -15,75)$

33. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$$

im maximalen Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.

- (a) Berechnen Sie die Nullstellen von f .
- (b) Untersuchen Sie f auf Monotonie und auf Extremwerte.
- (c) Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten von f und die Wendepunkte.
- (d) Zeichnen Sie den Grafen von f im x -Intervall $[-0,5; 8]$ in der Einheit 1 cm.

Lösung: (a) $f(x) = \frac{x}{8}(x^2 - 12x + 36) = \frac{x}{8}(x - 6)^2 \quad f(x) = 0 \implies x_{01} = 0, x_{02} = 6$

(b) $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2} = \frac{3}{8}(x^2 - 8x + 12) \quad f'(x) = 0 \implies x^2 - 8x + 12 = -12 + 16$

$x_{11} = 2, x_{12} = 6, \quad f'$ ist eine nach oben geöffnete Parabel $\implies$

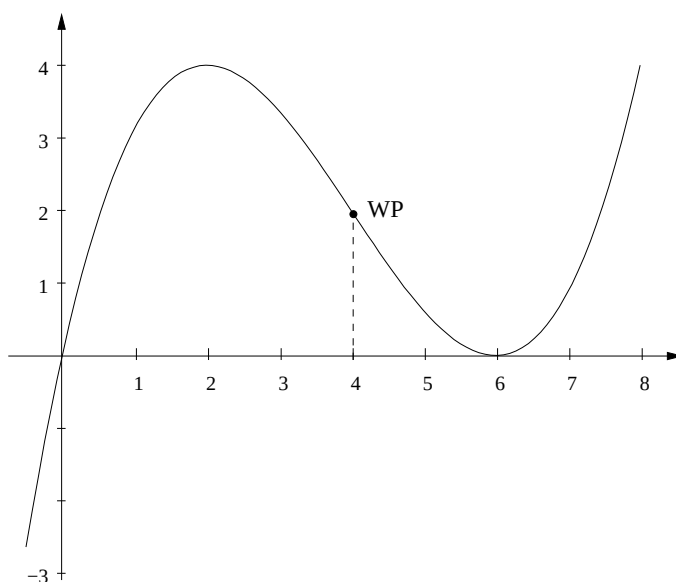
$$\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ und } f \text{ streng steigend in }]-\infty; 2[\text{ und in }]6; \infty[\\ f'(x) < 0 \text{ und } f \text{ streng fallend in }]2; 6[\end{array} \right\} \implies \begin{cases} \text{rel. Max. bei } (2|4) \\ \text{rel. Min. bei } (6|0) \end{cases}$$

(c) $f''(x) = \frac{3}{4}x - 3 \quad f''(x) = 0 \implies x_2 = 4 \implies$

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) < 0 \text{ und } f \text{ rechtsgekrümmt in }]-\infty; 4[\\ f''(x) > 0 \text{ und } f \text{ linksgekrümmt in }]4; \infty[\end{array} \right\} \implies \text{Wendepunkt bei } (4|2)$$

(d)

x	$f(x)$
-0,5	-2,64
0	0
1	3,125
3	3,375
5	0,625
7	0,875
8	4
x	$f''(x)$
2	-1,5
6	+1,5
8	4
x	$f'''(x)$
4	0,75



2.6.2 Diskussion von Funktionenscharen

1. Wir betrachten die Funktionenschar f_a mit

$$f_a(x) = -(a+1)^4 x^2 + a$$

- (a) Zeichne die Grafen der Scharfunktionen für $a = 0,25$, $a = 0,5$ und $a = 1$ (Einheit 5 cm).
 (b) Für $a > 0$ schließt der Graf von f_a mit der x -Achse ein endliches Flächenstück ein, dessen Inhalt wir mit $A(a)$ bezeichnen. Berechne $A(a)$.
 (c) Für welches a ist $A(a)$ maximal? Wie groß ist $A_{\max}$?

Lösung: (a) $f_{0,25} = -1,25^4 x^2 + 0,25$

$$f_{0,5} = -1,5^4 x^2 + 0,5$$

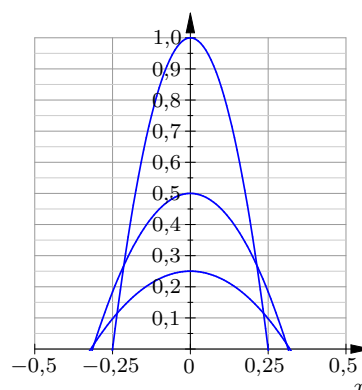
$$f_1 = -x^2 + 1$$

Nullstellen:

$$x_1 = -\frac{\sqrt{a}}{(a+1)^2}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{a}}{(a+1)^2} \quad \text{für } a \geq 0$$

keine Nullstellen für $a < 0$



(b)

$$\begin{aligned} A(a) &= \int_{x_1}^{x_2} f_a(x) \, dx = 2 \int_0^{x_2} f_a(x) \, dx = -\frac{2(a+1)^4 x_2^3}{3} + 2ax_2 = \\ &= -\frac{2(a+1)^4 a^{\frac{3}{2}}}{3(a+1)^6} + \frac{2a\sqrt{a}}{(a+1)^2} = \frac{4a^{\frac{3}{2}}}{3(a+1)^2} \end{aligned}$$

$$(c) \quad A'(a) = \frac{4}{3(a+1)^4} \cdot \left[\frac{3}{2} \sqrt{a}(a+1)^2 - 2a^{\frac{3}{2}}(a+1) \right] = \frac{4\sqrt{a}}{3(a+1)^3} \cdot \left[\frac{3}{2} - \frac{a}{2} \right]$$

$$A'(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0 \text{ und } a_2 = 3$$

Aus $A(0) = 0$, $A(a) > 0$ für $a > 0$ und $\lim_{a \rightarrow \infty} A(a) = 0$ folgt, dass

$$A_{\max} = A(3) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

2. Wir betrachten die Funktionenschar

$$f_s : \quad x \rightarrow f_s(x) = -x^3 + sx^2$$

- (a) Berechne die Nullstellen und die relativen Extrema der Scharfunktionen f_s . Auf welcher Kurve K_f liegen alle Extrempunkte? Zeichne K_f und die Grafen von f_{-2} , f_1 , f_2 und f_3 in ein Koordinatensystem.
- (b) Eine weitere Funktionenschar ist durch

$$F_s : x \rightarrow F_s(x) = \int_0^x f_s(t) dt$$

gegeben. Berechne die Nullstellen und die relativen Extrema der Scharfunktionen F_s . Auf welcher Kurve K_F liegen alle Extrempunkte? Zeichne K_F und die Grafen von F_{-2} , F_1 , F_2 und F_3 in ein Koordinatensystem.

- (c) Die Grafen von f_s schließen mit der x -Achse ein endliches Flächenstück mit dem Inhalt A_s ein. Berechne A_s .

Lösung: (a) Nullstellen von f : $x_{01} = 0$, $x_{02} = s$

$$f'_s(x) = -3x^2 + 2sx = x(2s - 3x)$$

$$\text{Nullstellen von } f': x_{11} = 0, x_{12} = \frac{2}{3}s$$

$$f''_s(x) = -6x + 2s$$

$$f''_s(x_{11}) = 2s, \quad f''_s(x_{12}) = -2s \implies$$

$(0|0)$ ist Tiefpunkt für $s > 0$

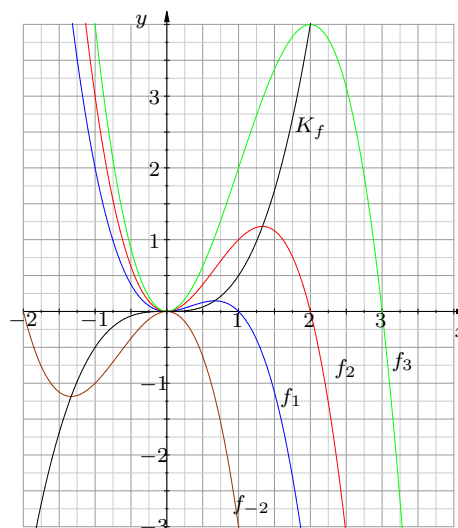
Hochpunkt für $s < 0$

Terrassenpunkt für $s = 0$

$$\left(\frac{2s}{3} \mid \frac{4s^3}{27}\right) \text{ ist Hochpunkt für } s > 0$$

Tiefpunkt für $s < 0$

Terrassenpunkt für $s = 0$



$$E\left(\frac{2s}{3} \mid \frac{4s^3}{27}\right) = E(x_E | y_E) \implies K_f : x_E \rightarrow y_E = \frac{1}{2}x_E^3$$

$$(b) F_s(x) = \int_0^x (-x^3 + sx^2) dx = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{s}{3}x^3 = x^3 \left(\frac{s}{3} - \frac{x}{4}\right)$$

2.6 Kurvendiskussion

Nullstellen von F : $X_{01} = 0$, $X_{02} = \frac{4}{3}s$

$$F'_s(x) = f_s(x)$$

Nullstellen von F' : $X_{11} = 0$, $X_{12} = s$

$$F''_s(x) = f'_s(x)$$

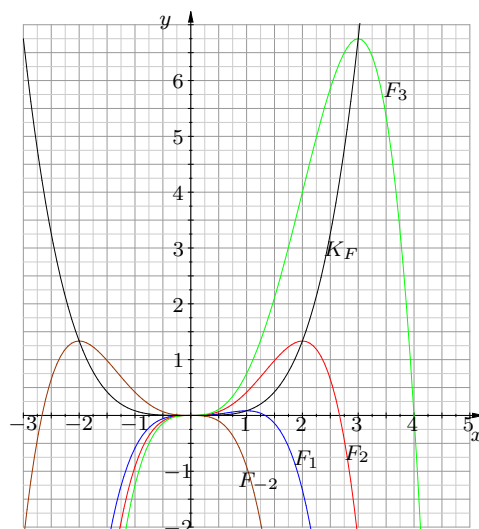
$F''_s(X_{11}) = 0$ mit VZW für $s \neq 0$:

$(0|0)$ ist Terrassenpunkt für $s \neq 0$
Hochpunkt für $s = 0$

$$F''_s(X_{12}) = -s^2 < 0 \implies$$

$\left(s \mid \frac{s^4}{12}\right)$ ist immer Hochpunkt.

$$K_F : x_E \rightarrow y_E = \frac{1}{12}x_E^4$$



$$(c) \quad A_s = \left| \int_0^s f_s(x) dx \right| = |F_s(s)| = \frac{s^4}{12}$$

3. Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = \frac{1}{3}x^3 + tx^2 + t^2x$.

- Untersuchen Sie die Funktionen auf Symmetrie.
- Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktionen in Abhängigkeit von t .
- Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten der Funktionen in Abhängigkeit von t .
- Geben Sie gegebenenfalls Extrema, Wendepunkte und Terrassenpunkte der Funktionen in Abhängigkeit von t an.
- Geben Sie die Ortslinie der Terrassenpunkte an.
- Zeichnen Sie die Funktion für $t = 2$.
- Zeichnen Sie die Funktionenschar und die Ortslinie der Terrassenpunkte mit einer geeigneten Software.

Lösung: (a) keine Symmetrie

(b) $N(0|0)$

(c) Waagrechte Tangente für $x = -t$, sonst immer streng monoton steigend.
Für $x < -t$ rechtsgekrümmt, für $x > -t$ linksgekrümmt.

(d) keine Extrema, Terrassenpunkt bei $(-t \mid -\frac{1}{3}t^3)$

(e) $y = \frac{1}{3}x^3$

4. Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = x^3 + tx^2 + x + 1$.

- (a) Untersuchen Sie die Funktionen auf Symmetrie.
- (b) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten der Funktionen in Abhängigkeit von t .
- (c) Geben Sie gegebenenfalls die x-Koordinaten der Extrema, Wendepunkte und Terrassenpunkte in Abhängigkeit von t an.
- (d) Geben Sie die Ortslinie der Wendepunkte an.
- (e) Zeichnen Sie die Funktion für $t = 2$.
- (f) Zeichnen Sie die Funktionsschar und die Ortslinie der Wendepunkte mit einer geeigneten Software.

Lösung: (a) keine Symmetrie

- (b) Für $|t| < \sqrt{3}$ streng monoton steigend.
Für $|t| > \sqrt{3}$ streng monoton steigend im Intervall
 $x \in]-\infty, \frac{-t-\sqrt{t^2-3}}{3}[\cup]\frac{-t+\sqrt{t^2-3}}{3}, \infty[$, sonst streng monoton fallend.
Für $x < -\frac{1}{3}t$ rechtsgekrümmt und für $x > -\frac{1}{3}t$ linksgekrümmt.
- (c) Maximum bei $x = \frac{-t-\sqrt{t^2-3}}{3}$, Minimum bei $x = \frac{-t+\sqrt{t^2-3}}{3}$ (für $|t| < \sqrt{3}$ keine Extrema)
und Wendepunkt bei $x = -\frac{1}{3}t$.
Für $|t| = \sqrt{3}$ Terrassenpunkt bei $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$
- (d) $y = -2x^3 + x + 1$

5. Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = \frac{1}{3}x^3 - t^2x$.

- (a) Untersuchen Sie die Funktionen auf Symmetrie.
- (b) Geben Sie die Nullstellen der Funktionen in Abhängigkeit von t an.
- (c) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten der Funktionen in Abhängigkeit von t .
- (d) Geben Sie gegebenenfalls Extrema, Wendepunkte und Terrassenpunkte der Funktion in Abhängigkeit von t an.
- (e) Geben Sie die Ortslinien der Extrema an.
- (f) Zeichnen Sie die Funktionsschar.

Lösung: (a) $f(-x) = -f(x)$, also punktsymmetrisch.

- (b) $N_1(-\sqrt{3}t|0)$, $N_2(0|0)$, $N_3(\sqrt{3}t|0)$
- (c) $f'(x) = (x-t)(x+t)$, also steigend für $x \in]-\infty, -t[\cup]t, \infty[$ und fallend für $x \in]-t, t[$.
 $f''(x) = 2x$, also rechtsgekrümmt für $x < 0$ und linksgekrümmt für $x > 0$.
- (d) Maximum bei $(-t|\frac{2}{3}t^3)$, Minimum bei $(t|-\frac{2}{3}t^3)$, Wendepunkt bei $(0|0)$, kein Terrassenpunkt für $t \neq 0$.
- (e) $y = -\frac{2}{3}x^3$

6. Wir betrachten die Funktionenschar $f_a(x) = x^2 + \frac{a}{x}$. P_a sei ein Punkt auf G_{f_a} mit waagrechter Tangente. Berechnen Sie die Koordinaten von P_a ! Auf welcher Kurve liegen alle Punkte P_a mit $a \in \mathbb{R}$?

Lösung: $f'(x) = 2x - \frac{a}{x^2}$, $f'(x) = 0 \implies x_1 = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$P_a(x_1|y_1)$ mit $y_1 = 3 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, Kurve der Minima: $y = 3 \cdot x^2$

7. g sei die Menge aller Scheitelpunkte von nach unten geöffneten und verschobenen Normalparabeln $f_a(x) = -x^2 + bx + c$, die **die** Normalparabel $n(x) = x^2$ im Punkt $P_a(a|a^2)$ berühren. Berechnen Sie zuerst die Koeffizienten b und c in $f_a(x)$ und stellen Sie dann die Funktionsgleichung von g auf.

Lösung: $f'_a(a) = n'(a)$ und $f_a(a) = n(a) \implies b = 4a$ und $c = -2a^2$

$f_a(x) = -x^2 + 4ax - 2a^2$, Scheitel von f_a : $S_a(2a|2a^2)$

Kurve der Scheitelpunkte: $g(x) = \frac{x^2}{2}$

8. Durch die Funktionenschar $f_a(x) = x^2 + bx + c$ wird die Menge aller verschobenen Normalparabeln beschrieben, die den Graphen der Funktion $h(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $P_a(a|\frac{1}{a})$ berühren.

(a) Stellen Sie die Gleichung der Schar f_a auf, d.h. drücken Sie b und c durch a aus!

(b) Beweisen Sie, daß der Scheitel des Graphen von f_a durch

$$S(x_S|y_S) \quad \text{mit} \quad x_S = \frac{2a^3 + 1}{2a^2} \quad \text{und} \quad y_S = \frac{4a^3 - 1}{4a^4}$$

gegeben ist!

(c) Zeichnen Sie die Graphen von h und f_a für $a \in \{-5; -1; -0,5; 0,5; 1; 5\}$ in **ein** Koordinatensystem!

(d) g sei die Menge aller Scheitelpunkte der Parabeln f_a . Füllen Sie folgende Wertetabelle aus und zeichnen Sie dann den Graphen von g !

a	-5,0	-2,0	-1,0	-0,5	-0,4	0,4	0,5	0,7	1,0	1,5	2,0	4,0
x_S												
y_S												

Ist g eine Funktion? Die Darstellung von g durch die beiden Funktionen $x_S(a)$ und $y_S(a)$ nennt man *Parameterdarstellung* von g mit dem Parameter a .

2.6 Kurvendiskussion

Lösung: (a) $f'_a(a) = h'(a)$ und $f_a(a) = h(a) \implies$

$$b = -2a - \frac{1}{a^2} \quad \text{und} \quad c = \frac{2}{a} + a^2$$

$$f_a(x) = x^2 + \left(-2a - \frac{1}{a^2}\right)x + \frac{2}{a} + a^2$$

(d)

a	-5,0	-2,0	-1,0	-0,5	-0,4	0,4	0,5	0,7	1,0	1,5	2,0	4,0
x_S	-4,98	-1,88	-0,5	1,5	2,73	3,53	2,5	1,72	1,5	1,72	2,13	4,03
y_S	-0,20	-0,52	-1,25	-6,00	-12,3	-7,27	-2,00	0,39	0,75	0,62	0,48	0,25

g ist keine Funktion.

9. Wir betrachten die Funktionenschar f_n mit der Gleichung

$$f_n(x) = \sqrt{x} - x^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

- (a) Wie lautet die maximale Definitionsmenge von f_n ? Berechnen Sie die Nullstellen von f_n .
- (b) Der Graf G_n von f_n enthält einen Punkt $P_n(x_n|y_n)$ mit waagrechter Tangente. Berechnen Sie die Koordinaten von P_n .
- (c) Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'_n(x)$.
- (d) Berechnen Sie die Koordinaten von P_1 und P_4 und die Ableitungen $f'_1(1)$ und $f'_4(1)$. Zeichnen Sie dann die Grafen von f_1 und f_4 im Intervall $[0; 1]$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in **einem** Koordinatensystem. Verwenden Sie die Einheit 5 cm.

Lösung: (a) $D = \mathbb{R}_0^+$, $x_{01} = 0$, $x_{02} = 1$

$$(b) \quad f'_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - n x^{n-1}, \quad x_n = (2n)^{\frac{-2}{2n-1}}, \quad y_n = (2n)^{\frac{-1}{2n-1}} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$$

$$(c) \quad +\infty$$

$$(d) \quad P_1(0,25 | 0,25), \quad P_4(0,552 | 0,650), \quad f'_1(1) = -0,5, \quad f'_4(1) = -3,5$$

10. Wir betrachten die Funktionenschar f_n mit der Gleichung

$$f_n(x) = \sqrt{x} + \frac{n}{x}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- (a) Wie lautet die maximale Definitionsmenge von f_n ? Untersuchen Sie f_n auf Nullstellen. Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$.
- (b) Der Graf G_n von f_n enthält einen Punkt $P_n(x_n|y_n)$ mit waagrechter Tangente. Berechnen Sie die Koordinaten von P_n .

- (c) Berechnen Sie die Koordinaten von P_1 und P_4 . Zeichnen Sie dann die Grafen von f_1 und f_4 im Intervall $[0; 10]$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in **ein** Koordinatensystem. Verwenden Sie die Einheit 1 cm.
- (d) Auf welcher Kurve liegen die Punkte P_n ?

Lösung: (a) $D = \mathbb{R}^+$, keine Nullstellen, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = +\infty$

(b) $f'_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{n}{x^2}$, $x_n = (2n)^{\frac{2}{3}}$, $y_n = \frac{3}{2}(2n)^{\frac{1}{3}}$

(c) $P_1 \left(2^{\frac{2}{3}} \mid \frac{3}{2} 2^{\frac{1}{3}} \right)$, $P_4(4 \mid 3)$

(d) $g(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

11. Wir betrachten die Funktionenschar $f_a(x) = \frac{a^3}{x} + 2\sqrt{x}$ mit $a > 0$.

- (a) Berechnen Sie die Definitionsmenge D_{f_a} sowie die Grenzwerte von $f_a(x)$ für $x \rightarrow 0^+$ und $x \rightarrow +\infty$.
- (b) Für $a > 0$ sei P_a der Punkt von G_{f_a} mit waagrechter Tangente. Berechnen Sie die Koordinaten von P_a . Der Graph der Funktion g ist die Menge aller P_a mit $a > 0$. Leiten Sie die Funktionsgleichung $g(x)$ her.
- (c) Zeichnen Sie die Graphen von f_1 , f_2 und g im x -Intervall $[0; 9]$ in **ein** Koordinatensystem.
- (d) Für welches a ist der Schnittwinkel zwischen den Graphen von g und f_a gleich 30° ?

Lösung: (a) $D_{f_a} = \mathbb{R}^+$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_a(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = +\infty$

(b) $f'_a(x) = -\frac{a^3}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, $P_a(a^2 \mid 3a)$, $g(x) = 3\sqrt{x}$

(d) $G_g \cap G_{f_a} = \{P_a\} \implies f'_a(a^2) = 0$

$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}, \quad g'(a^2) = \frac{3}{2a} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies a = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

2.6.3 Ortskurven besonderer Punkte

1. Wir betrachten die Funktionenschar f_a mit

$$f_a(x) = \frac{ax + 2}{2e^x}, \quad D_{f_a} = \mathbb{R} \text{ und } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- (a) Bestimme in Abhängigkeit des Scharparameters a die Nullstellen von f_a und das Verhalten von f_a für $x \rightarrow \pm\infty$.

2.6 Kurvendiskussion

- (b) Zeige, dass alle Grafen der Funktionenschar genau einen Punkt gemeinsam haben und gib seine Koordinaten an.
- (c) Bestimme die Koordinaten der lokalen Extrema und der Wendepunkte der Funktionenschar in Abhängigkeit von a .
- (d) Zeichne die Grafen der Funktionen $f_{0,5}$, f_2 , f_{20} und f_{-4} in ein geeignetes Koordinatensystem. Stelle vorher die Nullstellen und die Koordinaten der Extremwerte und Wendepunkte in einer Tabelle zusammen.
- (e) Unter welchem spitzen Winkel α schneiden sich die Grafen der beiden Funktionen $f_{0,5}$ und f_{20} ?
- (f) Auf welcher Kurve $y = g(x)$ liegen die Extremwerte der Scharfunktionen? Zeichne sie in das schon bestehende Koordinatensystem ein.
- (g) Auf welcher Kurve $y = h(x)$ liegen die Wendepunkte der Scharfunktionen? Zeichne sie in das schon bestehende Koordinatensystem ein.

Lösung: (a) Nullstellen: $x_{a0} = -\frac{2}{a}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \left(\frac{-\operatorname{sgn}(a) \cdot \infty}{0^+} \right) = -\operatorname{sgn}(a) \cdot \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \left(\frac{\operatorname{sgn}(a) \cdot \infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{2e^x} = \left(\frac{a}{+\infty} \right) = 0^\pm$$

$$(b) \quad f_a(x) = f_b(x) \implies ax = bx \implies (a-b)x = 0 \implies x = 0 \quad (a \neq b)$$

Der gemeinsame Punkt aller Grafen ist also $(0|1)$.

$$(c) \quad f'_a(x) = \frac{-ax + a - 2}{2e^x}, \quad f''_a(x) = \frac{ax - 2a + 2}{2e^x}, \quad f'''_a(x) = \frac{-ax + 3a - 2}{2e^x}$$

$$f'_a(x) = 0 \implies x_{a1} = \frac{a-2}{a} = 1 - \frac{2}{a}, \quad f''_a(x_{a1}) = -\frac{a}{2}e^{\frac{2-a}{a}}, \quad f_a(x_{a1}) = \frac{a}{2}e^{\frac{2-a}{a}}$$

$$a > 0 \implies f''_a(x_{a1}) < 0 \implies \text{Hochpunkt bei } H\left(\frac{a-2}{a} \mid \frac{a}{2}e^{\frac{2-a}{a}}\right)$$

$$a < 0 \implies f''_a(x_{a1}) > 0 \implies \text{Tiefpunkt bei } H\left(\frac{a-2}{a} \mid \frac{a}{2}e^{\frac{2-a}{a}}\right)$$

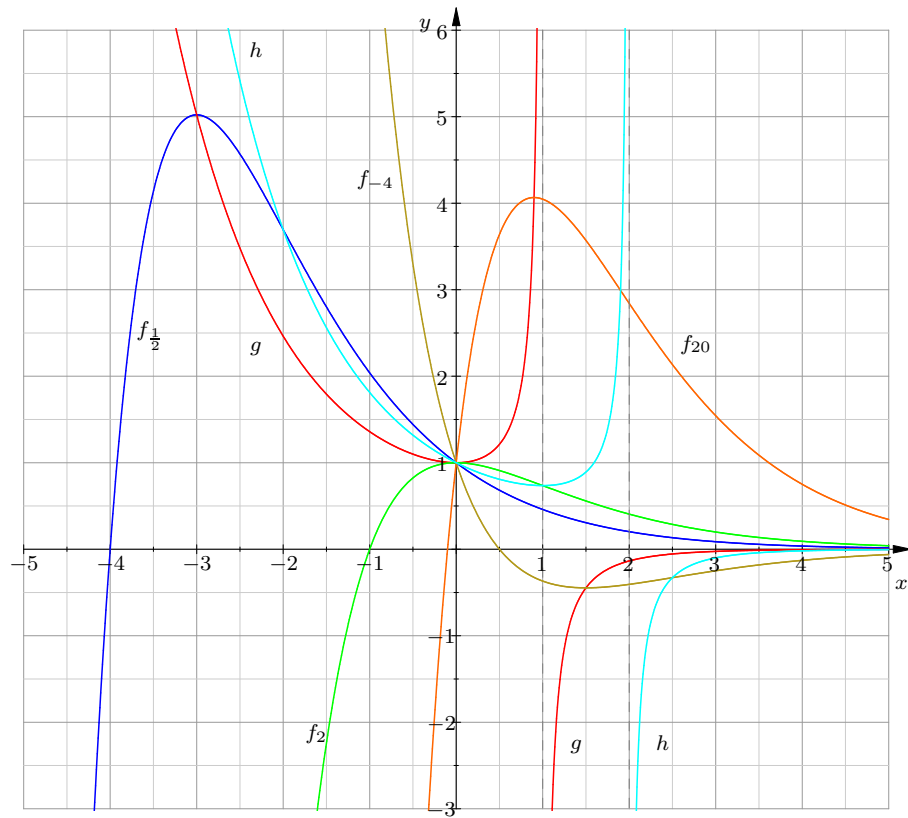
$$f''_a(x) = 0 \implies x_{a2} = \frac{2a-2}{a} = 2 - \frac{2}{a}, \quad f'''_a(x_{a2}) = \frac{a}{2}e^{\frac{2-2a}{a}} \neq 0 \implies$$

$$\text{Wendepunkt bei } W\left(\frac{2a-2}{a} \mid ae^{\frac{2-2a}{a}}\right)$$

(d)

a	0,5	2	20	-4
x_{a0}	-4	-1	-0,1	0,5
x_{a1}	-3	0	0,9	1,5
$f(x_{a1})$	$\frac{e^3}{4} \approx 5,02$	1	$\frac{10}{e^{0,9}} \approx 4,07$	$-\frac{2}{e^{1,5}} \approx -0,446$
x_{a2}	-2	1	1,9	2,5
$f(x_{a2})$	$\frac{e^2}{2} \approx 3,69$	$\frac{2}{e} \approx 0,74$	$\frac{20}{e^{1,9}} \approx 2,99$	$-\frac{4}{e^{2,5}} \approx -0,328$

2.6 Kurvendiskussion



$$(e) \quad f'_{0,5}(0) = -0,75 = \tan \alpha \implies \alpha = -36,87^\circ$$

$$f'_{20}(0) = 9 = \tan \beta \implies \beta = 83,66^\circ$$

$$\text{Schnittwinkel: } \varphi = 180^\circ - (\beta + |\alpha|) = 59,47^\circ$$

$$(f) \quad x_1 = 1 - \frac{2}{a} \implies \frac{a}{2} = \frac{1}{1 - x_1} \implies y_1 = \frac{a}{2} e^{\frac{2-a}{a}} = \frac{e^{-x_1}}{1 - x_1} \implies$$

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{1 - x}$$

$$(g) \quad f''_a(x) = 0 \implies x_2 = \frac{2a - 2}{a}, y_2 = f(x_2) = a e^{\frac{2-2a}{a}} = \frac{2}{2 - x_2} e^{-x_2}$$

$$h(x) = \frac{2e^{-x}}{2 - x}$$

2. Gegeben ist ein Dreieck mit den Ecken A(0|0), B(1|0) und C(c|1).

- (a) Zeichnen Sie für $c = -0,2; 0; 0,2; 0,5; 0,7; 1; 1,2$ in verschiedenen Farben das Dreieck und tragen Sie jeweils den Höhenschnittpunkt rot ein ($1 \hat{=} 5\text{cm}$).
Auf welcher Kurve könnten die Schnittpunkte der Höhen liegen?

2.6 Kurvendiskussion

- (b) Geben Sie die Gleichungen der Geraden an, auf denen die Höhen h_a und h_c liegen.
- (c) Berechnen Sie die Koordinaten des Höhenschnittpunkts H .
- (d) Beweisen Sie, dass sich der Höhenschnittpunkt für variables c auf einer Parabel bewegt.
- (e) Geben Sie die Lage des Scheitels der Parabel an und vergleichen Sie das Ergebnis mit Teilaufgabe (a).

Lösung: (a) Höhenschnittpunkt liegt auf einer Parabel.

(b) $h_c : x = c$ und $h_a : x \rightarrow (1 - c) \cdot x$

(c) H liegt auf h_c ($\Rightarrow x = c$) und auf h_a ($\Rightarrow y = (1 - c) \cdot x$). Also $H(c | c - c^2)$

(d) $y_H = (1 - c) \cdot x_H = (1 - x_H) \cdot x_H = x_H - x_H^2$

(e) $S(\frac{1}{2} | \frac{1}{4})$; Ergebnis stimmt mit Teilaufgabe (a) überein

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2$ ($D = \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$).

- (a) Bestimmen Sie allgemein die Nullstellen der Funktion.
- (b) Bestimmen Sie allgemein die Koordinaten der Extrema.
- (c) Zeichnen Sie die Funktion für $a = 1$ und $b = 3$.
- (d) Zeichnen Sie für $b = 3$ und für zehn verschiedene Werte von a die Extrema in ein Koordinatensystem ein. Was fällt auf?
- (e) Beweisen Sie, dass für festes b und variables a die Extrema auf einer Parabel liegen.

Lösung: (a) $N_1(0|0)$, $N_2(-\frac{b}{a}|0)$

(b) $f'(x) = x(3ax + 2b) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ oder $x_2 = -\frac{2b}{3a}$
 $f''(x) = 6ax + 2b \neq 0$ für x_1 und x_2 (a und $b \neq 0$!).
 Also Extrema bei $(0|0)$ und $(-\frac{2b}{3a} | \frac{4b^3}{27a^2})$

(c)

(d) Extrema liegen auf einer Parabel.

(e) $f(x_2) = \frac{4b^3}{27a^2} = \frac{b}{3} \cdot (-\frac{2b}{3a})^2 = \frac{b}{3} \cdot x_2^2$

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^3 + bx$ ($D = \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$).

- (a) Bestimmen Sie allgemein die Nullstellen der Funktion.
- (b) Bestimmen Sie allgemein die Koordinaten der Extrema.
- (c) Zeichnen Sie die Funktion für $a = -\frac{1}{3}$ und $b = 1$.

- (d) Zeichnen Sie für $b = 1$ und für $a = -0,1, -0,2, \dots -0,9$ die Extrema in ein Koordinatensystem ein. Was fällt auf?
- (e) Beweisen Sie, dass für festes b und variables a die Extrema auf einer Ursprungsgeraden liegen.

Lösung: (a) $N_1(0|0), N_2\left(\sqrt{-\frac{b}{a}} \mid 0\right)$

(b) $f'(x) = 3ax^2 + b = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{-\frac{b}{3a}}$

$f''(x) = 6ax \Rightarrow f''\left(\sqrt{-\frac{b}{3a}}\right) \neq 0.$

Also Extrema bei $\left(\sqrt{-\frac{b}{3a}} \mid \frac{2}{3}b\sqrt{-\frac{b}{3a}}\right).$

(c)

(d) Extrema liegen auf einer Geraden.

(e) $f(x_{\text{Max}}) = \sqrt{-\frac{b}{3a}}\left(-\frac{b}{3} + b\right) = \frac{2}{3}b \cdot x_{\text{Max}}$

5. Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^4 + bx^2$ ($D = \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$).

- (a) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion achsensymmetrisch ist.
- (b) Bestimmen Sie allgemein die Lage der Extrema.
Welche Bedingung muss für die Variablen a und b gelten, damit der Graph der Funktion drei Extrema hat?
- (c) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion für
- $a = \frac{1}{2}$ und $b = -4$.
 - $a = \frac{1}{2}$ und $b = 4$.
- (d) Zeichnen Sie für $a = \frac{1}{2}$ und $b = -1, -4, -9, -16, -25$ die Extrema in ein Koordinatensystem. Auf welcher Kurve könnten die Extrema mit $x \neq 0$ liegen?
- (e) Berechnen Sie die Ortskurve der Extrema für festes a und variables b .

Lösung: (b) $E_1(0|0), E_2\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}} \mid -\frac{b^2}{4a}\right), E_3\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}} \mid -\frac{b^2}{4a}\right)$

Drei Extrema genau dann, wenn a und b verschiedene Vorzeichen haben.

(d) Vermutung: Extrema liegen auf einer nach oben geöffneten Parabel.

(e) $e(x) = \frac{b}{2}x^2$

6. Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^4 + bx^2$ ($D = \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$).

- (a) Bestimmen Sie allgemein die Lage der Extrema.
Welche Bedingung muss für die Variablen a und b gelten, damit der Graph der Funktion drei Extrema hat.

2.6 Kurvendiskussion

- (b) Zeichnen Sie für $a = 2$ und $b = -1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{25}$ die Extrema in ein Koordinatensystem. Auf welcher Kurve könnten die Extrema mit $x \neq 0$ liegen?
- (c) Berechnen Sie die Ortskurve der Extrema für festes b und variables a .

Lösung: (a) $E_1(0|0), E_2\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}} \mid -\frac{b^2}{4a}\right), E_3\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}} \mid -\frac{b^2}{4a}\right)$
 Drei Extrema genau dann, wenn a und b verschiedene Vorzeichen haben.

(b) Vermutung: Extrema liegen auf einer nach oben geöffneten Parabel.

(c) $e(x) = \frac{b}{2}x^2$

7. Berechnen Sie für folgende Funktionen die Ortskurve der Extrema.

- (a) $f(x) = x^3 + x^2 + kx$
 (b) $f(x) = x^3 + kx^2 + x$
 (c) $f(x) = kx^3 + x^2 + x$

Lösung: (a) Extrema bei $x_E = -\frac{1 \pm \sqrt{1-3k}}{3} \Rightarrow$
 $k = -3x^2 - 2x \Rightarrow f(x_E) = x^3 + x^2 + (-3x^2 - 2x) \cdot x = -2x^3 - x^2$

(b) Extrema bei $x_E = -\frac{k \pm \sqrt{k^2-3}}{3} \Rightarrow$
 $k = -\frac{1}{2x} - \frac{3}{2}x \Rightarrow f(x_E) = x^3 + \left(-\frac{1}{2x} - \frac{3}{2}x\right) \cdot x^2 + x = -\frac{1}{2}(x^3 - x)$

(c) Extrema bei $x_E = -\frac{1}{3k}(1 \pm \sqrt{1-3k}) \Rightarrow$
 $k = -\frac{2x+1}{3x^2} \Rightarrow f(x_E) = \left(-\frac{2x+1}{3x^2}\right)x^3 + x^2 + x = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x$

8. Berechnen Sie für folgende Funktionen die Ortskurve der Wendepunkte.

- (a) $f(x) = x^3 + x^2 + kx$
 (b) $f(x) = x^3 + kx^2 + x$
 (c) $f(x) = kx^3 + x^2 + x$

Lösung: (a) Wendepunkte bei $x_W = -\frac{1}{3}$

(b) Wendepunkte bei $x_W = -\frac{k}{3} \Rightarrow k = -3x \Rightarrow$
 $f(x_W) = x^3 - 3x \cdot x + x = -2x^3 + x$

(c) Wendepunkte bei $x_W = -\frac{1}{3k} \Rightarrow k = -\frac{1}{3k} \Rightarrow$
 $f(x_W) = -\frac{1}{3k}x^3 + x^2 + x = \frac{2}{3}x^2 + x$

9. Wir betrachten die Funktionenschar $f_a(x) = x^2 + \frac{a}{x}$. P_a sei ein Punkt auf G_{f_a} mit waagrechter Tangente. Berechnen Sie die Koordinaten von P_a ! Auf welcher Kurve liegen alle Punkte P_a mit $a \in \mathbb{R}$?

2.6 Kurvendiskussion

Lösung: $f'(x) = 2x - \frac{a}{x^2}$, $f'(x) = 0 \implies x_1 = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$P_a(x_1|y_1)$ mit $y_1 = 3 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, Kurve der Minima: $y = 3 \cdot x^2$

10. g sei die Menge aller Scheitelpunkte von nach unten geöffneten und verschobenen Normalparabeln $f_a(x) = -x^2 + bx + c$, die **die** Normalparabel $n(x) = x^2$ im Punkt $P_a(a|a^2)$ berühren. Berechnen Sie zuerst die Koeffizienten b und c in $f_a(x)$ und stellen Sie dann die Funktionsgleichung von g auf.

Lösung: $f'_a(a) = n'(a)$ und $f_a(a) = n(a) \implies b = 4a$ und $c = -2a^2$

$f_a(x) = -x^2 + 4ax - 2a^2$, Scheitel von f_a : $S_a(2a|2a^2)$

Kurve der Scheitelpunkte: $g(x) = \frac{x^2}{2}$

11. Durch die Funktionenschar $f_a(x) = x^2 + bx + c$ wird die Menge aller verschobenen Normalparabeln beschrieben, die den Graphen der Funktion $h(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $P_a(a|\frac{1}{a})$ berühren.

(a) Stellen Sie die Gleichung der Schar f_a auf, d.h. drücken Sie b und c durch a aus!

(b) Beweisen Sie, daß der Scheitel des Graphen von f_a durch

$$S(x_S|y_S) \quad \text{mit} \quad x_S = \frac{2a^3 + 1}{2a^2} \quad \text{und} \quad y_S = \frac{4a^3 - 1}{4a^4}$$

gegeben ist!

(c) Zeichnen Sie die Graphen von h und f_a für $a \in \{-5; -1; -0,5; 0,5; 1; 5\}$ in **ein** Koordinatensystem!

(d) g sei die Menge aller Scheitelpunkte der Parabeln f_a . Füllen Sie folgende Wertetabelle aus und zeichnen Sie dann den Graphen von g !

a	-5,0	-2,0	-1,0	-0,5	-0,4	0,4	0,5	0,7	1,0	1,5	2,0	4,0
x_S												
y_S												

Ist g eine Funktion? Die Darstellung von g durch die beiden Funktionen $x_S(a)$ und $y_S(a)$ nennt man *Parameterdarstellung* von g mit dem Parameter a .

Lösung: (a) $f'_a(a) = h'(a)$ und $f_a(a) = h(a) \implies$

$b = -2a - \frac{1}{a^2}$ und $c = \frac{2}{a} + a^2$

$f_a(x) = x^2 + \left(-2a - \frac{1}{a^2}\right)x + \frac{2}{a} + a^2$

2.6 Kurvendiskussion

(d)

a	-5,0	-2,0	-1,0	-0,5	-0,4	0,4	0,5	0,7	1,0	1,5	2,0	4,0
x_S	-4,98	-1,88	-0,5	1,5	2,73	3,53	2,5	1,72	1,5	1,72	2,13	4,03
y_S	-0,20	-0,52	-1,25	-6,00	-12,3	-7,27	-2,00	0,39	0,75	0,62	0,48	0,25

g ist keine Funktion.

12. Gegeben ist die Funktionenschar $f(x) = ax^4 + bx^2$, $a, b \neq 0$, $D = \mathbb{R}$.

- Für welche Werte von a und b hat der Graph der Funktion Extrema?
- Berechnen sie die Ortskurve der Extrema für festes a und variables b .
- Für welche Werte von a und b hat der Graph der Funktion Wendepunkte?
- Zeichnen sie die Graphen der Funktionen für $a = \frac{1}{2}$ und $b = -4, -1, 1, 4$. Achten sie darauf, dass die Lage der Extrema (soweit vorhanden) richtig eingetragen ist. Tragen sie die Ortskurve der Extrema in das Diagramm ein.
- Betrachten sie nun für $a = \frac{1}{2}$ und $b = -4$ den Graph der Funktion. Die y -Achse zerlegt das von der Verbindungsstrecke der Extrema (nicht $(0|0)$) und dem Graph der Funktion eingeschlossene Flächenstück in zwei Teile. Vergleichen sie die beiden Teilflächen. Begründen sie ihre Antwort.

Lösung: (a) $x_1 = 0$, Maximum für $b < 0$, Minimum für $b > 0$
Falls a und b verschiedene Vorzeichen haben gibt es weitere Extrema:

$$x_{2,3} = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}} \text{ Maximum für } b > 0, \text{ Minimum für } b < 0$$

(b) $o(x) = -ax^4$

(c) Falls a und b verschiedene Vorzeichen haben, gibt es Wendepunkte:

$$x_{4,5} = \pm \sqrt{-\frac{b}{6a}}$$

(d)

(e) Die Flächen haben gleichen Flächeninhalt, da sie wie der Funktionsgraph achsensymmetrisch zur y -Achse sind.

13. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$. G_t sei die Tangente an G_f im Punkt A $(-a|f(-a))$ und G_h die Tangente an G_f im Punkt B $(\frac{a}{5}|f(\frac{a}{5}))$.

- Stellen Sie die Funktionsgleichungen von t und h auf und berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktionen.
- Berechnen Sie die Koordinaten x_a und y_a des Schnittpunktes S_a von G_t und G_h .
- Zeichnen Sie den Graphen von f und ermitteln Sie zeichnerisch sowie rechnerisch den Punkt $S_{2,5}$.
- Die Menge aller Punkte S_a mit $a \in \mathbb{R}$ ist der Graph einer Funktion g . Ermitteln Sie die Gleichung von g .

Lösung: (a) $t(x) = -2ax - a^2$, $h(x) = \frac{2a}{5} \cdot x - \frac{a^2}{25}$

$$t(x) = 0 \text{ bei } x = -\frac{a}{2}, \quad h(x) = 0 \text{ bei } x = \frac{a}{10}$$

(b) $x_a = -\frac{2a}{5}$, $y_a = -\frac{a^2}{5}$

(c) $x_a = -1$, $y_a = -1,25$

(d) $g(x) = -\frac{5}{4}x^2$

14. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$. G_g sei die Tangente an G_f im Punkt A ($b|f(b)$) und G_h die Tangente an G_f im Punkt B ($-\frac{b}{7}|f(-\frac{b}{7})$).

- Stellen Sie die Funktionsgleichungen von g und h auf und berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktionen.
- Berechnen Sie die Koordinaten x_b und y_b des Schnittpunktes S_b von G_g und G_h .
- Zeichnen Sie den Graphen von f und ermitteln Sie zeichnerisch sowie rechnerisch den Punkt $S_{3,5}$.
- Die Menge aller Punkte S_b mit $b \in \mathbb{R}$ ist der Graph einer Funktion k . Ermitteln Sie die Gleichung von k .

Lösung: (a) $g(x) = 2bx - b^2$, $h(x) = -\frac{2b}{7} \cdot x - \frac{b^2}{49}$

$$g(x) = 0 \text{ bei } x = \frac{b}{2}, \quad h(x) = 0 \text{ bei } x = -\frac{b}{14}$$

(b) $x_b = \frac{3b}{7}$, $y_b = -\frac{b^2}{7}$

(c) $x_b = 1,5$, $y_b = -1,75$

(d) $k(x) = -\frac{7}{9}x^2$

2.6.4 Kurvendiskussion mit dem Computer

- In den verschiedensten Bereichen der Physik, wie z. B. der Akustik und der Elektrodynamik, treten Schwingungen auf. Wird ein schwingungsfähiges System von außen mit der Frequenz f angeregt (maximale Anregungskraft konstant), hängt seine Reaktion (Amplitude) stark von der Anregungsfrequenz f ab. Die Amplitude $A(f)$ kann durch folgende Formel beschrieben werden:

$$A(f) = \frac{C}{\sqrt{(f_0^2 - f^2)^2 + (f\gamma)^2}}$$

2.6 Kurvendiskussion

Neben Konstanten des Systems (C enthält die maximale Anregungskraft und den Reibungsfaktor γ) hängt $A(f)$ von der Eigenfrequenz f_0 des Systems und der Anregungsfrequenz f ab. Hier werden nur Fälle mit $\gamma < \frac{f_0}{\sqrt{2}}$ betrachtet.

- Untersuchen Sie, wie sich die Amplitude $A(f)$ für $f \rightarrow 0$ und für $f \rightarrow \infty$ verhält und interpretieren Sie die Ergebnisse.
- Berechnen Sie allgemein die Resonanzfrequenz (Frequenz, bei der die Amplitude maximal ist) f_R des Systems.
- Von welchen Parametern hängt die Resonanzfrequenz in welcher Weise ab? Skizzieren Sie qualitativ die Resonanzfrequenz in Abhängigkeit vom Reibungsfaktor.
- Stellen Sie $A(f)$ für $C = 50$, $f_0 = 5$ und $\gamma = 1,1$ für $f \in [0; 15]$ graphisch dar.
- Diskutieren Sie mit Hilfe einer geeigneten Software, wie sich der Verlauf von $A(f)$ in Abhängigkeit von den vorkommenden Parametern ändert.

Lösung: (a) $\lim_{f \rightarrow 0} A(f) = \frac{C}{f_0^2}$ System folgt exakt dem Erreger.

$\lim_{f \rightarrow \infty} A(f) = 0$ System kommt nicht mehr mit.

(b) $f_R = \sqrt{f_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$

- (c) f_R nimmt mit der Eigenfrequenz f_0 des Systems zu und mit dem Reibungsfaktor γ ab. Für kleine Reibungen gilt $f_R \approx f_0$.

2. Die Stromstärke durch eine Schaltung aus einem Widerstand, einer Spule und einem Kondensator hängt von der Frequenz f und der anliegenden Wechselspannung ($\omega = 2\pi f$) ab. Sie berechnet sich nach der Formel

$$I(\omega) = \sqrt{\frac{100 - 2\omega^2}{100R^2 + \omega^2} + 0,01\omega^2} \quad D = \mathbb{R}_0^+.$$

Für R setzt man dazu die Maßzahl des enthaltenen ohmschen Widerstandes und für f die Maßzahl der Frequenz ein. $I(\omega)$ liefert dann die Maßzahl der Stromstärke.

- Betrachten Sie die Funktion $I(\omega)$ zunächst für $R = 0$.
 - Vereinfachen Sie die Funktionsgleichung und geben Sie die Nullstellen der Funktion an.
 - Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion für ω gegen Null und gegen Unendlich.
 - Untersuchen Sie, ob die Funktion im gesamten Definitionsbereich differenzierbar ist.
 - Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion.
 - Zeichnen Sie die Funktion für $\omega \in [0; 25]$.

(b) Betrachten Sie nun die allgemeine Form der Funktion

- i. Berechnen Sie $I(10)$ in Abhängigkeit von R .
- ii. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion für ω gegen Null und gegen Unendlich.
- iii. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion.
- iv. Zeichnen Sie die Funktion für $R = 0,2$.
- v. Zeichnen Sie $I(\omega)$ mit einer geeigneten Software für $R \in \{0; 0,1; 0,2; \dots\}$ und beschreiben Sie die Veränderungen der Funktion.
- vi. Für welche Frequenz ist $I(\omega)$ unabhängig von R ?

Hinweis: Die diskutierte Funktion beschreibt den Anregungsstrom eines Parallelschwingkreises mit $L = 0,1$ und $C = 0,1$. Die allgemeine Funktion heißt

$$I_{\text{ges}} = \sqrt{\frac{1 - 2LC\omega^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + \omega^2 C^2}.$$

Lösung: (a) i. $I(\omega) = |\frac{1}{0,1\omega} - 0,1\omega|, N(10|0)$

ii. $\lim_{\omega \rightarrow 0} I(\omega) = \infty; \lim_{\omega \rightarrow \infty} I(\omega) = \infty$

iii. Bei $\omega = 10$ nicht differenzierbar!

iv. Für $\omega < 10$ streng monoton fallend und für $\omega > 10$ streng monoton steigend.

(b) i. $I(10) = \sqrt{1 - \frac{1}{1+R^2}} = \frac{R}{\sqrt{1+R^2}}$

ii. $\lim_{\omega \rightarrow 0} I(\omega) = \frac{1}{R}; \lim_{\omega \rightarrow \infty} I(\omega) = \infty$

iii. waagrechte Tangente bei $\omega = 0$;
Minimum bei $\omega = 10\sqrt{\sqrt{1+2R^2} - R^2}$

iv.

v. $I(0)$ sinkt; $I(\text{Minimum})$ steigt

vi. $\omega = \sqrt{50}$

3. Überlegen Sie, wie der Graph der Funktion f für verschiedene Werte der Parameter a, b und c qualitativ verläuft und skizzieren Sie den Graphen.

Überprüfen Sie Ihre Überlegungen mit Hilfe einer geeigneten Software.

(a) i. $f(x) = x^3 + ax$ mit $a \in \mathbb{R}^+$

ii. $f(x) = x^3 + ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$

iii. $f(x) = x^4 + ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}^+$

iv. $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$

v. $f(x) = x^5 + ax^3 + bx$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$

- vi. $f(x) = x^5 + ax^3 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}^+$
- (b) i. $f(x) = x - \frac{a}{x}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$
- ii. $f(x) = x^2 - \frac{a}{x} + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$
- iii. $f(x) = x^3 - \frac{a}{x^2} + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$
- (c) i. $f(x) = x \sin(x)$
- ii. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \sin(x)$
- iii. $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$
- iv. $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}$

Lösung:

- 4. (a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$.
- (b) Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen in das Koordinatensystem von (a):
- i. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 2$
- ii. $f(x) = (x + 1)^3 + 4(x + 1)^2 + 4(x + 1)$
- iii. $f(x) = (x + 1)^3 + 4(x + 1)^2 + 4(x + 1) + 2$
- iv. $f(x) = (x - 2)^3 + 4(x - 2)^2 + 4(x - 2)$
- v. $f(x) = (x - 2)^3 + 4(x - 2)^2 + 4(x - 2) - 3$
- vi. $f(x) = (x + 4)^3 + 4(x + 4)^2 + 4(x + 4)$
- vii. $f(x) = (x + 4)^3 + 4(x + 4)^2 + 4(x + 4) + 4$
- (c) Überprüfen Sie Ihre Zeichnungen mit einer geeigneten Software.

Lösung:

- 5. (a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \sin(x)$.
- (b) Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen in das Koordinatensystem von (a):
- i. $f(x) = \sin(x) + 2$
- ii. $f(x) = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)$
- iii. $f(x) = \sin(x + \frac{1}{2}\pi) + 2$
- iv. $f(x) = 2 \cdot \sin(x)$
- v. $f(x) = 2 \cdot \sin(x + \pi)$
- vi. $f(x) = \sin(2x)$

- vii. $f(x) = \sin(2x) - 3$
 (c) Überprüfen Sie Ihre Zeichnungen mit einer geeigneten Software.

Lösung:

6. (a) Welche Bedingung müssen die Variablen a, b und c erfüllen, damit der Graph der Funktion $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($D = \mathbb{R}$) drei waagrechte Tangenten hat. Zeichnen Sie mit einer geeigneten Software die Graphen von $f(x)$ für $a = c = 1$ und verschiedene Werte für b .
- (b) Wieviele waagrechte Tangenten hat der Graph der Funktion $f(x) = x^5 + bx^3 - x$, $b \in \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}$? Zeichnen Sie mit einer geeigneten Software die Graphen von $f(x)$ für verschiedene Werte für b .
- (c) Wieviele waagrechte Tangenten hat der Graph der Funktion $f(x) = x^5 + bx^3 + x$, $b \in \mathbb{R}$ und $b^2 > \frac{20}{9}$, $D = \mathbb{R}$? Zeichnen Sie mit einer geeigneten Software die Graphen von $f(x)$ für verschiedene Werte für b .

Lösung: (a) $f'(x) = 4ax^3 + 2bx = 2x \cdot (2ax^2 + b) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_{2/3} = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}$.
 Also: drei waagrechte Tangenten, wenn a und b verschiedene Vorzeichen haben.

- (b) $f'(x) = 5x^4 + 3bx^2 - 1 = 5q^2 + 3bq - 1 = 0$
 (Substitution: $q = x^2$) $\Rightarrow$
 $q_1 = \frac{-3b + \sqrt{9b^2 + 20}}{10} > 0$. Da $\sqrt{9b^2 + 20} > |3b| \geq 3b \Rightarrow$
 $x_1 = \sqrt{\frac{1}{10}(-3b + \sqrt{9b^2 + 20})}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{10}(-3b + \sqrt{9b^2 + 20})}$
 $q_2 = \frac{-3b - \sqrt{9b^2 + 20}}{10} < 0$. Da $\sqrt{9b^2 + 20} > |3b| \geq 3b$.
 Also: Der Graph von $f(x)$ hat zwei waagrechte Tangenten.

- (c) $f'(x) = 5x^4 + 3bx^2 + 1 = 5q^2 + 3bq + 1 = 0$
 (Substitution: $q = x^2$) $\Rightarrow$
 $q_1 = \frac{-3b + \sqrt{9b^2 - 20}}{10}$. Da $\sqrt{9b^2 - 20} < |3b|$ folgt: $q_1 > 0$ für $b < 0$ und $q_1 < 0$ für $b > 0$.
 $q_2 = \frac{-3b - \sqrt{9b^2 - 20}}{10}$. Da $\sqrt{9b^2 - 20} < |3b|$ folgt: $q_2 > 0$ für $b < 0$ und $q_2 < 0$ für $b > 0$.
 Also:
 Der Graph von $f(x)$ hat vier waagrechte Tangenten wenn $b < -\frac{\sqrt{20}}{3}$ (q_1 und q_2 positiv; Voraussetzung für b beachten).
 Der Graph von $f(x)$ hat keine waagrechte Tangenten wenn $b > -\frac{\sqrt{20}}{3}$ (q_1 und q_2 negativ; Voraussetzung für b beachten)).

7. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}, \quad D_f =]0; 1]$$

- (a) Untersuchen Sie f auf Monotonie!
- (b) Wie viele Terrassenpunkte hat f und wie lauten deren Koordinaten?
- (c) Zeichnen Sie den Graphen von f
 - i. im Intervall $]0; 1]$ ($x = 1 \hat{=} 10 \text{ cm}$ und $y = 20 \hat{=} 10 \text{ cm}$)
 - ii. im Intervall $]0; 0,08]$ ($x = 0,01 \hat{=} 1 \text{ cm}$ und $y = 100 \hat{=} 10 \text{ cm}$).

Für das Zeichnen der Graphen ist ein Computer natürlich sehr nützlich!

Lösung: Echt monoton fallend in ganz D_f . $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \left(1 + \cos \frac{1}{x}\right)$

Unendlich viele Terrassenpunkte: $T\left(\frac{1}{(1+2k)\pi} \mid (1+2k)\pi\right)$

8. Zerodur ist eine Glaskeramik, die über einen weiten Temperaturbereich nur eine sehr kleine Temperatúrausdehnung aufweist. Aus diesem Grund findet es Anwendung als Spiegelträger in der Lasertechnik und in Teleskopen.

Die Längenausdehnung $f(T)$ (in $\frac{\mu\text{m}}{^\circ\text{C}}$) eines 10 m langen Zerodurstabes in Abhängigkeit von der Temperatur T in $^\circ\text{C}$ lässt sich näherungsweise durch folgende Funktion beschreiben:

$$f(T) = -0,6 + 1,63 \cdot \frac{T}{100^\circ\text{C}} - 2,91 \cdot \left(\frac{T}{100^\circ\text{C}}\right)^2 - 2,49 \cdot \left(\frac{T}{100^\circ\text{C}}\right)^3$$

- (a) Untersuchen Sie den Kurvenverlauf von $f(T)$.
- (b) Zeichnen Sie $f(T)$ mit einer geeigneten Software im Bereich von -100°C bis 100°C .
- (c) Eine exaktere Beschreibung der Längenausdehnung liefert:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(T) = & f(T) + \\ & + 2,74 \cdot \left(\frac{T}{100^\circ\text{C}}\right)^4 + 1,43 \cdot \left(\frac{T}{100^\circ\text{C}}\right)^5 - \\ & - 0,62 \cdot \left(\frac{T}{100^\circ\text{C}}\right)^6 - 0,26 \cdot \left(\frac{T}{100^\circ\text{C}}\right)^7 \end{aligned}$$

Zeichnen Sie $\tilde{f}(T)$ mit einer geeigneten Software und vergleichen Sie den Graphen mit dem von $f(T)$. Diskutieren Sie das Ergebnis.

Lösung: (a) Substitution: $x = \frac{T}{100^\circ\text{C}}$,

Maximum $(0,22 \mid -0,41)$, Minimum $(-1,00 \mid -2,65)$,
Wendepunkt $(-0,39 \mid -1,53)$

- (b)

2.6 Kurvendiskussion

- (c) Im Temperaturbereich von -25°C bis 25°C weicht $\tilde{f}(T)$ von $f(T)$ nur geringfügig ab. Hier stellt also $f(T)$ eine genügend gute Näherung dar.

Betrachtet man aber einen größeren Temperaturbereich, muss $\tilde{f}(T)$ verwendet werden.

$$\text{z. B. } |f(50^\circ\text{C}) - \tilde{f}(50^\circ\text{C})| = 0,204, \quad \frac{|f(50^\circ\text{C}) - \tilde{f}(50^\circ\text{C})|}{\tilde{f}(50^\circ\text{C})} = 33\%$$

Dem Diagramm entnimmt man, dass die Längenänderung $\tilde{f}(T)$ eines 10 m langen Stabes im Temperaturbereich von -100°C bis 100°C ca. $1,0 \frac{\mu\text{m}}{^\circ\text{C}}$ beträgt. Dies entspricht einer Längenausdehnung um $0,00001\%$ pro $^\circ\text{C}$!

Literatur: *Mathematikaufgaben, Anwendungen aus der modernen Technik und Arbeitswelt*, Werner Schmidt, Ernst Klett Verlag, 1984

9. Eine Lemniskate ist die Menge aller Punkte P, für die für die Abstände zu zwei gegebenen Punkten A($-c|0$) und B($c|0$) gilt: $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = c^2$
- (a) Bestimmen sie eine Gleichung zur Beschreibung einer Lemniskate.
 - (b) Bestimmen sie die Nullstellen einer Lemiskate.
 - (c) Bestimmen sie die Punkte mit waagrechten Tangenten.
 - (d) Zeichnen sie die Lemniskaten für $c = 1, 2, 3, 4, 5$ mit einer geeigneten Software.

Lösung: (a) $c^2 = \sqrt{((x-c)^2 + y^2)} \cdot \sqrt{((x+c)^2 + y^2)} \implies$

$$y^4 + y^2(2x^2 + 2c^2) + x^4 - 2x^2c^2 = 0 \implies$$

$$f(x) = \pm \sqrt{-x^2 - c^2 + \sqrt{c^4 + 4x^2c^2}}$$

(b) $x_1 = 0, x_{2/3} = \pm \sqrt{2}c$

(c) $f'(x) = \pm \frac{-x\sqrt{c^4 + 4x^2c^2} + 2c^2x}{\sqrt{-x^2 - c^2 + \sqrt{c^4 + 4x^2c^2}} \cdot \sqrt{c^4 + 4x^2c^2}} \implies$

vier Punkte mit waagrecht Tangente:

$$x_{4/5} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}c, y_{4a/4b} = y_{5a/5b} = \pm \frac{1}{2}c$$

(d)

3 Stochastik: Binomialverteilung und beurteilende Statistik

3.1 Urnenmodell - Ziehen mit und ohne Zurücklegen

1. Pokern

Beim Pokern wird ein Kartenspiel mit 52 Blatt verwendet. Es gibt die 13 Kartenwerte 2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K,A und die Farben Pik, Kreuz, Karo und Herz. Jeder Spieler erhält fünf Karten. Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Pokerblätter:

- (a) Royal Flush: 10,J,Q,K,A in einer Farbe
- (b) Straight Flush: A,2,3,4,5 oder 2,3,4,5,6 oder 3,4,5,6,7 oder ... oder 9,10,J,Q,K, alle in einer Farbe
- (c) Vierer: vier gleiche Werte
- (d) Full House: Dreier und Paar, z.B. K,K,K,3,3
- (e) Flush: Alle Karten von der gleichen Farbe
- (f) Straight: A,2,3,4,5 oder 2,3,4,5,6 oder 3,4,5,6,7 oder ... oder 10,J,Q,K,A, nicht alle in einer Farbe
- (g) Dreier: drei gleiche Werte aber kein Full House
- (h) Zwei Paare: z.B. A,A,3,3,7
- (i) Ein Paar: zwei gleiche Werte, die restlichen Karten verschiedene Werte

Lösung: Die Zahl der möglichen Pokerblätter zu fünf Karten ist $n = \binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

- (a) Royal Flush: $z = 4 \implies p = \frac{z}{n} = 1,54 \cdot 10^{-6}$
- (b) Straight Flush: $z = 4 \cdot 9 = 36 \implies p = \frac{z}{n} = 1,39 \cdot 10^{-5}$
- (c) Vierer: $z = 13 \cdot 48 = 624 \implies p = \frac{z}{n} = 2,40 \cdot 10^{-4}$
- (d) Full House: $z = 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 3744 \implies p = \frac{z}{n} = 1,44 \cdot 10^{-3}$
- (e) Flush: $z = 4 \cdot \binom{13}{5} - 36 - 4 = 5108 \implies p = \frac{z}{n} = 1,97 \cdot 10^{-3}$
- (f) Straight: $z = 10 \cdot 4^5 - 36 - 4 = 10200 \implies p = \frac{z}{n} = 3,92 \cdot 10^{-2}$

3.1 Urnenmodell - Ziehen mit und ohne Zurücklegen

- (g) Dreier: $z = 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \frac{48 \cdot 44}{2} = 54\,912 \implies p = \frac{z}{n} = 2,11 \cdot 10^{-2}$
- (h) Zwei Paare: $z = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot \binom{4}{2} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} \cdot 44 = 123\,552 \implies p = \frac{z}{n} = 4,75 \cdot 10^{-2}$
- (i) Ein Paar: $13 \cdot \binom{4}{2} \cdot \frac{48 \cdot 44 \cdot 40}{3!} = 1\,098\,240 \implies p = \frac{z}{n} = 0,423$

2. Schafkopf

Beim Schafkopfen wird ein Kartenspiel mit 32 Blatt verwendet. Es gibt die acht Kartenwerte 7,8,9,10,U,O,K,A und die Farben Gras, Eichel, Schell und Herz. Jeder Spieler erhält acht Karten. Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Schafkopfblätter:

- (a) Buam-Solo-Du („du“ entspricht „tout“): alle Ober und alle Unter
- (b) Vier Ober und zusätzlich vier Herzkarten
- (c) Keinen Ober und keinen Unter
- (d) Acht Trümpfe für ein Herz-Solo (es gibt 14 Trümpfe: 4O, 4U, Herzkarten)
- (e) Ein Spieler hat folgendes Blatt: O_E, O_G, O_S, U_E, U_G, U_H, U_S, A_H. Der Spieler gewinnt das „Solo-Du“, wenn die Gegner keinen Stich machen, d.h. wenn der Gegner, der den Herzober hat, höchstens noch einen weiteren Trumpf besitzt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der „Du“ zu gewinnen?

Lösung: Es gibt $n = \binom{32}{8} = 10\,518\,300$ verschiedene Schafkopfblätter.

- (a) Buam-Solo-Du: $z = 1 \implies p = \frac{z}{n} = 9,51 \cdot 10^{-8}$.

Wenn jemand jeden Tag 100 Spiele absolviert, dauert es im Schnitt $10^5 \text{ d} = 288 \text{ a}$ bis er einmal ein Buam-Solo-Du erhält. Soviel zum korrekten Mischen beim Schafkopfen!

- (b) Vier Ober und vier Herzkarten: $z = 1 \cdot \binom{7}{4} = 35 \implies p = \frac{z}{n} = 3,33 \cdot 10^{-6}$
- (c) Keinen Ober und keinen Unter: $z = \binom{24}{8} = 735\,471 \implies p = \frac{z}{n} = 6,99 \cdot 10^{-2}$
- (d) Acht Trümpfe für ein Herz-Solo: $z = \binom{14}{8} = 3003 \implies p = \frac{z}{n} = 2,89 \cdot 10^{-4}$
- (e) Wir betrachten den Spieler mit dem Herzober. Er bekommt noch sieben Karten aus den restlichen 23 Karten (5 Trümpfe, 18 Nichttrümpfe). Die Zahl der Möglichkeiten, keinen Trumpf mehr zu bekommen, ist

$$z_0 = \binom{18}{7}$$

Die Zahl der Möglichkeiten, noch einen Trumpf zu bekommen, ist

$$z_1 = 5 \cdot \binom{18}{6}$$

3.1 Urnenmodell - Ziehen mit und ohne Zurücklegen

Also gewinnt unser Spieler seinen „Du“ in $z = z_1 + z_2 = 124\,644$ von

$$n = \binom{23}{7} = 245\,157$$

Fällen, d.h. mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{z}{n} = 0,5084 = 50,84\%$.

3. n ununterscheidbare Würfel werden einmal geworfen. Wie groß muss n mindestens sein, damit die Zahl der verschiedenen Ausgänge dieses Experiments größer als eine Million ist?

Lösung: $\overline{\text{GZ}}(6, n) = \binom{6+n-1}{n} = \binom{n+5}{n} = \frac{(n+5)!}{n! \cdot 5!} = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{120}$

$$\overline{\text{GZ}}(6, n) > 10^6 \implies (n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) > 1,2 \cdot 10^8$$

Das Produkt nähern wir durch $(n+3)^5$ an:

$$(n+3)^5 > 1,2 \cdot 10^8 \implies n > (1,2 \cdot 10^8)^{\frac{1}{5}} - 3 = 38,3$$

Probieren:

$$\binom{38+5}{5} = 962\,598, \quad \binom{39+5}{5} = 1\,086\,008 \implies n \geq 39$$

4. Aus einem Kartenspiel (52 Blatt) werden solange Kartenpaare gezogen und beiseite gelegt, bis das Spiel aufgebraucht ist.
- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jedes gezogene Paar genau aus einer roten und einer schwarzen Karte besteht?
 - (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei jedem gezogenen Paar die erste Karte rot und die zweite Karte schwarz ist?
 - (c) Die erste gezogene Karte eines jeden Paares wird auf Stapel 1, die zweite auf Stapel 2 gelegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Spiel so in einen roten und in einen schwarzen Stapel getrennt?

Lösung: (a) Anfangslage: n rote und n schwarze Karten. Die Wahrscheinlichkeit für ein Pärchen ist

$$p_n = P(\{rs, sr\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2n-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2n-1} = \frac{n}{2n-1}$$

Beim nächsten Versuch ist die Ausgangslage $n-1$ rote und $n-1$ schwarze Karten, d.h. die Wahrscheinlichkeit für ein zweites Pärchen ist

$$p_{n-1} = \frac{n-1}{2(n-1)-1} = \frac{n-1}{2n-3}$$

3.1 Urnenmodell - Ziehen mit und ohne Zurücklegen

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann

$$\begin{aligned} p &= p_n \cdot p_{n-1} \cdot p_{n-2} \cdot \dots \cdot p_1 = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1} = \\ &= \frac{n! \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2}{(2n-1)!} = \frac{n! \cdot 2 \cdot (n-1) \cdot 2 \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1}{(2n-1)!} = \\ &= \frac{n! \cdot 2^{n-1} \cdot (n-1)!}{(2n-1)!} = \frac{n! \cdot 2^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot 2n}{(2n-1)! \cdot 2n} = \frac{n! \cdot 2^n \cdot n!}{(2n)!} = \frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n)!} \end{aligned}$$

Für $n = 26$ ist

$$p = \frac{2^{26} \cdot (26!)^2}{52!} = 1,35 \cdot 10^{-7}$$

- (b) Der Unterschied zu Teilaufgabe (a): Die Wahrscheinlichkeit für ein rs-Paar ist halb so groß wie p_n , d.h. die gesamte gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$p' = \frac{1}{2^n} \cdot p = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n)!} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Für $n = 26$ ist

$$p' = \frac{(26!)^2}{52!} = 2,0 \cdot 10^{-15}$$

- (c) Entweder Stapel 1 rot und Stapel 2 schwarz oder umgekehrt:

$$p'' = 2p' = \frac{2(n!)^2}{(2n)!}$$

Für $n = 26$ ist $p'' = 4,0 \cdot 10^{-15}$.

5. Rudi Ratlos steht mit fünf Gepäckstücken vor zwanzig leeren Schließfächern. Auf wie viele verschiedene Arten kann er die Gepäckstücke unter folgenden Bedingungen verteilen:

- (a) Pro Schließfach nur ein Gepäckstück, die Gepäckstücke sind ununterscheidbar.
- (b) Pro Schließfach beliebig viele ununterscheidbare Gepäckstücke.
- (c) Pro Schließfach nur ein Gepäckstück, die Gepäckstücke sind unterscheidbar.
- (d) Pro Schließfach beliebig viele unterscheidbare Gepäckstücke.
- (e) Pro Schließfach höchstens zwei der unterscheidbaren Gepäckstücke.
- (f) Pro Schließfach höchstens zwei der ununterscheidbaren Gepäckstücke.

Lösung: (a) $\overline{\text{GZ}}(20; 5) = \binom{20}{5} = \frac{20!}{5! \cdot 15!} = 15\,504$

(b) $\overline{\text{GZ}}(20; 5) = \binom{20+5-1}{5} = \binom{24}{5} = \frac{24!}{5! \cdot 19!} = 42\,504$

3.1 Urnenmodell - Ziehen mit und ohne Zurücklegen

(c) $G\bar{Z}(20; 5) = \frac{20!}{15!} = 1\,860\,480$

(d) $GZ(20; 5) = 20^5 = 3\,200\,000$

(e) Kein Fach doppelt belegt: (c) $\implies z_0 = 1\,860\,480$

Ein Fach doppelt belegt: $\binom{20}{4}$ Möglichkeiten für die Auswahl der 4 Fächer, 4 Möglichkeiten für die Auswahl des doppelt belegten Faches, $\frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!}$ Möglichkeiten für die Belegung der Fächer:

$$z_1 = 4 \cdot \binom{20}{4} \cdot \frac{5!}{2!} = 1\,162\,800$$

Zwei Fächer doppelt belegt: $\binom{20}{3}$ Möglichkeiten für die Auswahl der 3 Fächer, $\binom{3}{2} = 3$ Möglichkeiten für die Auswahl der doppelt belegten Fächer, $\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!}$ Möglichkeiten für die Belegung der Fächer:

$$z_2 = 3 \cdot \binom{20}{3} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 2!} = 102\,600$$

$$z = z_0 + z_1 + z_2 = 3\,125\,880$$

(f) Wie (e), nur für die Belegung der Fächer gibt es jeweils nur eine Möglichkeit:

$$z = \binom{20}{5} + 4 \cdot \binom{20}{4} + 3 \cdot \binom{20}{3} = 15\,504 + 19\,380 + 3\,420 = 38\,304$$

6. Das Geburtstagsparadoxon

(a) Berechne die Wahrscheinlichkeit $p(n)$, dass unter n zufällig ausgesuchten Personen mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben. Es darf angenommen werden, dass das Jahr 365 Tage hat und jeder Tag als Geburtstag gleichwahrscheinlich ist. Berechne speziell $p(2)$ bis $p(10)$, $p(20)$, $p(40)$ und $p(60)$.

(b) Ab welcher Personenanzahl ist es bei einer Party günstig darauf zu wetten, dass mindestens zwei der Gäste am gleichen Tag Geburtstag haben?

Lösung: (a) $\bar{p}(n)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter n Personen alle an verschiedenen Tagen Geburtstag haben:

$$\bar{p}(n) = \begin{cases} \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} = \frac{365!}{365^n \cdot (365 - n)!} & \text{für } n \leq 365 \\ 0 & \text{für } n > 365 \end{cases}$$

3.1 Urnenmodell - Ziehen mit und ohne Zurücklegen

Da der Taschenrechner $n!$ für $n > 69$ nicht berechnen kann, verwenden wir das Ergebnis in der Form (hier ist keine Fallunterscheidung nötig!)

$$\bar{p}(n) = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \dots \cdot \frac{365-n+1}{365} = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{365-i}{365}$$

$$p(n) = 1 - \bar{p}(n) = 1 - \prod_{i=1}^{n-1} \frac{365-i}{365}$$

Eine weitere Form für die Berechnung mit einem Taschenrechner, der die Binomialkoeffizienten beherrscht:

$$\bar{p}(n) = \frac{365!}{365^n \cdot (365-n)!} = \frac{365! \cdot n!}{365^n \cdot (365-n)! \cdot n!} = \frac{n!}{365^n} \cdot \binom{365}{n}$$

Weiter muss man aufpassen, dass der TR kein Zwischenergebnis $\geq 10^{100}$ errechnet. Als Beispiel die Berechnung für $n = 40$:

$$\bar{p}(40) = \binom{365}{39} \cdot \frac{326}{40} : 365^{20} : 365^{20} \cdot 40! = 0,10877 \implies p(40) = 0,89123$$

Noch etwas trickreicher die Berechnung für $n = 60$:

$$\binom{365}{60} = \underbrace{\frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot 327}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 39}}_{\binom{365}{39}} \cdot \underbrace{\frac{326 \cdot 325 \cdot \dots \cdot 306}{40 \cdot 41 \cdot \dots \cdot 60}}_{\binom{326}{21} \cdot \frac{21! \cdot 39!}{60!}}$$

$$\bar{p}(60) = \binom{365}{39} : 60! \cdot \binom{326}{21} \cdot 21! \cdot 39! : 365^{20} : 365^{20} : 365^{20} \cdot 60! = 0,005877$$

$$\implies p(60) = 0,99412$$

n	2	3	4	5	6	7
$p(n)$	0,274%	0,820%	1,64%	2,71%	4,05%	5,62%
n	8	9	10	20	40	60
$p(n)$	7,43%	9,46%	11,69%	41,14%	89,12%	99,41%

$$(b) \quad p(22) = 47,57\% \text{ und } p(23) = 50,73\% \implies \text{ab 23 Personen}$$

7. Eine Klasse mit 25 Schülern besuchen 15 Buben und zehn Mädchen. Für einen Wettbewerb wird eine Gruppe von acht Schülern der Klasse zufällig ausgewählt.
- Berechne die Zahl N der verschiedenen möglichen Gruppen.
 - Wie viele verschiedene Gruppenfotos mit nebeneinander aufgestellten Schülern sind möglich, wenn man alle möglichen Gruppen berücksichtigt?
 - Wie viele verschiedene Gruppen mit genau x Mädchen und damit $8-x$ Buben gibt es? Berechne die Wahrscheinlichkeit $P(x)$, dass eine Gruppe genau x Mädchen enthält und stelle $P(x)$ als Säulendiagramm grafisch dar. Wertetabelle nicht vergessen!

3.1 Urnenmodell - Ziehen mit und ohne Zurücklegen

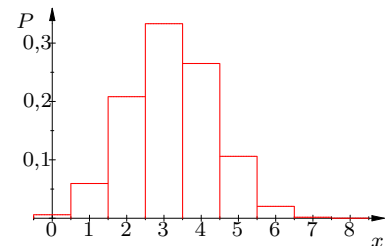
Lösung: (a) $N = \binom{25}{8} = 1\,081\,575$

(b) $N \cdot 8! = 1\,081\,575 \cdot 40\,320 = 43\,609\,104\,000 \approx 4,36 \cdot 10^{10}$

(c) Es gibt $\binom{10}{x}$ Möglichkeiten, x Mädchen und $\binom{15}{8-x}$ Möglichkeiten, $8-x$ Buben auszuwählen. Die Zahl der Gruppen mit genau x Mädchen ist also

$$Z(x) = \binom{10}{x} \cdot \binom{15}{8-x} \implies P(x) = \frac{Z(x)}{N} = \frac{\binom{10}{x} \cdot \binom{15}{8-x}}{\binom{25}{8}}$$

x	$P(x)$	x	$P(x)$
0	0,00595	5	0,10601
1	0,05950	6	0,02039
2	0,20824	7	0,00166
3	0,33318	8	0,00004
4	0,26503		



8. Der runde Tisch

- n Personen ($n \leq s$) nehmen an einem runden Tisch mit s Stühlen Platz. Berechne die Anzahl der verschiedenen Sitzordnungen. Es gibt zwei Arten, das Wort *Sitzordnung* zu deuten; rechne mit beiden Möglichkeiten.
- Wie groß ist bei zufälligem Hinsetzen die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Freunde unter den Platznehmenden nebeneinander sitzen?
- Wie (b), aber für drei Freunde!
- Rechne (a), (b) und (c) noch einmal für eine lange, nicht geschlossene Sitzreihe.
- Aus n Personen ($n \geq s$) werden s ausgewählt und zufällig auf s nummerierte Stühle verteilt. Berechne die Anzahl der verschiedenen Sitzordnungen.

Lösung: (a) Sitzordnung 1: Stühle nummeriert: $m_1 = \text{G}\bar{\text{Z}}(s, n) = \frac{s!}{(s-n)!}$

Sitzordnung 2: Stühle nicht nummeriert, es kommt nur darauf an, wer welche Nachbarn hat.

$$m_2 = \frac{m_1}{s} = \frac{\text{G}\bar{\text{Z}}(s, n)}{s} = \frac{(s-1)!}{(s-n)!}$$

- Der erste Freund hat s Sitzmöglichkeiten, der zweite dann jeweils zwei (links oder rechts), die restlichen $n-2$ Personen auf $s-2$ Sitzen haben

$$\frac{(s-2)!}{(s-2-(n-2))!} = \frac{(s-2)!}{(s-n)!}$$

3.1 Urnenmodell - Ziehen mit und ohne Zurücklegen

Sitzmöglichkeiten. Es gibt also

$$g = \frac{2s(s-2)!}{(s-n)!}$$

günstige Sitzmöglichkeiten, d.h.

$$p = \frac{g}{m_1} = \frac{2s(s-2)!(s-n)!}{s!(s-n)!} = \frac{2(s-2)!}{(s-1)!} = \frac{2}{s-1}$$

Es überrascht, dass p nicht von n abhängt. Die fertige Lösung zeigt uns einen eleganten Lösungsweg:

Sitzt der erste Freund, dann hat der zweite $s-1$ Sitzmöglichkeiten, wovon zwei günstig sind, also $p = \frac{2}{s-1}$.

- (c) Wenn der erste Freund schon sitzt, haben die beiden anderen noch

$$\text{G}\bar{\text{Z}}(s-1, 2) = \frac{(s-1)!}{(s-3)!} = (s-1)(s-2)$$

Sitzmöglichkeiten, wovon sechs günstig sind (123,132,213,312,231,321):

$$P = \frac{6}{(s-1)(s-2)}$$

- (d) (a) Wie „nummerierte Plätze“, d.h. m_1
 (b) Sitzt der erste Freund nicht auf einem Randplatz, dann hat der zweite zwei Sitzmöglichkeiten, sonst nur eine. Von den insgesamt $s(s-1)$ Sitzmöglichkeiten der beiden Freunde sind also $1 + 2(s-2) + 1 = 2(s-1)$ günstig, also

$$p = \frac{2(s-1)}{s(s-1)} = \frac{2}{s}$$

- (c) Sitzt der erste Freund auf einem Randplatz, dann haben die beiden anderen zwei Sitzmöglichkeiten (123, 132), sitzt er neben dem Randplatz, dann haben sie vier (123,132,213,312) sonst sechs Möglichkeiten. Von den insgesamt $s(s-1)(s-2)$ Sitzmöglichkeiten der drei Freunde sind also $2 + 4 + 6(s-4) + 4 + 2 = 6(s-2)$ günstig, also

$$p = \frac{6(s-2)}{s(s-1)(s-2)} = \frac{6}{s(s-1)}$$

(e) $\binom{n}{s} \cdot s! = \frac{n!s!}{s!(n-s)!} = \frac{n!}{(n-s)!} = \text{G}\bar{\text{Z}}(n, s)$

9. (a) Wie viele Wörter kann man bilden, die jeden Buchstaben des Alphabets genau einmal enthalten?
 (b) Wie viele Sätze kann man bilden, die jeden Buchstaben des Alphabets genau einmal enthalten, wenn zusätzlich zu den Buchstaben ein Leerzeichen zwischen zwei Wörtern erlaubt ist (keine Satzzeichen)?

3.1 Urnenmodell - Ziehen mit und ohne Zurücklegen

- (c) Wie viele fünfbuchstabile Wörter kann man bilden?
- (d) Wie viele fünfbuchstabile Wörter kann man bilden, die keinen Buchstaben mehr als einmal enthalten?

Lösung: (a) $26! = 4,033 \cdot 10^{26}$

- (b) Bei 26 Buchstaben gibt es 25 Plätze für Leerzeichen, d.h. 2^{25} Möglichkeiten, Leerzeichen zu setzen. Daraus folgt für die Zahl der Sätze:

$$26! \cdot 2^{25} = 1,35 \cdot 10^{34}$$

(c) $26^5 = 11\,881\,376$

(d) $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 7\,893\,600$

10. Ein beschwipster Zecher schleudert drei Wurfpeile auf eine Zielscheibe, die aus fünf gleich großen Feldern besteht. Die Trefferwahrscheinlichkeit für jedes der nummerierten Felder ist gleich. Wie viele verschiedene Ausgänge kann das Pfeilwerfen haben, wenn vorausgesetzt wird, dass jeder Wurf die Scheibe trifft und

- (a) die Reihenfolge der Treffer von Bedeutung ist
- (b) die Reihenfolge der Treffer nicht von Bedeutung ist?

Wie groß ist in beiden Fällen die Wahrscheinlichkeit, dass alle Pfeile das gleiche Feld treffen?

Lösung: (a) Als Ergebnisraum verwenden wir $\Omega_r = \{111, 112, \dots, 555\}$, wobei xyz bedeutet: Pfeil 1 in Feld x , Pfeil 2 in Feld y und Pfeil 3 in Feld z .

$$z_r = |\Omega_r| = 5^3 = 125$$

Drei verschiedene Felder: $z_{r3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Zwei verschiedene Felder: $z_{r2} = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$

Alle im gleichen Feld: $z_{r1} = 1 \cdot 5 = 5$

Jedes der 125 Elementarereignisse hat die gleiche Wahrscheinlichkeit $p_r = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$.

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$A = \text{„Alle Pfeile in einem Feld“} = \{111, 222, 333, 444, 555\}$$

ist dann

$$P(A) = 5p_r = \frac{1}{25} = \frac{z_{r1}}{z_r}$$

- (b) Als Ergebnisraum verwenden wir $\Omega = \{30000, 21000, \dots, 00003\}$, wobei z.B. 01020 bedeutet: ein Pfeil in Feld 2, 2 Pfeile 2 in Feld 4.

Drei verschiedene Felder: $z_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$

Zwei verschiedene Felder: $z_2 = 5 \cdot 4 = 20$

Alle im gleichen Feld: $z_1 = 1 \cdot 5 = 5$

3.1 Urnenmodell - Ziehen mit und ohne Zurücklegen

$$z = z_1 + z_2 + z_3 = 35$$

oder mit der Formel für ungeordnete Stichproben mit Zurücklegen:

$$z = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = 35$$

Es wäre falsch, hier $P(A) = \frac{z_1}{z} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$ zu verwenden, da die Elementarereignisse von Ω nicht gleichwahrscheinlich sind (in dieser Form kein Laplace-Experiment).

Ω ist eine Vergrößerung von Ω_r . Z.B. entsprechen die Elemente 125, 152, 215, 251, 512 und 521 aus Ω_r nur dem einen Element 11001 aus Ω . Dem Element 21000 $\in \Omega$ entsprechen die Elemente 112, 121, 211 aus Ω_r , dagegen hat $30000 \in \Omega$ nur ein Gegenstück $111 \in \Omega_r$. Es folgt

$$p(30000) = p_r, \quad p(21000) = 3p_r, \quad p(11100) = 6p_r$$

Mit $A = \{30000, 03000, 00300, 00030, 00003\}$ folgt dann $P(A) = 5p_r = \frac{1}{25}$

11. Eine Trommel enthält a rote und b blaue Kugeln. Mit einem Griff werden k Kugeln gezogen. Mit $P(x)$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass unter den gezogenen Kugeln genau x blaue sind.

$$(a) \text{ Beweise: } P(x) = \frac{\binom{a}{k-x} \binom{b}{x}}{\binom{a+b}{k}}.$$

- (b) Berechne $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ und $P(4)$ für $a = 10$, $b = 4$ und $k = 6$.

Lösung: (a) Wir denken uns die Kugeln nummeriert, z.B. die roten Kugeln von 1 bis a und die blauen von $a+1$ bis $n = a+b$. Da es nicht auf die Reihenfolge ankommt und ohne Zurücklegen gezogen wird („mit einem Griff“), gibt es insgesamt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, k Kugeln aus den n Kugeln zu ziehen. Ein Zug mit genau x blauen Kugeln hat $k-x$ rote Kugeln. Es gibt $\binom{a}{k-x}$ Möglichkeiten, $k-x$ rote Kugeln aus a roten Kugeln zu ziehen und $\binom{b}{x}$ Möglichkeiten, x blaue Kugeln aus b blauen Kugeln zu ziehen. Insgesamt gibt es also $\binom{a}{k-x} \binom{b}{x}$ Möglichkeiten für einen Zug mit x blauen Kugeln.

Andere Herleitung:

Man stelle sich ein Baumdiagramm des k -stufigen Versuchs vor. Für einen Pfad mit $k-x$ roten und x blauen Kugeln ist die Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} p &= \frac{a \cdot (a-1) \cdot \dots \cdot (a-k+x+1)}{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+x+1)} \cdot \frac{b \cdot (b-1) \cdot \dots \cdot (b-x+1)}{(n-k+x) \cdot (n-k+x-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)} = \\ &= \frac{a!}{(a-k+x)!} \cdot \frac{b!}{(b-x)!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} \end{aligned}$$

3.1 Urnenmodell - Ziehen mit und ohne Zurücklegen

Die Zahl der Pfade mit x blauen Kugeln ist gleich der Zahl der Möglichkeiten, x ununterscheidbare blaue Kugeln auf k Plätze zu verteilen, also $\binom{k}{x}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} P(x) &= p \cdot \binom{k}{x} = \frac{a!}{(a-k+x)!} \cdot \frac{b!}{(b-x)!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} \cdot \frac{k!}{x!(k-x)!} = \\ &= \frac{a!}{(k-x)!(a-k+x)!} \cdot \frac{b!}{x!(b-x)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{\binom{a}{k-x} \binom{b}{x}}{\binom{a+b}{k}} \end{aligned}$$

$$(b) \quad P(x) = \frac{\binom{10}{6-x} \binom{4}{x}}{\binom{14}{6}}, \quad P(0) = \frac{\binom{10}{6} \binom{4}{0}}{\binom{14}{6}} = \frac{70}{1001} = 6,993\%$$

$$P(1) = \frac{\binom{10}{5} \binom{4}{1}}{\binom{14}{6}} = \frac{336}{1001} = 33,566\%, \quad P(2) = \frac{\binom{10}{4} \binom{4}{2}}{\binom{14}{6}} = \frac{420}{1001} = 41,598\%$$

$$P(3) = \frac{\binom{10}{3} \binom{4}{3}}{\binom{14}{6}} = \frac{160}{1001} = 15,984\%, \quad P(4) = \frac{\binom{10}{2} \binom{4}{4}}{\binom{14}{6}} = \frac{15}{1001} = 1,499\%$$

12. Aus einem Kartenspiel (52 Blatt) werden nacheinander mit Zurücklegen k Karten ausgewählt. Für jede Wahl wird ein Zeitbedarf von einer Minute veranschlagt. Wie groß darf k höchstens gewählt werden, damit im Zeitraum von

(a) einem Jahr (b) 1000 Jahren (c) 13,7 Milliarden Jahren

alle Möglichkeiten durchgespielt werden können?

Lösung: $52^k \leq n \implies k \ln 52 \leq \ln n \implies k \leq \frac{\ln n}{\ln 52}$

$$(a) \quad n_1 = 365,25 \cdot 24 \cdot 60 = 525969 \implies k \leq \frac{\ln n_1}{\ln 52} = 3,33 \implies k_{\max} = 3$$

$$(b) \quad n_2 = 1000n_1 = 525969000 \implies k \leq \frac{\ln n_2}{\ln 52} = 5,08 \implies k_{\max} = 5$$

$$(c) \quad n_3 = 13,7 \cdot 10^9 n_1 = 7,206 \cdot 10^{15} \implies k \leq \frac{\ln n_3}{\ln 52} = 9,24 \implies k_{\max} = 9$$

13. Ordne folgenden Problemen die richtige Grundaufgabe der Kombinatorik zu und berechne dann die Anzahl der Möglichkeiten:

3.1 Urnenmodell - Ziehen mit und ohne Zurücklegen

- (a) Aus den 26 Buchstaben des Alphabets werden beliebige Wörter der Länge fünf gebildet.
- (b) Wie (a), jedoch jeder Buchstabe höchstens einmal.
- (c) Lotto „6 aus 49“.
- (d) Zehn Personen stellen sich in einer Reihe auf.
- (e) Zehn Kugeln mit den Ziffern 0 bis 9 auf drei Urnen verteilen.
- (f) Zehn Elektronen (ununterscheidbar) auf drei verschiedene Atome verteilen.
- (g) Zehn Elektronen (ununterscheidbar) auf drei gleiche Atome verteilen.

Lösung: (a) Geordnet mit Zurücklegen: $n = 26^5 = 11\,881\,376$

(b) Geordnet ohne Zurücklegen: $n = \frac{26!}{(26-5)!} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 7\,893\,600$

(c) Ungeordnet ohne Zurücklegen: $n = \binom{49}{6} = 13\,983\,816$

(d) Geordnet ohne Zurücklegen (Permutation): $n = 10! = 3\,628\,800$

(e) Geordnet mit Zurücklegen: $n = 3^{10} = 59\,049$

(f) Ungeordnet mit Zurücklegen: $n = \binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10} = \binom{12}{2} = 66$

Sind x_1, x_2 und x_3 die Besetzungszahlen, dann kann man das Problem auch so formulieren:

Wie viele Lösungen aus $\mathbb{N}_0$ hat die Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 10$?

(g) Das ist keine unserer Grundaufgaben. Anders formuliert lautet das Problem:

Wie viele Lösungen aus $\mathbb{N}_0$ hat die Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ mit $x_1 \leq x_2 \leq x_3$? Für dieses Problem gibt es keine einfache geschlossene Formel. Wir lösen es durch das Hinschreiben aller Möglichkeiten für (x_1, x_2, x_3) : $(0,0,10)$, $(0,1,9)$, $(0,2,8)$, $(1,1,8)$, $(0,3,7)$, $(1,2,7)$, $(0,4,6)$, $(1,3,6)$, $(2,2,6)$, $(0,5,5)$, $(1,4,5)$, $(2,3,5)$, $(2,4,4)$, $(3,3,4)$, also 14 Möglichkeiten.

Weiterführende Lektüre: Im Netz nach *Partiton Function* suchen (z.B. auf den Seiten von WolframMathWorld). Mit der Rundungsfunktion oder nint-Funktion (*nearest integer*)

$[x]$ = nächstgelegene ganze Zahl von x ,

wobei Komma-Fünf-Zahlen auf die nächste *gerade* Zahl gerundet werden ($[1,5] = 2$, $[2,5] = 2$, $[3,5] = 4$) und der Abrundfunktion oder floor-Funktion

$\lfloor x \rfloor$ = nächstkleinere ganze Zahl von x

($\lfloor -2,3 \rfloor = -3$, $\lfloor 2,3 \rfloor = 2$) hat die Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = n$ mit $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ genau

$$1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n^2}{12} \right\rceil$$

Lösungen in $\mathbb{N}_0$. Für $n = 10$ ergibt sich

$$1 + \left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{10^2}{12} \right\rceil = 1 + [5] + [8, \overline{3}] = 1 + 5 + 8 = 14$$

3.2 Bernoulli-Experiment und -Kette

1. Aufgaben zur Anwendung

Walter zinkt Würfel so, dass äußerlich keine Veränderung zu erkennen ist, die Wahrscheinlichkeit für „6“ aber 0,25 beträgt. Seine Frau Trude testet die Würfel folgendermaßen: Sie würfelt zwölfmal mit jedem Würfel. Wirft Sie mit einem Würfel mehr als dreimal eine „6“, so legt sie ihn zu den gezinkten, sonst zu den idealen.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein idealer Würfel zu den gezinkten gelegt wird?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein gezinkter Würfel zu den idealen gelegt wird?
- Wie könnte Trude die Fehlerquote verringern?



Lösung: (a) $n = 12$; $p_{\frac{1}{6}}(Z > 3) = 1 - \sum_{i=0}^3 B(12, \frac{1}{6}, i) = 1 - 0,87482191 \approx 12,5\%$

(b) $n = 12$; $p_{0,25}(Z \leq 3) = \sum_{i=0}^3 B(12, 0,25, i) = 0,64877 \approx 64,9\%$

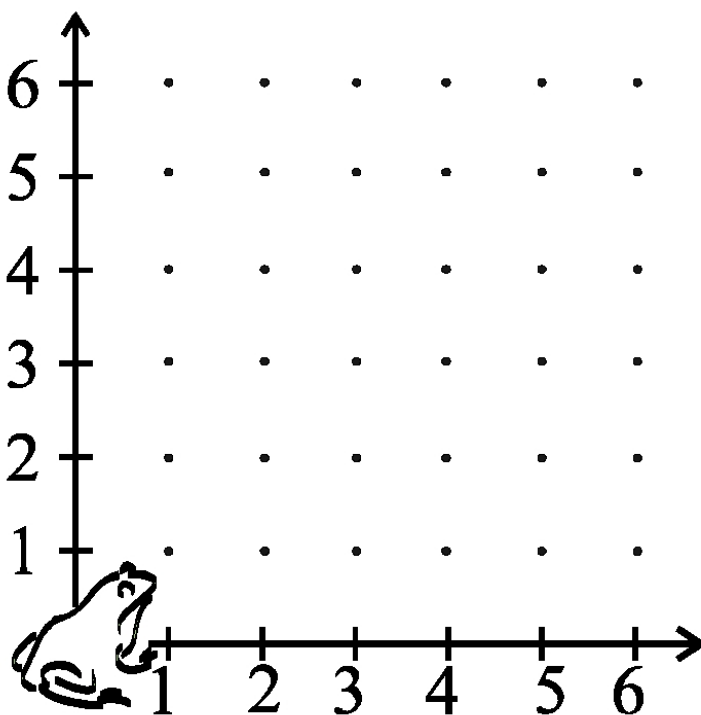
2. Aufgaben zur Anwendung

Ein Ko-Frosch sitzt auf einem Gitterpunkt eines Koordinatensystems und kann jeweils nur zum nächsten Gitterpunkt nach oben oder nach rechts springen und zwar jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$.

Beispiel: Befindet sich der Ko-Frosch auf dem Gitterpunkt $(4|3)$, dann kann er nur nach $(4|4)$ oder $(5|3)$ springen.

3.2 Bernoulli-Experiment und -Kette

- (a) Der Ko-Frosch sitzt auf dem Gitterpunkt $(0|0)$.
- Auf welchen Gitterpunkten kann er sich nach 5 Sprüngen befinden?
 - Wie viele Sprünge benötigt er, um den Gitterpunkt $(18|17)$ zu erreichen?
 - Denk dir weitere zwei weitere Fragen aus und beantworte sie.
- (b) Der Ko-Frosch sitzt auf dem Gitterpunkt $(0|0)$ des Koordinatensystems und kann jeweils nur zum nächsten Gitterpunkt nach oben oder nach rechts springen und zwar jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht er den Gitterpunkt $(4|0)$, den Gitterpunkt $(8|1)$, den Gitterpunkt $(2|2)$?
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzt er nach 20 Sprüngen nicht auf einer Koordinatenachse?
 - Denk dir weitere zwei weitere Fragen aus und beantworte sie.



- Lösung:*
- (a) i. Bedingung $x + 5 = 5$, also $(0|5)$, $(1|4)$, $(2|3)$, $(3|2)$, $(4|1)$, $(5|0)$
 ii. $18 + 17 = 35$
- (b) i. $p((4|0)) = (\frac{1}{2})^4 = 6,25\%$, $p((8|1)) = 9 \cdot (\frac{1}{2})^9 = 1,76\%$, $p((2|2)) = 3 \cdot (\frac{1}{2})^4 = 18,8\%$
 ii. $p_{\text{nichtaufKO-Achse}} = 1 - 2 \cdot (\frac{1}{2})^{20} = 99,9998\%$

3.3 Binomialkoeffizient, Binomialverteilung

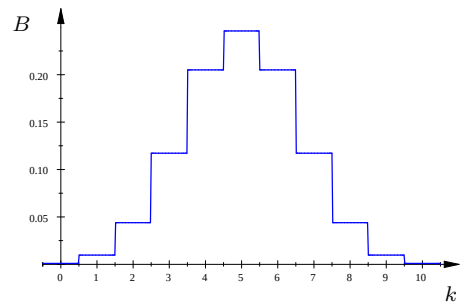
1. Eine Laplace-Münze wird n -mal geworfen, „Kopf“ ist ein Treffer, „Zahl“ eine Niete.
 - (a) Zeichne ein Histogramm von $B(n, p, k)$ für $n = 10$. Zeige, dass das Histogramm für beliebiges n symmetrisch ist.
 - (b) Wir betrachten das Histogramm für ein gerades n . Zeige, dass die Nachbarsäulen der mittleren Säule weniger hoch sind als die mittlere Säule.
 - (c) Wie oft muss die Münze mindestens geworfen werden, damit mit mindestens 90%-er Sicherheit mindestens einmal „Kopf“ geworfen wird? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das „mindestens einmal Kopf werfen“ dann genau?

Lösung: (a) $B(n; \frac{1}{2}; k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{n-k}} = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$

$$B(n; \frac{1}{2}; n-k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n-k}} \cdot \frac{1}{2^k} = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$$

$$B(n; \frac{1}{2}; k) = B(n; \frac{1}{2}; n-k) \implies$$

$$B(n; \frac{1}{2}; k) \text{ ist symmetrisch zur Geraden } k = \frac{n}{2}$$



(b) Mittlere Säule: $B(n; \frac{1}{2}; \frac{n}{2}) = \binom{n}{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{n!}{2^n \cdot (\frac{n}{2})!^2}$

Säulen daneben:

$$\begin{aligned} B(n; \frac{1}{2}; \frac{n}{2} - 1) &= B(n; \frac{1}{2}; \frac{n}{2} + 1) = \binom{n}{\frac{n}{2} + 1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{n!}{2^n \cdot (\frac{n}{2} + 1)! \cdot (\frac{n}{2} - 1)!} = \\ &= \frac{n!}{2^n \cdot (\frac{n}{2} + 1) \cdot \frac{n}{2} \cdot (\frac{n}{2} - 1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot (\frac{n}{2} - 1) \cdot (\frac{n}{2} - 2) \cdot \dots \cdot 1} = \\ &= \frac{\frac{n}{2} \cdot n!}{(\frac{n}{2} + 1) \cdot 2^n \cdot \frac{n}{2} \cdot (\frac{n}{2} - 1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot \frac{n}{2} \cdot (\frac{n}{2} - 1) \cdot (\frac{n}{2} - 2) \cdot \dots \cdot 1} = \\ &= \frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2} + 1} \cdot \frac{n!}{2^n \cdot (\frac{n}{2})!^2} = \underbrace{\frac{n}{n+2}}_{<1} \cdot B(n; \frac{1}{2}; \frac{n}{2}) < B(n; \frac{1}{2}; \frac{n}{2}) \end{aligned}$$

(c) $P(\text{„mindestens einmal K“}) = 1 - P(\text{„kein K“}) = 1 - \frac{1}{2^n} \geq 0,9$

$$\frac{1}{2^n} \leq 0,1 \implies 2^n \geq 10 \implies n \ln 2 \geq \ln 10 \implies n \geq \frac{\ln 10}{\ln 2} = 3,32$$

Die Münze muss mindestens viermal geworfen werden.

$$P(\text{„mindestens einmal K“}) = 1 - \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16} = 93,75\%$$

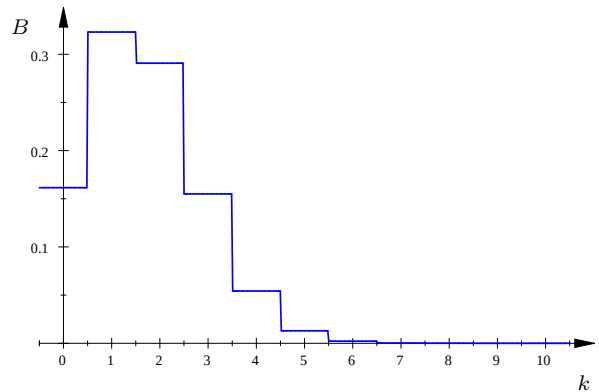
3.3 Binomialkoeffizient, Binomialverteilung

2. Ein Laplace-Würfel wird n -mal geworfen, eine Sechs ist ein Treffer, alles andere eine Niete.

- (a) Zeichne ein Histogramm von $B(n, p, k)$ für $n = 10$.
 (b) Wie oft muss der Würfel mindestens geworfen werden, damit mit mindestens 90%-er Sicherheit mindestens ein Treffer erzielt wird? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für „mindestens ein Treffer“ dann genau?

Lösung:

(a)	k	$B(10, \frac{1}{6}, k)$
	0	16,15%
	1	32,30%
	2	29,07%
	3	15,50%
	4	5,43%
	5	1,30%
	6	0,22%
	7	0,025%
	8	$1,86 \cdot 10^{-3}$ %
	9	$8,27 \cdot 10^{-5}$ %
	10	$1,65 \cdot 10^{-6}$ %



(b) $p = \frac{1}{6}, q = 1 - p = \frac{5}{6}$

$$P(\text{„mindestens einmal 6“}) = 1 - P(\text{„keine 6“}) = 1 - q^n \geq 0,9$$

$$q^n \leq 0,1 \implies n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln \frac{5}{6}} = 12,6$$

Der Würfel muss mindestens 13-mal geworfen werden.

$$P(\text{„mindestens einmal 6“}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{13} = 90,65\%$$

3. Magdalena hat beim Stehendschießen die Trefferwahrscheinlichkeit $p = 80\%$.

- (a) Magdalena schießt zwanzigmal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_1 , dass sie folgende Serie schießt: 10011 11011 10111 01111?
 (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_2 , dass sie bei zwanzig Schüssen genau 15 Treffer landet?
 (c) Eine Serie besteht aus fünf Schüssen, eine Topserie aus fünf Treffern. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_T schießt Lena eine Topserie? Wie viele Serien muss Magdalena mindestens schießen, damit mit mindestens 95%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens eine Topserie dabei ist?

Lösung: (a) $p = \frac{4}{5} = 0,8, q = 1 - p = \frac{1}{5} = 0,2, p_1 = p^{15}q^5 = \frac{4^{15}}{5^{20}} = 1,126 \cdot 10^{-5}$

3.3 Binomialkoeffizient, Binomialverteilung

$$(b) \quad p_2 = \binom{20}{15} p^{15} q^5 = \underbrace{\binom{20}{5}}_{15504} p^{15} q^5 = \frac{15504 \cdot 4^{15}}{5^{20}} = 17,46\%$$

$$(c) \quad p_T = p^5 = \frac{4^5}{5^5} = \frac{1024}{3125} = 0,32768 = 32,768\%$$

$$q_T = 1 - p_T = \frac{2101}{3125} = 0,67232 = 67,232\%$$

$$P(\text{„kein Treffer“}) = q_T^n, \quad P(\text{„mindestens ein Treffer“}) = 1 - q_T^n$$

$$1 - q_T^n \geq 0,95 \quad \Rightarrow \quad q_T^n \leq 0,05 \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln q_T} = 7,55$$

Lena muss mindestens acht Serien schießen.

4. An wie vielen Ziehungen muss man beim Lotto „6 aus 49“ mit jeweils einem Tipp mindestens teilnehmen, um mit mindestens 90%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal sechs Richtige zu haben?

$$\text{Lösung: } p = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816} = 7,151 \cdot 10^{-8}, \quad q = 1 - p = \frac{13983815}{13983816} = 0,9999999285$$

$$n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln q} = 32\,198\,925,11, \text{ also mindestens } 32\,198\,926\text{-mal.}$$

5. Beim genetischen Fingerabdruck werden mehrere Abschnitte der DNA vervielfältigt und auf ihre Länge hin untersucht. Nehmen wir an, dass zehn Abschnitte untersucht werden und jeder Abschnitt zufällig verteilt fünf verschiedene Längen haben kann (die Realität ist komplizierter).

- (a) An einem Tatort werden DNA-Spuren des Täters gesichert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p , dass der genetische Fingerabdruck einer beliebigen Person mit dem des Täters übereinstimmt?
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10 000 Verurteilungen auf Grund des genetischen Fingerabdrucks mindestens ein Unschuldiger dabei ist?
- (c) Ab wie vielen Verurteilungen auf Grund des genetischen Fingerabdrucks ist mit einer mindestens 50%-igen Wahrscheinlichkeit mindestens ein Unschuldiger ins Gefängnis gewandert?

Lösung: (a) Es gibt $z = 5^{10} = 9\,765\,625$ verschiedene Möglichkeiten, also ist

$$p = \frac{1}{9\,765\,625} = 1,024 \cdot 10^{-7}$$

$$(b) \quad q = 1 - p = \frac{9\,765\,624}{9\,765\,625} \quad \Rightarrow$$

$$p_1 = 1 - q^{10000} = 1,0235 \cdot 10^{-3} = 0,10235\%$$

3.3 Binomialkoeffizient, Binomialverteilung

$$(c) \quad 1 - q^n \geq 0,5 \quad \implies \quad q^n \leq 0,5 \quad \implies \quad n \geq \frac{\ln 0,5}{\ln q} = 6\,769\,015,09$$

6. Aus einem Kartenspiel mit 32 Blatt wird mit Zurücklegen immer eine Karte gezogen. Ein Treffer (mit 1 bezeichnet) liegt vor, wenn die gezogene Karte ein Ass ist, sonst eine Niete (mit 0 bezeichnet).
- (a) Der Versuch wird zehnmal ausgeführt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt das Ergebnis 0001001001 ein?
 - (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind beim zehnmaligen Kartenziehen genau drei Treffer dabei?
 - (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist beim zehnmaligen Kartenziehen mindestens ein Treffer dabei?
 - (d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind beim zehnmaligen Kartenziehen mindestens drei Treffer dabei?
 - (e) Wie viele Karten muss man mindestens ziehen, um mit mindestens 90%-iger Sicherheit mindestens einen Treffer zu landen?
 - (f) Wie viele Karten muss man mindestens ziehen, um mit mindestens 90%-iger Sicherheit mindestens zwei Treffer zu landen?
 - (g) Eine Casino bietet das zehnmalige Kartenziehen mit Zurücklegen als Spiel an. Der Spieler gewinnt, wenn er ein Trefferpaar (zwei Treffer hintereinander) und sonst nur Nieten zieht. In diesem Fall erhält der Spieler den zwanzigfachen Einsatz zurück, sonst ist der Einsatz verloren. Welche Rendite (Gewinn pro Einsatz) wirft dieses Spiel für die Bank ab?

Lösung: Trefferwahrscheinlichkeit: $p = \frac{1}{8}, \quad q = 1 - p = \frac{7}{8}$

(a) $p_1 = p^3 q^7 = 7,67 \cdot 10^{-4}$

(b) $p_2 = B(10; \frac{1}{8}; 3) = \binom{10}{3} p^3 q^7 = 0,0920 = 9,20\%$

(c) $p_3 = 1 - B(10; \frac{1}{8}; 0) = 1 - \binom{10}{0} p^0 q^{10} = 1 - q^{10} = 0,7369 = 73,69\%$

(d) $P(„mindestens 3 Treffer“) = 1 - P(„höchstens 2 Treffer“) \implies$

$$\begin{aligned} p_4 &= B(10; \frac{1}{8}; 3) + B(10; \frac{1}{8}; 4) + \dots + B(10; \frac{1}{8}; 10) = \\ &= 1 - B(10; \frac{1}{8}; 0) - B(10; \frac{1}{8}; 1) - B(10; \frac{1}{8}; 2) = \\ &= 1 - q^{10} - \binom{10}{1} p^1 q^9 - \binom{10}{2} p^2 q^8 = 0,1195 = 11,95\% \end{aligned}$$

(e) $1 - q^n \geq 0,9 \quad \implies \quad q^n \leq 0,1 \quad \implies \quad n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln q} = 17,24, \text{ also mindestens 18-mal.}$

3.3 Binomialkoeffizient, Binomialverteilung

$$(f) \quad 1 - q^n - \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} \geq 0,9 \quad \implies \quad \underbrace{q^n + npq^{n-1}}_{f(n)} \leq 0,1$$

Diese Gleichung ist für uns nur durch Probieren lösbar:

$$f(29) = 0,107 \text{ und } f(30) = 0,0962 \quad \implies \quad \text{mindestens 30 Karten}$$

- (g) Es gibt 9 Möglichkeiten für die Lage des Trefferpaars. Die Gewinnwahrscheinlichkeit des Spielers ist also

$$p_g = 9p^2q^8 = 0,04832 = 4,832\%$$

E sei der Einsatz pro Spiel. Von N Spielen gewinnt die Bank $(1 - p_g)N$ Spiele und nimmt somit $(1 - p_g)NE$ ein. Andererseits verliert die Bank p_gN Spiele und zahlt damit $20p_gNE$ aus. Die Rendite der Bank ist also

$$\frac{(1 - p_g)NE - 20p_gNE}{NE} = 1 - 21p_g = -1,47\%$$

Die Bank dürfte nur das 19-fache des Einsatzes auszahlen, dann wäre die Rendite $1 - 20p_g = 3,36\%$

7. Ein Laplacewürfel wird n -mal geworfen.

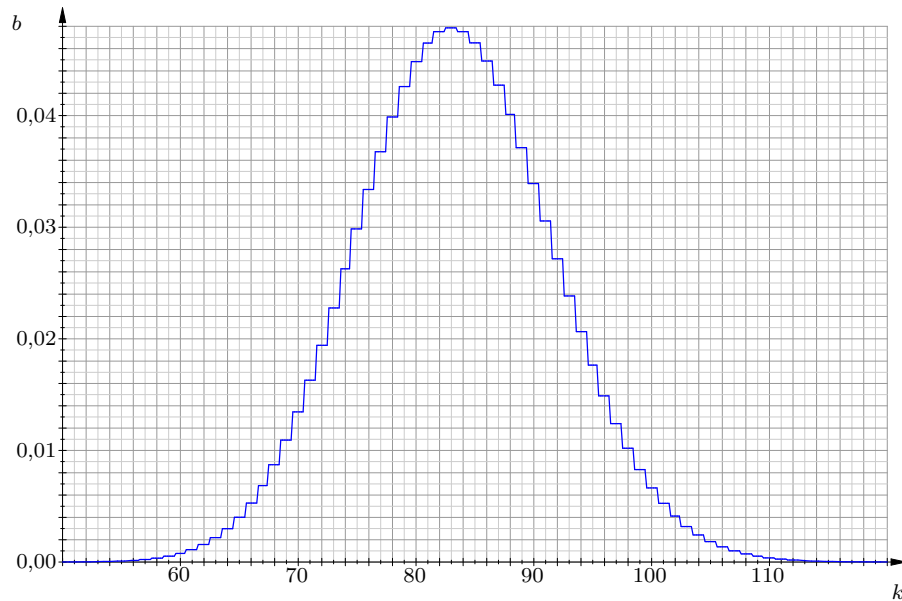
- (a) Wie groß muss n mindestens sein, damit mit mindestens 99,99%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein Sechser dabei ist?

Jetzt wird der Würfel 500-mal geworfen. Wir betrachten die Ereignisse

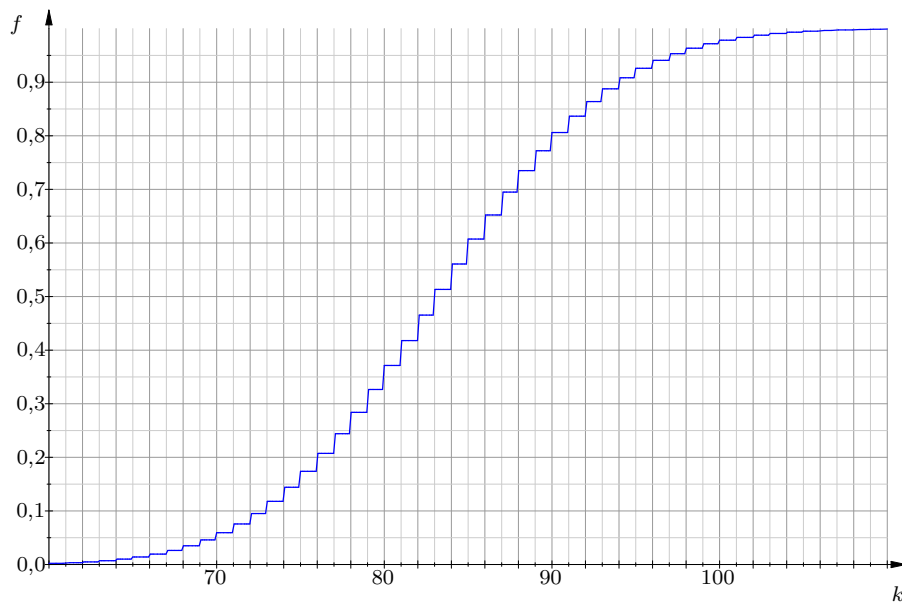
$$\begin{aligned} E_1 &: \text{„höchstens 70 Sechser“} & E_3 &: \text{„mindestens 78 und höchstens 93 Sechser“} \\ E_2 &: \text{„mindestens 90 Sechser“} & E_4 &: \text{„mindestens 78 und höchstens } m \text{ Sechser“} \end{aligned}$$

- (b) Die Abbildung zeigt den Grafen von $b(k) = B(500, \frac{1}{6}, k)$. Veranschauliche im Grafen die Wahrscheinlichkeiten $p_1 = P(E_1)$ und $p_2 = P(E_2)$ und schätze in nachvollziehbarer Weise ihre Werte ab.

3.3 Binomialkoeffizient, Binomialverteilung



- (c) Die Abbildung zeigt den Grafen von $f(k) = F_{\frac{1}{6}}^{500}(k)$. Drücke $p_3 = P(E_3)$ durch f aus, zeichne p_3 in den Grafen ein und gib den ungefähren Wert von p_3 an. Ermittle ebenfalls mit dem Grafen das kleinste m mit $p_4 = P(E_4) \geq 50\%$.



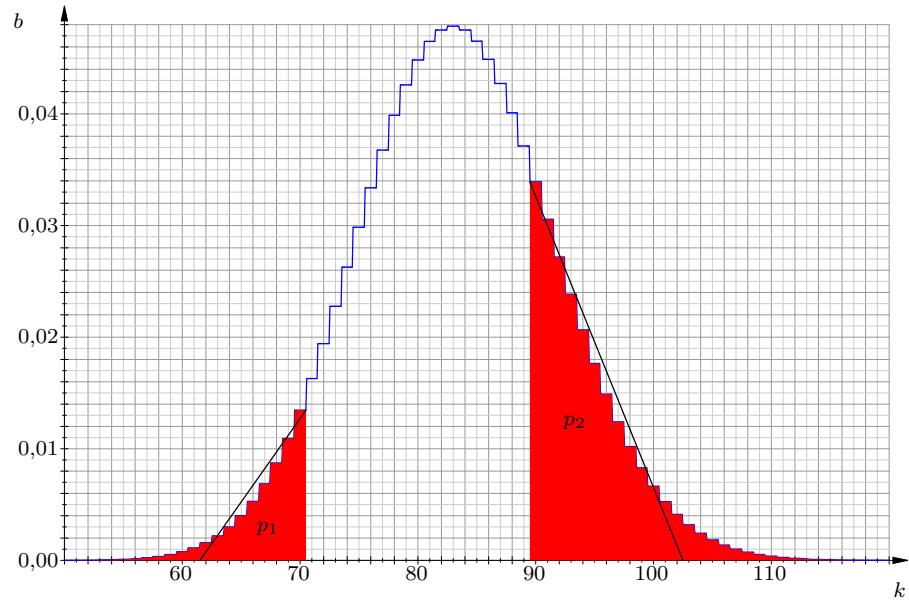
$$\text{Lösung: (a) } p = \frac{1}{6} \implies q = 1 - p = \frac{5}{6}, \quad 1 - q^n \geq 0,9999 \implies q^n \leq 10^{-4}$$

$$n \ln q \leq -4 \ln 10 \implies n \geq \frac{-4 \ln 10}{\ln q} = 50,52 \implies n \geq 51$$

3.3 Binomialkoeffizient, Binomialverteilung

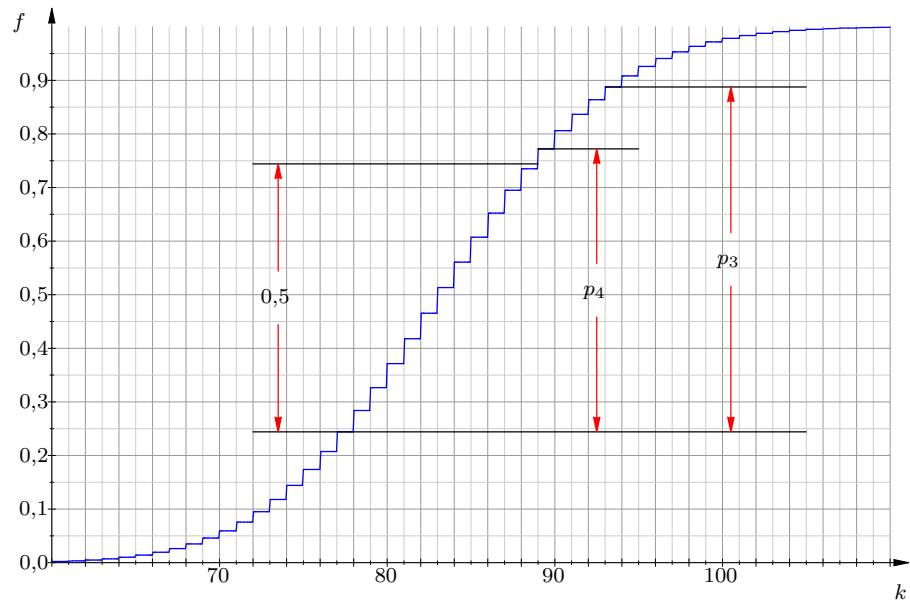
$$(b) \quad p_1 = \sum_{k=0}^{70} B\left(500, \frac{1}{6}, k\right) \approx \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 0,0135 \approx 6\%$$

$$p_2 = \sum_{k=90}^{500} B\left(500, \frac{1}{6}, k\right) \approx \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 0,034 \approx 22\%$$



$$(c) \quad p_3 = \sum_{k=78}^{93} B\left(500, \frac{1}{6}, k\right) = F_{\frac{1}{6}}^{500}(93) - F_{\frac{1}{6}}^{500}(77) = f(93) - f(77) \approx 64\%$$

$$p_4 = f(m) - f(77) \geq 0,5 \quad \Rightarrow \quad f(m) \geq f(77) + 0,5 \approx 0,75 \quad \Rightarrow \quad m = 89$$



3.4 Anwendungen der Binomialverteilung, u. a. einseitiger Signifikanztest

1. Für den Flug München-New York hat eine Gesellschaft ein Platzangebot von 240 Plätzen. Erfahrungsgemäß erscheinen 10% Passagiere nicht zum gebuchten Flug.
 - (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheinen zum Abflug mindestens 219 und höchstens 240 Fluggäste, wenn 255 Buchungen akzeptiert werden
 - (b) Schätzen sie die Wahrscheinlichkeit aus (a) mit einer Tschebyschow-Abschätzung ab.

Lösung: (a) 98%
(b) 79%

2. Eine Biathletin hat im stehenden Anschlag die Trefferwahrscheinlichkeit $p_s = 70\%$ und im liegenden Anschlag $p_l = 80\%$. Dem Trainer liegt das Ergebnis einer Serie von 200 Schuss vor, die alle in einer Anschlagsart abgegeben wurden, er weiß aber nicht in welcher. Die Zahl der Treffer in dieser Serie bezeichnen wir mit X .
 - (a) Formuliere eine Entscheidungsregel, wie sich der Trainer entweder für die Hypothese H_s : „stehender Anschlag“ oder H_l : „liegender Anschlag“ entscheiden kann.
 - (b) F_s sei die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Trainer fälschlicherweise für H_s entscheidet und F_l die Wahrscheinlichkeit, dass er sich für H_l entscheidet, obwohl H_s wahr wäre. Für welche Entscheidungsregel ist die Summe der beiden Fehlerwahrscheinlichkeiten minimal?

Lösung: (a) Die erwarteten Trefferzahlen sind $E_s = 200p_s = 140$ und $E_l = 200p_l = 160$.

Entscheidung für H_s : $X \in \{0, 1, \dots, k\}$

Entscheidung für H_l : $X \in \{k + 1, k + 2, \dots, 200\}$

mit k ungefähr 150.

- (b) Liegender Anschlag, aber Entscheidung für H_s :

$$p = 0,8 \text{ und } X \leq k \implies F_s = F_{0,8}^{200}(k)$$

Stehender Anschlag, aber Entscheidung für H_l :

$$p = 0,7 \text{ und } X > k \implies F_l = 1 - F_{0,7}^{200}(k)$$

k	F_s (in %)	F_l (in %)	$F_s + F_l$ (in %)
149	3,45	6,95	10,4
150	4,94	5,06	10,0
151	6,90	3,59	10,5

Die Entscheidungsregel mit $k = 150$ minimiert also die Fehlersumme.

4 Geometrie: Geraden und Ebenen im Raum

4.1 Lineare Abhängigkeit von Vektoren

1. Untersuche auf lineare Abhängigkeit:

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1,6 \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ -2,1 \end{pmatrix}$,

(b) $\vec{e} = \begin{pmatrix} -1,6 \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$ und $\vec{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3,6 \end{pmatrix}$

(c) Stelle, wenn möglich, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8,8 \\ -8 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzw. $\vec{e}$ und $\vec{f}$ dar.

Lösung: (a) $\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a} \implies \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig.

(b) $\frac{4}{-1,6} = -\frac{5}{2} \neq \frac{-3,6}{\frac{7}{5}} = -\frac{18}{7} \implies \vec{e}$ und $\vec{f}$ sind linear unabhängig.

(c) Da $\vec{x} \nparallel \vec{a} \parallel \vec{b}$ mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht möglich.

Da $\vec{e}$ und $\vec{f}$ linear unabhängig sind, gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\vec{x} = \lambda\vec{e} + \mu\vec{f} \implies$

$$-1,6\lambda + 4\mu = 8,8 \quad (1)$$

$$1,4\lambda - 3,6\mu = -8 \quad (2)$$

$$0,9 \cdot (1) + (2) : \quad \begin{array}{r} -0,04\lambda = -0,08 \end{array} \quad (3)$$

$$\lambda = 2 \quad (4)$$

$$(4) \text{ in } (1) \quad -3,2 + 4\mu = 8,8 \quad (5)$$

$$\mu = 3$$

$$\vec{x} = 2\vec{e} + 3\vec{f}$$

2. Untersuche auf lineare Abhängigkeit:

4.1 Lineare Abhängigkeit von Vektoren

$$(a) \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} 21 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$(b) \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{g} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$(c) \text{ Stelle, wenn möglich, } \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ als Linearkombination von } \vec{a}, \vec{b} \text{ und } \vec{c} \text{ bzw. } \vec{e}, \vec{f} \text{ und } \vec{g} \text{ dar.}$$

Lösung: (a) Aus $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{o}$ folgt

$$4\lambda - 5\mu + 21\nu = 0 \quad (1)$$

$$-3\lambda - 2\mu - 5\nu = 0 \quad (2)$$

$$\lambda + 3\mu - 3\nu = 0 \quad (3)$$

$$(3) : \quad \lambda + 3\mu - 3\nu = 0 \quad (4)$$

$$(2) + 3 \cdot (3) : \quad 7\mu - 14\nu = 0 \quad (5)$$

$$(1) - 4 \cdot (3) : \quad -17\mu + 33\nu = 0 \quad (6)$$

$$(4) : \quad \lambda + 3\mu - 3\nu = 0 \quad (7)$$

$$(5) : \quad 7\mu - 14\nu = 0 \quad (8)$$

$$17 \cdot (5) + 7 \cdot (6) : \quad -7\nu = 0 \quad (9)$$

$\implies \lambda = \mu = \nu = 0$, also sind $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig.

(b) Aus $\lambda\vec{e} + \mu\vec{f} + \nu\vec{g} = \vec{o}$ folgt

$$2\lambda + \mu + 9\nu = 0 \quad (1)$$

$$\lambda - \mu + 12\nu = 0 \quad (2)$$

$$\lambda + 2\mu - 3\nu = 0 \quad (3)$$

$$(3) : \quad \lambda + 2\mu - 3\nu = 0 \quad (4)$$

$$(2) - (3) : \quad -3\mu + 15\nu = 0 \quad (5)$$

$$(1) - 2 \cdot (3) : \quad -3\mu + 15\nu = 0 \quad (6)$$

$$(5) \text{ bzw. } (6) : \quad \mu = 5\nu \quad (7)$$

$$(7) \text{ in } (1) : \quad \lambda = -7\nu \quad (8)$$

Z.B. für $\nu = 1$ folgt $-7\vec{e} + 5\vec{f} + \vec{g} = \vec{o}$, also sind $\vec{e}, \vec{f}$ und $\vec{g}$ linear abhängig.

4.1 Lineare Abhängigkeit von Vektoren

(c) Da $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind, gibt es $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ mit $\vec{x} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} \implies$

$$4\lambda - 5\mu + 21\nu = -8 \quad (1)$$

$$-3\lambda - 2\mu - 5\nu = 1 \quad (2)$$

$$\lambda + 3\mu - 3\nu = 2 \quad (3)$$

$$(3) : \quad \lambda + 3\mu - 3\nu = 2 \quad (4)$$

$$(2) + 3 \cdot (3) : \quad 7\mu - 14\nu = 7 \quad (5)$$

$$(1) - 4 \cdot (3) \quad -17\mu + 33\nu = -16 \quad (6)$$

$$(4) : \quad \lambda + 3\mu - 3\nu = 2 \quad (7)$$

$$(5) : \quad 7\mu - 14\nu = 7 \quad (8)$$

$$17 \cdot (5) + 7 \cdot (6) : \quad -7\nu = 7 \quad (9)$$

$$\nu = -1 \quad (10)$$

$$(10) \text{ in } (8) : \quad \mu = -1 \quad (11)$$

$$(10) \text{ und } (11) \text{ in } (7) : \quad \lambda = 2$$

$$\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$$

Obwohl $\vec{e}$, $\vec{f}$ und $\vec{g}$ linear abhängig sind, könnte $\vec{x}$ zu $\vec{e}$, $\vec{f}$ und $\vec{g}$ komplanar sein. Wir setzen einfach an: $\vec{x} = \lambda\vec{e} + \mu\vec{f} + \nu\vec{g}$:

$$2\lambda + \mu + 9\nu = -8 \quad (1)$$

$$\lambda - \mu + 12\nu = 1 \quad (2)$$

$$\lambda + 2\mu - 3\nu = 2 \quad (3)$$

$$(3) : \quad \lambda + 2\mu - 3\nu = 2 \quad (4)$$

$$(2) - (3) : \quad -3\mu + 15\nu = -1 \quad (5)$$

$$(1) - 2 \cdot (3) \quad -3\mu + 15\nu = -12 \quad (6)$$

(5) und (6) sind nicht gleichzeitig erfüllbar, das Gleichungssystem hat keine Lösung, $\vec{x}$ ist nicht als Linearkombination von $\vec{e}$, $\vec{f}$ und $\vec{g}$ darstellbar.

3. Berechne die Lösungsmenge:

(a)

$$2x_1 - 3x_2 - x_3 = 7$$

$$-4x_1 + 31x_2 + 7x_3 = -9$$

(b)

$$14x_1 - 21x_2 - 7x_3 = 49$$

$$-6x_1 + 9x_2 + 3x_3 = -24$$

4.1 Lineare Abhängigkeit von Vektoren

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad & 14x_1 - 21x_2 - 7x_3 = 49 \\ & -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 21 \end{aligned}$$

$$\text{Lösung: (a)} \quad \begin{aligned} & 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 7 \quad (1) \\ & -4x_1 + 31x_2 + 7x_3 = -9 \quad (2) \end{aligned}$$

$$2 \cdot (1) + (2) : \quad \begin{aligned} & 25x_2 + 5x_3 = 5 \quad (3) \end{aligned}$$

$$(3) : 5 : \quad \begin{aligned} & 5x_2 + x_3 = 1 \quad (4) \end{aligned}$$

$$\text{wir wählen :} \quad \begin{aligned} & x_2 = \lambda \quad (5) \end{aligned}$$

$$(5) \text{ in } (4) : \quad \begin{aligned} & x_3 = 1 - 5\lambda \quad (6) \end{aligned}$$

$$(5) \text{ und } (6) \text{ in } (1) : \quad \begin{aligned} & x_1 = 4 - \lambda \quad (6) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L = \left\{ \vec{x} \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{(b)} \quad \begin{aligned} & 14x_1 - 21x_2 - 7x_3 = 49 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 = -24 \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1) : 7 : \quad \begin{aligned} & 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 7 \quad (3) \end{aligned}$$

$$(2) : 3 : \quad \begin{aligned} & -2x_1 + 3x_2 + x_3 = -8 \quad (4) \end{aligned}$$

$$(3) + (4) : \quad \begin{aligned} & 0 = -1 \quad (5) \end{aligned}$$

$$\text{Widerspruch} \Rightarrow L = \emptyset$$

$$\text{(c)} \quad \begin{aligned} & 14x_1 - 21x_2 - 7x_3 = 49 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 = -21 \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1) : 7 : \quad \begin{aligned} & 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 7 \quad (3) \end{aligned}$$

$$(2) : (-3) : \quad \begin{aligned} & 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 7 \quad (4) \end{aligned}$$

$$(3) + (4) : \quad \begin{aligned} & 0 = 0 \quad (5) \end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen (3) und (4) sind identisch, die Lösungsmenge L des Systems ist also gleich der Lösungsmenge L_1 von (1) bzw. (3). Interpretiert man die Elemente von L als Punkte im $\mathbb{R}^3$, dann ist L die durch (3) beschriebene Ebene mit dem

Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und z.B. dem Aufpunkt A (3,5|0|0).

4. Berechne die Lösungsmenge:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 15 \\ & -2x_1 + 2x_2 + x_3 = -13 \\ & 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 15 \\ & -2x_1 + 2x_2 + x_3 = -13 \\ & -15x_1 - 9x_2 + 3x_3 = -45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad & 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 15 \\ & 10x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 30 \\ & -15x_1 - 9x_2 + 3x_3 = -45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad & 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 15 \\ & 10x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 30 \\ & -15x_1 - 9x_2 + 3x_3 = -42 \end{aligned}$$

Lösung: (a)

$$5x_1 + 3x_2 - x_3 = 15 \quad (1)$$

$$-2x_1 + 2x_2 + x_3 = -13 \quad (2)$$

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 = 16 \quad (3)$$

$$(1) : \quad 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 15 \quad (4)$$

$$2 \cdot (1) + 5 \cdot (2) : \quad 16x_2 + 3x_3 = -35 \quad (5)$$

$$3 \cdot (1) - 5 \cdot (3) : \quad 14x_2 + 7x_3 = -35 \quad (6)$$

$$(4) : \quad 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 15 \quad (7)$$

$$(5) : \quad 16x_2 + 3x_3 = -35 \quad (8)$$

$$7 \cdot (5) - 8 \cdot (6) : \quad -35x_3 = 35 \quad (9)$$

$$(9) \implies x_3 = -1 \quad (10)$$

$$(10) \text{ in } (8) : x_2 = -2 \quad (11)$$

$$(10) \text{ und } (11) \text{ in } (7) : x_1 = 4$$

$$\implies L = \{(4|-2|-1)\}$$

(b)

4.1 Lineare Abhängigkeit von Vektoren

$$5x_1 + 3x_2 - x_3 = 15 \quad (1)$$

$$-2x_1 + 2x_2 + x_3 = -13 \quad (2)$$

$$-15x_1 - 9x_2 + 3x_3 = -45 \quad (3)$$

$$(1) : \quad 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 15 \quad (4)$$

$$2 \cdot (1) + 5 \cdot (2) : \quad 16x_2 + 3x_3 = -35 \quad (5)$$

$$(3) : (-3) : \quad 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 15 \quad (6)$$

$$(4) \text{ und } (6) \text{ identisch} \quad \implies (6) \text{ fällt weg}$$

$$\text{wir wählen :} \quad x_3 = \lambda \quad (7)$$

$$(7) \text{ in } (5) : \quad x_2 = -\frac{35}{16} - \frac{3\lambda}{16} \quad (8)$$

$$(7) \text{ und } (8) \text{ in } (4) : \quad x_1 = \frac{69}{16} + \frac{5\lambda}{16} \quad (9)$$

$$\mu = \frac{\lambda}{16} \implies L = \left\{ \vec{x} \mid \vec{x} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 69 \\ -35 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 16 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

(c) $5x_1 + 3x_2 - x_3 = 15 \quad (1)$

$$10x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 30 \quad (2)$$

$$-15x_1 - 9x_2 + 3x_3 = -45 \quad (3)$$

$$(1) : \quad 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 15 \quad (4)$$

$$(2) : 2 : \quad 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 15 \quad (5)$$

$$(3) : (-3) : \quad 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 15 \quad (6)$$

Alle drei Gleichungen sind identisch, die Lösungsmenge L des Systems ist also gleich der Lösungsmenge L_1 von (1). Interpretiert man die Elemente von L als Punkte im

$\mathbb{R}^3$, dann ist L die durch (1) beschriebene Ebene mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

und z.B. dem Aufpunkt A $(0|0|-15)$.

(d) $5x_1 + 3x_2 - x_3 = 15 \quad (1)$

$$10x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 30 \quad (2)$$

$$-15x_1 - 9x_2 + 3x_3 = -42 \quad (3)$$

$$(1) : \quad 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 15 \quad (4)$$

$$(2) : 2 : \quad 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 15 \quad (5)$$

$$(3) : (-3) : \quad 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 14 \quad (6)$$

$$(5) - (6) : \quad 0 = 1$$

$$\text{Widerspruch} \implies L = \emptyset$$

4.2 Geraden und Ebenen

1. (a) Stelle die Gleichung der Geraden $g = AB$ mit $A(7|-1|2)$ und $B(3|4|5)$ auf.
- (b) Bestimme die Koordinaten von drei Punkten R , S und T auf der Geraden g so, dass R zwischen A und B , S auf der Halbgeraden $[AB$ mit $\overline{AS} > \overline{AB}$ und T auf der Halbgeraden $[BA$ mit $\overline{BT} > \overline{AB}$ liegt.
- (c) Bestimme die restlichen Koordinaten von $C(-3|c_2|c_3)$ so, dass $C \in g$ gilt.
- (d) s_1 , s_2 und s_3 sind die senkrechten Projektionen von g auf die x_2x_3 -, x_1x_3 - und x_1x_2 -Ebene. Stelle die Gleichungen der drei Geraden s_1 , s_2 und s_3 in der Parameterform auf.
- (e) Schreibe die Gleichung von s_3 in der Form $x_2 = f(x_1)$.
- (f) Veranschauliche alle gegebenen und berechneten Größen in einem Schrägbild.

Lösung: (a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \implies g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{R} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} \implies R(5|1,5|3,5)$

$\vec{S} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} \implies S(-1|9|8)$

$\vec{T} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -11 \\ -4 \end{pmatrix} \implies T(15|-11|-4)$

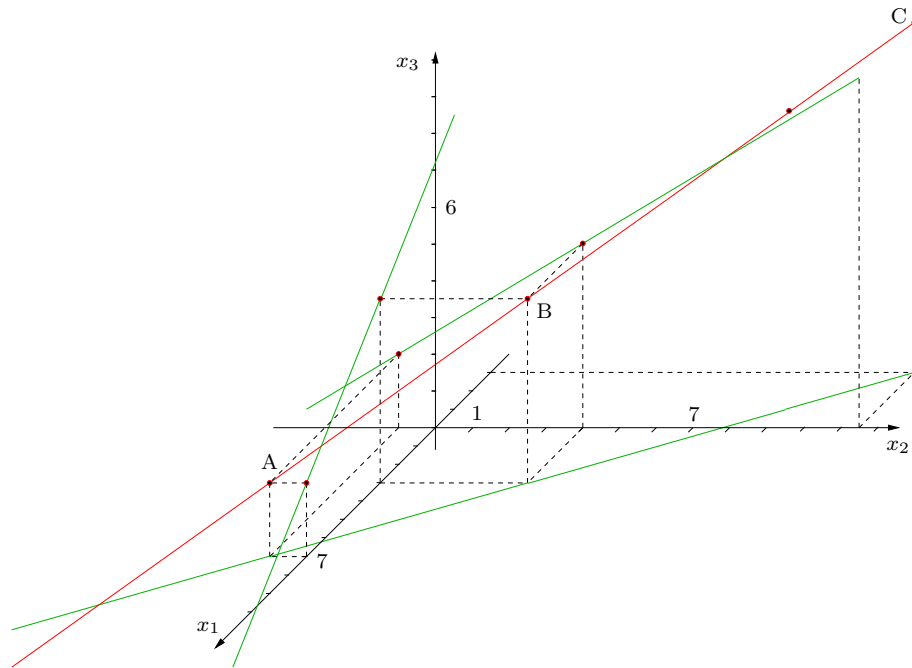
(c) $C \in g \implies \begin{pmatrix} -3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \implies 7 - 4\lambda = -3 \implies \lambda = \frac{5}{2}$

$\vec{C} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11,5 \\ 9,5 \end{pmatrix} \implies C(-3|11,5|9,5)$

(d) $s_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, s_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, s_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) $x_1 = 7 - 4\lambda \implies \lambda = \frac{7}{4} - \frac{1}{4}x_1, x_2 = -1 + 5\lambda = \frac{31}{4} - \frac{5}{4}x_1$

(f)



2. Geben Sie die Hesse-Normalform der Ebene E an.

$$E : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lösung: $\frac{20}{\sqrt{464}}y + \frac{8}{\sqrt{464}}z - \frac{44}{\sqrt{464}} = 0$

 3. Die Punkte $A(1|1|1)$, $B(2|2|5)$ und $C(4|8|2)$ bestimmen das Dreieck $\triangle ABC$.

- (a) Berechnen Sie den Winkel α und die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$.
- (b) Wo liegen alle Punkte C' für die das Dreieck $\triangle ABC'$ die gleiche Fläche hat wie das Dreieck $\triangle ABC$. Geben Sie die Gleichung der Ortskurve an.
- (c) Berechnen Sie die Schnittgerade der von A, B und C aufgespannten Ebene E mit der Ebene $F : x_1 + x_3 = 0$.

Lösung: (a) $\frac{1}{2}\sqrt{866}$

(b) Parallele zu AB durch c, $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$(c) \quad h : \vec{X} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ -2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2,75 \\ -7,75 \\ 2,75 \end{pmatrix}$$

4. Gegeben sind die Ebenen $F : 8x_1 - 4x_2 + x_3 - 81 = 0$ und $G : 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 1 = 0$. Darüber hinaus ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Kugel K_a gegeben durch $K_a : (x_1 - a)^2 + (x_2 - 2a)^2 + x_3^2 - 81 = 0$.
- Unter welchem Winkel schneiden sich die Ebenen F und G ?
 - Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden der Ebenen F und G .
 - Begründen Sie, dass alle Kugeln K_a mit der x_1x_2 -Ebene gleichgroße Schnittkreise aufweisen und geben Sie deren Radius an. Für welche Punkte von a hat die Kugel K_a mit der x_1x_3 -Ebene mehr als einen Punkt gemeinsam?
 - Für welche Werte für a liegt der Punkt $D(4 | -4 | 7)$ auf der Kugel K_a . Bestimmen Sie die Gleichungen der zugehörigen Tangentialebenen an die Kugel K_a im Punkt D .

Lösung: (a) 75°

$$(b) \quad s : \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -40 \\ -79 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

(c) Mittelpunkt liegen auf Gerade senkrecht zur x_1x_2 -Ebene

1. Fall: $a_1 = 0$, $E_1 : 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 81 = 0$
2. Fall: $a_2 = -1,6$, $E_2 : 5,6x_1 - 0,8x_2 + 7x_3 - 74,6 = 0$

5. Gegeben sind die Punkte $A(0|2|3)$, $B(1|-2|6)$ und $C(-4|2|15)$ und die Geradenschar

$$g_a : \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a-2 \end{pmatrix}$$

- Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E durch die Punkte A , B und C .
- Geben Sie die Schnittpunkte der Ebene E mit den drei Koordinatenachsen und die Gleichung der Spurgeraden in der x_2x_3 -Ebene an.
- Für welchen Wert von a ist die Gerade g_a parallel zu E . Prüfen Sie ob diese in E enthalten ist.
- Beschreiben Sie die Lage der Geraden aus der Geradenschar.

Lösung: (a) z. B. $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$

4.3 Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

$$(b) \ S_1(2|0|0), \ S_2(0|4|0), \ S_3(0|0|6), \ \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$(c) \ a = \frac{1}{8}, \ g_{\frac{1}{8}} \text{ liegt in } E$$

$$(d) \ \text{ebenes Geradenb\"uschel, } g_a : \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$6. \ (a) \ \text{Verwandle in die Normalenform: } E : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \ \text{Verwandle in die Parameterform: } E : -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 20 = 0$$

$$\text{Lösung: } (a) \ \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = -9$$

$$E : \vec{n}(\vec{x} - \vec{a}) = 0 \implies E : -6x_1 + x_2 + 9x_3 + 9 = 0$$

(b) Die Achsenpunkte von E sind $A_1(-10|0|0)$, $A_2(0|4|0)$ und $A_3(0|0|\frac{20}{3})$. Mögliche Richtungsvektoren:

$$\vec{u}' = \overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ besser } \vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}' = \overrightarrow{A_2A_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}, \text{ besser } \vec{v} = \frac{3}{4}\vec{v}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Aufpunkt z.B. } A_2: \ E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4.3 Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

1. Gegeben sind die Ebene

$$E : 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 20 = 0$$

und die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4.3 Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

- (a) Berechne die Koordinaten der Achsenpunkte A_1 , A_2 und A_3 von E sowie der Durchstoßpunkte D_1 , D_2 und D_3 der Geraden g durch die Koordinatenebenen.
 (b) Veranschauliche E und g in einem Schrägbild.
 (c) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S von g mit E und zeichne S in das Schrägbild ein.

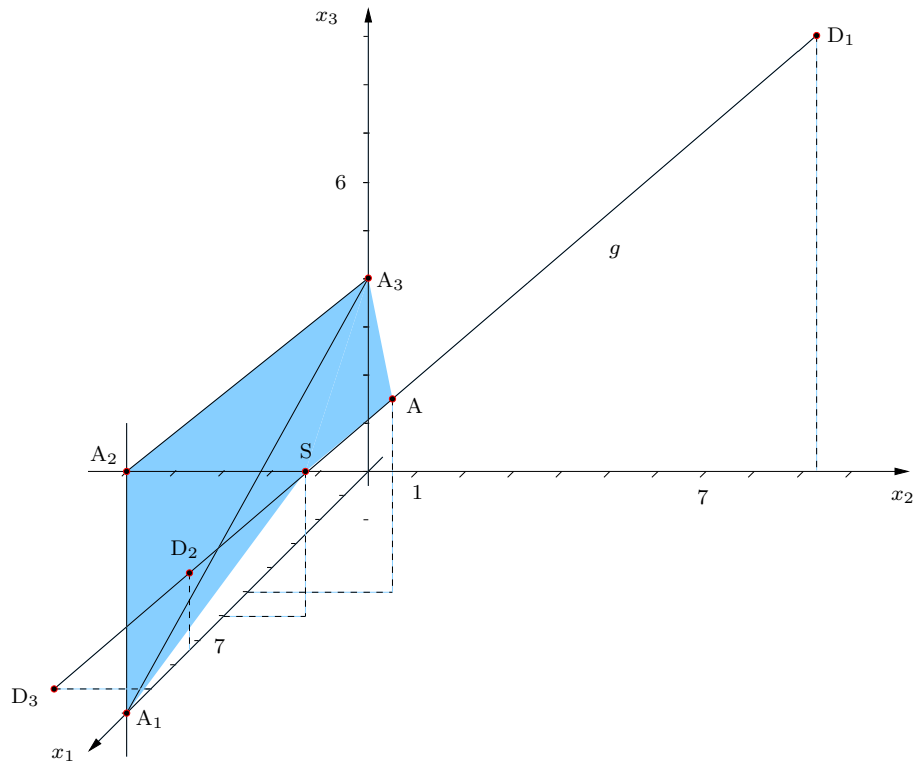
Lösung: (a) $E: \frac{x_1}{10} - \frac{x_2}{5} + \frac{x_3}{4} = 1 \implies A_1(10|0|0), A_2(0|-5|0), A_3(0|0|4)$

$$x_2x_3\text{-Ebene: } 5 - 4\lambda = 0 \implies \lambda = \frac{5}{4} \implies D_1\left(0 \left| \frac{37}{4} \right| 9\right) = D_3(0|9,25|9)$$

$$x_1x_3\text{-Ebene: } 3 + 5\lambda = 0 \implies \lambda = -\frac{3}{5} \implies D_2\left(\frac{37}{5} \left| 0 \right| \frac{8}{5}\right) = D_2(7,4|0|1,6)$$

$$x_1x_2\text{-Ebene: } 4 + 4\lambda = 0 \implies \lambda = -1 \implies D_3(9|-2|0)$$

(b)



(c) Mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $d = 20$ gilt

$$E: \vec{n}\vec{x} - d = 0 \text{ und } g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{v} \implies \vec{n}\vec{a} + \lambda\vec{n}\vec{v} = d$$

$$\lambda = \frac{d - \vec{n}\vec{a}}{\vec{n}\vec{v}} = \frac{20 - 18}{-8} = -\frac{1}{4} \implies \vec{S} = \vec{s} = \vec{a} - \frac{1}{4}\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4.3 Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

2. Gegeben sind die Punkte $A(5|-3|-2)$, $B(-3|2|4)$, $C(1|6|2)$ und $D(4|1|4)$. Durch A, B und C ist die Ebene E_1 , durch A, B und D die Ebene E_2 festgelegt. Mit E_{ik} wird die $x_i x_k$ -Ebene bezeichnet.
- Stelle die Gleichungen der beiden Ebenen E_1 und E_2 in Normalenform auf.
 - Berechne die Achsenpunkte der Ebenen E_1 und E_2 (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen).
 - Die Schnittgeraden der Ebenen E_1 und E_2 mit der $x_1 x_2$ -Ebene (Spurgeraden) sind $g_1 = E_1 \cap E_{12}$ und $g_2 = E_2 \cap E_{12}$. Stelle die Gleichungen dieser Geraden in der Form $x_2 = f(x_1)$ auf.
 - $F(5|4|f_3) \in E_1$ und $G(1|g_2|3) \in E_2$. Berechne die fehlenden Koordinaten.
 - Veranschauliche die Lage der Ebenen in einem Schrägbild. Zeichne alle beschriebenen Punkte ein.
 - Berechne den (spitzen) Schnittwinkel der Ebenen E_1 und E_2 .

Lösung: (a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\vec{n}_1' = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -8 & 5 & 6 \\ -4 & 9 & 4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ 8 \\ -52 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -17 \\ 4 \\ 26 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -17 \\ 4 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_2' = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -8 & 5 & -6 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 42 \\ -27 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Mit $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ folgt $\vec{n}_1 \vec{a} = -45$ und $\vec{n}_2 \vec{a} = -14$ und damit

$$\vec{n}_1(\vec{x} - \vec{a}) = 0 \implies E_1: -17x_1 + 4x_2 - 26x_3 + 45 = 0$$

$$\vec{n}_2(\vec{x} - \vec{a}) = 0 \implies E_2: 2x_1 + 14x_2 - 9x_3 + 14 = 0$$

(b) Achsenpunkte von E_1 : $A_{11}(\frac{45}{17}|0|0)$, $A_{12}(0|-\frac{45}{4}|0)$, $A_{13}(0|0|\frac{45}{26})$

Achsenpunkte von E_2 : $A_{21}(-7|0|0)$, $A_{22}(0|-1|0)$, $A_{23}(0|0|\frac{14}{9})$

(c) $g_1: -17x_1 + 4x_2 + 45 = 0 \implies x_2 = \frac{17}{4}x_1 - \frac{45}{4}$

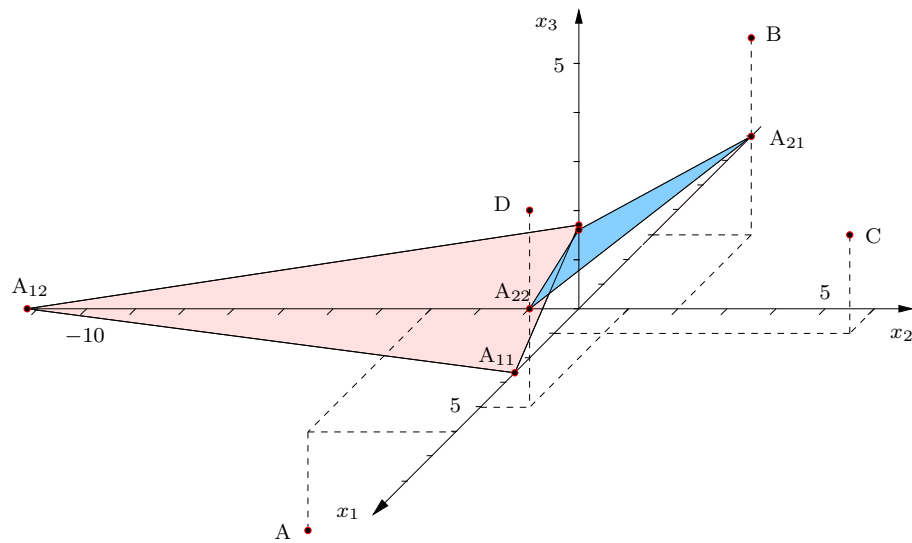
$g_2: 2x_1 + 14x_2 + 14 = 0 \implies x_2 = -\frac{1}{7}x_1 - 1$

(d) $-17 \cdot 5 + 4 \cdot 4 - 26f_3 + 45 = 0 \implies f_3 = -\frac{12}{13}$

$2 \cdot 1 + 14 \cdot g_2 - 9 \cdot 3 + 14 = 0 \implies g_2 = \frac{11}{14}$

4.3 Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

(e)



$$(f) \quad \cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{256}{3\sqrt{109} \cdot \sqrt{281}} = 0,4876 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 60,82^\circ$$

3. Berechne die Schnittmenge der Geraden

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit den Ebenen

(a) x_1x_2 -Ebene

(b) x_1x_3 -Ebene

(c) x_2x_3 -Ebene

(d) $E_1: \quad 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 20 = 0$

(e) $E_2: \quad$ Ebene durch $A(-1|0|-3)$, $B(-5|2|1)$ und $C(-1|4|-3)$

(f) $E_3: \quad$ Ebene durch $F(5,8|0|0)$, $G(0|\frac{29}{8}|0)$ und $H(0|0|-5,8)$

Veranschauliche den ganzen Sachverhalt in einem Schrägbild.

Lösung: (a) $x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \quad \Rightarrow \quad$ Schnittpunkt: $S_{12} (9|-2|0)$

(b) $x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{5} = -0,6 \quad \Rightarrow \quad$ Schnittpunkt: $S_{13} (\frac{37}{5}|0|\frac{8}{5}) = S_{13} (7,4|0|1,6)$

(c) $x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{5}{4} = 1,25 \quad \Rightarrow \quad$ Schnittpunkt: $S_{23} (0|\frac{37}{4}|9) = S_{23} (0|9,25|9)$

(d) g in $E_1: \quad 2(5-4\lambda) - 4(3+5\lambda) + 5(4+4\lambda) - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad -8\lambda - 2 = 0$

$\lambda = -\frac{1}{4}$ in $g: \quad S_{E1} (6|\frac{7}{4}|3) = S_{E1} (6|1,75|3) \quad \Rightarrow \quad L = \{S_{E1}\}$

4.3 Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

$$(e) \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}'_2 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = -\frac{\vec{n}'_2}{16} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2: \quad \vec{n}(\vec{x} - \vec{a}) = 0 \implies x_1 + x_3 + 4 = 0$$

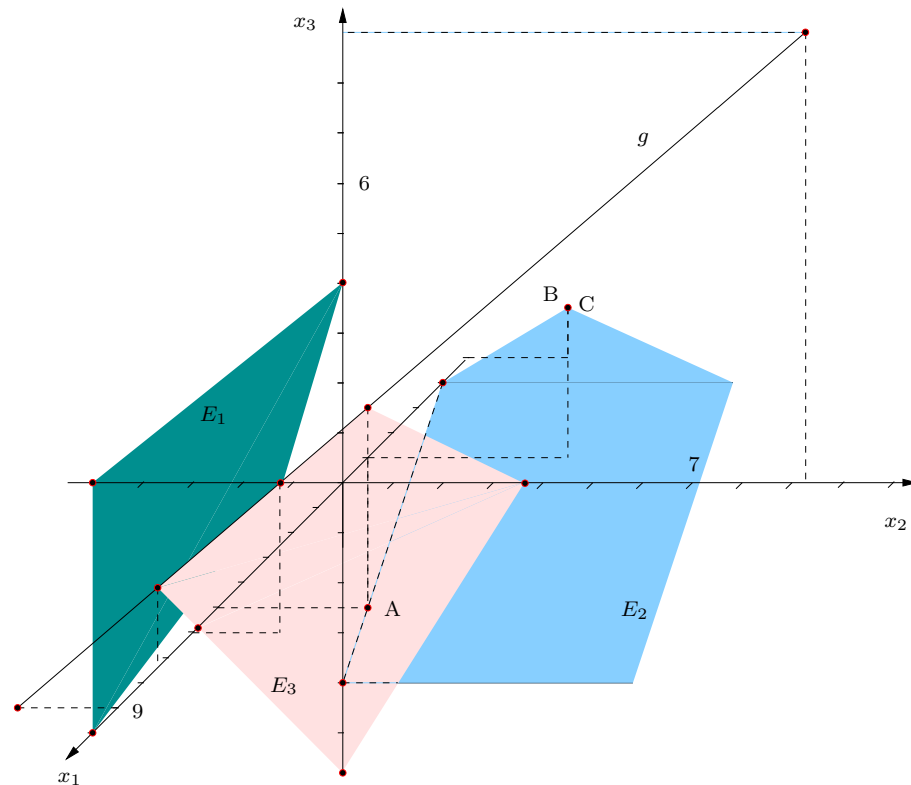
$$g \text{ in } E_2: \quad 5 - 4\lambda + 4 + 4\lambda - 20 = 0 \implies 13 = 0 \implies L = \emptyset$$

(f) F, G und H sind Achsenpunkte, also Achsenabschnittsform:

$$E_3: \quad \frac{x_1}{5,8} + \frac{8x_2}{29} - \frac{x_3}{5,8} = 1 \Big| \cdot 58 \implies 5x_1 + 8x_2 - 5x_3 - 29 = 0$$

$$g \text{ in } E_3: \quad 5(5 - 4\lambda) + 8(3 + 5\lambda) - 5(4 + 4\lambda) - 29 = 0 \implies 0 = 0$$

Die Gleichung ist für jedes λ erfüllt, d.h. $g \subset E_3$ oder $L = g$.



4. Bestimme k so, dass sich die Geraden

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

schneiden und berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S.

4.3 Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \implies$$

$$2 - \lambda = 1 + 4\mu$$

$$1 + 3\lambda = 1 - 3\mu$$

$$-1 - 2\lambda = k + \mu$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt $\lambda = -\frac{1}{3}$ und $\mu = \frac{1}{3}$ und damit aus der dritten Gleichung $k = -\frac{2}{3}$.

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \implies S \left(\frac{7}{3} \middle| 0 \middle| -\frac{1}{3} \right)$$

5. Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 20 \\ -25 \\ 30 \end{pmatrix},$$

$$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -12 \\ 15 \\ -18 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 3,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Fertige ein Schrägbild des Sachverhalts.

Lösung: $g_1: \vec{x} = \vec{A}_1 + \lambda \vec{v}_1$

$g_2: \vec{x} = \vec{A}_2 + \mu \vec{v}_2$

$g_3: \vec{x} = \vec{A}_3 + \nu \vec{v}_3$

$g_4: \vec{x} = \vec{A}_4 + \sigma \vec{v}_4$

$\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \parallel \vec{v}_3 \not\parallel \vec{v}_4$

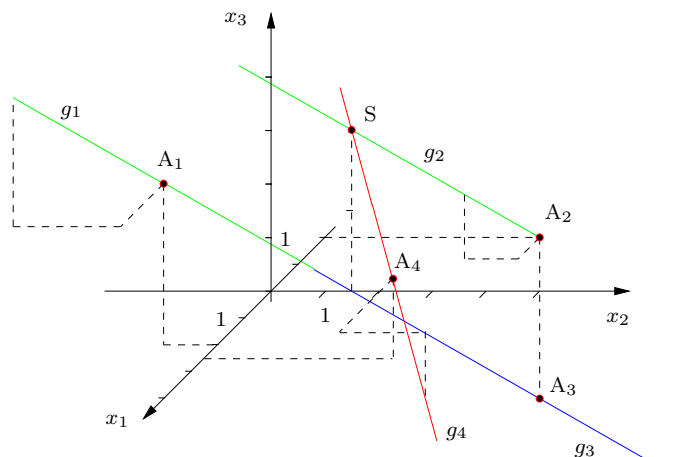
$\overrightarrow{A_1 A_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \not\parallel \vec{v}_1$

g_1 echt parallel zu g_2

$\overrightarrow{A_1 A_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \parallel \vec{v}_1$

$\implies g_1 = g_3$

$g_1 \cap g_4: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 3,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$



4.3 Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

$$\begin{array}{ll} 2 + 4\lambda = 2,5 + 5\sigma & (1) \\ -1 - 5\lambda = 3,5 + 4\sigma & (2) \\ 3 + 6\lambda = 1,5 - 3\sigma & (3) \end{array} \quad \begin{array}{l} (1) \text{ und } (2) \implies \lambda = -\frac{1}{2}, \quad \sigma = -\frac{1}{2} \\ \text{in } (3): 0 \neq 3 \implies g_1 \text{ windschief zu } g_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} g_2 \cap g_4: \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 3,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \\ -2 + 4\lambda = 2,5 + 5\sigma & (1) \\ 4 - 5\lambda = 3,5 + 4\sigma & (2) \\ 6\lambda = 1,5 - 3\sigma & (3) \end{array} \quad \begin{array}{l} (1) \text{ und } (2) \implies \lambda = \frac{1}{2}, \quad \sigma = -\frac{1}{2} \\ \text{in } (3): 3 = 3 \implies g_2 \cap g_4 = \{S\} \text{ mit} \\ \vec{S} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

6. Die Ebene E enthält die Punkte A (3|3|3), B (7|6|2) und C (2|7|4), die Gerade g geht durch die Punkte F (14|15|8) und G (13|10|4).

- Stelle die Gleichungen von E und g in der Parameterform auf.
- Berechne die Koordinaten der Achsenpunkte von E .
- Berechne die Koordinaten der Spurpunkte von g .
- Berechne die Schnittmenge von E und g .
- Stelle die Gleichung einer Ebene E' auf, die parallel zu g ist, den Punkt A enthält und deren Spurgrade in der x_1x_2 -Ebene parallel zur x_2 -Achse verläuft.

Veranschauliche den ganzen Sachverhalt in einem Schrägbild.

Lösung: (a) $E: \vec{x} = \vec{A} + \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$g: \vec{x} = \vec{G} + \lambda \vec{GF} = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(b) $E \cap x_3\text{-Achse} \implies x_1 = x_2 = 0:$ $4\lambda - \mu = -3 \quad (1)$

$$3\lambda + 4\mu = -3 \quad (2)$$

$$4 \cdot (1) + (2): \quad 19\lambda = -15 \quad (3)$$

$$\lambda = -\frac{15}{19} \quad (4)$$

$$(4) \text{ in } (1): \quad \mu = -\frac{3}{19} \quad (5)$$

$$(4) \text{ und } (5) \text{ in } E: \quad A_3 \left(0 \mid 0 \mid \frac{69}{19} \right)$$

4.3 Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

Analog zeigt man: $A_2(-23|0|0)$, $A_1\left(0\left|\frac{69}{7}\right|0\right)$

- (c) $g \cap x_1x_2\text{-Ebene} \implies x_3 = 4 + 4\sigma = 0 \implies \sigma = -1 \implies S_{12}(12|5|0)$
 $g \cap x_1x_3\text{-Ebene} \implies x_2 = 10 + 5\sigma = 0 \implies \sigma = -2 \implies S_{13}(11|0|-4)$
 $g \cap x_2x_3\text{-Ebene} \implies x_1 = 13 + \sigma = 0 \implies \sigma = -13 \implies S_{23}(0|-55|-48)$

(d) $E \cap g \implies x_E = x_g \implies :$ $4\lambda - \mu - \sigma = 10$ (1)

$3\lambda + 4\mu - 5\sigma = 7$ (2)

$-\lambda + \mu - 4\sigma = 1$ (3)

(1) : $4\lambda - \mu - \sigma = 10$ (4)

$3 \cdot (1) - 4 \cdot (2) :$ $-19\mu + 17\sigma = 2$ (5)

$(1) + 4 \cdot (3) :$ $3\mu - 17\sigma = 14$ (6)

$(5) + (6) :$ $-16\mu = 16$ (7)

$\implies \mu = -1, \quad \sigma = -1, \quad \lambda = 2$

$\sigma \text{ in } g \implies E \cap g = \{S\} \quad \text{mit } S(12|5|0)$

- (e) Richtungsvektoren von E' : $\vec{w} = \overrightarrow{GF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, da jeder zur Spurgeraden parallele Vektor als Richtungsvektor verwendet werden kann.

$$E' : \quad \vec{x} = \overrightarrow{A} + s\vec{w} + t\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

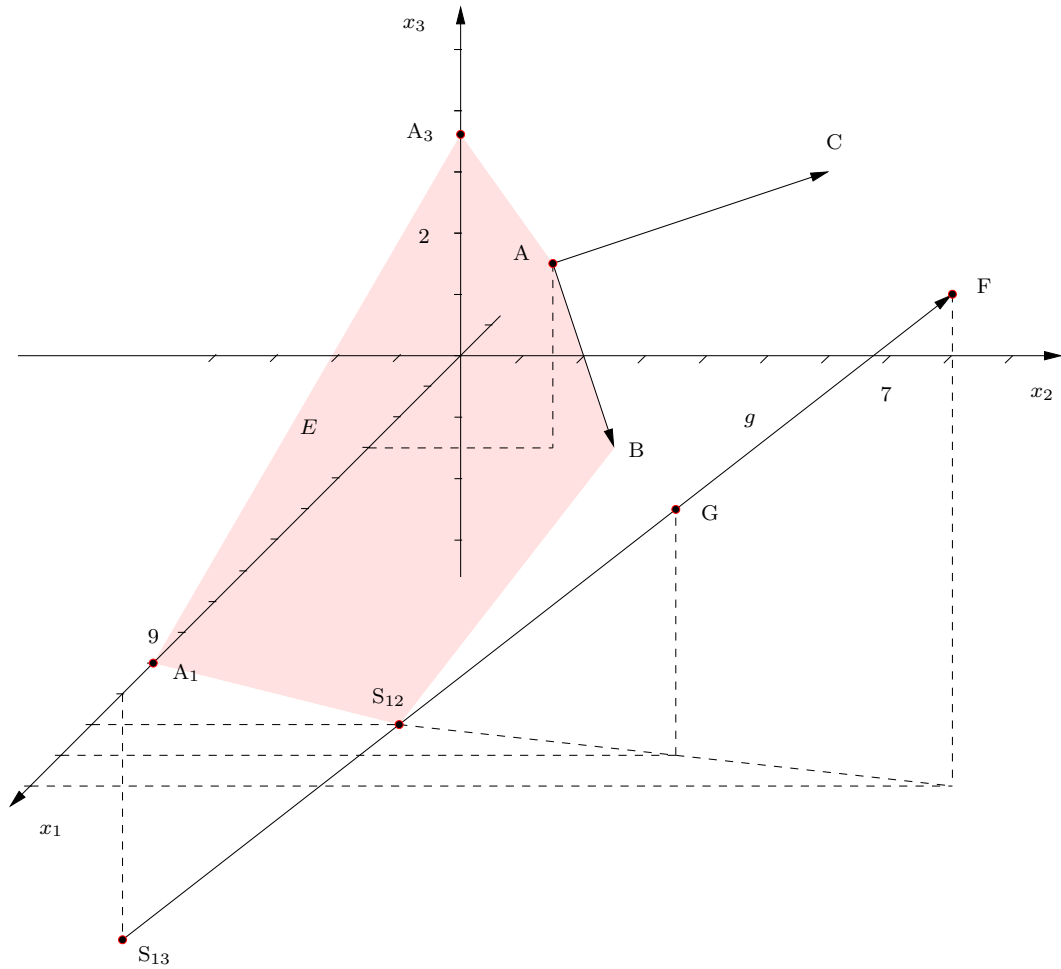
Für die Spurgerade h in der x_1x_2 -Ebene gilt $x_3 = 0 \implies$

$$x_3 = 3 + 4s = 0 \implies s = -\frac{3}{4}$$

s in E' :

$$h : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.3 Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen



7. Gegeben sind die Punkte $A(3|-2|1)$, $B(1|4|4)$ und $C(5|6|2)$ sowie der Vektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ z \end{pmatrix}.$$

Die Gerade g enthält die Punkte A und B , die Gerade h enthält den Punkt C und ist parallel zu $\vec{u}$.

- Stelle die Gleichungen von g und h auf.
- Berechne die Koordinaten des Spurpunktes G von g in der x_1x_2 -Ebene. g' und h' sind die Projektionen von g und h , parallel zur x_3 -Achse, in die x_1x_2 -Ebene. Stelle die Gleichungen von g' und h' in der Parameterform auf.
- z wird so gewählt, dass sich g und h schneiden. Berechne z und die Koordinaten des Schnittpunktes S .
- Erstelle ein Schrägbild mit allen gegebenen und berechneten geometrischen Größen.

4.3 Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

- (e) Berechne die Koordinaten des Spurpunktes H von h in der x_1x_2 -Ebene. F ist der Fußpunkt des Lotes von S auf die x_1x_2 -Ebene. Berechne das Volumen der Pyramide GHFS.

Lösung: (a) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$$

(b) $x_3 = 1 + 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \Rightarrow G\left(\frac{11}{3} \mid -4 \mid 0\right).$

$$g': \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h': \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) $g \cap h: \quad 3 - 2\lambda = 5 - 3\mu \quad (1)$

$$-2 + 6\lambda = 6 + 2\mu \quad (2)$$

$$1 + 3\lambda = 2 + z\mu \quad (3)$$

$$-2\lambda + 3\mu = 2 \quad (4)$$

$$6\lambda - 2\mu = 8 \quad (5)$$

$$3\lambda - z\mu = 1 \quad (6)$$

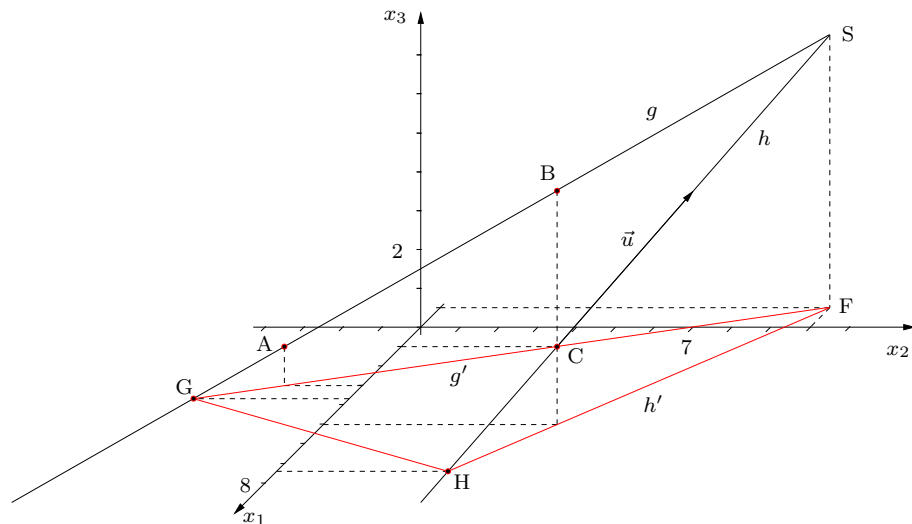
$$3 \cdot (4) + (5): \quad 7\mu = 14 \Rightarrow \mu = 2 \quad (7)$$

$$(7) \text{ in } (4): \quad -2\lambda + 6 = 2 \Rightarrow \lambda = 2 \quad (8)$$

$$(7), (8) \text{ in } (6): \quad 6 - 2z = 1 \Rightarrow z = 2,5 \quad (9)$$

(8) in $g \Rightarrow S(-1 \mid 10 \mid 7)$

(d)



4.3 Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

$$(e) \quad x_3 = 2 + \frac{5}{2}\mu = 0 \implies \mu = -\frac{4}{5} \implies H(7,4|4,4|0). F(-1|10|0).$$

$$\overrightarrow{HF} = \begin{pmatrix} -8,4 \\ 5,6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{42}{5} \\ \frac{28}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{14}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix} -\frac{56}{15} \\ -\frac{42}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{14}{15} \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{HF} \times \overrightarrow{HG} = \frac{14^2}{75} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 35 \end{pmatrix} \implies V = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{HF} \times \overrightarrow{HG}| \cdot \overline{FS} = \frac{14^2 \cdot 35 \cdot 7}{150} = \frac{4802}{15} \approx 320$$

8. Gegeben sind die Ebenen E_1 und E_2 durch die Gleichungen

$$E_1: \quad 5x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 20 = 0$$

$$E_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Berechne die Koordinaten der Achsenpunkte A_1 , A_2 und A_3 von E_1 und gib eine Gleichung von E_1 in der Parameterform an.
- Gib eine Gleichung von E_2 in der Normalenform an.
[Ein mögliches Ergebnis: $-3x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 12 = 0$]
- Die Achsenpunkte von E_2 seien B_1 , B_2 und B_3 . Wie lauten ihre Koordinaten?
[Zur Kontrolle: $B_2(0|4|0)$]
- Die Gerade g ist das Lot auf E_2 in B_2 . Schreibe die Gleichung von g hin und Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S von g mit E_1 .
- Zeichne die Spurgeraden der beiden Ebenen sowie S und g in ein Schrägbild.
- Berechne das Volumen der Pyramide $B_1B_2B_3S$.

Lösung: (a) $E_1: \quad \frac{x_1}{4} - \frac{x_2}{5} + \frac{x_3}{4} = 1 \implies A_1(4|0|0), A_2(0|-5|0), A_3(0|0|4).$

$$E_1: \quad \vec{x} = \overrightarrow{A_1} + \nu \overrightarrow{A_2 A_1} + \sigma \overrightarrow{A_3 A_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$$

$$E_2: \quad x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$$

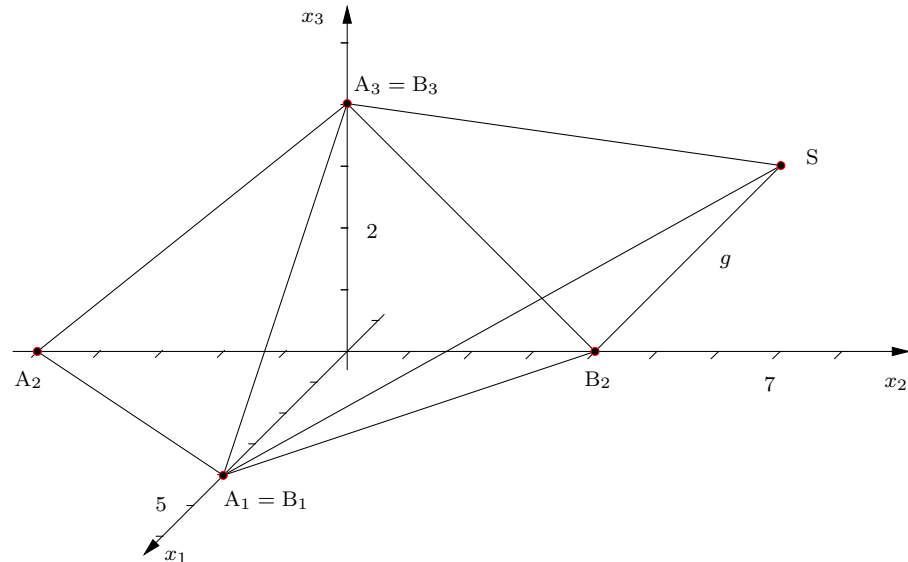
$$(c) \quad E_2: \quad \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{4} = 1 \implies B_1(4|0|0), B_2(0|4|0), B_3(0|0|4).$$

4.3 Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

$$(d) \quad g: \quad \vec{x} = \vec{B}_2 + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g \text{ in } E_1: 5t - 4(4 + t) + 5t - 20 = 0 \implies t = 6 \implies S(6|10|6)$$

(e)



$$(f) \quad V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |\vec{B_1 B_2} \times \vec{B_1 B_3}| \cdot |\vec{B_2 S}| = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \frac{4^2 \cdot 6}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 16 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 16 \cdot \sqrt{3}^2 = 48$$

9. Gegeben sind die Ebenen

$$E_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_3: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E_4: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Berechne alle Schnittmengen zwischen jeweils zwei der gegebenen Ebenen.

Lösung: Man verschafft sich zunächst einen Überblick, indem man mit Hilfe des Kreuzprodukts Normalenvektoren der Ebenen berechnet:

$$\vec{n}_1 = \vec{n}_2 = \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

4.3 Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

Die Gleichungen der Ebenen in Normalenform:

$$E_1 : \quad x_2 + x_3 - 6 = 0 \quad (1)$$

$$E_2 : \quad x_2 + x_3 - 6 = 0 \quad (2)$$

$$E_3 : \quad x_2 + x_3 - 4 = 0 \quad (3)$$

$$E_4 : \quad 5x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 9 = 0 \quad (4)$$

$$E_1 \cap E_2 = E_1 = E_2, \quad E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3 = \emptyset$$

$E_1 \cap E_4$: Zwei Gleichungen mit drei Unbekannten, wir setzen $x_3 = \lambda$:

$$(1) \Rightarrow \quad x_2 = 6 - \lambda \quad (5)$$

$$(4) \Rightarrow \quad 5x_1 - 5x_2 = 9\lambda - 9 \quad (6)$$

$$(5) \text{ in } (6) : \quad 5x_1 - 30 + 5\lambda = 9\lambda - 9 \quad (7)$$

$$x_1 = \frac{4}{5}\lambda + \frac{21}{5}$$

$$E_1 \cap E_4 = E_2 \cap E_4 = g : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{21}{5} \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$E_3 \cap E_4$: Zwei Gleichungen mit drei Unbekannten, wir setzen $x_3 = \lambda$:

$$(3) \Rightarrow \quad x_2 = 4 - \lambda \quad (8)$$

$$(4) \Rightarrow \quad 5x_1 - 5x_2 = 9\lambda - 9 \quad (9)$$

$$(5) \text{ in } (6) : \quad 5x_1 - 20 + 5\lambda = 9\lambda - 9 \quad (10)$$

$$x_1 = \frac{4}{5}\lambda + \frac{11}{5}$$

$$E_3 \cap E_4 = h : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

10. Berechne die Schnittmengen der Ebene $E : 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 20 = 0$ mit den Ebenen

$$E_1 : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E_2 : \quad -x_1 + 5x_2 - x_3 - 22 = 0$$

Lösung: Mit Hilfe des Kreuzprodukts berechnet man den Normalenvektor von E_1 :

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

4.4 Abstand- und Winkelbestimmung

Die Gleichungen der Ebenen in Normalenform:

$$E : 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 20 = 0 \quad (1)$$

$$E_1 : 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 4 = 0 \quad (2)$$

$$E_2 : -x_1 + 5x_2 - x_3 - 22 = 0 \quad (3)$$

$E \cap E_1$: Zwei Gleichungen mit drei Unbekannten, wir setzen $x_3 = \lambda$:

$$E : 4x_1 + 7x_2 + 4\lambda - 20 = 0 \quad (4)$$

$$E_1 : 2x_1 - 3x_2 - 6\lambda + 4 = 0 \quad (5)$$

$$(4) - 2 \cdot (5) : 13x_2 + 16\lambda = 28 \quad (6)$$

$$x_2 = \frac{28}{13} - \frac{16}{13}\lambda \quad (7)$$

$$(7) \text{ in } (4) : 4x_1 + \frac{7 \cdot 28}{13} - \frac{7 \cdot 16}{13}\lambda + 4\lambda = 20 \mid : 4 \quad (8)$$

$$x_1 + \frac{49}{13} - \frac{28}{13}\lambda + \lambda = 5 \quad (9)$$

$$x_1 = \frac{16}{13} + \frac{15}{13}\lambda \quad (10)$$

$$E \cap E_1 = g : \vec{x} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 16 \\ 28 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{13} \begin{pmatrix} 15 \\ -16 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 15 \\ -16 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$E \cap E_2$: Zwei Gleichungen mit drei Unbekannten, wir setzen $x_3 = \lambda$:

$$E : 4x_1 + 7x_2 + 4\lambda - 20 = 0 \quad (11)$$

$$E_2 : -x_1 + 5x_2 - \lambda - 22 = 0 \quad (12)$$

$$(11) + 4 \cdot (12) : 27x_2 = 108 \quad (13)$$

$$x_2 = 4 \quad (14)$$

$$(14) \text{ in } (12) : x_1 = -2 - \lambda \quad (15)$$

$$E \cap E_2 = h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.4 Abstand- und Winkelbestimmung

1. F ist der Fußpunkt des Lotes von P auf E, P' ist der an E gespiegelte Punkt P. Bestimme die HNF von E und berechne den Abstand $d(P, E)$ und die Koordinaten von F und P'.

4.4 Abstand- und Winkelbestimmung

$$(a) \ E : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ P } (-4|5|-2)$$

$$(b) \ E : \quad 9x_1 + 12x_2 + 20x_3 - 205 = 0, \text{ P } (-6|22|31)$$

(c) E enthält die parallelen Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{P } (5|4|-3)$$

$$\text{Lösung: } (a) \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 8 + 6 - 18 = -4 \implies$$

$$E : \quad 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 4 = 0$$

$$\text{HNF von } E : \quad -\frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{6}{7}x_3 - \frac{4}{7} = 0$$

$$d(\text{P}, E) = \frac{-2 \cdot (-4) + 3 \cdot 5 + 6 \cdot (-2) - 4}{7} = 1$$

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \implies \vec{F} = \vec{P} - d(\text{P}, E) \cdot \vec{n}_0 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -26 \\ 32 \\ -20 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}' = \vec{P} - 2 \cdot d(\text{P}, E) \cdot \vec{n}_0 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -24 \\ 29 \\ -26 \end{pmatrix}$$

$$(b) \text{ HNF von } E : \quad \frac{9x_1 + 12x_2 + 20x_3 - 205}{25} = 0$$

$$d(\text{P}, E) = \frac{9 \cdot (-6) + 12 \cdot 22 + 20 \cdot 31 - 205}{25} = 25$$

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix} \implies \vec{F} = \vec{P} - d(\text{P}, E) \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} -15 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}' = \vec{P} - 2 \cdot d(\text{P}, E) \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} -24 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

(c) Richtungsvektoren von E :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{AB}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4.4 Abstand- und Winkelbestimmung

$$\text{HNF von } E: \frac{x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 1}{3} = 0$$

$$d(P, E) = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) - 1}{3} = 6$$

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \implies \vec{F} = \vec{P} - d(P, E) \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}' = \vec{P} - 2 \cdot d(P, E) \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. Gegeben sind die Punkte $A(0|2|3)$, $B(1|-2|6)$ und $C(-4|2|15)$ und die Geradenschar

$$g_a : \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a-2 \end{pmatrix}$$

- Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E durch die Punkte A , B und C .
- Geben Sie die Schnittpunkte der Ebene E mit den drei Koordinatenachsen und die Gleichung der Spurgeraden in der x_2x_3 -Ebene an.
- Für welchen Wert von a ist die Gerade g_a parallel zu E . Prüfen Sie ob diese in E enthalten ist.
- Beschreiben Sie die Lage der Geraden aus der Geradenschar.

Lösung: (a) z. B. $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$

$$(b) S_1(2|0|0), S_2(0|4|0), S_3(0|0|6), \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$(c) a = \frac{1}{8}, g_{\frac{1}{8}} \text{ liegt in } E$$

$$(d) \text{ ebenes Geradenbüschel, } g_a : \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Die Ebene E_1 enthält die Punkte $A(3|6|1)$, $B(-3|6|5)$ und $C(-3|-3|3)$.

- Stelle die Gleichung von E_1 in der vektorfreien Normalenform mit möglichst kleinen ganzen Zahlen auf.
- Eine weitere Ebene E_2 ist durch die Gleichung

$$E_2 : 6x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 15 = 0$$

gegeben. Berechne den (spitzen) Schnittwinkel der Ebenen E_1 und E_2 .

4.4 Abstand- und Winkelbestimmung

- (c) Untersuche, ob $C \in E_2$ gilt.
- (d) s_1 und s_2 sind die Spurgeraden von E_1 und E_2 in der x_1x_2 -Ebene. Schreibe die Gleichungen von s_1 und s_2 in der Form $x_2 = f(x_1)$ und berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Spurgeraden.
- (e) Zeichne alle bisher gegebenen und berechneten Größen in ein Schrägbild. Zeichne auch die noch fehlenden Spurgeraden von E_2 ein.
- (f) Zeichne die Schnittmenge $E_1 \cap E_2$ in das Schrägbild ein. Gib eine kurze Begründung deines Vorgehens.

Lösung: (a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}'_1 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 36 \\ -12 \\ 54 \end{pmatrix}$

$$\vec{n}'_1 = 6 \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \text{wir wählen} \quad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Mit $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ folgt $\vec{n}_1 \vec{a} = 6 \cdot 3 - 2 \cdot 6 + 9 \cdot 1 = 15$ und damit

$$\vec{n}_1(\vec{x} - \vec{a}) = 0 \quad \implies \quad E_1: 6x_1 - 2x_2 + 9x_3 - 15 = 0$$

(b) $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad |\vec{n}_1| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 9^2} = \sqrt{121} = 11, \quad |\vec{n}_2| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 7^2} = \sqrt{121} = 11$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{87}{121} \quad \implies \quad \varphi = 44,03^\circ$$

(c) $C \in E_2: 6 \cdot (-3) + 6 \cdot (-3) + 7 \cdot 3 + 15 = 0 \quad \implies \quad C \in E_2$

(d) $x_3 = 0$ in $E_1: 6x_1 - 2x_2 = 15 \quad \implies \quad s_1: x_2 = 3x_1 - 7,5$

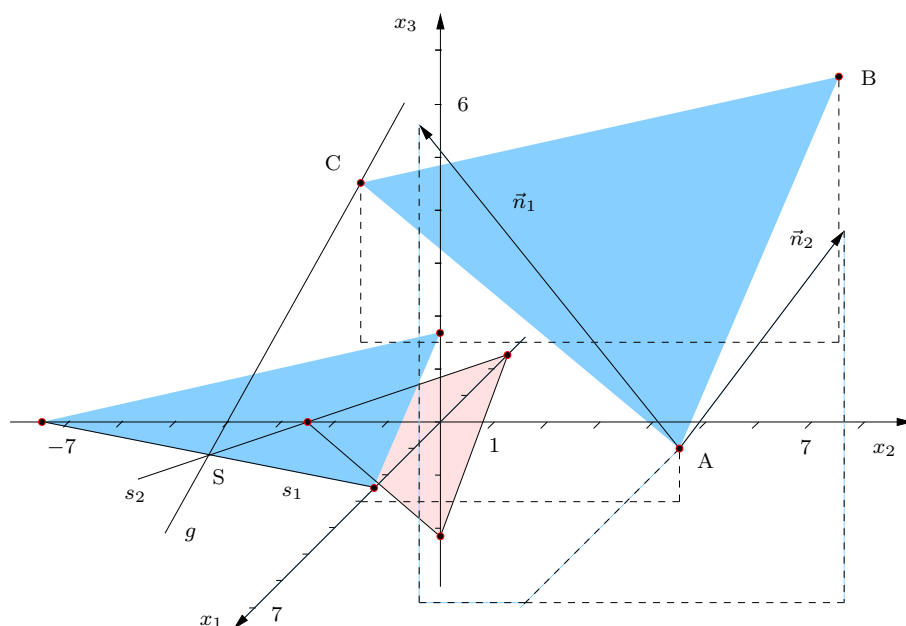
$x_3 = 0$ in $E_2: 6x_1 + 6x_2 = -15 \quad \implies \quad s_2: x_2 = -x_1 - 2,5$

$$s_1 \cap s_2: 3x_1 - 7,5 = -x_1 - 2,5 \quad \implies \quad x_1 = \frac{5}{4}$$

$$x_2 = \frac{15}{4} - \frac{15}{2} = -\frac{15}{4} \quad \implies \quad S \left(\frac{5}{4} \mid -\frac{15}{4} \mid 0 \right) = S(1,25 \mid -3,75 \mid 0)$$

(e) Achsenpunkte von $E_2: A_1(-2,5|0|0), A_2(0|-2,5|0), A_3(0|0|-\frac{15}{7})$

4.4 Abstand- und Winkelbestimmung



- (f) Da E_1 und E_2 nicht parallel sind ($\vec{n}_1 \not\parallel \vec{n}_2$) ist die gesuchte Schnittmenge eine Gerade g . Wir kennen zwei Punkte, die in beiden Ebenen liegen: S und C. Also ist

$$E_1 \cap E_2 = g = SC$$

4. Gegeben sind die Geraden

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \vec{b} + \mu \vec{v}, \mu \in \mathbb{R}$$

mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

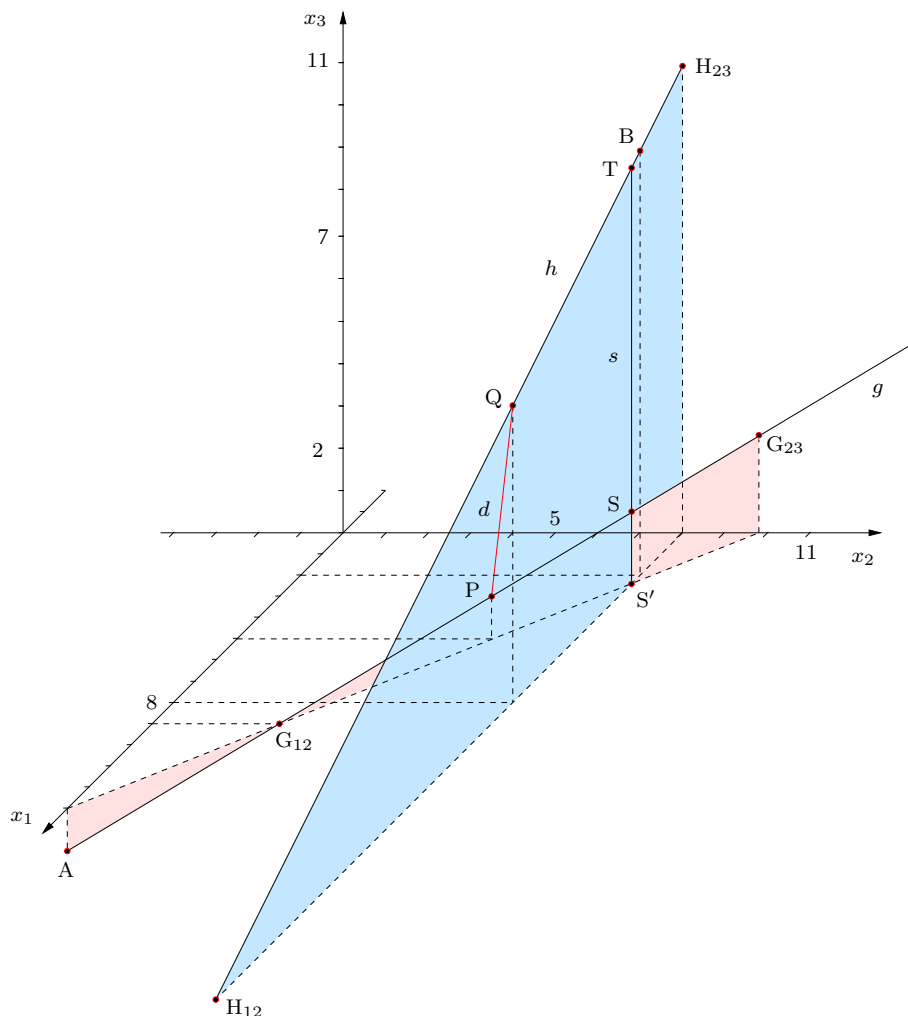
- Berechne die Koordinaten der Spurpunkte der beiden Geraden und zeichne die Geraden mit Spurpunkten in ein Schrägbild (verwende für die Zeichnung eine ganze Seite im Hochformat). Zeichne auch die Projektionen g' und h' der beiden Geraden in die x_1x_2 -Ebene ein. Wo schneiden sich g' und h' ?
- Zeige, dass die Geraden windschief sind und berechne ihren Abstand d .
- Berechne die Koordinaten der Punkte $P \in g$ und $Q \in h$ mit $\overline{PQ} = d$ und zeichne sie in das Schrägbild ein.
- Wir stellen uns g und h als straff gespannte Stahlseile vor. An h ist ein weiteres Seil der Länge s befestigt, das senkrecht nach unten hängt (parallel zur x_3 -Achse) und dessen Aufhängepunkt frei auf h gleitet. Wie groß darf s höchstens sein, damit das untere Ende des gleitenden Seils die Gerade g niemals berührt?

4.4 Abstand- und Winkelbestimmung

Lösung: (a) Spurpunkte von g : $G_{12} (9|3|0)$, $G_{13} (13|0|-1) = A$, $G_{23} (0|9,75|2,25)$

Spurpunkte von h : $H_{12} (22|8|0)$, kein H_{13} , da h parallel zur x_1x_3 -Ebene, $H_{23} (0|8|11)$

Setzt man die x_2 -Komponenten der Geradengleichungen gleich, dann folgt $\lambda = \frac{8}{3}$ und damit für den Schnittpunkt von g' und h' : $S' (\frac{7}{3}|8|0)$.



$$(b) \quad g \cap h : \quad 4\lambda + 2\mu = 11 \quad (1)$$

$$3\lambda = 8 \quad (2)$$

$$\lambda + \mu = 11 \quad (3)$$

$$(2) \text{ und } (3) \Rightarrow \quad \lambda = \frac{8}{3}, \quad \mu = \frac{25}{3} \quad (4)$$

$$(4) \text{ in } (1) \quad \underbrace{\frac{82}{3}}_{\text{IS}} \neq \underbrace{11}_{\text{rS}}$$

(1) also nicht erfüllt, d.h. g und h haben keinen Schnittpunkt. Da die Richtungsvektoren nicht parallel sind, sind g und h windschief.

4.4 Abstand- und Winkelbestimmung

(c) Ein Normalenvektor zu den beiden Richtungsvektoren ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$d = |\vec{n}_0(\vec{b} - \vec{a})| = \left| \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \right| = \frac{-33 + 16 + 66}{7} = 7$$

(d) Mit $\overrightarrow{PQ} = d\vec{n}_0$, $\vec{P} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$, $\vec{Q} = \vec{b} + \mu\vec{v}$ und $\vec{Q} = \vec{P} + \overrightarrow{PQ}$ folgt

$$13 - 4\lambda + 3 = 2 + 2\mu \quad (1)$$

$$3\lambda + 2 = 8 \quad (2)$$

$$-1 + \lambda + 6 = 10 - \mu \quad (3)$$

$$(1) \text{ und } (2) \implies \lambda = 2, \quad \mu = 3 \quad (4)$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \implies P(5|6|1)$$

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \implies Q(8|8|7)$$

(e) $S' \in g' \implies 3\lambda = 8 \implies \lambda = \frac{8}{3}$. Der Punkt $S \in g$, der senkrecht über S' liegt, hat die Koordinaten $S(\frac{7}{3}|\frac{8}{3}|\frac{5}{3})$.

$S' \in h' \implies 2 + 2\mu = \frac{7}{3} \implies \mu = \frac{1}{6}$. Der Punkt $T \in h$, der senkrecht über S' liegt, hat die Koordinaten $T(\frac{7}{3}|\frac{59}{6}|\frac{59}{6})$. Das Seil darf maximal die Länge

$$s = \frac{59}{6} - \frac{5}{3} = \frac{49}{6} = 8,1\overline{6}$$

haben.

5. Gegeben sind die beiden Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und der Punkt $P(5|4|-3)$.

(a) Berechne den Abstand $d(g, h)$ der beiden Geraden.

(b) Berechne die Abstände $d(P, g)$ und $d(P, h)$.

4.4 Abstand- und Winkelbestimmung

- (c) Wie lauten die Koordinaten der Fußpunkte F_g und F_h der Lote von P auf g und h ?
- (d) Spiegelt man P einmal an g und einmal an h , erhält man P_g und P_h . Berechne die Koordinaten dieser Spiegelpunkte. Schrägbild!

Lösung: (a) $g \parallel h$, A ist Aufpunkt von g , B Aufpunkt von h : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

φ ist der Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-2}{2\sqrt{41} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{2}}$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{1}{82}} = \frac{9}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{2}}$$

$$d(g, h) = \overline{AB} \sin \varphi = \frac{9 \cdot 2\sqrt{41}}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{2}} = 9\sqrt{2}$$

(b) $\vec{w} = \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, α ist der Winkel zwischen $\vec{w}$ und $\vec{v}$:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{|\vec{w}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-2}{\sqrt{110} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{55}}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{55}} = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{55}}$$

$$d(P, g) = \overline{AP} \sin \alpha = \frac{\sqrt{110} \cdot \sqrt{54}}{\sqrt{55}} = 6\sqrt{3}$$

$\vec{r} = \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, β ist der Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{v}$:

$$\cos \beta = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{v}|} = 0 \implies \beta = 90^\circ$$

$$d(P, h) = \overline{BP} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

(c)

$$\vec{F}_g = \vec{A} + \overline{AP} \cos \alpha \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{110}}{\sqrt{55}\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

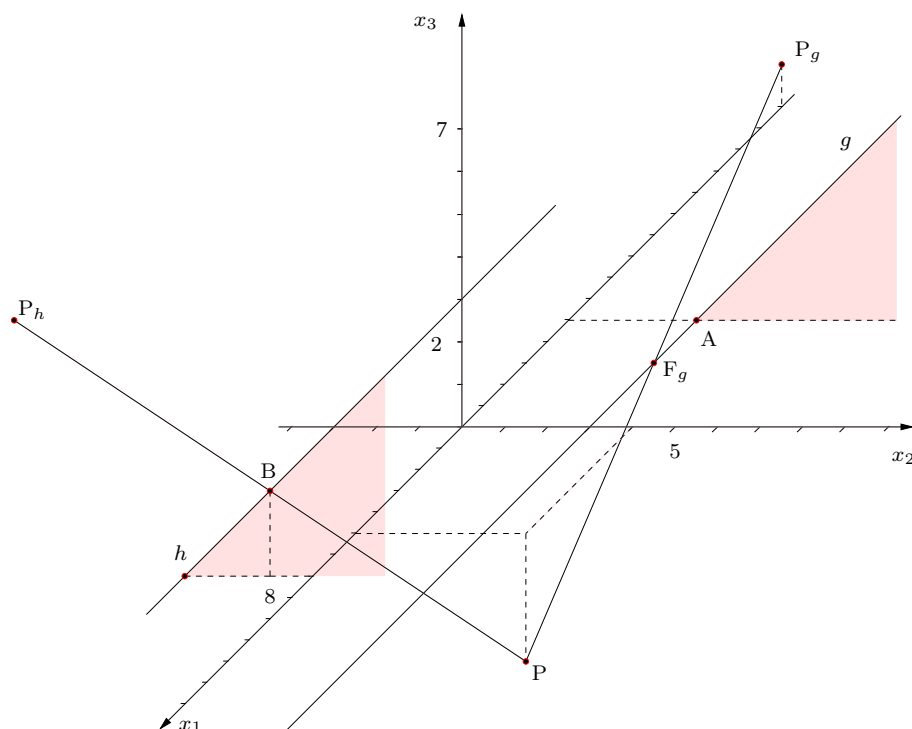
$$\vec{F}_h = \vec{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4.4 Abstand- und Winkelbestimmung

(d)

$$\vec{P}_g = \vec{F}_g + \overrightarrow{PF_g} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_h = \vec{F}_h + \overrightarrow{PF_h} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$$



6. Gegeben sind die Punkte A $(5|-2|1)$ und P $(2|3|0)$, der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Gerade

$$g: \vec{x} = \vec{A} + \lambda \vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- Berechne den Abstand $d(P, g)$ des Punktes P von der Geraden g.
- Berechne die Koordinaten des Fußpunktes F des Lotes von P auf g.
- Spiegelt man P an g, dann erhält man den Spiegelpunkt P'. Berechne seine Koordinaten.
- Stelle den ganzen Sachverhalt in einem Schrägbild dar.

Lösung: (a) $\varphi = \angle(\vec{v}, \overrightarrow{AP})$

$$\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \cos \varphi = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{AP}}{|\vec{v}| \cdot |\overrightarrow{AP}|} = \frac{12}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{35}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{35}}$$

4.4 Abstand- und Winkelbestimmung

$$d(P, g) = |\overrightarrow{AP}| \sin \varphi = |\overrightarrow{AP}| \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{35} \cdot \sqrt{1 - \frac{24}{35}} = \sqrt{11}$$

(b) Da $\cos \varphi > 0$, folgt

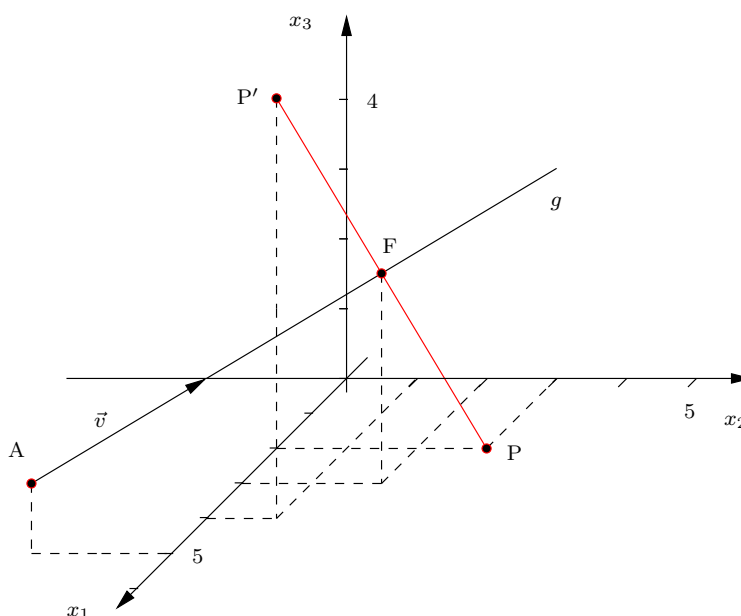
$$\overrightarrow{AF} = \frac{|\overrightarrow{AF}|}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{|\overrightarrow{AP}| \cos \varphi}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \vec{v} = 2\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = \vec{A} + \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad F(3|2|0)$$

(c)

$$\vec{P}' = \vec{P} + 2\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad P'(4|1|6)$$

(d)



7. Vom Quader ABCDPQRS kennt man A (0|0|0), B (6|0|0), C (6|10|0) und S (0|10|4,5).

(a) Wie lauten die Koordinaten der anderen Punkte des Quaders?

(b) Gib eine Gleichung für die Gerade $g = PC$ in der Parameterform an.

Zeichne ein Schrägbild des Quaders und zeichne g ein.

(c) Die Ebene E_1 enthält den Punkt S und steht senkrecht auf g . Stelle in nachvollziehbarer Weise eine Gleichung von E_1 in der (vektorfreen) Normalenform auf, deren Koeffizienten möglichst kleine ganze Zahlen sind.

[Zur Kontrolle: $E_1 : 24x_1 + 40x_2 - 18x_3 - 319 = 0$]

4.4 Abstand- und Winkelbestimmung

- (d) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes F von E_1 mit g und berechne damit den Abstand $d(S, g)$ des Punktes S von der Geraden g . Zeichne F in das Schrägbild ein.
- (e) Berechne den Abstand $d(B, E_1)$ des Punktes B von der Ebene E_1 .
- (f) In welcher Beziehung steht die Ebene

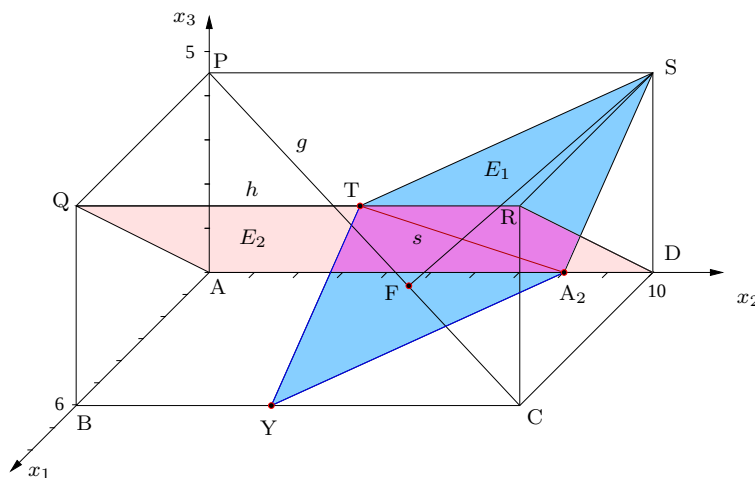
$$E_2 : -3x_1 + 4x_3 = 0$$

zu unserem Quader?

- (g) Wir betrachten die Geraden $a = AD$ (x_2 -Achse) und $h = QR$. Berechne die Koordinaten der Punkte A_2 und T mit $\{A_2\} = E_1 \cap a$ und $\{T\} = E_1 \cap h$. Weiter gilt $\{Y\} = E_1 \cap BC$ mit $Y(6|\frac{35}{8}|0)$ (Beweis nicht erforderlich). Veranschauliche die Ebenen E_1 und E_2 , indem du die Schnittmengen dieser Ebenen mit unserem Quader (Parallelelogramme) mit verschiedenen Farben in das Schrägbild einzeichnest.
- (h) Stelle eine Gleichung der Schnittgeraden $s = E_1 \cap E_2$ mit möglichst einfachen Zahlenwerten auf. Zeichne s in das Schrägbild ein.

Lösung: (a) D $(0|10|0)$, P $(0|0|4,5)$, Q $(6|0|4,5)$, R $(6|10|4,5)$

(b) $g : \vec{x} = \vec{P} + \overrightarrow{PC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4,5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -4,5 \end{pmatrix}$



(c) $\vec{n}'_1 = 2 \cdot \overrightarrow{PC} = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \\ -9 \end{pmatrix}$ ist Normalenvektor von E_1 . $\vec{n}'_1 \cdot \vec{S} = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 4,5 \end{pmatrix} = 159,5$.

$$\vec{n}_1 = 2\vec{n}'_1 \implies E_1 : \vec{n}_1(\vec{x} - \vec{S}) = 24x_1 + 40x_2 - 18x_3 - 319 = 0$$

(d) g in E_1 :

$$24 \cdot 6\lambda + 40 \cdot 10\lambda - 18 \cdot \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{2}\lambda\right) - 319 = 0 \implies 625\lambda = 400$$

4.4 Abstand- und Winkelbestimmung

$$\lambda = \frac{16}{25} \implies \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} + \frac{16}{25} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{96}{25} \\ \frac{32}{5} \\ \frac{81}{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,84 \\ 6,40 \\ 1,62 \end{pmatrix}$$

$$d(S, g) = |\vec{FS}| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{96}{25} \\ \frac{18}{5} \\ \frac{72}{25} \end{pmatrix} \right| = 6$$

(e)

$$d(B, E_1) = \left| \frac{\vec{n}_1}{|\vec{n}_1|} \cdot (\vec{B} - \vec{S}) \right| = \left| \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 24 \\ 40 \\ -18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} \right| = \frac{175}{50} = 3,5$$

(f) Jeder Punkt $(0 | x_2 | 0)$ erfüllt die Gleichung von E_2 , d.h. die x_2 -Achse ist in E_2 enthalten. Weiter erfüllt jeder Punkt $(6 | x_2 | 4,5)$ die Gleichung von E_2 , d.h. die Gerade $h = QR$ ist auch in E_2 enthalten. E_2 ist also Diagonalebene in unserem Quader.

$$(g) \quad E_1 \cap a \implies x_1 = x_3 = 0 \text{ in } E_1 \implies x_2 = \frac{319}{40} \implies A_2(0 | 7,975 | 0)$$

$$E_1 \cap h \implies x_1 = 6 \text{ und } x_3 = \frac{9}{2} \text{ in } E_1 \implies x_2 = \frac{32}{5} \implies T(6 | 6,4 | 4,5)$$

$$(h) \quad s = A_2T \implies s : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{319}{40} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -\frac{63}{40} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7,975 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 80 \\ -21 \\ 60 \end{pmatrix}$$

8. Das Quadrat ABCD mit A $(0|0|0)$, B $(76|0|0)$, C $(76|76|0)$ und D $(0|76|0)$ ist die Grundfläche einer geraden Pyramide mit der Spitze S $(38|38|56)$ (die Zahlenwerte verstehen sich in Metern). Weiter sind folgende Punkte gegeben:

- M_1 : Mittelpunkt von [AC]
- M_2 : Mittelpunkt von [CD]
- M_3 : Mittelpunkt von [DS]
- M_4 : Mittelpunkt von $[M_2S]$

(a) Zeige durch Rechnung: $M_3(19|57|28)$ und $M_4(38|57|28)$.

(b) Entlang der Geraden $g = M_1M_3$ und $h = BM_4$ verlaufen zwei Gänge durch die Pyramide. Stelle die Gleichungen von g und h auf und erstelle ein Schrägbild der Pyramide mit den Gängen (Einheit: $10 \text{ m} \hat{=} 1 \text{ cm}$).

(c) Die Ebene E_1 enthält den Punkt S und steht senkrecht auf h . Stelle in nachvollziehbarer Weise eine Gleichung von E_1 in der (vektorfreen) Normalenform auf, deren Koeffizienten möglichst kleine ganze Zahlen sind.

$$[\text{Zur Kontrolle: } E_1 : -38x_1 + 57x_2 + 28x_3 - 2290 = 0]$$

(d) Eine Grabkammer G befindet an der Stelle im Gang h , die von der Spitze S die kleinste Entfernung hat. Berechne diese kleinste Entfernung d und die Koordinaten von G. Zeichne G in das Schrägbild ein.

4.4 Abstand- und Winkelbestimmung

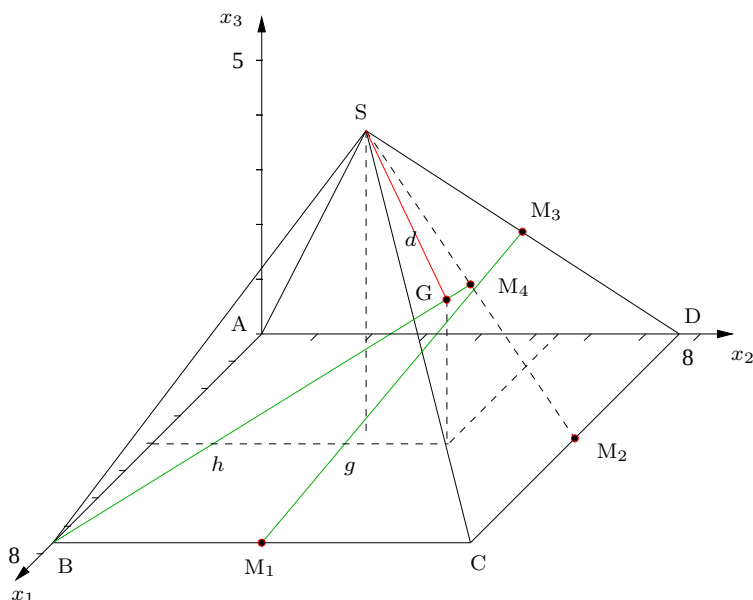
- (e) Eine Ratte lebt im Gang g , eine Maus im Gang h . Wie nah können sich die beiden Tiere kommen?

Lösung: (a) $M_1 (76|38|0)$, $M_2 (38|76|0)$, $\vec{M_3} = \vec{D} + \frac{1}{2}\vec{DS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 76 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 38 \\ -38 \\ 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 57 \\ 28 \end{pmatrix}$

$$\vec{M_4} = \vec{M_2} + \frac{1}{2}\vec{M_2S} = \begin{pmatrix} 38 \\ 76 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -38 \\ 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 57 \\ 28 \end{pmatrix}$$

(b) $g: \vec{x} = \vec{M_1} + \underbrace{\mu \vec{M_1M_3}}_{\vec{u}} = \begin{pmatrix} 76 \\ 38 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -57 \\ 19 \\ 28 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}$

$h: \vec{x} = \vec{B} + \underbrace{\lambda \vec{BM_4}}_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} 76 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -38 \\ 57 \\ 28 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$



(c) $\vec{n}_1 = \vec{v} = \vec{BM_4}$ ist Normalenvektor von E_1 . $\vec{n}_1 \cdot \vec{S} = \begin{pmatrix} -38 \\ 57 \\ 28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 38 \\ 38 \\ 56 \end{pmatrix} = 2290$.

$$\implies E_1: \vec{n}_1(\vec{x} - \vec{S}) = -38x_1 + 57x_2 + 28x_3 - 2290 = 0$$

- (d) G ist der Schnittpunkt von h mit E_1 . h in E_1 :

$$-38 \cdot (76 - 57\lambda) + 57 \cdot 57\lambda + 28 \cdot 28\lambda - 2290 = 0 \implies \lambda = \frac{5178}{5477}$$

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} 76 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5178}{5477} \begin{pmatrix} -38 \\ 57 \\ 28 \end{pmatrix} = \frac{1}{5477} \begin{pmatrix} 219488 \\ 295146 \\ 144984 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 40 \\ 54 \\ 26 \end{pmatrix}$$

4.5 Anwendungen

$$d = \overline{GS} = \frac{38\sqrt{4281}}{\sqrt{5477}} \approx 33,6$$

(e) Gesucht ist der Abstand $d(g, h)$ der beiden Geraden:

$$\vec{n}' = \vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -38 & 57 & 28 \\ -57 & 19 & 28 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 57 \cdot 28 - 28 \cdot 19 \\ -57 \cdot 28 + 38 \cdot 28 \\ -38 \cdot 19 + 57 \cdot 57 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1064 \\ -532 \\ 2527 \end{pmatrix} = 133 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$d(g, h) = \left| \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot (\vec{M}_1 - \vec{B}) \right| = \left| \frac{1}{21} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 38 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{-4 \cdot 38}{21} \right| = \frac{152}{21}$$

4.5 Anwendungen

1. Von einem brettebenen Slalomhang (Ebene E) sind die Punkte $A(0|0|40)$, $B(50|20|0)$ und $C(-20|55|20)$ bekannt (alle Koordinaten verstehen sich in Metern).
 - (a) Stelle die Gleichung von E in der vektorfreien Normalenform mit möglichst kleinen ganzen Zahlen auf.
 - (b) Berechne die fehlende Koordinate des Startpunktes $S(-10|s_2|60)$ auf dem Hang.
 - (c) Berechne die Koordinaten der Achsenpunkte A_1 und A_2 von E (Schnittpunkte von E mit der x_1 - und x_2 -Achse). Zeichne alle bisher behandelten Punkte und die Spurgeraden der Ebene E in ein Schrägbild (Einheit: $10 \text{ m} \hat{=} 1 \text{ cm}$).
 - (d) Welchen spitzen Winkel φ schließt E mit der x_1x_2 -Ebene (Talboden) ein? Welche Steigung (in Prozent) hat demnach der Slalomhang?
 - (e) Zeige, dass die Spurgerade t von E in der x_1x_2 -Ebene (wir nennen sie die *Tallinie*) durch die Gleichung

$$t: \quad x_2 = 70 - x_1$$

beschrieben wird.

- (f) Ein Abfahrer fährt geradlinig und auf dem kürzesten Weg vom Start S ins Tal und erreicht die Tallinie im Punkt $Y(y_1|y_2|0)$. Berechne die Koordinaten von Y und die Länge $\overline{SY}$.

Tipp: Verwende den Vektor $\overrightarrow{A_1A_2}$.

- (g) Ein Bauer, dem das viereckige Grundstück A_1A_2CS gehört, möchte es als Baugrund für 400 € pro m^2 verkaufen. Welchen Preis würde er dabei erzielen?

4.5 Anwendungen

Lösung: (a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ -40 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -20 \\ 55 \\ -20 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\vec{n}' = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 50 \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 5 & 2 & -4 \\ -4 & 11 & -4 \end{vmatrix} = 50 \begin{pmatrix} 2 \cdot (-4) - (-4) \cdot 11 \\ (-4) \cdot (-4) - 5 \cdot (-4) \\ 5 \cdot 11 - 2 \cdot (-4) \end{pmatrix} = 50 \begin{pmatrix} 36 \\ 36 \\ 63 \end{pmatrix}$$

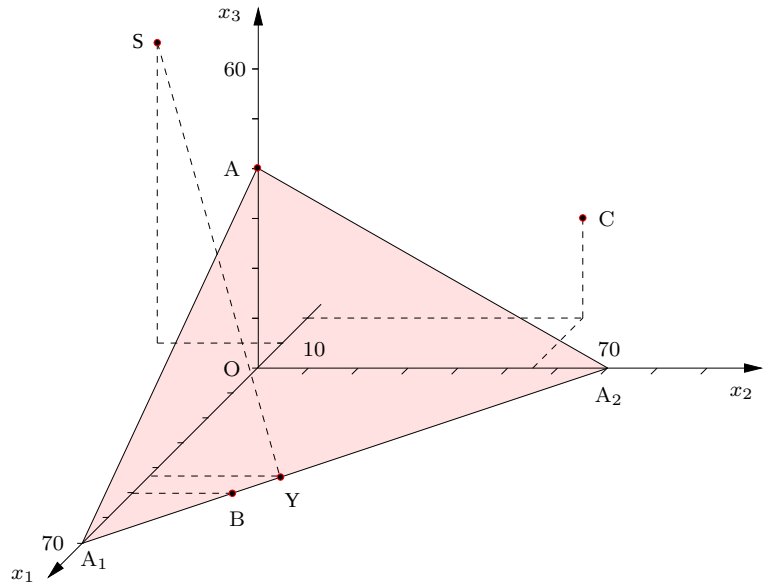
$$\vec{n}' = 450 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1800 \\ 1800 \\ 3150 \end{pmatrix}, \quad \text{wir wählen } \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Mit $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix}$ folgt $\vec{n}\vec{a} = 7 \cdot 40 = 280$ und damit

$$\vec{n}(\vec{x} - \vec{a}) = 0 \implies E: 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 280 = 0$$

(b) $S \in E \implies 4 \cdot (-10) + 4s_2 + 7 \cdot 60 = 280 \implies s_2 = -25$

(c) $A_1: x_2 = x_3 = 0$
 $\implies 4x_1 = 280$
 $\implies x_1 = 70$
 $A_2: x_1 = x_3 = 0$
 $\implies 4x_2 = 280$
 $\implies x_2 = 70$



(d) Normalenvektor der x_1x_2 -Ebene: $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\vec{n}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{81} = 9$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{e}_3 \vec{n}}{|\vec{e}_3| \cdot |\vec{n}|} = \frac{7}{1 \cdot 9} \implies \varphi = 38,94^\circ, \quad \text{Steigung: } \tan \varphi = 80,8\%$$

(e) Es genügt zu zeigen, dass A_1 und A_2 auf t liegen:

$$t(70) = 0 \implies A_1 \in t, \quad t(0) = 70 \implies A_2 \in t$$

4.5 Anwendungen

$$(f) \quad Y \in t \quad \Longrightarrow \quad Y(y_1|70 - y_1|0), \quad \overrightarrow{A_1 A_2} = \begin{pmatrix} -70 \\ 70 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{SY} = \begin{pmatrix} y_1 + 10 \\ 95 - y_1 \\ -60 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A_1 A_2} \perp \overrightarrow{SY} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{A_1 A_2} \cdot \overrightarrow{SY} = -70(y_1 + 10) + 70(95 - y_1) = 0$$

$$-y_1 - 10 + 95 - y_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_1 = 42,5$$

$$y_2 = 70 - y_1 = 27,5 \quad \Longrightarrow \quad Y(42,5|27,5|0)$$

$$\overrightarrow{SY} = \begin{pmatrix} 52,5 \\ 52,5 \\ -60 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \overline{SY} = \sqrt{2 \cdot 52,5^2 + 60^2} \approx 95,5$$

$$(g) \quad \overrightarrow{A_2 A_1} = \begin{pmatrix} 70 \\ -70 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{A_2 S} = \begin{pmatrix} -10 \\ -95 \\ 60 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{A_2 C} = \begin{pmatrix} -20 \\ -15 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A_2 S} \times \overrightarrow{A_2 A_1} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -10 & -95 & 60 \\ 70 & -70 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4200 \\ 4200 \\ 7350 \end{pmatrix}, \quad \left| \overrightarrow{A_2 S} \times \overrightarrow{A_2 A_1} \right| = 9450$$

$$\overrightarrow{A_2 C} \times \overrightarrow{A_2 S} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -20 & -15 & 20 \\ -10 & -95 & 60 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1750 \end{pmatrix}, \quad \left| \overrightarrow{A_2 C} \times \overrightarrow{A_2 S} \right| = 2250$$

$$F = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_2 S} \times \overrightarrow{A_2 A_1} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_2 C} \times \overrightarrow{A_2 S} \right| = 5850$$

Preis: $3,51 \cdot 10^6 \text{ €}$

2. (a) Versuche, möglichst viel über die Lösungsmenge der Gleichung

$$\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$$

mit dem unbekannten Vektor $\vec{x}$ herauszufinden. Verwende eine sauber beschriftete Zeichnung als Überlegungsfigur und die gängigen Formeln für das Kreuzprodukt. Unterscheide die Fälle $\vec{a} \perp \vec{b}$ und $\vec{a} \not\perp \vec{b}$.

- (b) Gib mindestens zwei Elemente der Lösungsmenge von

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}$$

an (am besten natürlich die ganze Lösungsmenge).

4.5 Anwendungen

Lösung: (a) Fall 1 ($\vec{a} \not\perp \vec{b}$):

Da $\vec{a} \times \vec{x}$ immer senkrecht auf $\vec{a}$ steht,
ist $L = \emptyset$.

Fall 2 ($\vec{a} \perp \vec{b}$):

$$\vec{x} \perp \vec{b} \implies \vec{x} \parallel E \text{ mit } E: \vec{b}\vec{x} = 0$$

$$|\vec{a} \times \vec{x}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{x}| \sin \varphi = |\vec{b}| \implies$$

$$|\vec{c}| = |\vec{x}| \sin \varphi = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

$$\vec{x} = \lambda \vec{a} + \vec{c} = \lambda \vec{a} + \frac{\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{b} \times \vec{a}|} \cdot \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

$$L = \left\{ \vec{x} \mid \vec{x} = \lambda \vec{a} + \frac{\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \wedge \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad (1)$$

$$\text{Oder: } \vec{a} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 x_3 - a_3 x_2 \\ a_3 x_1 - a_1 x_3 \\ a_1 x_2 - a_2 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \implies$$

$$x_2 = \frac{a_2 x_3}{a_3} - \frac{b_1}{a_3}, \quad x_1 = \frac{a_1 x_3}{a_3} + \frac{b_2}{a_3} \implies$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1 x_3}{a_3} + \frac{b_2}{a_3} \\ \frac{a_2 x_3}{a_3} - \frac{b_1}{a_3} \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{x_3}{a_3} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b_2}{a_3} \\ -\frac{b_1}{a_3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit $\lambda = \frac{x_3}{a_3}$ folgt

$$\vec{x} = \lambda \vec{a} + \frac{1}{a_3} \cdot \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

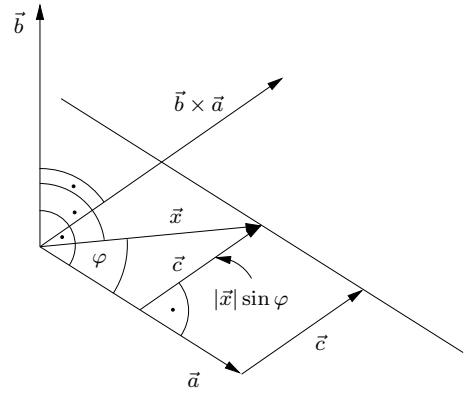
(äquivalent zur obigen Lösung, nur anderer Aufpunkt)

$$(b) \text{ Mit (1): } \vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 11 & 10 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 52 \\ -55 \end{pmatrix}, \quad |\vec{a}|^2 = 26$$

$$L = \left\{ \vec{x} \mid \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{26} \begin{pmatrix} -11 \\ 52 \\ -55 \end{pmatrix} \wedge \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Mit (2):

$$L = \left\{ \vec{x} \mid \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$



z.B.

$$\begin{array}{c|c|c|c} \lambda & 0 & 1 & 2 \\ \hline \vec{x} & \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Oder:

$$\vec{a} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 5 & 0 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - 5x_3 \\ 5x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix} \implies$$

$$x_2 = 2 \text{ und } x_1 = -5x_3 - 11$$

3. Auf Kollisionskurs

Ein Körper K bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$, zur Zeit t_1 befindet er sich am Ort $\vec{x}_1$. Der Ort von K zur Zeit t ist dann

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_1 + (t - t_1)\vec{v},$$

die Gleichung der Bahnkurve (Gerade g) von K lautet:

$$g: \quad \vec{x} = \vec{x}_1 + \lambda \vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Aus dem Protokoll einer Flugüberwachung:

Flugzeug	Zeit	x in m	y in m	z in m	v_x in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	v_y in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	v_z in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
Airbus	00:00:00	10000	2000	3000	-50	-100	20
Kampffjet	00:00:39	9500	1000	1600	-100	-200	120

- Berechne die Beträge der Flugzeuggeschwindigkeiten.
- Unter welchem Winkel, gegebenenfalls nach einer Parallelverschiebung, schneiden sich die Flugbahnen?
- Wo sind die beiden Flugzeuge, gerade Flugbahnen vorausgesetzt, auf der Höhe null gestartet?
- Untersuche, ob sich die Flugbahnen der beiden Maschinen schneiden und ob es zu einer Kollision kommt.
- Berechne die minimale Entfernung der beiden Flugzeuge.

Lösung: (a) $\vec{v}_A = \begin{pmatrix} -50 \\ -100 \\ 20 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}} \implies |\vec{v}_A| = \sqrt{12900} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 116 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 409 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

$$\vec{v}_K = \begin{pmatrix} -100 \\ -200 \\ 120 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}} \implies |\vec{v}_K| = \sqrt{64400} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 254 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 914 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

4.5 Anwendungen

(b) $\cos \varphi = \frac{|\vec{v}_A \vec{v}_K|}{|\vec{v}_A| \cdot |\vec{v}_K|} = 0,9506 \implies \varphi = 18,1^\circ$

(c) Bahnkurven ohne Einheiten:

Airbus: $g_A : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10000 \\ 2000 \\ 3000 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -50 \\ -100 \\ 20 \end{pmatrix}$

Jet: $g_K : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9500 \\ 1000 \\ 1600 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -100 \\ -200 \\ 120 \end{pmatrix}$

$x_3 = 0 \implies \lambda = -150 \text{ und } \mu = -\frac{40}{3}$. Die Startorte sind dann

$$s_A = \begin{pmatrix} 17,5 \\ 17,0 \\ 0,0 \end{pmatrix} \text{ km} \quad \text{und} \quad s_K \approx \begin{pmatrix} 10,83 \\ 3,67 \\ 0,00 \end{pmatrix} \text{ km}$$

(d) $g_A = g_K \implies 50\lambda - 100\mu = 500 \quad (1)$

$$100\lambda - 200\mu = 1000 \quad (2)$$

$$-20\lambda + 120\mu = 1400 \quad (3)$$

(1) und (2) identisch : $\lambda - 2\mu = 10 \quad (4)$

$$-\lambda + 6\mu = 70 \quad (5)$$

(4) + (5)

$$4\mu = 80$$

$$\mu = 20, \quad \lambda = 50$$

Die Flugbahnen schneiden sich in S (7500 | -3000 | 4000).

Orte der Flugzeuge:

Airbus: $\vec{x}_A(t) = \begin{pmatrix} 10000 \\ 2000 \\ 3000 \end{pmatrix} \text{ m} + t \cdot \begin{pmatrix} -50 \\ -100 \\ 20 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Jet: $\vec{x}_K(t) = \begin{pmatrix} 9500 \\ 1000 \\ 1600 \end{pmatrix} \text{ m} + (t - 39 \text{ s}) \begin{pmatrix} -100 \\ -200 \\ 120 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Der Airbus ist zur Zeit $t_A = 50 \text{ s}$, der Jet zur Zeit $t_K = 59 \text{ s}$ am Ort S.

(e) Die Entfernung der beiden Flugzeuge zur Zeit t bezeichnen wir mit $s(t)$. Der Einfachheit halber rechnen wir ohne Einheiten:

$$\begin{aligned} f(t) = s(t)^2 &= [\vec{x}_A(t) - \vec{x}_K(t)]^2 = \begin{pmatrix} 50t - 3400 \\ 100t - 6800 \\ 6080 - 100t \end{pmatrix}^2 = \\ &= 22\,500t^2 - 2\,916\,000t + 94\,766\,400 \end{aligned}$$

4.5 Anwendungen

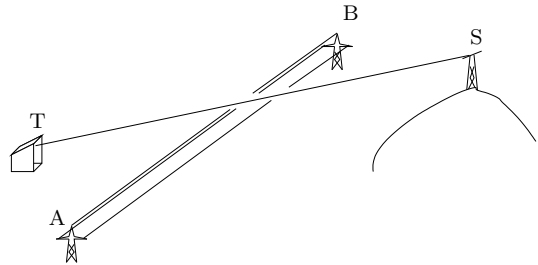
$s(t)$ ist minimal, wenn $f(t)$ minimal ist:

$$f'(t) = 45\,000t - 2\,916\,000 = 0 \implies t = 64,8$$

$$s(64,8) = \sqrt{22\,500 \cdot 64,8^2 - 2\,916\,000 \cdot 64,8 + 94\,766\,400} = \sqrt{288\,000} \approx 537$$

Die minimale Entfernung zur Zeit 64,8 s ist also 537 m.

4. Eine straff gespannte Überlandleitung führt von A (120|40|20) nach B (40|100|30), das ebenfalls (idealisiert) als geradlinig verlaufende Seil einer Bergbahn von der Talstation T (78|−5|14) zur Spitze S (78|135|s) des ersten Mastens. Alle Koordinaten verstehen sich in Metern.



- Stelle die Gleichungen der Geraden $g = AB$ und $h = TS$ auf.
- Für welches $s = s_1$ schneiden sich g und h ?
- Stelle den Abstand d der Geraden g und h als Funktion von s dar.
- Eine Vorschrift besagt, dass d mindestens 15 m betragen muss. Für welches $s = s_2$ ist d genau 15 m?
- Es gilt jetzt $s = s_2$. Für welches $P \in g$ und $Q \in h$ gilt $\overline{PQ} = d$?
- Stelle den ganzen Sachverhalt in einem Schrägbild dar.

Lösung: (a) $g: \vec{x} = \vec{A} + \lambda' \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 120 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} -80 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$h: \vec{x} = \vec{T} + \mu \overrightarrow{TS} = \begin{pmatrix} 78 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 140 \\ s - 14 \end{pmatrix}$$

- (b) Gleichsetzen von g und h :

$$-8\lambda = -42 \quad (1)$$

$$6\lambda - 140\mu = -45 \quad (2)$$

$$\lambda - (s - 14)\mu = -6 \quad (3)$$

$$(1) \implies \lambda = \frac{21}{4} \quad (4)$$

$$(4) \text{ und } (2): \mu = \frac{153}{280} \quad (5)$$

$$(4) \text{ und } (5) \text{ in } (3): \frac{21}{4} - (s - 14) \cdot \frac{153}{280} = -6 \quad (6)$$

$$s = s_1 = \frac{588}{17} \approx 34,6$$

4.5 Anwendungen

(c) Die kürzeste Verbindung zwischen g und h steht senkrecht auf beiden Geraden:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 140 \\ s-14 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 224-6s \\ 112-8s \\ 1120 \end{pmatrix}$$

Die Ebene E enthält g und steht senkrecht auf $\vec{n}$:

$$E: \quad \vec{n}(\vec{x} - \vec{A}) = 0$$

Der Abstand der Geraden ist der Abstand von T zu E :

$$\begin{aligned} d(s) &= \frac{\vec{n}(\vec{T} - \vec{A})}{|\vec{n}|} = \frac{\begin{pmatrix} 224-6s \\ 112-8s \\ 1120 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -42 \\ -45 \\ -6 \end{pmatrix}}{\sqrt{(224-6s)^2 + (112-8s)^2 + 1120}} = \\ &= \frac{612s - 21168}{\sqrt{(224-6s)^2 + (112-8s)^2 + 1120}} = 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (612s - 21168)^2 &= 15^2 \cdot [(224-6s)^2 + (112-8s)^2 + 1120] \\ 374544s^2 - 25909632s + 448084224 &= 22500s^2 - 1008000s + 296352000 \\ 352044s^2 - 24901632s &= -151732224 \end{aligned}$$

$$s^2 - 2 \cdot \frac{49408}{1397} = -\frac{602112}{1397}$$

$$\left(s - \frac{49408}{1397}\right)^2 = \frac{49408^2 - 602112 \cdot 1397}{1397^2} = \frac{40000^2}{1397^2}$$

$$s = \frac{49408}{1397} \left(\pm \right) \frac{40000}{1397}$$

$$s = s_2 = 64, \quad \left(s_3 = \frac{9408}{1397} \approx 6,73\right)$$

$$(d) \quad s = 64 \implies h: \quad \vec{x} = \vec{T} + \mu \vec{TS} = \begin{pmatrix} 78 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix} + \mu' \begin{pmatrix} 0 \\ 140 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Weiter folgt aus $s = 64$: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}| = 15$. Da $\vec{n}$ nach oben zeigt und h über g

verläuft, folgt mit $\vec{P} = \begin{pmatrix} 120 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 78 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$:

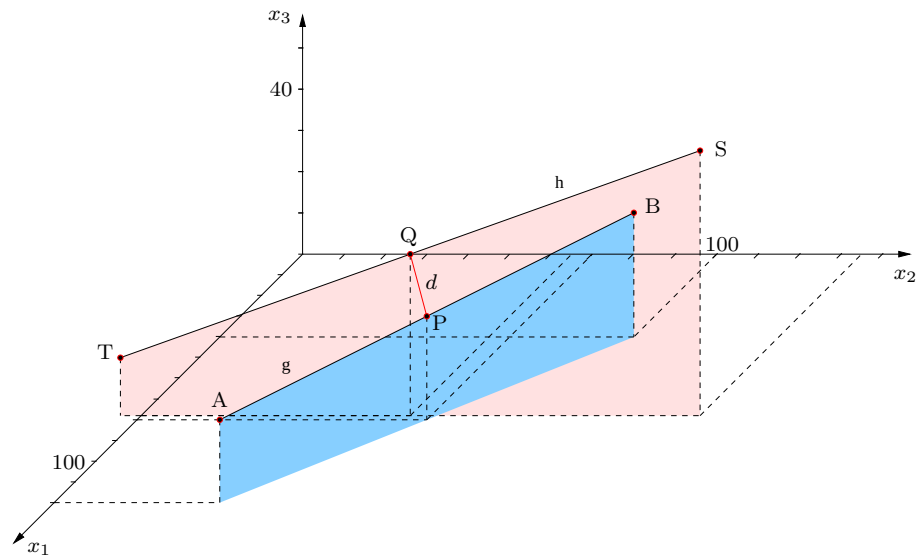
$$\overrightarrow{PQ} = d \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} -42 \\ -45 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{15}{15} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt $\lambda = \mu = 5$ und damit $P(80|70|25)$ und $Q(78|65|39)$.

(e)



5 Anwendungen der Differential- und Integralrechnung

5.1 Integrale in der Physik

1. Wird ein Körper unter dem Einfluss der konstanten Kraft F parallel zur Krafrichtung um die Strecke Δx verschoben, dann wird die Arbeit $\Delta W = F \cdot \Delta x$ verrichtet. Für eine konstante Kraft gilt also

$$\frac{\Delta W}{\Delta x} = F.$$

Ist F nicht konstant sondern eine Funktion von x , dann gilt diese Beziehung nur noch im Grenzfall $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{dW}{dx} = W'(x) = F$$

Bei bekannter Kraftfunktion $F(x)$ ist also die Arbeit, um den Körper von x_1 nach x_2 zu bringen:

$$\Delta W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

- (a) x bezeichne die Dehnung einer Feder mit der Federkonstanten D . Berechne die Arbeit ΔW , um die Dehnung der Feder von x_1 auf x_2 zu erhöhen.
- (b) Für ein Gummiseil gilt im x -Intervall $[0; 1,2 \text{ m}]$ der Kraft-Weg-Zusammenhang

$$F(x) = Dx + Cx^{20} \quad \text{mit} \quad D = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad \text{und} \quad C = 105 \frac{\text{N}}{\text{m}^{20}}.$$

Zeichne den Grafen von F im Intervall $[0; 1,0 \text{ m}]$. Berechne die Arbeit $W(x)$, um das Gummiband von null bis x zu dehnen. Berechne speziell $W(1,0 \text{ m})$ und $W(1,2 \text{ m})$.

- (c) Die Gravitationskraft auf einen Körper der Masse m in der Entfernung r zum Erdmittelpunkt ist für $r \geq R$ ($R = 6380 \text{ km}$ ist der Erdradius)

$$F(r) = \frac{GMm}{r^2}$$

mit $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ (Gravitationskonstante) und $M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ (Erdmasse). Berechne die Arbeit $W(r)$, um die Masse m von der Erdoberfläche bis

5.1 Integrale in der Physik

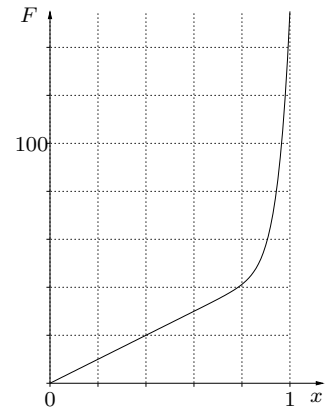
in die Entfernung r vom Erdmittelpunkt zu befördern. Wie groß ist $W(r)$ für $r \rightarrow \infty$? Mit welcher Mindestgeschwindigkeit v_0 müsste man einen Körper an der Erdoberfläche senkrecht nach oben abschießen (keine Luftreibung), damit er die Erde endgültig verlassen kann?

Lösung: (a) $F(x) = Dx \implies \Delta W = D \int_{x_1}^{x_2} x \, dx = \frac{D}{2} (x_2^2 - x_1^2)$

(b)

$$\begin{aligned} W(x) &= \int_0^x F(\tilde{x}) \, d\tilde{x} = \int_0^x (D\tilde{x} + C\tilde{x}^{20}) \, d\tilde{x} = \\ &= \left[\frac{D}{2} \tilde{x}^2 + \frac{C}{21} \tilde{x}^{21} \right]_0^x = \frac{D}{2} x^2 + \frac{C}{21} x^{21} = \\ &= 25 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot x^2 + 5 \frac{\text{N}}{\text{m}^{20}} \cdot x^{21} \end{aligned}$$

$$W(1 \text{ m}) = 30 \text{ J}, \quad W(1,2 \text{ m}) = 260 \text{ J}$$



(c)

$$\begin{aligned} W(r) &= \int_R^r F(x) \, dx = \int_R^r \frac{GMm}{x^2} \, dx = GMm \int_R^r \frac{dx}{x^2} = \\ &= GMm \left[-\frac{1}{x} \right]_R^r = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} W(r) &= \frac{GMm}{R} \\ \frac{m}{2} v_0^2 &= \frac{GMm}{R} \implies v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}} \end{aligned}$$

2. $x(t)$ ist der Ort eines Körpers zur Zeit t . Seine Geschwindigkeit ist definiert durch $v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ und seine Beschleunigung durch $a(t) = \dot{v}(t) = \frac{dv}{dt}$.

(a) Die Beschleunigung a ist eine bekannte Funktion von t . Drücke $v(t)$ und $x(t)$ durch Integralfunktionen mit der unteren Grenze t_0 aus.

(b) a ist jetzt konstant. Drücke $v(t)$ und $x(t)$ durch die Anfangswerte $v_0 = v(t_0)$ und $x_0 = x(t_0)$ aus.

(c) Die Masse eines Lastwagens, der stetig Sand verliert, ist $m(t) = m_0 - \alpha t$ für $0 \leq t \leq t_1$ mit $m(t_1) = \frac{m_0}{2}$. Für $0 \leq t \leq t_1$ wirkt die konstante Antriebskraft F auf den LKW. Berechne $v(t)$ und $x(t)$.

Zeichne für $F = 10^4 \text{ N}$, $\alpha = 100 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$, $v(0) = 0$, $x(0) = 0$ und $m_0 = 10^4 \text{ kg}$ die Grafen von v und x im Intervall $0 \leq t \leq t_1$. Zeichne zum Vergleich die Grafen der Geschwindigkeit und des Ortes eines gleichartigen LKWs, der keinen Sand verliert.

5.1 Integrale in der Physik

Lösung: (a) $v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau, \quad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau$

(b) $v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a d\tau = v_0 + a(t - t_0)$

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t [v_0 + a(t - t_0)] d\tau = x_0 + \left[v_0 \tau + \frac{a}{2} (\tau - t_0)^2 \right]_{t_0}^t = \\ &= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2 \end{aligned}$$

(c) Aus $m_0 - \alpha t_1 = \frac{m_0}{2}$ folgt $t_1 = \frac{m_0}{2\alpha}$.

$$\dot{v}(t) = a(t) = \frac{F}{m(t)} = \frac{F}{m_0 - \alpha t}$$

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + \int_0^t a(\tau) d\tau = v_0 + F \int_0^t \frac{d\tau}{m_0 - \alpha \tau} = \\ &= v_0 + F \left[\frac{1}{-\alpha} (\ln |m_0 - \alpha \tau|) \right]_0^t = v_0 - \frac{F}{\alpha} (\ln(m_0 - \alpha t) - \ln m_0) = \\ &= v_0 - \frac{F}{\alpha} \ln \frac{m_0 - \alpha t}{m_0} = v_0 + \frac{F}{\alpha} \ln \frac{m_0}{m_0 - \alpha t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t v(\tau) d\tau = x_0 + \int_0^t \left(v_0 + \frac{F}{\alpha} \ln \frac{m_0}{m_0 - \alpha \tau} \right) d\tau = \\ &= x_0 + v_0 t - \frac{F}{\alpha} \int_0^t \ln \left(1 - \frac{\alpha}{m_0} \tau \right) d\tau = \\ &= x_0 + v_0 t - \frac{F}{\alpha} \left(-\frac{m_0}{\alpha} \right) \left[\left(1 - \frac{\alpha}{m_0} \tau \right) \cdot \left\{ \ln \left(1 - \frac{\alpha}{m_0} \tau \right) - 1 \right\} \right]_0^t = \\ &= x_0 + v_0 t + \frac{F m_0}{\alpha^2} \left[\left(1 - \frac{\alpha}{m_0} t \right) \cdot \left\{ \ln \left(1 - \frac{\alpha}{m_0} t \right) - 1 \right\} + 1 \right] = \\ &= x_0 + v_0 t + \frac{F m_0}{\alpha^2} \left[\left(1 - \frac{\alpha t}{m_0} \right) \cdot \ln \left(1 - \frac{\alpha t}{m_0} \right) + \frac{\alpha t}{m_0} \right] \end{aligned}$$

Für die speziellen Zahlenwerte gilt:

$$v(t) = -100 \frac{\text{m}}{\text{s}} \ln \left(1 - \frac{t}{100 \text{ s}} \right)$$

und

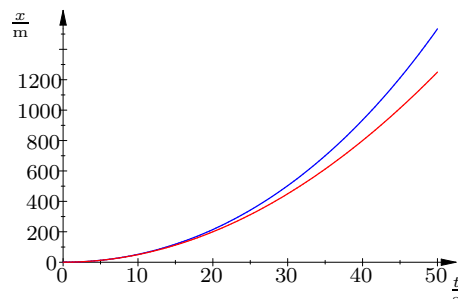
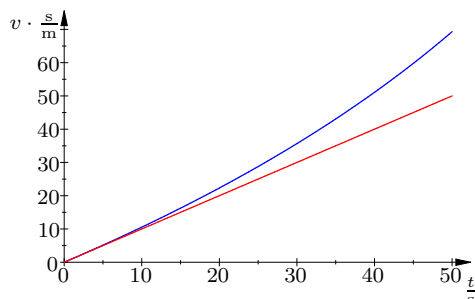
$$x(t) = 10^4 \text{ m} \left[\left(1 - \frac{t}{100 \text{ s}} \right) \ln \left(1 - \frac{t}{100 \text{ s}} \right) + \frac{t}{100 \text{ s}} \right]$$

5.2 Extremwertaufgaben

Mit $t_1 = 50$ s folgt $v(t_1) = 69,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $x(t_1) = 1,53$ km.

Ohne Sandverlust: $\bar{v}(t) = \frac{F}{m_0} t = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t$ und $\bar{x}(t) = \frac{F}{2m_0} t^2 = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2$.

$\bar{v}(t_1) = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\bar{x}(t_1) = 1,25$ km.

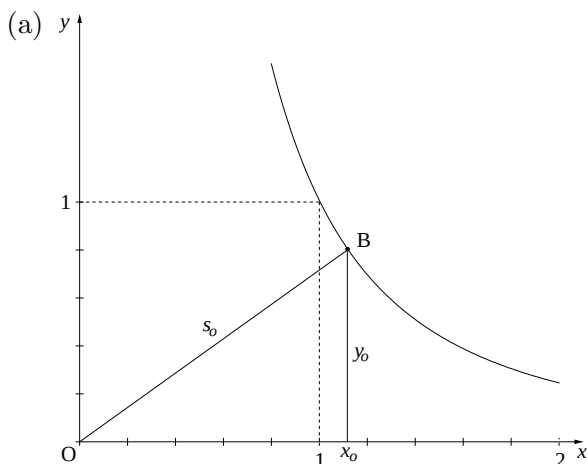


5.2 Extremwertaufgaben

1. Der letzte Weg des Bären Bruno wird durch die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{x^2}$ und $D_f = \mathbb{R}^+$ beschrieben.
 - (a) Zeichnen Sie den Grafen von f mit der Einheit 5 cm im x -Intervall $[0,8; 2]$.
 - (b) Der Bär wandert gemächlich von links nach rechts auf dem Grafen von f . Im Ursprung O des Koordinatensystems sitzt ein feiger Jaga, der Bruno genau dann erlegt, wenn er von ihm die kleinste Entfernung hat. Drücken Sie die Entfernung s zwischen dem Bären und dem Schützen durch die x -Koordinate des Bären aus und berechnen Sie die Koordinaten von Brunos Schicksalsort $B(x_0|y_0)$. Nachweis nicht vergessen, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt!
 - (c) Wie lang ist die tatsächliche Schussweite $s_0 = \overline{OB}$, wenn der in (a) gezeichnete Weg einer Karte im Maßstab 1:2000 entspricht?

5.2 Extremwertaufgaben

Lösung:



$$(b) \quad s(x) = \sqrt{x^2 + f(x)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^4}}$$

$$s'(x) = \frac{2x - \frac{4}{x^5}}{2\sqrt{x^2 + f(x)^2}}$$

$$s'(x_0) = 0 \implies x_0 = 2^{\frac{1}{6}} \approx 1,122$$

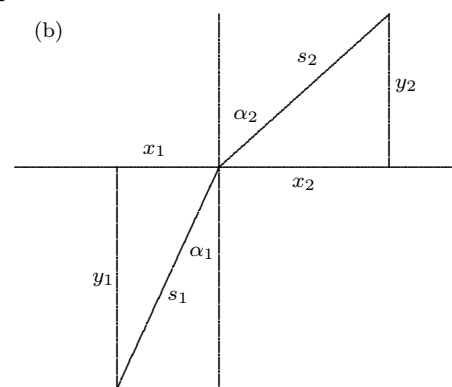
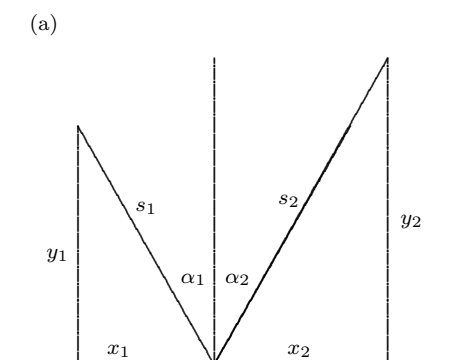
$$y_0 = f(x_0) = 2^{-\frac{1}{3}} \approx 0,7937$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} s(x) = +\infty$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} s(x) = +\infty$
und nur eine Nullstelle von $s' \implies$
relatives Minimum bei B ($x_0|y_0$)

$$(c) \quad s_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2} \approx 1,375$$

In der Zeichnung hat s_0 die Länge $5 \cdot 1,375 \text{ cm} = 6,875 \text{ cm}$, in der Wirklichkeit also $2000 \cdot 6,875 \text{ cm} = 137,5 \text{ m}$.

2. Die Lichtgeschwindigkeit für verschiedene Medien beträgt $\frac{c}{n}$, wobei $c = 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und n die Brechungszahl des Mediums ist. Zeigen Sie, dass die Aussage „das Licht nimmt den Weg mit der minimalen Laufzeit“ äquivalent zu folgenden Gesetzen der geometrischen Optik ist:



(a) Bei der Reflexion von Licht ist der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel.

(b) Bei der Brechung von Licht an Grenzflächen gilt $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$.

Lösung: (a) $t = \frac{s_1 + s_2}{c} = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{(l - x_1)^2 + y_2^2}}{c}$

$$0 = \frac{dt}{dx_1} = \frac{x_1}{cs_1} - \frac{x_2}{cs_2} = \frac{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2}{c} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$$

$$(b) \quad t = \frac{s_1 n_1}{c} + \frac{s_2 n_2}{c} = \frac{n_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{c} + \frac{n_2 \sqrt{(l - x_1)^2 + y_2^2}}{c}$$

5.2 Extremwertaufgaben

$$0 = \frac{dt}{dx_1} = \frac{n_1 x_1}{cs_1} - \frac{n_2 x_2}{cs_2} = \frac{n_1 \sin \alpha_1 - n_2 \sin \alpha_2}{c} \implies \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}$$

3. Die optimale Dose

- (a) Aus Metall soll eine zylindrische Dose mit einem vorgegebenem Volumen V hergestellt werden. Für welchen Radius ist der Materialverbrauch minimal?
Für die Rechnung soll der Materialverbrauch für Falze unberücksichtigt bleiben.
- (b) Aus Metall soll eine zylindrische Dose mit einer vorgegebenen Oberfläche A hergestellt. Für welchen Radius ist das Volumen maximal?

Lösung: (a) $V = r^2 \pi h \Rightarrow h(r) = \frac{V}{r^2 \pi} \Rightarrow A(r) = 2r^2 \pi + \frac{2V}{r}$
 $A'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.
 Da $A(0) = \infty$ und $\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \infty$ handelt es sich hierbei um ein Minimum.

(b) $A = 2r\pi(r + h) \Rightarrow h(r) = \frac{A}{2r\pi} - r \Rightarrow V(r) = \frac{1}{2}Ar - r^3\pi$
 $V'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$.
 Aus einer Grenzwertbetrachtung von $V(r)$ schließt man auf ein Maximum.

4. Zerlegen Sie 15 so in eine Summe, dass das Produkt maximal ist.

Lösung: $p(x) = x(15 - x) \Rightarrow p'(x) = 15 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 7,5$
 Maximum, da der Graph von $p(x)$ eine nach unten geöffnete Parabel ist.

5. Aus einem Draht der Länge 120 cm wird das Kantenmodell eines Quaders hergestellt. Die Seite b ist doppelt so lang wie die Seite c . Wie groß muss die Länge der Seite c gewählt werden, damit das Volumen des Quaders maximal wird.

Lösung: $b = 2c, a = 30 - 3c \Rightarrow V(c) = (30 - 3c) \cdot 2c \cdot c$
 $V'(c) = 120c - 18c^2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0, c_2 = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$
 Maximum, da $V'(6) > 0$ und $V'(7) < 0$.

6. Aus einem quadratischem Stück Karton der Seitenlänge 1 m soll eine quaderförmige Schachtel (ohne Deckfläche) mit der Höhe x hergestellt werden.
- (a) Drücken Sie das Volumen der Schachtel durch x aus. Bei der Rechnung soll die für Klebelaschen benötigte Fläche unberücksichtigt bleiben.
- (b) Für welche Höhe x ist das Volumen der Schachtel maximal?
- (c) Geben Sie das maximale Volumen der Schachtel an.

Lösung: (a) $V(x) = x(1\text{m} - 2x)^2 = 1\text{m}^2x - 4\text{m}x^2 + 4x^3$

5.2 Extremwertaufgaben

- (b) $V'(x) = 1\text{m}^2 - 8\text{m}x + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}\text{m}$ oder $x_2 = \frac{1}{6}\text{m}$
 $V(0) = V(\frac{1}{2}\text{m}) = 0$.
 $V''(x) = -8\text{m} + 24x \Rightarrow V''(\frac{1}{6}\text{m}) = -4\text{m} < 0 \Rightarrow$
Maximum bei $x_2 = \frac{1}{6}\text{m}$.
- (c) $V(\frac{1}{6}\text{m}) = \frac{2}{27}\text{m}^3$

7. Aus einem quadratischem Stück Karton der Seitenlänge a soll eine quaderförmige Schachtel (ohne Deckfläche) mit der Höhe x hergestellt werden.

- (a) Drücken Sie das Volumen der Schachtel durch x aus. Bei der Rechnung soll die für Klebelaschen benötigte Fläche unberücksichtigt bleiben.
- (b) Für welche Höhe x ist das Volumen der Schachtel maximal?
- (c) Geben Sie das maximale Volumen der Schachtel an.

Lösung: (a) $V(x) = x(a - 2x)^2 = a^2x - 4ax^2 + 4x^3$

- (b) $V'(x) = a^2 - 8ax + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}a$ oder $x_2 = \frac{1}{6}a$
 $V(0) = V(\frac{1}{2}a) = 0$.
 $V''(x) = -8a + 24x \Rightarrow V''(\frac{1}{6}a) = -4a < 0 \Rightarrow$
Maximum bei $x_2 = \frac{1}{6}a$.

(c) $V(\frac{1}{6}a) = \frac{2}{27}a^3$

8. Aus einem rechteckigem Stück Karton der Seitenlängen a und b soll eine quaderförmige Schachtel mit der Höhe x hergestellt werden.

- (a) Drücken Sie das Volumen der Schachtel durch x aus. Bei der Rechnung soll die für Klebelaschen benötigte Fläche unberücksichtigt bleiben.
- (b) Für welche Höhe x ist das Volumen der Schachtel maximal?

Lösung: (a) $V(x) = x(a - 2x)(b - 2x) = abx - 2(a + b)x^2 + 4x^3$

- (b) $V'(x) = 12x^2 - 4(a + b)x + ab = 0 \Leftrightarrow$
 $x_1 = \frac{1}{6}(a + b + \sqrt{a^2 + b^2 - ab})$ oder $x_2 = \frac{1}{6}(a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - ab})$
 $V''(x) = -4(a + b) + 24x \Rightarrow$
 $V''(x_1) = 4\sqrt{a^2 + b^2 - ab} > 0 \Rightarrow$ Minimum bei x_1
 $V''(x_2) = -4\sqrt{a^2 + b^2 - ab} < 0 \Rightarrow$ Maximum bei x_2 .

9. Die Punkte $(x|f(x))$ auf dem Graphen der Funktion $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ erzeugen mit den Punkten $X(x|0)$, $Y(0|f(x))$ und dem Koordinatenursprung $O(0|0)$ ein Rechteck der Fläche $A(x)$.

- (a) Berechnen Sie die Punkte des Graphen der Funktion $f(x)$ mit waagrechter Tangente.

5.2 Extremwertaufgaben

- (b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ und zeichnen Sie für einen Punkt das zugehörige Rechteck ein.
- (c) Geben Sie die Koordinaten des Punktes P an, bei dem die Fläche des Rechtecks maximal ist.

Lösung: (a) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_{2/3} = \pm 1$

(b)

- (c) $A'(x) = (x \cdot f(x))' = 5x^4 - 6x^2 + 1 = 0 \Rightarrow$
 $x_{1/2} = \frac{1}{10}(6 \pm \sqrt{36 - 20}) = \frac{1}{10}(6 \pm 4) \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{5}\sqrt{5}.$
 $A''(x) = 20x^3 - 12x,$
 $A''(1) > 0$, also Minimum.
 $A''(\frac{1}{5}\sqrt{5}) = -\frac{8}{5}\sqrt{5} < 0$, also Maximum. Also: $P(\frac{1}{5}\sqrt{5} | 0,64)$

10. In einen Kreis mit Radius 2 um den Koordinatenursprung $(0|0)$ soll ein Trapez mit möglichst großer Fläche einbeschrieben werden. Zwei Punkte des Trapezes liegen auf der x -Achse.

- (a) Drücken Sie die Koordinaten der vier Ecken des Trapezes in Polarkoordinaten aus.
- (b) Geben Sie einen Term zur Berechnung der Fläche des Trapezes an.
- (c) Berechnen Sie die Fläche für $\varphi = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ und 90° (φ ist der Winkel zwischen der x -Achse und der rechten oberen Trapezecke).
- (d) Für welchen Winkel φ ist die Fläche des Trapezes maximal?

Lösung: (a) $P(2|0), Q(r \cos \varphi | r \sin \varphi), R(-r \cos \varphi | r \sin \varphi), S(-2|0)$

(b) $A(\varphi) = 4(1 + \cos \varphi) \sin \varphi, \varphi \in [0; 90^\circ]$

(c) $A(30^\circ) = 3,732, A(45^\circ) = 4,828, A(60^\circ) = 5,196, A(90^\circ) = 4$

(d) $A'(\varphi) = 4(\cos \varphi + \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 4(\cos \varphi + \cos(2\varphi))$
 $= 8 \cdot \cos(\frac{3}{2}\varphi) \cdot \cos(\frac{1}{2}\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 60^\circ$

11. Betrachten Sie ein Dreieck mit den Ecken $A(-a|b), B(a|b)$ und $C(0|1)$, dessen Ecken auf dem Einheitskreis mit Mittelpunkt $M(0|0)$ und Radius 1 liegen ($a \geq 0$).

- (a) Zeichnen Sie die Dreiecke für $a = 0,2; 0,5; 0,7$ ($1 \hat{=} 5\text{cm}$).
- (b) Berechnen Sie allgemein die Fläche $A(\varphi)$ des Dreiecks. Verwenden Sie zur Beschreibung den Winkel φ zwischen MB und der x -Achse ($\varphi < 0$, wenn B oberhalb der x -Achse).
- (c) Für welchen Winkel ist die Fläche des Dreiecks maximal?
 TIP: Verwenden Sie $\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$ und den Satz von Vieta!

Lösung: (a)

(b) $A(\varphi) = \cos \varphi \cdot (1 + \sin \varphi), \varphi \in [-90^\circ; 90^\circ]$

5.2 Extremwertaufgaben

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad A'(\varphi) &= -\sin \varphi \cdot (1 + \sin \varphi) + \cos^2 \varphi && \Leftrightarrow \\
 &= -\sin \varphi - \sin^2 \varphi + 1 - \sin^2 \varphi \\
 &= 1 - \sin \varphi - 2\sin^2 \varphi = (1 - 2\sin \varphi)(1 + \sin \varphi) = 0
 \end{aligned}$$

1. Fall: $\sin \varphi = -1$. Für $\sin \varphi = -1$ folgt $A(\varphi) = 0$, also kein Maximum!

2. Fall: $\sin \varphi = \frac{1}{2}$ ($\Leftrightarrow \varphi = 30^\circ$!).

Bei $\varphi = 30^\circ$ liegt ein Maximum vor, da $A(0^\circ) = 1$, $A(90^\circ) = 0$ und $A(30^\circ) = \frac{3}{4}\sqrt{3} \approx 1,299$.

12. Aus einem Baumstamm mit kreisförmiger Querschnittsfläche (Durchmesser d , Länge l) soll ein Balken (Breite b , Höhe h , Länge l)

(a) mit maximalem Volumen herausgeschnitten werden. Welcher Prozentsatz des Balkens wird genutzt?

(b) mit maximaler Tragfähigkeit herausgeschnitten werden. Die Tragfähigkeit eines Balkens ist proportional zu bh^2 . Welcher Prozentsatz des Balkens wird genutzt?

Lösung: (a) $b^2 + h^2 = d^2 \Rightarrow V(b) = b \cdot \sqrt{d^2 - b^2} \cdot l$. Da das Volumen immer positiv ist, ist $V(b)$ genau dann maximal, wenn $V^2(b) = b^2 \cdot (d^2 - b^2) \cdot l^2$ maximal ist $\Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}d$. $\Rightarrow 64\%$ des Baumes werden genutzt.

(b) $bh^2 = b \cdot (d^2 - b^2)$ ist maximal, wenn $b = \frac{1}{\sqrt{3}}d \Rightarrow 60\%$ des Baumes werden genutzt.

13. Mit dem Tröpfchenmodell zur Beschreibung eines Atomkerns läßt sich die Bindungsenergie des Kerns in Abhängigkeit von der Neutronenzahl N und der Protonenzahl Z berechnen. Für die Bindungsenergie erhält man:

$$W(Z, N) = (m_p Z + m_n N) c^2 - 6\varepsilon A + 6\varepsilon A^{2/3} + \beta \frac{Z^2}{A^{1/3}} + \eta \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$

(a) Geben Sie die Bindungsenergie für feste Nukleonenzahl $A = Z + N$ an.

(b) Für welche Protonenzahl ist bei fester Nukleonenzahl A die Bindungsenergie minimal? Verwenden Sie dazu $\alpha = (m_n - m_p) c^2 = 0,78 \text{ MeV}$, $\beta = 0,639 \text{ MeV}$ und $\eta = 21,7 \text{ MeV}$.

(c) Vergleichen Sie das in (b) erhaltene Ergebnis mit der einfachen Annahme, dass sich in einem Atomkern etwa gleich viele Protonen und Neutronen befinden.

Lösung: (a) $W(Z) = (m_p - m_n)c^2 Z + m_n A c^2 - 6\varepsilon A + 6\varepsilon A^{2/3} + \beta \frac{Z^2}{A^{1/3}} + \eta \frac{(A-2Z)^2}{A}$

(b) $W'(Z) = -\alpha + Z \left(\frac{2\beta}{A^{1/3}} + \frac{8\eta}{A} \right) - 4\eta \Rightarrow$
minimale Bindungsenergie für

$$Z = \frac{A}{2} \cdot \frac{1 + \frac{\alpha}{4\eta}}{1 + \frac{\beta}{4\eta} A^{2/3}} = \frac{A}{2} \cdot \frac{1 + 9 \cdot 10^{-3}}{1 + 7,4 \cdot 10^{-3} \cdot A^{2/3}}$$

5.2 Extremwertaufgaben

- (c) Für kleine A erhält man etwa gleich viele Neutronen und Protonen. Je größer A ist, umso mehr weicht die Protonenzahl von $\frac{A}{2}$ ab (kleiner).
TIP: $Z(A)$ und $\frac{A}{2}$ mit Funktionsplotprogramm zeichnen!

14. Schwerpunkt einer Limonadendose

- (a) Wo liegt der Schwerpunkt einer vollen und einer leeren Dose?
(b) Bis zu welcher Höhe muss man die Dose austrinken, damit der Schwerpunkt möglichst niedrig liegt und daher die Dose am besten stehen bleibt.
(c) Welcher Wert ergibt sich für die Schwerpunkthöhe, wenn die Dose eine Höhe von 16 cm und eine Masse von 100 g hat. Die ganze Limonade soll eine Masse von 500 g haben.

Lösung: (a) Schwerpunkt jeweils bei $\frac{H}{2}$ (H : Dosenhöhe)

(b)

$$S(h) = \frac{m_D \frac{H}{2} + m_L \frac{h}{H} \frac{h}{2}}{m_D + m_L \frac{h}{H}} = \frac{m_D H^2 + m_L h^2}{2m_D H + 2m_L h}$$

$$S'(h) = 0 \Leftrightarrow m_L h^2 + 2m_D H h - m_D H^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$h = \frac{1}{m_L} \left(-m_D H \pm H \sqrt{m_D(m_D + m_L)} \right)$$

Da der Term unter der Wurzel größer als m_D ist und für h nur positive Werte sinnvoll sind, folgt

$$h = \frac{1}{m_L} \left(-m_D H + H \sqrt{m_D(m_D + m_L)} \right)$$

- (c) $h = 0,28989H = 4,6 \text{ cm}$

15. Bauen Kinder aus Sand zylindrische Türme, sinken diese ab einer gewissen Höhe in sich zusammen. Dabei rutscht der obere Teil fast immer längs einer schrägen Fläche, die um 45° gegen die Horizontale geneigt ist nach unten. Wie lässt sich dies erklären? Nehmen Sie dazu an, dass für das Abrutschen eine gewisse Schubspannung

$$\sigma = \frac{\text{Kraft parallel zur Fläche } F_{||}}{\text{Abrutschfläche } A}$$

erreicht werden muss.

Lösung: Bei einem zylindrischen Turm ist eine Querschnittsfläche, die um den Winkel ϕ gegen die Horizontale geneigt ist eine Ellipse mit der Fläche $\frac{r^2\pi}{\cos\phi}$. Die Kraft parallel zur Fläche beträgt $F_0 \sin\phi$ (F_0 ist die Gewichtskraft des abrutschenden Teils).

$$\Rightarrow \sigma = \frac{F_0}{r^2\pi} \sin\phi \cos\phi$$

σ ist bei festem F_0 und $r^2\pi$ für den Winkel $\phi = 45^\circ$ maximal.

5.2 Extremwertaufgaben

16. (a) Wann wird das Produkt zweier Zahlen mit konstanter Summe maximal?
 (b) Wann wird die Summe zweier Zahlen mit konstantem Produkt minimal?

Lösung: (a) $a + b = c = \text{konst} \implies a \cdot b = ac - a^2 = f(a)$
 1. Lösungsweg: $f'(a) = c - 2a = 0 \implies a = \frac{1}{2}c$, $f''(a) = -2 < 0$
 Also: Produkt maximal für $a = \frac{1}{2}c$
 2. Lösungsweg: $f(a)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel $\implies f(a)$ maximal am Scheitel ($\frac{1}{2}c | \frac{1}{4}c^2$)

(b) $a \cdot b = c = \text{konst} \implies a + b = a + \frac{c}{a} = f(a)$
 $f'(a) = 1 - \frac{c}{a^2} = 0 \implies a = \pm\sqrt{c}$, $f''(a) = 2\frac{c}{a^3}$
 1. Fall: $c > 0$, d. h. a und b haben gleiches Vorzeichen.
 Für $a, b > 0$ ist $f''(a) > 0$ und damit erhält man für $a = b = \sqrt{c}$ ein Minimum. Für $a, b < 0$ ist $f''(a) < 0$ und damit erhält man für $a = b = -\sqrt{c}$ ein Maximum.
 2. Fall: $c < 0 \implies f'(a) > 1$, also kein Extremum.

17. Legen Sie die Punkte M und N auf den Schenkeln eines Winkels α mit Scheitel S so fest, dass bei konstanter Fläche des Dreiecks $\triangle SMN$ die Länge $\overline{MN}$ minimal ist.

Lösung: Mit $m = \overline{SM} > 0$ und $n = \overline{SN} > 0$ folgt $A = \frac{1}{2}mn \sin \alpha \implies$
 $mn = \frac{2A}{\sin \alpha}$ und $m = \frac{2A}{n \sin \alpha}$.
 $\overline{MN}^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos \alpha = \frac{4A^2}{n^2 \sin^2 \alpha} + n^2 - \frac{4A}{\tan \alpha} = f(n)$
 $f'(n) = 0 \iff n^4 = \frac{4A^2}{\sin^2 \alpha} \implies n = \sqrt{\frac{2A}{\sin \alpha}}$, $m = \sqrt{\frac{2A}{\sin \alpha}}$

18. Wie muss man einen Stab der Länge l in zwei Stücke zerbrechen, damit das aus den Teilstücken gebildete Dreieck maximale Fläche hat?

Lösung: $l = a + b$. Die Dreiecksfläche $A = ab \sin \alpha$ ist bei festem a und b maximal, wenn die Teilstücke einen Winkel von 90° einschließen. $\Rightarrow A(a) = ab = al - a^2$
 1. Lösungsweg: $A'(a) = l - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}l$, $A''(a) = -2 < 0$, also Maximum für $a = b = \frac{1}{2}l$
 2. Lösungsweg: $A(a)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel. Damit wird das Maximum am Scheitel ($\frac{1}{2}l | \frac{1}{4}l^2$) angenommen.
 3. Lösungsweg: Das Produkt zweier Zahlen mit konstanter Summe ist maximal, wenn die zwei Zahlen gleich groß sind.

19. Aus einem rechteckigen Stück Karton mit Seitenlängen 8 cm und 5 cm werden an den Ecken kongruente Quadrate herausgeschnitten. Biegt man die Randstücke hoch, erhält man eine quaderförmige, oben offene Schachtel. Wie lang muss man die Quadratseite wählen, damit der Inhalt der Dose möglichst groß wird.

5.2 Extremwertaufgaben

Lösung: $V(x) = x \cdot (8 - 2x) \cdot (5 - 2x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x \Rightarrow$
 $V'(x) = 12x^2 - 52x + 40 = 0$ für $x_1 = 3\frac{1}{3}, x_2 = 1$
 $V''(3\frac{1}{3}) > 0$, also Minimum bei $x_1 = 3\frac{1}{3}$
 $V''(1) < 0$, also Maximum bei $x_2 = 1$

20. In welchem Rechteck mit gegebenem Flächeninhalt A hat die Diagonale minimale Länge?

Lösung: Seitenlängen des Rechtecks: $a, b \Rightarrow A = ab \Rightarrow d^2(a) = a^2 + \frac{A^2}{a^2}$
 Minimum von d^2 bei $(\sqrt{A}, 2A) \Rightarrow$ Minimum für $a = b = \sqrt{A}$, d.h. Quadrat

21. Welcher Punkt des Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{2}x^2}$ hat vom Punkt $P(0|3)$ minimalen Abstand?

Lösung:

$$d(x) = \sqrt{\left(3 - \sqrt{1 + \frac{1}{2}x^2}\right)^2 + (0 - x)^2}$$

gibt den Abstand eines Punktes $A(x|f(x))$ von P an. $d(x)^2$ und damit auch $d(x)$ (da $d(x) \geq 0$) hat nur ein Minimum bei $P(0|1)$.

22. Beweisen Sie, dass von allen Rechtecken mit gegebener Fläche A das Quadrat den kleinsten Umfang hat.

Lösung: $U(x) = 2x + \frac{2A}{x}, \quad U'(x) = 2 - \frac{2A}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y = \sqrt{A}$

23. Wie muss ein kegelförmiges Sektglas gestaltet werden, damit bei gegebenem Volumen V möglichst wenig Material benötigt wird?

Lösung: Mantelfläche: $A(r) = r s \pi = \sqrt{r^4 \pi^2 + \frac{9V^2}{r^2}}$

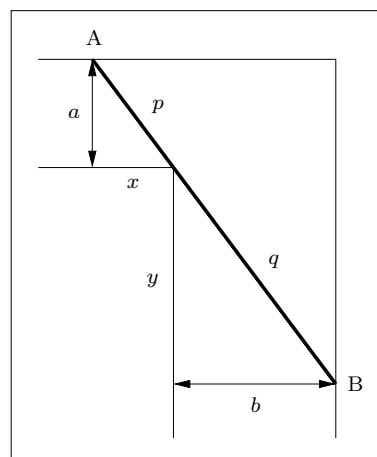
$$A(r) \text{ minimal} \iff g(r) = r^4 \pi^2 + \frac{9V^2}{r^2} \text{ minimal}$$

$$g'(r) = 4\pi^2 r^3 - \frac{18V^2}{r^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = r_0 = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{2}}}$$

$$g''(r) = 12\pi^2 r^2 + \frac{54V^2}{r^4} > 0 \quad \Rightarrow \quad A \text{ hat bei } r_0 \text{ ein Minimum.}$$

$$h_0 = \frac{3V}{r_0^2 \pi} = r_0 \sqrt{2}$$

24. Zwei Kanäle mit den Breiten a und b stoßen rechtwinklig zusammen. Wir suchen die maximale Länge L , die ein Baumstamm haben kann, damit er gerade noch *um die Ecke* gebracht werden kann. Wir rechnen mit einem idealisierten Stamm der Dicke null.



- (a) Drücken Sie $r = \overline{AB} = p + q$ durch x aus und berechnen Sie L .
- (b) Berechnen Sie L speziell für die Fälle $a = b$, $a \ll b$ und $b = 2a$.
- (c) Zeichnen Sie $r(x)$ für $a = 1$ und $b = 2$. Beweisen Sie für diesen Fall, dass $g(x) = x + 2$ eine Asymptote von $r(x)$ ist.

Lösung: (a) $r(x) = \left(1 + \frac{b}{x}\right) \sqrt{a^2 + x^2}$, $r'(x) = \frac{x^3 - b a^2}{x^2 \sqrt{a^2 + x^2}}$

$$r'(x) = 0 \implies x = x_0 = a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}}$$

$$r'(x) < 0 \text{ für } x < x_0 \text{ und } r'(x) > 0 \text{ für } x > x_0 \implies \text{rel. Min. von } r \text{ bei } x_0.$$

$$L = r(x_0) = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

(b)

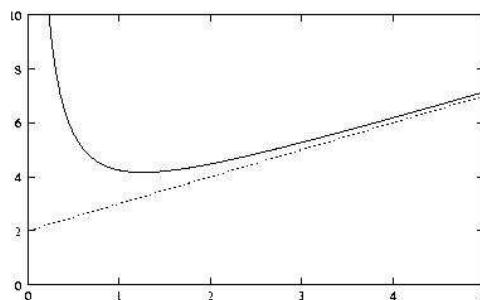
$$\begin{aligned} a = b &\implies L = 2a\sqrt{2} \\ a \ll b &\implies L \approx b \\ b = 2a &\implies L \approx 4,16a \end{aligned}$$

(c) $r(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right) \sqrt{1 + x^2} = (x + 2) \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [r(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[(x + 2) \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) \right] =$$

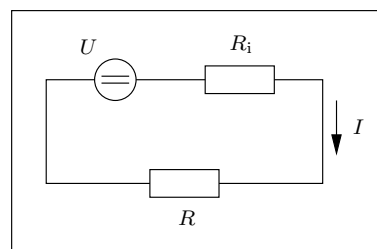
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1}{\frac{1}{x+2}} \stackrel{\text{Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)^2}{x^3 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 0$$

5.2 Extremwertaufgaben



25. An eine Stromquelle mit dem Innenwiderstand R_i wird ein Verbraucher mit dem Widerstand R angeschlossen. P sei die im Verbraucher umgesetzte Leistung.

- (a) Für welche Wahl des Widerstandes R ist P maximal? Wie groß ist das maximale P ?
 (b) Zeichnen Sie $P(R)$ für $U = 1 \text{ V}$ und $R_i = 1 \Omega$.



Lösung: (a) $P(R) = R I^2 = U^2 \cdot \frac{R}{(R + R_i)^2}$

$$P'(R) = U^2 \cdot \frac{R_i - R}{(R + R_i)^3} = 0 \implies R = R_i$$

$$P''(R) = U^2 \cdot \frac{2R - 4R_i}{(R + R_i)^4} \implies P''(R_i) < 0 \implies \text{Maximum}$$

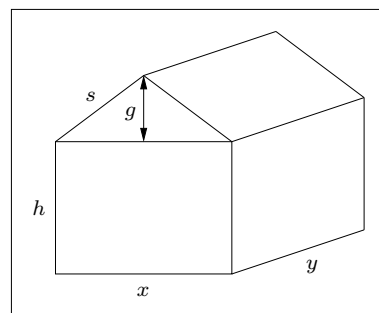
$$P_{\max} = P(R_i) = \frac{U^2}{4R_i}$$

26. In einer Gemeinde gilt aus gestalterischen und wärmetechnischen Gründen für die Maße eines Hauses folgende **Verordnung** (siehe Abbildung):

V sei das Volumen des Hauses (umbauter Raum ohne Keller) und A die gesamte Oberfläche einschließlich Dach aber *ohne* die Grundfläche. Die Breite x , die Wandhöhe h , die Giebelhöhe g und die Länge y müssen so gewählt werden, dass

$$g = \frac{3}{8} \cdot x \quad ; \quad h = \frac{5}{8} \cdot x$$

und A bei gegebenem V minimal ist.



5.2 Extremwertaufgaben

- (a) Drücken Sie V durch x und y aus und lösen Sie das Ergebnis nach V auf. Drücken Sie s durch x aus und beweisen Sie dann mit einer detaillierten Rechnung folgende Beziehung:

$$A(x) = \frac{13}{8} \cdot x^2 + \frac{40 V}{13 x}$$

- (b) Für welches x , ausgedrückt durch V , ist die Bauordnung erfüllt? Nachweis der Art des Extremums nicht vergessen! Berechnen Sie auch das Verhältnis $k = \frac{y}{x}$ für ein Haus, das den Forderungen der Bauordnung genügt.
- (c) Berechnen Sie x , y , h und g für ein der Bauordnung genügendes Haus mit dem Volumen $V = 540,8 \text{ m}^3$ und zeichnen Sie die Vorderfront des Hauses im Maßstab $1 : 200$.

Lösung: (a) $V = \frac{13}{16} x^2 y, \quad y = \frac{16 V}{13 x^2}, \quad s = \frac{5}{8} x$

(b) $A'(x) = \frac{13}{4} x - \frac{40 V}{13 x^2}$

$$A'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{160 V}{169}}, \quad k = \frac{y}{x} = \frac{13}{10}$$

(c) $x = 8 \text{ m}, y = 10,4 \text{ m}, h = 5 \text{ m}$ und $g = 3 \text{ m}$

27. Wir betrachten alle möglichen Quader mit den Kantenlängen x , y und z und dem konstanten Volumen V . Gesucht ist der Quader mit der kleinsten Oberfläche.

- (a) Drücken Sie die Oberfläche A eines Quaders durch x , y und V aus.
- (b) A kann als Funktion von x mit dem Parameter y aufgefasst werden, d.h. $A = A_y(x)$. Für welches $x = x_y$ ist $A_y(x)$ minimal?
- (c) Die Funktion $F(y)$ ist definiert durch $F(y) = A_y(x_y)$. $F(y)$ ist also die Oberfläche des Quaders mit der Kante y , dessen Oberfläche minimal ist. Den Quader mit der insgesamt kleinsten Oberfläche bei gegebenem Volumen V findet man durch Minimieren von F . Um welchen Quader handelt es sich dabei?

Lösung: (a) $A_y(x) = 2 \left[x y + \frac{V}{y} + \frac{V}{x} \right]$

(b) $A'_y(x) = 2 \left[y - \frac{V}{x^2} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad x_y = \sqrt{\frac{V}{y}}$

(c) $F(y) = A_y(x_y) = 2 \left[2 \sqrt{V} \sqrt{y} + \frac{V}{y} \right]$

$$F'(y) = 2 \left[\frac{\sqrt{V}}{\sqrt{y}} - \frac{V}{y^2} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt[3]{V}$$

5.2 Extremwertaufgaben

Damit gilt auch $x = x_y = \sqrt[3]{V}$ und $z = \frac{V}{xy} = \sqrt[3]{V}$, Würfel!!

28. Zerlegen Sie die positive Zahl a so in eine Summe, dass das Produkt der beiden Summanden maximal wird.

Lösung: $p(x) = x(a - x), \quad p'(x) = a - 2x = 0 \implies x = \frac{a}{2}$
 $p''(x) = -2 < 0 \implies \text{Maximum}$

29. Warum Lastwagenfahrer so rasen

Die Kosten für eine Lastwagenfahrt setzen sich aus den Treibstoffkosten und dem Fahrerlohn zusammen. Der Dieserverbrauch pro km ist die Summe aus einem konstanten Term a (Rollreibung) und einem zum Geschwindigkeitsquadrat proportionalen Term bv^2 (Luftwiderstand). Der Fahrerlohn F ist natürlich zur Fahrzeit t proportional, d.h. $F = ct$.

- Drücken Sie die Gesamtkosten G für eine Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit v über die Strecke s durch a, b, c, s, v und den Dieselpreis B pro Liter aus.
- Für welche Geschwindigkeit v_0 sind die Gesamtkosten minimal?
- Als konkretes Beispiel betrachten wir eine Fahrt über $s = 100$ km mit den Daten

$$a = 0,04 \frac{\text{Liter}}{\text{km}}, \quad b = 1,2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Liter h}^2}{\text{km}^3}, \quad c = 80 \frac{\text{€}}{\text{h}} \quad \text{und} \quad B = 2 \frac{\text{€}}{\text{Liter}}.$$

Berechnen Sie v_0 und den minimalen Gesamtpreis G_0 . Zeichnen Sie $G(v)$ im Intervall zwischen 0 und $300 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Lösung:

$$(a) \quad G(v) = a s B + b s B v^2 + \frac{c s}{v}$$

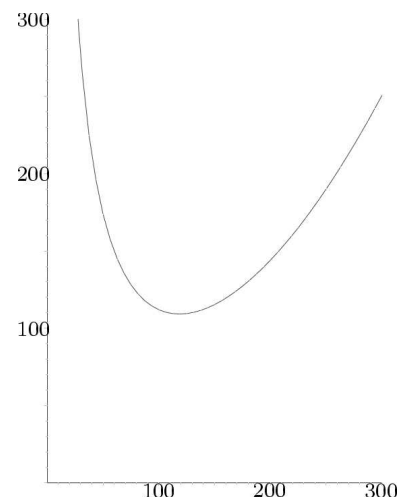
$$(b) \quad G'(v) = 2 b s B v - \frac{c s}{v^2}$$

$$G'(v) = 0 \implies$$

$$v = v_0 = \sqrt[3]{\frac{c}{2 b B}}$$

$$(c) \quad v_0 = 118,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$G_0 = G(v_0) = 109,21 \text{ €}$$



5.2 Extremwertaufgaben

30. Skizzieren Sie den ungefähren Verlauf der Funktion $f(x) = a - |x|^n$ mit $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Eine Parallele zur x -Achse im Abstand d mit $0 \leq d \leq a$ schneidet G_f in A und B (A links von B). Für welches $d = d_0$ ist die Fläche F des Dreiecks AOB maximal, wobei O den Ursprung des Koordinatensystems bezeichnet?

Hinweis: Drücken Sie F durch die x -Koordinate von B aus!

Lösung: f symmetrisch zur y -Achse. Für $x \geq 0$ gilt $d = f(x) = a - x^n$. A $(-x|d)$, B $(x|d)$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot f(x) = ax - x^{n+1}$$

$$F(x) \text{ maximal für } x_0 = \sqrt[n]{\frac{a}{n+1}}, d_0 = f(x_0) = \frac{na}{n+1}$$

31. Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x) = x^2 - 2ax$ mit $a > 0$. Die Gerade $g: g(x) = c$ mit $c \geq -a^2$ schneidet G_f in A und B (A links von B). Für welche c ist die Fläche F des Dreiecks AOB (O = Ursprung des Koordinatensystems) extremal?

Hinweis: Drücken Sie F durch c aus und skizzieren Sie den ungefähren Verlauf von $F(c)$!

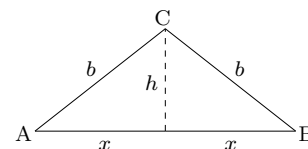
Lösung: A $(a - \sqrt{c+a^2}|c)$, B $(a + \sqrt{c+a^2}|c)$, $\overline{AB} = 2\sqrt{c+a^2}$

$$F(c) = \frac{1}{2} \cdot |c| \cdot \overline{AB} = |c| \cdot \sqrt{c+a^2}$$

$$F'(c) = \pm \frac{3c+2a^2}{2\sqrt{c+a^2}}$$

$F(c)$ hat relatives Maximum bei $c = -\frac{2a^2}{3}$ und ein relatives und absolutes Minimum bei $c = 0$ (Spitze von $F(c)$).

32. Ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basislänge $2x$ und den Schenkellängen b wird aus einem Draht der Länge L gebogen, d.h. $2x + 2b = L$.



- (a) Beweise für die Dreiecksfläche A die Beziehung

$$A(x) = \frac{\sqrt{L}}{2} \sqrt{Lx^2 - 4x^3}$$

- (b) Berechne $x = x_0$ so, dass $A(x_0)$ die maximale Dreiecksfläche ist. Untersuche, um welches besondere Dreieck es sich im Fall $x = x_0$ handelt.
 (c) Drücke die maximale Fläche $A(x_0)$ durch L aus und vereinfache so weit wie möglich.

5.2 Extremwertaufgaben

Lösung: (a) $b = \frac{L}{2} - x \implies h = \sqrt{b^2 - x^2} = \sqrt{\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 - x^2} = \sqrt{\frac{L^2}{4} - Lx}$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot h = x \sqrt{\frac{L}{4} (L - 4x)} = \frac{\sqrt{L}}{2} \sqrt{x^2 (L - 4x)} = \frac{\sqrt{L}}{2} \sqrt{Lx^2 - 4x^3}$$

(b) $A(x)$ ist maximal, wenn der Radikand $f(x) = Lx^2 - 4x^3$ maximal ist.

$$f'(x) = 2Lx - 12x^2 = 2x(L - 6x)$$

$$f'(x) = 0 \implies x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = \frac{L}{6}$$

$$f''(x) = 2L - 24x \implies$$

$$f''(x_1) = 2L > 0 \text{ (Minimum)}, \quad f''(x_2) = 2L - \frac{24L}{6} = -2L < 0 \text{ (Maximum)}$$

Also: $x_0 = \frac{L}{6}$.

Aus $x = x_0$ folgt $b = \frac{L}{2} - \frac{L}{6} = \frac{L}{3}$ und $2x = \frac{L}{3}$, d.h. das Dreieck ist gleichseitig.

(c)

$$\begin{aligned} A(x_0) &= \frac{\sqrt{L}}{2} \sqrt{Lx_0^2 - 4x_0^3} = \frac{\sqrt{L}}{2} \sqrt{x_0^2(L - 4x_0)} = \\ &= \frac{\sqrt{L}}{2} \sqrt{\frac{L^2}{6^2} \left(L - \frac{4L}{6}\right)} = \frac{\sqrt{L}}{2} \cdot \frac{L}{6} \sqrt{\frac{L}{3}} = \frac{L^2}{12\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{36} L^2 \end{aligned}$$

33. Für den Bauherrn einer kleinen Fabrikhalle stellt sich die Frage nach der Wirtschaftlichkeit einer Wärmedämmung. Die gesamte zu isolierende Außenfläche ist $A = 500 \text{ m}^2$, der Quadratmeterpreis einer Dämmplatte der Dicke 1 cm wird mit

$$\alpha = 0,8 \frac{\text{€}}{\text{m}^2 \cdot \text{cm}}$$

angegeben, das Verlegen von einem Quadratmeter kostet 50 €. Weil der Gesamtpreis für die Dämmung über einen Kredit finanziert wird, muss dieser Preis noch mit 1,5 Multipliziert werden um die gesamten anfallenden Kosten für die Dämmung zu erhalten. Wenn die ganze Fläche A mit einer Dämmung der Dicke $d = x \text{ cm}$ versehen ist, beträgt der Energieverlust pro m^2 Außenfläche und pro Jahr

$$\frac{\Delta W}{A \cdot \Delta t} = \frac{\beta}{\frac{1}{3} + \frac{x}{2}} \quad \text{mit} \quad \beta = 100 \frac{\text{kWh}}{\text{m}^2 \cdot \text{a}}$$

Die Halle soll $\Delta t = 20 \text{ a}$ lang genutzt und mit Öl beheizt werden. Ein Liter Heizöl liefert die Energie 10 kWh und soll 1,20 € kosten (Mittelwert für die nächsten 20 Jahre). Mit $k(x)$ bezeichnen wir den Term für die gesamten Energiekosten in den zwanzig Jahren (Wärmedämmung plus Heizkosten).

5.3 Wachstums- und Zerfallsprozesse

(a) Beweise mit begründeten Ansätzen:

$$k(x) = p + qx + \frac{r}{\frac{1}{3} + \frac{x}{2}} \quad \text{mit} \quad p = 37\,500 \text{ €}, \quad q = 600 \text{ €}, \quad r = 120\,000 \text{ €}$$

(b) Berechne die Dicke x_0 der Dämmung, für die $k(x)$ minimal wird. Rechne bis zum Ergebnis mit den allgemeinen Größen p , q und r .

(c) Die Dämmplatten gibt es nur in geradzahligen Werten von x . Ermittle die günstigste existierende Dämmstärke x_1 . Um wieviel Prozent ist $k(x_1)$ kleiner als die Gesamtkosten $k(0)$ ohne Dämmung?

Lösung: (a) Preis für die Dämmung: $k_1(x) = 50 \frac{\text{€}}{\text{m}^2} \cdot A \cdot 1,5 + \alpha \cdot x \cdot A \cdot 1,5 = 37\,500 \text{ €} + 600 \text{ €} \cdot x$

$$\text{Ölmenge in Litern: } m = \frac{\Delta W}{10 \text{ kWh}} = \frac{\beta A \Delta t}{10 \text{ kWh}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{x}{2}} = \frac{10^5 \text{ l}}{\frac{1}{3} + \frac{x}{2}}$$

$$\text{Ölpreis: } k_2(x) = m \cdot 1,2 \frac{\text{€}}{\text{l}} = \frac{120\,000 \text{ €}}{\frac{1}{3} + \frac{x}{2}} \implies$$

$$k(x) = k_1(x) + k_2(x) = 37\,500 \text{ €} + 600 \text{ €} \cdot x + \frac{120\,000 \text{ €}}{\frac{1}{3} + \frac{x}{2}}$$

(b) Umformen von k : $k(x) = p + qx + \frac{6r}{2 + 3x} \implies$

$$k'(x) = q - \frac{6r \cdot 3}{(2 + 3x)^2} = 0 \implies x = x_0 = -\frac{2}{3} \overset{+}{(-)} \frac{1}{3} \sqrt{\frac{18r}{q}} = -\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{2r}{q}}$$

$$x_0 = -\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{2 \cdot 120\,000 \text{ €}}{600 \text{ €}}} = -\frac{2}{3} + 20 = 19\frac{1}{3}$$

(c) $k(18) = 61\,157,14 \text{ €}$, $k(20) = 61\,112,90 \text{ €}$, $k(0) = 397\,500,00 \text{ €}$

$$\frac{k(20)}{k(0)} = 0,154 = 15,4\% \implies \text{um } 84,6\% \text{ kleiner}$$

5.3 Wachstums- und Zerfallsprozesse

1. Die Anzahl der Bakterien in einer Population wird in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) näherungsweise durch $n(t) = 30 + t^2 \cdot e^{5-t}$; $0 \leq t \leq 8$, beschrieben.

(a) Berechnen Sie den Wert t_A für den $n(t)$ maximal ist.

(b) Berechnen Sie den Wert t_B für den die Zuwachsrate von $n(t)$ maximal ist.

Lösung: (a) $t_A = 2$

(b) $t_B = 2 \pm \sqrt{2}$

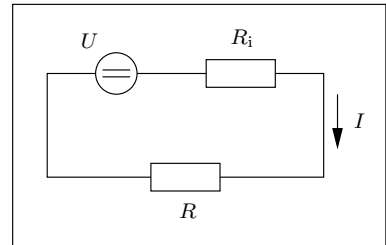
5.4 Optimierung

5.5 verknüpfte Funktionen

5.6 Anwendungen der Kurvendiskussion

1. An eine Stromquelle mit dem Innenwiderstand R_i wird ein Verbraucher mit dem Widerstand R angeschlossen. P sei die im Verbraucher umgesetzte Leistung.

- (a) Für welche Wahl des Widerstandes R ist P maximal? Wie groß ist das maximale P ?
 (b) Zeichnen Sie $P(R)$ für $U = 1 \text{ V}$ und $R_i = 1 \Omega$.



Lösung: (a) $P(R) = R I^2 = U^2 \cdot \frac{R}{(R + R_i)^2}$

$$P'(R) = U^2 \cdot \frac{R_i - R}{(R + R_i)^3} = 0 \implies R = R_i$$

$$P''(R) = U^2 \cdot \frac{2R - 4R_i}{(R + R_i)^4} \implies P''(R_i) < 0 \implies \text{Maximum}$$

$$P_{\max} = P(R_i) = \frac{U^2}{4R_i}$$

2. Zur Messung der elektrischen Stromstärke verwendet man in der Regel Drehspulinstrumente. Der Strom fließt durch eine im Magnetfeld drehbar aufgehängte Spule, die durch die magnetische Wirkung des Stroms ausgelenkt wird. In einem speziellen Drehspulinstrument kann zwischen zwei Messmethoden gewählt werden:
 I: Die Stärke des Magnetfeldes ist konstant und der Strom fließt nur durch die drehbare Spule.
 II: Das Magnetfeld wird durch eine stromdurchflossene Spule erzeugt, die mit der drehbaren Spule in Serie geschaltet ist.

Der Zusammenhang zwischen Stromstärke I und Auslenkung x der drehbaren Spule wird für $x < 90^\circ$ durch folgende Funktionsgleichung beschrieben:

$$I_I(x) = 0,04 \frac{x}{\cos(x)} \text{ bzw. } I_{II}(x) = 0,2 \sqrt{\frac{x}{\cos(x)}}, \quad I \text{ jeweils in A, } x \text{ Maßzahl des Winkels im Gradmaß.}$$

- (a) Für welche Ströme ist die Auslenkung mit der ersten Methode größer?
 (b) Welche Ströme müssen jeweils fließen, damit man die Auslenkungswinkel 10° , 20° , 40° , 60° und 80° erhält?

- (c) Zeichnen Sie die Funktionen für $x \in [0; 90^\circ]$.
- (d) Unter der Empfindlichkeit eines Stromstärkemessgerätes versteht man den Quotienten $\frac{\Delta x}{\Delta I}$. Erklären Sie, warum diese Definition sinnvoll ist. Formulieren Sie einen Zusammenhang zwischen der Ableitung $I'(x)$ der Funktion und der Empfindlichkeit.
- (e) Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen und stellen Sie sie mit einer geeigneten Software graphisch dar. Diskutieren sie folgende Punkte:
Für welche Auslenkungswinkel bzw. Stromstärken ist die Messanordnung I empfindlicher?
Für welchen Auslenkungswinkel bzw. für welche Stromstärke ist die Empfindlichkeit der Messanordnung II maximal?

Lösung: (a) $I_I(x) = I_{II}(x)$ für $I(x) = 0$ oder $I(x) = 1$. Aus der Berechnung eines geeigneten Funktionswertes z. B. $I_I(20^\circ) = 0,85 < 0,92 = I_{II}(20^\circ)$ folgt, dass für $I < 1$ die Anordnung II größere Ausschläge liefert.

- (b) $I_I(0^\circ) = 0, I_I(10^\circ) = 0,4, I_I(20^\circ) = 0,85, I_I(40^\circ) = 2,1, I_I(60^\circ) = 4,8, I_I(80^\circ) = 18,40$
 $I_{II}(0^\circ) = 0, I_{II}(10^\circ) = 0,6, I_{II}(20^\circ) = 0,92, I_{II}(40^\circ) = 1,4, I_{II}(60^\circ) = 2,2, I_{II}(80^\circ) = 4,3$

(c)

- (d) Große Empfindlichkeit bedeutet großes Δx für ein fest vorgegebenes ΔI . Empfindlichkeit = $\frac{1}{I'(x)}$

(e)

$$I'_I(x) = 0,04 \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x}$$

$$I'_{II}(x) = 0,1 \sqrt{\frac{\cos x}{x}} \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x}$$

3. In den verschiedensten Bereichen der Physik, wie z. B. der Akustik und der Elektrodynamik, treten Schwingungen auf. Wird ein schwingungsfähiges System von außen mit der Frequenz f angeregt (maximale Anregungskraft konstant), hängt seine Reaktion (Amplitude) stark von der Anregungsfrequenz f ab.

Die Amplitude $A(f)$ kann durch folgende Formel beschrieben werden:

$$A(f) = \frac{C}{\sqrt{(f_0^2 - f^2)^2 + (f\gamma)^2}}$$

Neben Konstanten des Systems (C enthält die maximale Anregungskraft und den Reibungsfaktor γ) hängt $A(f)$ von der Eigenfrequenz f_0 des Systems und der Anregungsfrequenz f ab. Hier werden nur Fälle mit $\gamma < \frac{f_0}{\sqrt{2}}$ betrachtet.

- (a) Untersuchen Sie, wie sich die Amplitude $A(f)$ für $f \rightarrow 0$ und für $f \rightarrow \infty$ verhält und interpretieren Sie die Ergebnisse.
- (b) Berechnen Sie allgemein die Resonanzfrequenz (Frequenz, bei der die Amplitude maximal ist) f_R des Systems.

5.6 Anwendungen der Kurvendiskussion

- (c) Von welchen Parametern hängt die Resonanzfrequenz in welcher Weise ab? Skizzieren Sie qualitativ die Resonanzfrequenz in Abhängigkeit vom Reibungsfaktor.
- (d) Stellen Sie $A(f)$ für $C = 50$, $f_0 = 5$ und $\gamma = 1,1$ für $f \in [0; 15]$ graphisch dar.
- (e) Diskutieren Sie mit Hilfe einer geeigneten Software, wie sich der Verlauf von $A(f)$ in Abhängigkeit von den vorkommenden Parametern ändert.

Lösung: (a) $\lim_{f \rightarrow 0} A(f) = \frac{C}{f_0^2}$ System folgt exakt dem Erreger.

$\lim_{f \rightarrow \infty} A(f) = 0$ System kommt nicht mehr mit.

(b) $f_R = \sqrt{f_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$

- (c) f_R nimmt mit der Eigenfrequenz f_0 des Systems zu und mit dem Reibungsfaktor γ ab. Für kleine Reibungen gilt $f_R \approx f_0$.

4. Reale Gase lassen sich durch die Van-der-Waals-Gleichung $(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$ beschreiben. Dabei ist p der Druck, V das Volumen pro kmol ($6,022 \cdot 10^{26}$ Teilchen) und T die Temperatur des Gases. a und b sind Materialkonstanten des Gases und R ist die allgemeine Gaskonstante ($8,3144 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{Kkmol}}$).

- (a) Zeigen Sie, dass die Van-der-Waals-Gleichung für große Volumina (d. h. $V \gg a, b$) in die bekannte Zustandsgleichung idealer Gase $\frac{p \cdot V}{T} = \text{const}$ übergeht.
- (b) Lösen Sie die Van-der Waals-Gleichung nach p auf.
- (c) Für Temperaturen oberhalb eines kritischen Wertes T_k lassen sich Gase auch bei sehr hohem Druck nicht mehr verflüssigen. Für diese Temperatur hat die Funktion $p(V)$ genau einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente. Bestimmen Sie V_k , T_k und p_k allgemein aus der Van-der-Waals-Gleichung.
- (d) Berechnen Sie V_k , T_k und p_k für Sauerstoff ($a = 137 \cdot 10^3 \frac{\text{Nm}^4}{\text{kmol}^2}$, $b = 0,0316 \frac{\text{m}^3}{\text{kmol}}$).

Lösung: (a) $V \gg a, b \Rightarrow \frac{a}{V^2} \approx 0, V - b \approx V$
Also $pV \approx TR$.

(b) $p(V) = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$

(c) Bedingung I: $\frac{dp}{dV} = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} = 0$

Bedingung II: $\frac{d^2p}{dV^2} = \frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4} = 0$

I in II einsetzen liefert $V_k = 3b$.

$V_k = 3b$ in I einsetzen liefert $T_k = \frac{8a}{27bR}$.

$T_k = \frac{8a}{27bR}$ in $p(V)$ einsetzen liefert $p_k = \frac{a}{27b^2}$.

- (d) $T_{k,\text{Sauerstoff}} = 154,5 \text{ K}$, $p_{k,\text{Sauerstoff}} = 5,08 \text{ MPa}$,
 $V_{k,\text{Sauerstoff}} = 0,0948 \frac{\text{m}^3}{\text{kmol}}$

5. Die Stromstärke durch eine Schaltung aus einem Widerstand, einer Spule und einem Kondensator hängt von der Frequenz f und der anliegenden Wechselspannung ($\omega = 2\pi f$) ab. Sie berechnet sich nach der Formel

$$I(\omega) = \sqrt{\frac{100 - 2\omega^2}{100R^2 + \omega^2} + 0,01\omega^2} \quad D = \mathbb{R}_0^+.$$

Für R setzt man dazu die Maßzahl des enthaltenen ohmschen Widerstandes und für f die Maßzahl der Frequenz ein. $I(\omega)$ liefert dann die Maßzahl der Stromstärke.

- (a) Betrachten Sie die Funktion $I(\omega)$ zunächst für $R = 0$.
- Vereinfachen Sie die Funktionsgleichung und geben Sie die Nullstellen der Funktion an.
 - Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion für ω gegen Null und gegen Unendlich.
 - Untersuchen Sie, ob die Funktion im gesamten Definitionsbereich differenzierbar ist.
 - Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion.
 - Zeichnen Sie die Funktion für $\omega \in [0; 25]$.
- (b) Betrachten Sie nun die allgemeine Form der Funktion
- Berechnen Sie $I(10)$ in Abhängigkeit von R .
 - Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion für ω gegen Null und gegen Unendlich.
 - Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion.
 - Zeichnen Sie die Funktion für $R = 0,2$.
 - Zeichnen Sie $I(\omega)$ mit einer geeigneten Software für $R \in \{0; 0,1; 0,2; \dots\}$ und beschreiben Sie die Veränderungen der Funktion.
 - Für welche Frequenz ist $I(\omega)$ unabhängig von R ?

Hinweis: Die diskutierte Funktion beschreibt den Anregungsstrom eines Parallelschwingkreises mit $L = 0,1$ und $C = 0,1$. Die allgemeine Funktion heißt

$$I_{\text{ges}} = \sqrt{\frac{1 - 2LC\omega^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + \omega^2 C^2}.$$

- Lösung:*
- (a) i. $I(\omega) = |\frac{1}{0,1\omega} - 0,1\omega|$, $N(10|0)$
 ii. $\lim_{\omega \rightarrow 0} I(\omega) = \infty$; $\lim_{\omega \rightarrow \infty} I(\omega) = \infty$
 iii. Bei $\omega = 10$ nicht differenzierbar!
 iv. Für $\omega < 10$ streng monoton fallend und für $\omega > 10$ streng monoton steigend.
- (b) i. $I(10) = \sqrt{1 - \frac{1}{1+R^2}} = \frac{R}{\sqrt{1+R^2}}$

5.6 Anwendungen der Kurvendiskussion

- ii. $\lim_{\omega \rightarrow 0} I(\omega) = \frac{1}{R}$; $\lim_{\omega \rightarrow \infty} I(\omega) = \infty$
- iii. waagrechte Tangente bei $\omega = 0$;
Minimum bei $\omega = 10\sqrt{\sqrt{1+2R^2}-R^2}$
- iv.
- v. $I(0)$ sinkt; $I(\text{Minimum})$ steigt
- vi. $\omega = \sqrt{50}$

6. Mit dem Tröpfchenmodell zur Beschreibung eines Atomkerns lässt sich die Bindungsenergie des Kerns in Abhängigkeit von der Neutronenzahl N und der Protonenzahl Z berechnen. Für die Bindungsenergie erhält man:

$$W(Z, N) = (m_p Z + m_n N) c^2 - 6\varepsilon A + 6\varepsilon A^{2/3} + \beta \frac{Z^2}{A^{1/3}} + \eta \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$

- (a) Geben Sie die Bindungsenergie für feste Nukleonenzahl $A = Z + N$ an.
- (b) Für welche Protonenzahl ist bei fester Nukleonenzahl A die Bindungsenergie minimal? Verwenden Sie dazu $\alpha = (m_n - m_p) c^2 = 0,78 \text{ MeV}$, $\beta = 0,639 \text{ MeV}$ und $\eta = 21,7 \text{ MeV}$.
- (c) Vergleichen Sie das in (b) erhaltene Ergebnis mit der einfachen Annahme, dass sich in einem Atomkern etwa gleich viele Protonen und Neutronen befinden.

Lösung: (a) $W(Z) = (m_p - m_n)c^2 Z + m_n A c^2 - 6\varepsilon A + 6\varepsilon A^{2/3} + \beta \frac{Z^2}{A^{1/3}} + \eta \frac{(A-2Z)^2}{A}$

- (b) $W'(Z) = -\alpha + Z \left(\frac{2\beta}{A^{1/3}} + \frac{8\eta}{A} \right) - 4\eta \Rightarrow$
minimale Bindungsenergie für

$$Z = \frac{A}{2} \cdot \frac{1 + \frac{\alpha}{4\eta}}{1 + \frac{\beta}{4\eta} A^{2/3}} = \frac{A}{2} \cdot \frac{1 + 9 \cdot 10^{-3}}{1 + 7,4 \cdot 10^{-3} \cdot A^{2/3}}$$

- (c) Für kleine A erhält man etwa gleich viele Neutronen und Protonen. Je größer A ist, umso mehr weicht die Protonenzahl von $\frac{A}{2}$ ab (kleiner).
TIP: $Z(A)$ und $\frac{A}{2}$ mit Funktionsplotprogramm zeichnen!

7. Zerodur ist eine Glaskeramik, die über einen weiten Temperaturbereich nur eine sehr kleine Temperatúrausdehnung aufweist. Aus diesem Grund findet es Anwendung als Spiegelträger in der Lasertechnik und in Teleskopen.

Die Längenausdehnung $f(T)$ (in $\frac{\mu\text{m}}{^\circ\text{C}}$) eines 10 m langen Zerodurstabes in Abhängigkeit von der Temperatur T in $^\circ\text{C}$ lässt sich näherungsweise durch folgende Funktion beschreiben:

$$f(T) = -0,6 + 1,63 \cdot \frac{T}{100^\circ\text{C}} - 2,91 \cdot \left(\frac{T}{100^\circ\text{C}} \right)^2 - 2,49 \cdot \left(\frac{T}{100^\circ\text{C}} \right)^3$$

5.6 Anwendungen der Kurvendiskussion

- (a) Untersuchen Sie den Kurvenverlauf von $f(T)$.
- (b) Zeichnen Sie $f(T)$ mit einer geeigneten Software im Bereich von -100°C bis 100°C .
- (c) Eine exaktere Beschreibung der Längenausdehnung liefert:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(T) = & f(T) + \\ & + 2,74 \cdot \left(\frac{T}{100^\circ\text{C}}\right)^4 + 1,43 \cdot \left(\frac{T}{100^\circ\text{C}}\right)^5 - \\ & - 0,62 \cdot \left(\frac{T}{100^\circ\text{C}}\right)^6 - 0,26 \cdot \left(\frac{T}{100^\circ\text{C}}\right)^7\end{aligned}$$

Zeichnen Sie $\tilde{f}(T)$ mit einer geeigneten Software und vergleichen Sie den Graphen mit dem von $f(T)$. Diskutieren Sie das Ergebnis.

Lösung: (a) Substitution: $x = \frac{T}{100^\circ\text{C}}$,

Maximum $(0,22 | -0,41)$, Minimum $(-1,00 | -2,65)$,
Wendepunkt $(-0,39 | -1,53)$

(b)

- (c) Im Temperaturbereich von -25°C bis 25°C weicht $\tilde{f}(T)$ von $f(T)$ nur geringfügig ab. Hier stellt also $f(T)$ eine genügend gute Näherung dar.

Betrachtet man aber einen größeren Temperaturbereich, muss $\tilde{f}(T)$ verwendet werden.

$$\text{z. B. } |f(50^\circ\text{C}) - \tilde{f}(50^\circ\text{C})| = 0,204, \quad \frac{|f(50^\circ\text{C}) - \tilde{f}(50^\circ\text{C})|}{\tilde{f}(50^\circ\text{C})} = 33\%$$

Dem Diagramm entnimmt man, dass die Längenänderung $\tilde{f}(T)$ eines 10 m langen Stabes im Temperaturbereich von -100°C bis 100°C ca. $1,0 \frac{\mu\text{m}}{^\circ\text{C}}$ beträgt. Dies entspricht einer Längenausdehnung um $0,00001\%$ pro $^\circ\text{C}$!

Literatur: *Mathematikaufgaben, Anwendungen aus der modernen Technik und Arbeitswelt*, Werner Schmidt, Ernst Klett Verlag, 1984

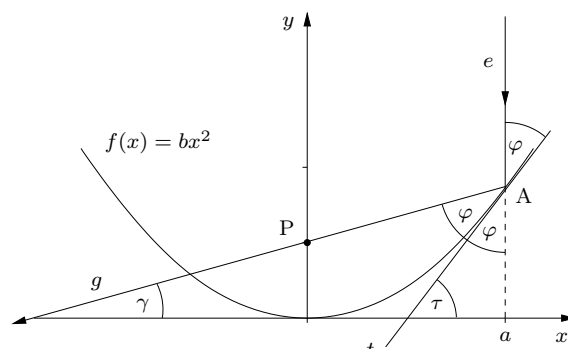
5.7 Anwendungen in der Geometrie

5.8 Aus der Physik

1. Licht fällt parallel zur y -Achse in einen Parabolspiegel, dessen spiegelnde Fläche durch

$$f(x) = bx^2$$

beschrieben wird. Wir betrachten einen Lichtstrahl, der den Spiegel im Punkt $A(a|f(a))$ trifft. Nach dem Reflexionsgesetz schließen der einfallende Strahl e und der reflektierte Strahl g mit der Tangente t an



G_f im Punkt A den gleichen Winkel φ ein. Beweisen Sie, dass *jeder* zur y -Achse parallel einfallende Strahl die y -Achse im selben Punkt $P(0|p)$ (dem *Brennpunkt*) trifft und berechnen Sie p .

Benutzen Sie die trigonometrische Formel: $\tan 2\varphi = \frac{2 \tan \varphi}{1 - \tan^2 \varphi}$.

Lösung: $\tan(90^\circ - \alpha) = -\tan(\alpha - 90^\circ) = -\frac{\sin(\alpha - 90^\circ)}{\cos(\alpha - 90^\circ)} = -\frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}$

Steigung von g : $m = \tan \gamma = \tan(90^\circ - 2\varphi) = \frac{1}{\tan 2\varphi} = \frac{1 - \tan^2 \varphi}{2 \tan \varphi}$

$\tan \varphi = \tan(90^\circ - \tau) = \frac{1}{\tan \tau} = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{2ba} \implies m = ba - \frac{1}{4ba}$

Aus $g(x) = mx + p$ und $A \in g$ folgt

$$g(a) = \left(ba - \frac{1}{4ba}\right)a + p = ba^2 \implies p = \frac{1}{4b}$$

Da p nicht von a abhängt, geht jeder zur y -Achse parallel einfallende Strahl durch P .

2. Ein Elektron in einer Fernsehröhre bewegt sich nach folgendem Weg-Zeit-Gesetz:

$$s(t) = 2 \cdot 10^{14} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 + 3 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + 5 \text{ cm} \quad \text{mit} \quad t \geq 0$$

Welche Geschwindigkeit hat das Elektron beim Erreichen von $s = 0,7 \text{ m}$?

Lösung: $v = \dot{s} = 4 \cdot 10^{14} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t + 3 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad , \quad s(t_1) = 0,7 \text{ m} \implies t_1 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ s}$

$$v(t_1) = 2,3 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3. Ein Zug bewegt sich im Zeitintervall $[0 \text{ h}, 4 \text{ h}]$ nach dem Zeit-Weg-Gesetz

$$x(t) = 10 \frac{\text{km}}{\text{h}^4} \cdot t^4 - 80 \frac{\text{km}}{\text{h}^3} \cdot t^3 + 160 \frac{\text{km}}{\text{h}^2} \cdot t^2$$

Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Geschwindigkeit $v(t)$! Zeichnen Sie die Graphen von $x(t)$ und $v(t)$!

Berechnen Sie die maximale Entfernung des Zuges vom Ausgangspunkt sowie seine maximale Geschwindigkeit.

Lösung: $v(t) = \dot{x}(t) = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}^3} \cdot t^3 - 240 \frac{\text{km}}{\text{h}^2} \cdot t^2 + 320 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$

$$a(t) = \dot{v}(t) = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}^2} \cdot t - 480 \frac{\text{km}}{\text{h}^2} \cdot t + 320 \frac{\text{km}}{\text{h}^2}$$

Nullstellen von x : $t_{01} = 0, t_{02} = 4 \text{ h}$

Nullstellen von v : $t_{11} = 0, t_{12} = 2 \text{ h}, t_{13} = 4 \text{ h}$

Nullstellen von a : $t_{21} = (2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}) \text{ h}, t_{22} = (2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}) \text{ h}$

$$x_{\max} = x(2 \text{ h}) = 160 \text{ km}, v_{\max} = v(t_{21}) = \frac{640}{9}\sqrt{3} \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 123 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

4. Zur Messung der elektrischen Stromstärke verwendet man in der Regel Drehspulinstrumente. Der Strom fließt durch eine im Magnetfeld drehbar aufgehängte Spule, die durch die magnetische Wirkung des Stroms ausgelenkt wird. In einem speziellen Drehspulinstrument kann zwischen zwei Messmethoden gewählt werden:

I: Die Stärke des Magnetfeldes ist konstant und der Strom fließt nur durch die drehbare Spule.

II: Das Magnetfeld wird durch eine stromdurchflossene Spule erzeugt, die mit der drehbaren Spule in Serie geschaltet ist.

Der Zusammenhang zwischen Stromstärke I und Auslenkung x der drehbaren Spule wird für $x < 90^\circ$ durch folgende Funktionsgleichung beschrieben:

$$I_I(x) = 0,04 \frac{x}{\cos(x)} \text{ bzw. } I_{II}(x) = 0,2 \sqrt{\frac{x}{\cos(x)}}, \quad I \text{ jeweils in A, } x \text{ Maßzahl des Winkels im Gradmaß.}$$

- Für welche Ströme ist die Auslenkung mit der ersten Methode größer?
- Welche Ströme müssen jeweils fließen, damit man die Auslenkungswinkel 10° , 20° , 40° , 60° und 80° erhält?
- Zeichnen Sie die Funktionen für $x \in [0; 90^\circ[$.
- Unter der Empfindlichkeit eines Stromstärkemessgerätes versteht man den Quotienten $\frac{\Delta x}{\Delta I}$. Erklären Sie, warum diese Definition sinnvoll ist.
Formulieren Sie einen Zusammenhang zwischen der Ableitung $I'(x)$ der Funktion und der Empfindlichkeit.

5.8 Aus der Physik

- (e) Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen und stellen Sie sie mit einer geeigneten Software graphisch dar. Diskutieren sie folgende Punkte:
 Für welche Auslenkungswinkel bzw. Stromstärken ist die Messanordnung I empfindlicher?
 Für welchen Auslenkungswinkel bzw. für welche Stromstärke ist die Empfindlichkeit der Messanordnung II maximal?

Lösung: (a) $I_I(x) = I_{II}(x)$ für $I(x) = 0$ oder $I(x) = 1$. Aus der Berechnung eines geeigneten Funktionswertes z. B. $I_I(20^\circ) = 0,85 < 0,92 = I_{II}(20^\circ)$ folgt, dass für $I < 1$ die Anordnung II größere Ausschläge liefert.

- (b) $I_I(0^\circ) = 0$, $I_I(10^\circ) = 0,4$, $I_I(20^\circ) = 0,85$, $I_I(40^\circ) = 2,1$, $I_I(60^\circ) = 4,8$, $I_I(80^\circ) = 18,40$
 $I_{II}(0^\circ) = 0$, $I_{II}(10^\circ) = 0,6$, $I_{II}(20^\circ) = 0,92$, $I_{II}(40^\circ) = 1,4$, $I_{II}(60^\circ) = 2,2$, $I_{II}(80^\circ) = 4,3$

(c)

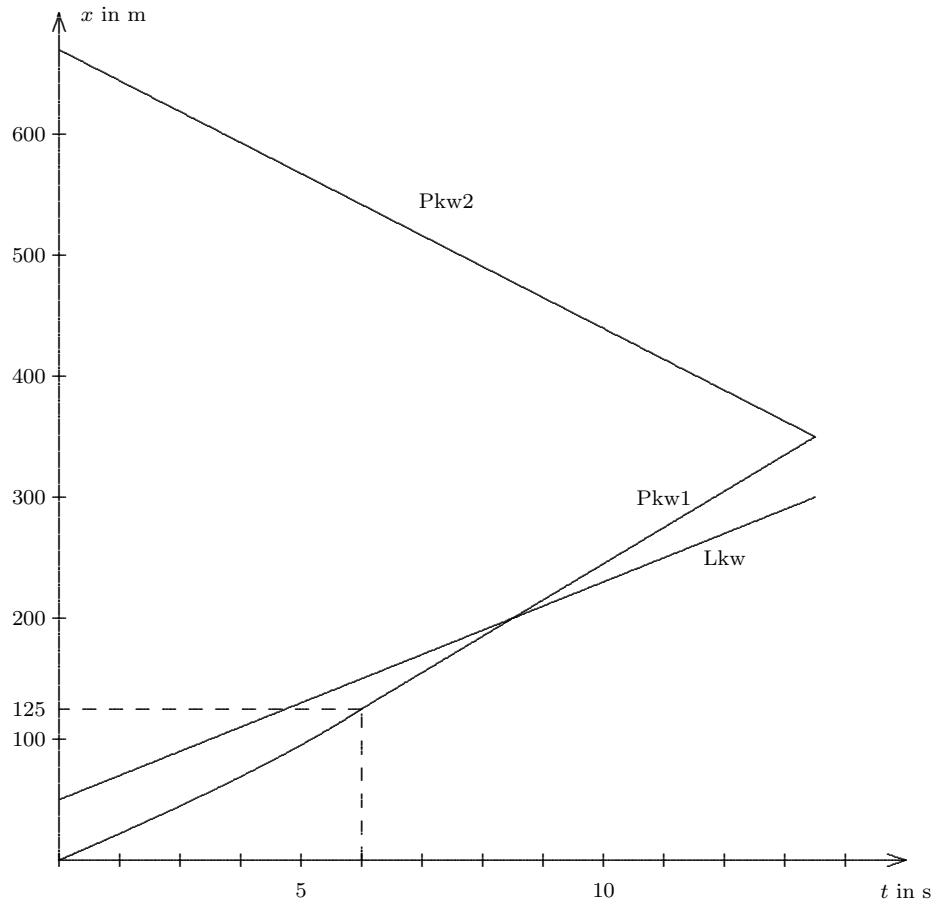
- (d) Große Empfindlichkeit bedeutet großes Δx für ein fest vorgegebenes ΔI . Empfindlichkeit = $\frac{1}{I'(x)}$

(e)

$$I'_I(x) = 0,04 \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x}$$

$$I'_{II}(x) = 0,1 \sqrt{\frac{\cos x}{x}} \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x}$$

5. In der Abbildung ist die Zeit-Ort-Funktion für einen Überholvorgang dargestellt.



- (a) Berechnen Sie die Geschwindigkeiten des LKW's und von PKW2 sowie die Geschwindigkeit des überholenden PKW's zur Zeit $t > 6$ s.
- (b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit von PKW1 zur Zeit $t = 0$ unter der Annahme, dass PKW1 im Zeitintervall $1 \text{ s} \leq t \leq 6 \text{ s}$ eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung ausführt, sonst aber mit konstanter Geschwindigkeit fährt.
- (c) Zeichnen Sie ein Zeit-Geschwindigkeitsdiagramm für PKW1.

Lösung: (a) $v_L = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_2 = -25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_{1,t>6 \text{ s}} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

(b) $1 \text{ s} \leq t \leq 6 \text{ s}$: $x_1(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$, $v_1(t) = v_0 + a t$

$$x_1(1 \text{ s}) = 0, x_1(6 \text{ s}) = 125 \text{ m}, v_1(6 \text{ s}) = 125 \text{ m/s} \implies$$

$$a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, v_0 = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}}, x_0 = -19 \text{ m}, v_1(0) = v_1(1 \text{ s}) = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

6. Die Schwingung einer Masse m an einer Feder mit der Federhärte D wird durch die Gleichung $m \cdot \ddot{s}(t) + D \cdot s(t) = 0$ beschrieben. $\ddot{s}(t)$ ist die zweite Ableitung von $s(t)$ nach der Zeit. Zeigen Sie durch Ableiten und Einsetzen, dass folgende Funktionen Lösungen der Schwingungsgleichung sind.

(a) $s(t) = s_0 \sin(\omega t)$ mit $\omega^2 = \frac{D}{m}$

(b) $s(t) = s_0 \cos(\omega t)$ mit $\omega^2 = \frac{D}{m}$

(c) $s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi)$ mit $\omega^2 = \frac{D}{m}$

(d) Wie entscheidet man, welche Lösung eine beobachtete Schwingung richtig beschreibt?

Lösung: (a) $\ddot{s}(t) = -\omega^2 s_0 \sin(\omega t)$

(b) $\ddot{s}(t) = -\omega^2 s_0 \cos(\omega t)$

(c) $\ddot{s}(t) = -\omega^2 s_0 \sin(\omega t + \varphi)$

(d) Die Lösung (a) beschreibt Schwingungen, die in der Nulllage starten und die Lösung (b) Schwingungen, die bei der maximalen Auslenkung starten. Dagegen ist (c) eine allgemeine Lösung der Gleichung für beliebige Anfangsbedingungen, die dann den Phasenwinkel φ festlegen. Dazu entnimmt man aus dem Experiment $s(0s)$ und $\dot{s}(0s)$ und setzt die Werte in $s(t)$ und $\dot{s}(t)$ ein. Daraus erhält man den Phasenwinkel φ .

7. Die Schwingung einer Masse m an einer Feder mit der Federhärte D und der Dämpfungszahl k wird durch die Gleichung $m \cdot \ddot{s}(t) + k \cdot \dot{s}(t) + D \cdot s(t) = 0$ beschrieben. Zeigen Sie durch Ableiten und Einsetzen, dass die Funktion

$$s = s_0 e^{-\frac{k}{2m}t} \cdot \sin(\omega t) \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2}$$

eine Lösung der Schwingungsgleichung ist:

Bemerkung zur Schreibweise: Mit $\dot{s}(t)$ und $\ddot{s}(t)$ ist die erste und die zweite Ableitung von $s(t)$ nach der Zeit gemeint!

Lösung:

$$\dot{s}(t) = -\frac{k}{2m}s(t) + s_0 \omega e^{-\frac{k}{2m}t} \cdot \cos(\omega t)$$

$$\ddot{s}(t) = \left(\frac{k}{2m}\right)^2 s_0 e^{-\frac{k}{2m}t} \cdot \sin(\omega t) - 2\frac{k}{2m}\omega s_0 e^{-\frac{k}{2m}t} \cdot \cos(\omega t) - \omega^2 s_0 e^{-\frac{k}{2m}t} \cdot \sin(\omega t)$$

Einsetzen liefert:

$$s_0 e^{-\frac{k}{2m}t} \cdot \sin(\omega t) \cdot m \cdot \left(\frac{D}{m} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2 - \omega^2\right) = 0$$

8. Viele Größen in Naturwissenschaft und Technik sind zueinander direkt proportional. Stellt man den Zusammenhang zweier solcher Größen graphisch dar, erhält man eine Ursprungsgerade.

Bei Experimenten treten aber immer Messfehler auf, so dass die Messwerte $(a_i|b_i)$ in der Regel nicht exakt auf einer Gerade liegen. C. F. Gauß hat nun vorgeschlagen die Steigung einer Ausgleichsgerade $f(x) = mx$ so zu wählen, dass die Summe der Fehlerquadrate $(f(a_i) - b_i)^2$ minimal wird.

- (a) Berechnen Sie für folgende Messwerte die Summe der Fehlerquadrate $S(m)$ und bestimmen Sie die Steigung der Ausgleichsgerade.
- (50|30), (100|55), (150|95)
 - (20|40), (40|75), (60|115)
 - (10|30), (30|86), (50|140), (70|205)
 - (5|1,5), (10|3,2), (15|4,3), (20|5,9)
- (b) Zeigen Sie allgemein, dass die Summe der Fehlerquadrate in der Form $S(m) = pm^2 - 2qm + r$ geschrieben werden kann.
- (c) Geben Sie an, wie p, q und r aus den Messwerten berechnet werden.
- (d) Geben Sie allgemein die Steigung m der Ausgleichsgerade an.

Lösung: (a) i. $S(m) = 35000 m^2 - 2m \cdot 21250 + 12950 \Rightarrow m = 0,607$

ii. $S(m) = 5600 m^2 - 2m \cdot 10700 + 20450 \Rightarrow m = 1,91$

iii. $S(m) = 8400 m^2 - 2m \cdot 24230 + 69921 \Rightarrow m = 2,88$

iv. $S(m) = 750 m^2 - 2m \cdot 222 + 65,79 \Rightarrow m = 0,296$

(b)

$$\begin{aligned} S(m) &= (ma_1 - b_1)^2 + (ma_2 - b_2)^2 + (ma_3 - b_3)^2 + \dots + (ma_n - b_n)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2) \cdot m^2 \\ &\quad - 2 \cdot (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_nb_n) \cdot m \\ &\quad + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_n^2) \end{aligned}$$

(c) $p = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2$, $q = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_nb_n$ und $r = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_n^2$.

(d) $m = \frac{q}{p}$

9. Stauentwicklung

Ein einfaches Modell zur Untersuchung der Stauentwicklung erhält man, indem man annimmt, dass alle Autos mit gleicher konstanter Geschwindigkeit v und gleichem Sicherheitsabstand $s(v)$ fahren. Zusätzlich sollen alle Autos die gleiche Länge $l = 5\text{m}$ haben.

- (a) Geben Sie einen Term $n(v)$ zur Berechnung der Anzahl der Autos an, die eine Beobachtungsstelle in einer Stunde passieren.
- (b) Der Sicherheitsabstand $s(v)$ sollte mindestens so groß sein, wie der Anhalteweg $s_A(v)$ eines Autos. Dieser lässt sich nach der Formel

$$s_A(v) = v \cdot 1 \text{ s} + \frac{1}{2b} v^2$$

berechnen. Dabei ist v die Anfangsgeschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und b die Beschleunigung in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

5.8 Aus der Physik

Berechnen Sie den Anhalteweg $s(v)$ eines Autos mit der Anfangsgeschwindigkeit $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

i. für trockene ($b = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$) Straße.

ii. für nasse ($b = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$) Straße.

(c) Berechnen Sie $n(v)$ für die Geschwindigkeit $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Der Sicherheitsabstand soll gleich dem Anhalteweg sein.

i. für trockene ($b = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$) Straße.

ii. für nasse ($b = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$) Straße.

Wie verändert sich $n(v)$ bei zunehmender Geschwindigkeit?

(d) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von $n(v)$.

Bei welcher Geschwindigkeit ist $n(v)$ für trockene bzw. nasse Straße maximal?

(e) Diskutieren Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe (d).

Lösung: (a) $n(v) = \frac{v \cdot 1 \text{ h}}{l + s(v)}$

(b)

	$30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$	$50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$	$80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$	$100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
trocken	13,3 m	27,7 m	57,5 m	82,9 m
nass	19,9 m	46,0 m	104,5 m	156,4

(c)

	$30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$	$50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$	$80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$	$100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
trocken	1640	1531	1280	1138
nass	1204	980	730	620

Mit zunehmender Geschwindigkeit nimmt die Anzahl der passierenden Autos ab!

(d) $n(v) = \frac{v \cdot 1 \text{ h}}{5 + v + \frac{1}{2b}v^2} \Rightarrow n'(x) = \frac{(5 - \frac{1}{2b}v^2) \cdot 1 \text{ h}}{(5 + v + \frac{1}{2b}v^2)^2} = 0 \Leftrightarrow v = \pm\sqrt{10b}$

Negative Lösung nicht sinnvoll! $\Rightarrow$

trockene Straße: $n(v)$ maximal für $v = 8,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 30,1 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

nasse Straße: $n(v)$ maximal für $v = 5,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 19,7 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

$n(v)$ ist für $v < n_{\max}$ streng monoton steigend und für $v > n_{\max}$ streng monoton fallend.

(e) Das Maximum von $n(v)$ liegt bei erstaunlich niedrigen Geschwindigkeiten. Geschwindigkeitsbegrenzungen sind bei hohem Verkehrsaufkommen sinnvoll. Sie verbessern den Verkehrsfluss ($n(v)$ wird größer!).

$n(v)$ wird auch dann größer, wenn der Sicherheitsabstand $s(v)$ verringert wird. Dies ist jedoch nicht anzustreben, da dadurch das Unfallrisiko steigt.

10. Im Eisenbahnbau werden im Flachland für die Bahnstrecke normalerweise Krümmungsradien von 1000 m oder mehr genommen. Darüberhinaus wird die Bahnstrecke so gewählt, dass an der Übergangsstelle kein Knick entsteht, die Krümmung stetig

5.8 Aus der Physik

ist und sich proportional zum zurückgelegten Weg ändert.

Bestimmen sie den Übergangsbogen der Länge 200 m einer geradlinigen Bahnlinie zu einem Kreisbogen mit Radius 1000 m. Verwenden sie dazu als Näherung Polynome. Als Länge der Kurve darf näherungsweise die x -Koordinate verwendet werden.

Hinweis:

Die Krümmung $k(x)$ einer Kurve ist der Kehrwert des zugehörigen Krümmungsradius $\varrho(x)$:

$$k(x) = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \varrho(x) = \frac{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}$$

Literatur: A. Kirsch, *Übergangsbögen bei Eisenbahngleisen als Thema für den Mathematikunterricht*, MNU 50/3, S. 144-150

Lösung: Für $x < 0$ kann die Bahnlinie mit $f_1(x) = 0$ beschrieben werden.

Bedingung für die Bahnlinie:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0 \quad (I), \quad k(x) \propto x \quad (II)$$

$$\text{Ansatz für } x \geq 0: f_2(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \dots \implies$$

$$f'_2(x) = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + \dots, \quad f''_2(x) = 2c + 6dx + 12ex^2 + \dots$$

Aus (I) folgt $a = b = c = 0$. (II) kann mit diesem Polynomansatz nicht exakt erfüllt werden,

da man mit obigem Ansatz $k(x) = \frac{6dx + 12ex^2 + \dots}{(1 + (3dx^2 + 4ex^3 + \dots)^2)^{\frac{3}{2}}}$ erhält.

Für kleine x ist jedoch $f'(x)$ sehr klein und kann vernachlässigt werden. Man erhält $k(x) \approx f''(x)$. Für diese Näherung liefert $f_2(x) = dx^3$ eine Lösung.

Bestimmung von d (Einheit: km) aus $\frac{1}{r} = k(x) \approx f''(x) = 6dx$:

$$k(0,2) \approx 6d \cdot 0,2 = \frac{1}{1} \implies d = \frac{5}{6}$$

Betrachtung der Abweichung von der exakt berechneten Krümmung bei $x = 0,2$:

$$k(0,2) = \frac{6 \cdot \frac{5}{6} \cdot 0,2}{(1 + (3 \cdot \frac{5}{6} \cdot 0,2^2)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1,015}$$

Bei $x = 0,2$ wird der Krümmungsradius von 1000 m nicht exakt erreicht. Dies macht sich in einem kleinen Ruck im Zug an der Übergangsstelle bemerkbar. In der Praxis werden solche Abweichungen toleriert, da der entstehende Ruck geringer als das übliche Rütteln des Zuges ist.

11. Für die Geschwindigkeit eines Motorrades, das zur Zeit $t = 0$ startet, gilt die Beziehung (t in Sekunden, v in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$)

$$v(t) = \frac{60t^2 + 20t^3}{(1+t)^3} \quad .$$

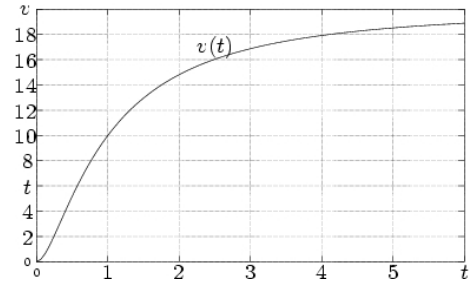
- (a) Berechnen Sie $v_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$, ohne darauf einzugehen, von welcher Seite sich v an den Grenzwert annähert.

5.8 Aus der Physik

- (b) Berechnen Sie die Beschleunigung $a(t) = \dot{v}(t)$ des Motorrades.
Berechnen Sie $a_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} a(t)$.
- (c) Welche Aussage kann man über das Vorzeichen von $a(t)$ für $t > 0$ treffen?
Leiten Sie daraus her, von welcher Seite sich $v(t)$ mit $t \rightarrow +\infty$ an v_∞ annähert.
Berechnen Sie $v(0)$ und $a(0)$ und erstellen Sie eine Skizze des groben Verlaufs von $v(t)$ unter Einbeziehung aller gewonnenen Ergebnisse.

Lösung:

- (a) $v_\infty = 20$
- (b) $a(t) = \frac{120t}{(1+t)^4}, \quad a_\infty = 0^+$
- (c) $a(t) > 0$ für $t > 0 \implies v(t)$
streng steigend für $t > 0$, d.h.
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 20^-$.



12. Welche Kraft wirkt auf einen Körper der Masse m , der sich nach dem Gesetz

$$x(t) = \alpha \cdot t^3 - \beta \cdot t$$

bewegt?

Lösung: $F(t) = m \ddot{x}(t) = 6 \alpha m t$