SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit $\TeX$

Jahrgangsstufe 11 (Gymnasium)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

19. April 2014

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Analysis

1. Änderungsverhalten von Funktionen

1.1. Graphen gebrochen rationaler Funktionen

1.1.1. Definitionslücken

1. (a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4{,}4\}$
   (b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}{,}0, \frac{1}{2}\}$
   (c) $D = \mathbb{R} \setminus \{x|x = k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
   (d) $D = \mathbb{R} \setminus \{x|x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
   (e) $D = \mathbb{R} \setminus \{x|x = 2 - (\frac{\pi}{2} + k\pi); k \in \mathbb{Z}\}$
   (f) $D = \mathbb{R} \setminus \{x|x = \pm\sqrt{k\pi}; k \in \mathbb{N}_0\}$
   (g) $D = \mathbb{R} \setminus \{x|x = k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
   (h) $D = \mathbb{R} \setminus \{x|x = \frac{\pi}{2} + k\pi - 4; k \in \mathbb{Z}\}$
   (i) $D = \mathbb{R} \setminus \{x|x = (2k+1)\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
   (j) $D = \mathbb{R} \setminus \{x|x = \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

2. (a) $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \quad \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
   (b) $\frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{4} = (\frac{2}{3}x - \frac{1}{2})(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}) \quad \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\}$
   (c) $\frac{1}{2}x^2 - 2 = \frac{1}{2}(x-2)(x+2) \quad \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-2{,}2\}$
   (d) $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4} = (\frac{1}{3}x + \frac{1}{2})^2 \quad \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$
   (e) $0{,}01x^2 - 1 = (0{,}1x - 1)(0{,}1x + 1) \quad \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-10, 10\}$
   (f) $0{,}64x^2 + 1{,}12x + 0{,}49 = (0{,}8x + 0{,}7)^2 \quad \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{7}{8}\}$

3. (a) $\frac{5}{3} < x < \frac{500}{299}$; $\frac{5}{3} < x < \frac{5000}{2999}$; $\frac{5}{3} < x < \frac{50\,000}{29\,999}$; $\frac{5}{3} < x < \frac{5\,M}{3\,M-1}$
   (b) $1 < x < \frac{99}{98}$; $1 < x < \frac{999}{998}$; $1 < x < \frac{9999}{9998}$; $1 < x < \frac{M-1}{M-2}$

4. (a) $D_f = \left[\,-\frac{4}{7}\,;\,+\infty\,\right[$ (b) $D_f = \left]\,-\infty\,;\,2\,\right] \cup \left[\,3\,;\,+\infty\,\right[$
   (c) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$ (d) $D_f = \mathbb{R}$
   (e) $D_f = \left]\,\frac{9}{4}\,;\,+\infty\,\right[$ (f) $D_f = \left]\,-2\,;\,0\,\right[\cup \left]\,1\,;\,+\infty\,\right[$
   (g) $D_f = \{\}$ (h) $D_f = \{\,3\,\}$

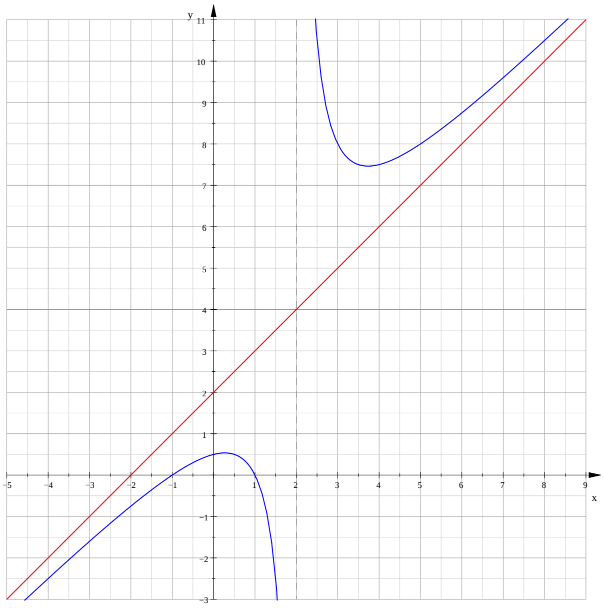
5. (a)

	$]-\infty,-1[$	$]-1,1[$	$]1,2[$	$]2,\infty[$
x^2-1	$+$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

(b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\},\ f(x) = x + 2 + \dfrac{3}{x-2} \quad \Longrightarrow \quad$ schräge Asymptote: $y = x + 2$

(c)

x	$f(x)$
$-4{,}0$	$-2{,}50$
$-2{,}0$	$-0{,}75$
$-1{,}0$	$0{,}00$
$0{,}0$	$0{,}50$
$1{,}0$	$0{,}00$
$1{,}5$	$-2{,}50$
$2{,}5$	$10{,}50$
$3{,}0$	$8{,}00$
$4{,}0$	$7{,}50$
$5{,}0$	$8{,}00$
$7{,}0$	$9{,}60$



(d) $f(x) > 100$ kommt nur für $x > 2$ in Frage: $\quad \Longrightarrow \quad x - 2 > 0 \quad \Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
& & \frac{x^2-1}{x-2} &> 100 \\
&\iff & x^2 - 1 &> 100x - 200 \\
&\iff & x^2 - 100x + 50^2 &> 2301 \\
&\iff & |x - 50| &> \sqrt{2301} \\
&\iff & x > 50 + \sqrt{2301} \ &\vee\ x < 50 - \sqrt{2301} \\
&\text{oder ungefähr} & x > 97{,}9687 \ &\vee\ x < 2{,}03126
\end{aligned}
$$

$$f(x) > 100 \quad \iff \quad x \in]2, 50 - \sqrt{2301}[\cup]50 + \sqrt{2301}, \infty[$$

6. (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$x^2 + x - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \quad \Longrightarrow \quad x_{01} = -2,\ \ x_{02} = 1$$

(b)

	$]-\infty,-2[$	$]-2,1[$	$]1,2[$	$]2,\infty[$
x^2+x-2	$+$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

(c)

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^2 \quad + x - 2\big) \div \big(2x-4\big) = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2} + \dfrac{4}{2x-4} \\
\underline{-\,x^2 + 2x} \\
\qquad\quad 3x - 2 \\
\qquad\ \underline{-\,3x + 6} \\
\qquad\qquad\quad 4
\end{array}
$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{2}{x-2} \quad \Longrightarrow \quad \text{schräge Asymptote: } y = p(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Senkrechte Asymptote: $x = 2$

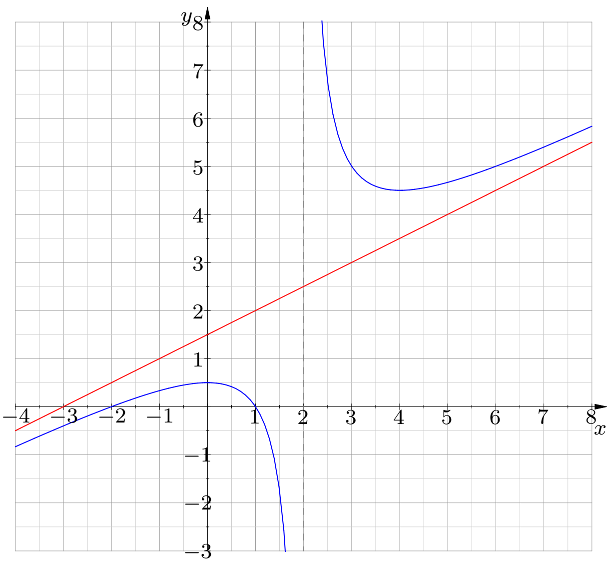
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{h\to 0^+} f(2-h) = \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{2}(2-h) + \frac{3}{2} + \frac{2}{-h}\right) = \left(\frac{5}{2} + \frac{2}{0^-}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{h\to 0^+} f(2+h) = \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{2}(2+h) + \frac{3}{2} + \frac{2}{h}\right) = \left(\frac{5}{2} + \frac{2}{0^+}\right) = +\infty$$

(d)

x	$f(x)$
−4,0	−0,83
−3,0	−0,40
−2,0	−0,00
−1,0	0,33
0,0	0,50
1,0	0,00
1,5	−1,75
2,5	6,75
3,0	5,00
4,0	4,50
5,0	4,67
6,0	5,00
7,0	5,40
8,0	5,83



(e)

$$
\begin{array}{rr}
 & |f(x)-p(x)| = \left|\dfrac{2}{x-2}\right| < 10^{-3} \\
\Longleftrightarrow & |x-2| > 2000 \\
\Longleftrightarrow & x > 2002 \ \vee\ x < -1998
\end{array}
$$

7. $x > \frac{8+\varepsilon}{2\,\varepsilon}$

8. (a) $-x = \frac{5}{6}$, $y = \frac{1}{2}$.
   (b) $x > \frac{5-10\,\varepsilon}{12\,\varepsilon}$

1.1.2. Grenzwerte mit x -¿ a

1. -4

2. (a) 0, 4, 0, 2
   (b) 4 ,12 ,1 ,-3
   (c) 2, -1, 2, 0

3. (a) existiert nicht (b) $\left|x^n \sin\dfrac{1}{x}\right| \leqq |x^n| \quad\Longrightarrow\quad \lim\limits_{x\to 0^+} = 0$

4. (a) $\dfrac{a}{b}$ (b) $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ (c) $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}} = \begin{cases} 0 & \text{für } a > 0 \\ 1 & \text{für } a = 0 \end{cases}$

   (d) 0 (e) $\dfrac{1}{2}$ (f) $\pm\infty$

   (g) $\dfrac{1}{2}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = 0$ (de l'Hospital funktioniert nicht)

5. (a) existiert nicht (b) $+\infty$

6. $f(x) = \tan x, \quad f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} > 0, \quad f''(x) = \dfrac{2\,\tan x}{\cos^2 x} > 0$ in $]\,0\,;\frac{\pi}{2}\,[$

   $f'(0) = 1 \wedge f''(x) > 0$ in $]\,0\,;\frac{\pi}{2}[\quad\Longrightarrow\quad f'(x) > 1$ in $]\,0\,;\frac{\pi}{2}\,[$

   $g(x) = x,\ g'(x) = 1$

   $f(0) = g(0) = 0$ und $f'(x) > g'(x)$ in $]\,0\,;\frac{\pi}{2}\,[\quad\Longrightarrow\quad \tan x > x$ in $]\,0\,;\frac{\pi}{2}\,[$

   Aus der Symmetrie von h zur y-Achse folgt dann

   $h(x) = \dfrac{\tan x}{x} > 1$ in $]\,-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\,[\setminus\{0\}$. Damit ist

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = 1^+$$

1.1.3. Beliebige Grenzwerte

1. (a) z. B. $a(x) = \dfrac{2x^2 + x}{x^2 + 1}$

   (b) z. B. $b(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x}{3x^3 - x^2 + x}$

   (c) z. B. $c(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x^2 + 2x + 2}$

   (d) z. B. $d(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + x}{-x^2 + x - 6}$

   (e) z. B. $e(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

   (f) z. B. $f(x) = -\dfrac{1}{(x + 3)^2}$

   (g) z. B. $g(x) = \dfrac{x - 1}{(x - 2)^2}$

   (h) z. B. $h(x) = \dfrac{x - 5}{(x - 2)^2}$

2. z.B. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) \cdot (x - 4)^2 & \text{für } \; x \neq -2 \\ 3 & \text{für } \; x = -2 \end{cases}$

   $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = 9$; $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = -9$

3. (a) 0^+ (b) $0^\pm$ (c) $\pm\infty$

4. (a) $D_f = \mathbb{R} \backslash \{\pm 3\}$, $\lim\limits_{x \to 3^\pm} f(x) = \mp\infty$, $\lim\limits_{x \to (-3)^\pm} f(x) = \pm\infty$

   $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = (-1)^-$

   (b) $D_f = \mathbb{R} \backslash \{\pm 3\}$, $\lim\limits_{x \to 3^\pm} f(x) = \mp\infty$, $\lim\limits_{x \to (-3)^\pm} f(x) = \mp\infty$

   $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0^\mp$

5. (a) $D = [0; 1[\cup]1; \infty[$, $f(0) = 2$, $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = -\infty$,
   $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

   (b) $D = [0; 1[\cup]1; \infty[$, $f(0) = 1$, $\lim\limits_{x \to 1\pm 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1\pm 0} (1 + \sqrt{x}) = 2$,
   $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

6. (a) ∞, $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{x - 2}{|x - 2|} = 1$, $\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{x - 2}{|x - 2|} = -1$

   (b) 0, 2

(c) $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} \dfrac{1}{|2x|-4x^2} = \infty, \quad \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pm 0} \dfrac{1}{|2x|-4x^2} = \mp\infty, \quad \lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}\pm 0} \dfrac{1}{|2x|-4x^2} = \pm\infty$

(d) $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} \dfrac{x}{|x|+x^2} = \pm 1$

7. (a) $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{x+3}{x-3} = 1 + \dfrac{6}{x-3}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{\,2\,;3\,\}$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -5, \quad \lim\limits_{x\to 3^\pm} f(x) = \pm\infty$

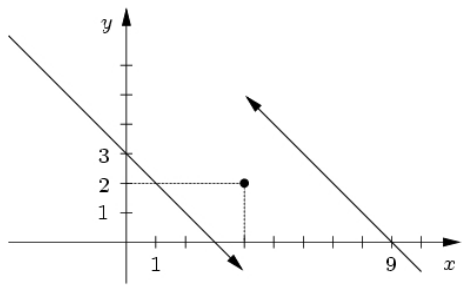
(b) $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x+2)(x-3)}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{\,-2\,;3\,\}$

$\lim\limits_{x\to (-2)^\pm} f(x) = \pm\infty, \quad \lim\limits_{x\to 3^\pm} f(x) = \pm\infty$

8. Abschnittsweise Darstellung:

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{für } x < 4 \\ 2 & \text{für } x = 4 \\ 9-x & \text{für } x > 4 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 4^-} = (-1)^+, \quad \lim\limits_{x\to 4^+} = (5)^-$



9. (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x\,\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\sin x + x\,\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin x}{2\,\cos x - x\,\sin x} = 0$

(c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{(x-\frac{\pi}{2})\cdot\sin x}{\cos x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x + (x-\frac{\pi}{2})\cdot\cos x}{-\sin x} = -1$

10. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\cdot\dfrac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = \left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^-, \quad \lim\limits_{x\to\left(\frac{3\pi}{4}\right)^\pm} f(x) = \pm\infty$

11. (a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2x}-2x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{2}-2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2x}-2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}-2} = \dfrac{1}{2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin 3x}{x^2+\sin 2x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-3\cos 3x}{2x+2\cos 2x} = \dfrac{1-3}{2} = -1$

1.1.4. Anwendungsaufgaben zu Grenzwerten

1. (a) $\lim_{f\to 0} A(f) = \frac{C}{f_0^2}$ System folgt exakt dem Erreger.

   $\lim_{f\to\infty} A(f) = 0$ System kommt nicht mehr mit.

   (b) $f_R = \sqrt{f_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$

   (c) f_R nimmt mit der Eigenfrequenz f_0 des Systems zu und mit dem Reibungsfaktor γ ab. Für kleine Reibungen gilt $f_R \approx f_0$.

1.1.5. Graphen, Polstellen, Asymptoten

1. $x^2 + 3$, da $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

2. $\left|\frac{1}{x-2}\right| = \frac{1}{|x-2|} < \varepsilon \quad , \quad x < 2 - \frac{1}{\varepsilon} \vee x > 2 + \frac{1}{\varepsilon} \quad , \quad x < -99\,998 \vee x > 100\,002$

1.1.6. Stetigkeit

1. (a) f ist an der Stelle $x = 3$ unstetig, obwohl der Grenzwert $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$ existiert.

   (b) f ist an der Stelle $x = 0$ unstetig (in jeder beliebigen Umgebung von 0 nimmt die Funktion den Wert 1 und den Wert -1 an).
   $x = 0$ ist jedoch keine Sprungstelle.

   (c) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(x)$, also ist f bei $x = 0$ stetig.
   $\lim_{x\to\pm 0} f'(x) = \pm 1$, also ist f bei $x = 0$ nicht differenzierbar.

   (d) $f'(0) = \lim_{x\to\pm 0} \sin\frac{1}{x}$ Dieser Grenzwert existiert nicht, also ist f bei $x = 0$ nicht differenzierbar. Trotzdem hat f an der Stelle x keine Knickstelle.

   (e) $f'(0) = \lim_{x\to\pm 0} \frac{f(x)-0}{x-0} \lim_{x\to\pm 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$,
   also ist f bei $x = 0$ differenzierbar.

   $$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

   Diese Funktion ist bei $x = 0$ unstetig.

   (f)

   $$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} + \frac{1}{2}, & \text{für} \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

   In jeder Umgebung von $x = 0$ gibt es Stellen $x = \frac{1}{2\pi\cdot n}$, an denen $\sin\frac{1}{x} = 0$ und $\cos\frac{1}{x} = 1$ und damit $f'(x) = -\frac{1}{2}$ ist.

2. (a) $s(12) = \lim\limits_{t\to 12} s(12) = 72$
   $s(35) = \lim\limits_{t\to 35} s(35) = 453{,}8$
   $s(38) = \lim\limits_{t\to 38} s(38) = 517{,}4$
   $s(t)$ ist für $0 \le t \le 60$ stetig.

   (b)

   (c)

$$s'(t) = \begin{cases} t, & \text{für } 0 \le t < 12 \\ 0{,}4(x+18) - 108 & \text{für } 12 \le t < 35 \\ 21{,}2 & \text{für } 35 \le t < 38 \\ -0{,}96(x-60) + 749{,}72 & \text{für } 38 \le t \le 60 \end{cases}$$

   $s'(12) = \lim\limits_{t\to 12} s'(12) = 12$
   $s'(35) = \lim\limits_{t\to 35} s'(35) = 21{,}2$
   $s'(38) = 21{,}12 \neq \lim\limits_{t\to 38} s'(38) = 21{,}2$

   (d)

   (e) Beschleunigte Bewegung im ersten und zweiten Zeitintervall, Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit im dritten Zeitintervall und Bremsen im vierten Zeitintervall. $s'(t)$ ist bei $t = 38$ unstetig. Man kann dies als kleinen Ruck beim Beginn des Abbremsens erklären.

   (f) $\overline{v} = 12{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

   Literatur: *Mathematikaufgaben, Anwendungen aus der modernen Technik und Arbeitswelt*, Werner Schmidt, Ernst Klett Verlag, 1984

3. (a) $\mathrm{N}_0(0|0)$, $\mathrm{N_n}\left(\frac{1}{n\pi}\middle|0\right)$, $n \in \mathbb{N}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} f(x) = 0$, d. h. $f(x)$ ist bei $x_0 = 0$ stetig.

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 0, \qquad f'_-(0) = \lim_{x\to 0-0} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0,$$

   d. h. $f(x)$ ist bei $x_0 = 0$ differenzierbar. Allerdings ist

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,x & \text{für } x \leqq 0 \\ 2\,x\,\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

   bei $x = 0$ nicht stetig.

1.2. Lokales Differenzieren

1.2.1. Numerische Differentiation

1. (c) $f'(3) = 1$, $f_{\mathrm{L}}(3) = 1{,}025$, $f_{\mathrm{R}}(3) = 0{,}975$, $f_{\mathrm{Z}}(3) = 1$

2.

$$
\begin{array}{llllllllllll}
\text{(a)} & f'(2) & = & 4 & , & f_{\mathrm{R}} & = & 4{,}01 & , & \delta_{\mathrm{R}} & = & 0{,}0025 \\
 & & & & & f_{\mathrm{L}} & = & 3{,}99 & , & \delta_{\mathrm{L}} & = & -0{,}0025 \\
 & & & & & f_{\mathrm{Z}} & = & 4{,}00 & , & \delta_{\mathrm{Z}} & = & 0 \\
\text{(b)} & f'\left(\frac{\pi}{3}\right) & = & 0{,}5 & , & f_{\mathrm{R}} & = & 0{,}4559 & , & \delta_{\mathrm{R}} & = & -0{,}0882 \\
 & & & & & f_{\mathrm{L}} & = & 0{,}5424 & , & \delta_{\mathrm{L}} & = & 0{,}0849 \\
 & & & & & f_{\mathrm{Z}} & = & 0{,}499167 & , & \delta_{\mathrm{Z}} & = & -0{,}00166 \\
\text{(c)} & f'\left(\frac{\pi}{3}\right) & = & 0{,}5 & , & f_{\mathrm{R}} & = & 0{,}4995669 & , & \delta_{\mathrm{R}} & = & -0{,}000866 \\
 & & & & & f_{\mathrm{L}} & = & 0{,}5004329 & , & \delta_{\mathrm{L}} & = & 0{,}000866 \\
 & & & & & f_{\mathrm{Z}} & = & 0{,}49999992 & , & \delta_{\mathrm{Z}} & = & -1{,}67 \cdot 10^{-7} \\
\text{(d)} & f'\left(\frac{\pi}{3}\right) & = & 0{,}5 & , & f_{\mathrm{R}} & = & 0{,}499995669 & , & \delta_{\mathrm{R}} & = & -8{,}66 \cdot 10^{-6} \\
 & & & & & f_{\mathrm{L}} & = & 0{,}50000433 & , & \delta_{\mathrm{L}} & = & 8{,}66 \cdot 10^{-6} \\
 & & & & & f_{\mathrm{Z}} & = & 0{,}499999999992 & , & \delta_{\mathrm{Z}} & = & -1{,}67 \cdot 10^{-11} \\
\text{(e)} & f'(1) & = & 1{,}386294361 & , & f_{\mathrm{R}} & = & 1{,}386342407 & , & \delta_{\mathrm{R}} & = & 3{,}47 \cdot 10^{-5} \\
 & & & & & f_{\mathrm{L}} & = & 1{,}386246317 & , & \delta_{\mathrm{L}} & = & -3{,}47 \cdot 10^{-5} \\
 & & & & & f_{\mathrm{Z}} & = & 1{,}386294362 & , & \delta_{\mathrm{Z}} & = & 8{,}00 \cdot 10^{-10} \\
\text{(f)} & f'(2) & = & -0{,}4068996821 & , & f_{\mathrm{R}} & = & -0{,}4070124656 & , & \delta_{\mathrm{R}} & = & 2{,}77 \cdot 10^{-4} \\
 & & & & & f_{\mathrm{L}} & = & -0{,}4067869006 & , & \delta_{\mathrm{L}} & = & -2{,}77 \cdot 10^{-4} \\
 & & & & & f_{\mathrm{Z}} & = & -0{,}4068996831 & , & \delta_{\mathrm{Z}} & = & 2{,}43 \cdot 10^{-9}
\end{array}
$$

(g) Wegen der beschränkten Genauigkeit des Rechners und der Differenz benachbarter Werte im Zähler!

3. exakt: $$f'\left(\frac{\pi}{18}\right) = -3 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = -1{,}5$$

Näherung: $$f'\left(\frac{\pi}{18}\right) \approx \frac{\cos\left[3 \cdot \left(\frac{\pi}{18} + 0{,}01\right)\right] - \cos\left[3 \cdot \left(\frac{\pi}{18} - 0{,}01\right)\right]}{2 \cdot 0{,}01} = -1{,}499775$$

$$\delta_{\mathrm{rel}} = -0{,}00015 = -0{,}015\,\%$$

4. exakt: $$f'\left(\frac{\pi}{30}\right) = -5 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = -2{,}5$$

Näherung: $$f'\left(\frac{\pi}{30}\right) \approx \frac{\cos\left[5 \cdot \left(\frac{\pi}{30} + 0{,}01\right)\right] - \cos\left[5 \cdot \left(\frac{\pi}{30} - 0{,}01\right)\right]}{2 \cdot 0{,}01} = -2{,}498958$$

$$\delta_{\mathrm{rel}} = -0{,}00042 = -0{,}042\,\%$$

5. $$f'(1) \approx \frac{f(1{,}001) - f(0{,}999)}{0{,}002} = 1{,}386$$

6. $$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx \frac{f\left(\frac{\pi}{6} + 0{,}001\right) - f\left(\frac{\pi}{6} - 0{,}001\right)}{0{,}002} = -3{,}4641$$

7. $$f'(0{,}6) \approx \frac{f(0{,}6+h) - f(0{,}6-h)}{2h} = \frac{2^{-0{,}6-h}\sin(0{,}6+h) - 2^{-0{,}6+h}\sin(0{,}6-h)}{2h}$$

Für h wählt man am besten „halbe Taschenrechnergenauigkeit“, bei einem zehnstelligen Rechner also $h = 10^{-5}$:

h	10^{-3}	10^{-5}	exakter Wert
$f'(x) \approx$	0,2863038586	0,2863037101	0,2863037101

1.3. Globales Differenzieren

1.3.1. Ableitungsfunktion

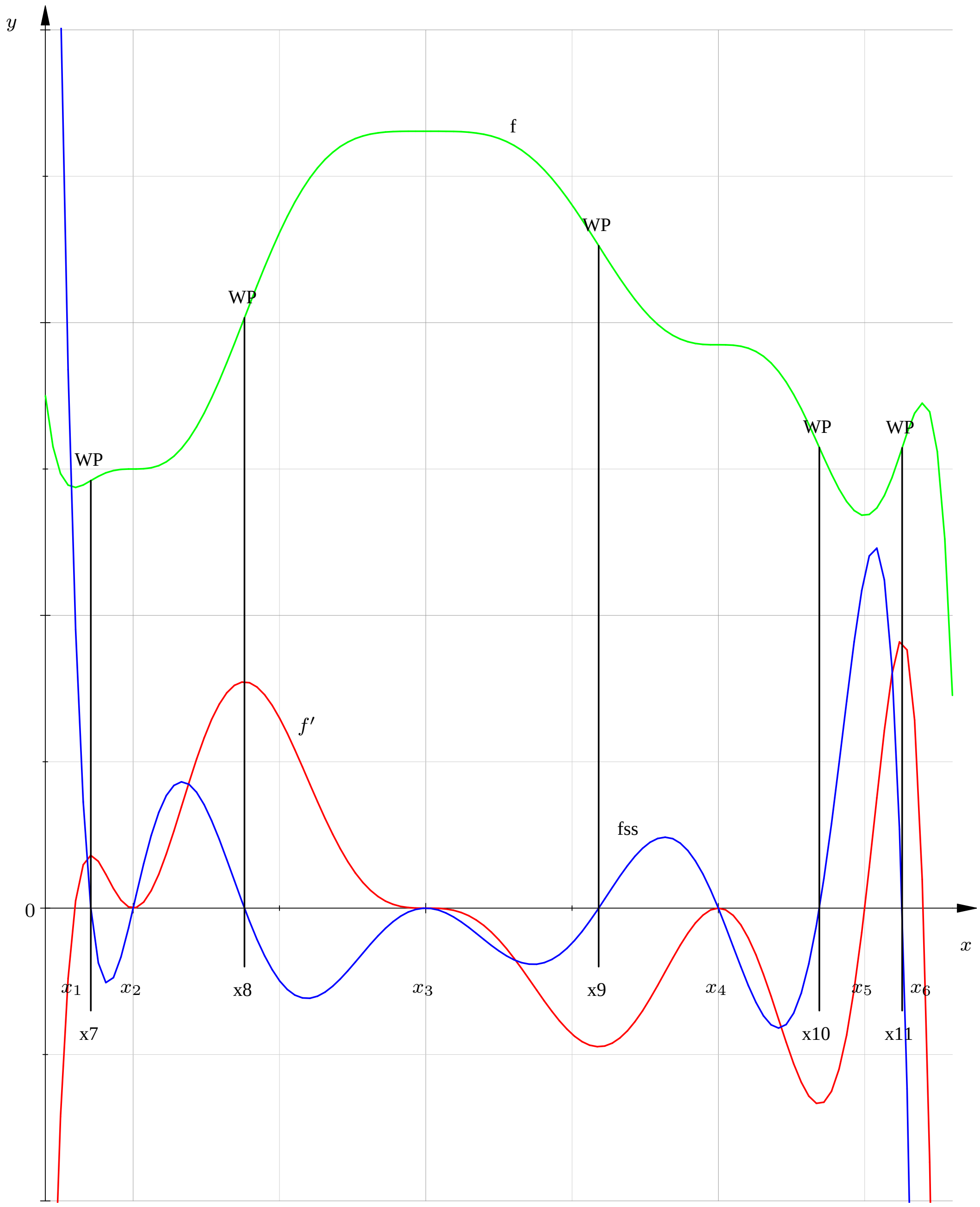
1. (a) $f'(x)$ ist die Geschwindigkeit des Körpers zur Zeit x.
   (b) $f'(x)$ ist die Beschleunigung des Körpers zur Zeit x.
   (c) $f(x) = x^3 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 3x^2$ (halbe Oberfläche). Vergrößert man x um Δx, dann kommt zu jeder Würfelfläche eine Schicht der Dicke $\frac{\Delta x}{2}$ dazu.
   (d) $f(x) = \frac{4\pi}{3}x^3 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 4\pi x^2$ (Oberfläche). Vergrößert man x um Δx, dann kommt eine Schicht der Dicke Δx dazu.
   (e) $A(x)$ sei die Querschnittsfläche des Körpers an der Stelle x (x-Achse senkrecht auf der Fläche). Vergrößert man x um Δx, wächst das Volumen um $\Delta f \approx A(x)\Delta x$ (umso genauer, je kleiner Δx ist):

   $$A(x) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad \Longrightarrow \quad A(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$$

   (f) $f'(x)$ ist die Änderungsrate der zur Zeit x lebenden Menschen, das ist die Differenz aus Geburtenrate und Sterberate.
   (g) $f'(x)$ ist die Stromstärke im Leiter.
   (h) Ist $F(x)$ die Kraft auf den Körper, dann ist die Arbeit bei der Bewegung um Δx durch $f(x) \approx F(x)\Delta x$ gegeben (umso genauer, je kleiner Δx ist):

   $$F(x) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$$

2.



3. Z. B.:

   (a) Wachstumsrate bei Geburt maximal; ein weiteres Maximum bei 12 Jahren (Mädchen) bzw. 14 Jahren (Jungen)
   Wachstumsrate nimm bis zum zweiten Lebensjahr um etwa 10cm/Jahr stark ab; danach fällt diese nur noch wenig in einer Größenordnung von etwa 0,5cm/Jahr
   Das Körperwachstum fällt bei Mädchen von 15 Jahren und bei Jugen von 17 Jahren

auf nur noch etwa 1cm/Jahr

(b)

(c) streng monoton fallen, da Wachstumsgraph immer positiv
Steigung des Wachstumsgraphen nimmt bis zu zwei Jahren stark und dann bis 9 Jahre nur noch wenig ab.
Steigung erreicht dann wieder ein Maximum bei 12 Jahren (Mädchen) bzw. 14 Jahren (Jungen)

4. (a) $WP(7,5|300)$

(b) $\approx \frac{300}{3{,}5} = 86$

(c) Bis zum Wendepunkt nimmt die Wachstumsgeschwindigkeit zu, danach wieder ab; am Wendepunkt ist also die Wachstumsgeschwindigkeit maximal

5. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; Extrema bei $X_1 = 1$ und $x_2 = 3$

6.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[(x+h)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right] \cdot \left[(x+h)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right]}{h \cdot \left[(x+h)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right]} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h \cdot \left[(x+h)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right]} = \lim_{h\to 0} \frac{3\,x^2\,h + 3\,x\,h^2 + h^3}{h \cdot \left[(x+h)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right]} = \\
&= \frac{3\,x^2}{2\,x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2}\,x^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

7. (a) $f'(x) = -1$

(b) $t(x) = -x + 3$

8. (a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

(b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{h\,x\,(x+h)} = -\dfrac{1}{x^2}$

9. $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{2(2+h)} = -\dfrac{1}{4}$

10. (a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

(b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-2xh - h^2}{h\,x^2\,(x+h)^2} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-(2x-h)}{x^2\,(x+h)^2} = -\frac{2}{x^3}$

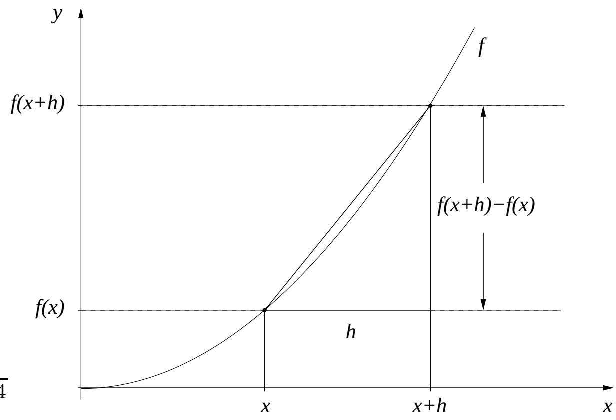
11.

(a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

(b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^3} - \frac{1}{x^3}}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{-3x^2h - 3xh^2 - h^3}{h\,x^3\,(x+h)^3} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{-(3x^2 + 3xh + h^2)}{x^3\,(x+h)^3} = -\frac{3}{x^4}$



12.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x+h})(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})} = \lim_{h\to 0} \frac{x - (x+h)}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})} = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{1\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x})} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

Mit $(x^n)' = nx^{n-1}$ und $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ folgt

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

1.3.2. ganzrationale Funktionen

1.3.3. Summenregel

1.3.4. Produktregel

1. ohne Produktregel: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^{n+m} = (n+m)\, x^{n+m-1}$

   mit Produktregel: $n\, x^{n-1}\, x^m + m\, x^n\, x^{m-1} = (n+m)\, x^{n+m-1}$

2. (a) $f_1'(x) = 2x + 5$

(b) $f_2'(x) = 6x - 1$
(c) $f_3'(x) = 40x - 33$
(d) $f_4'(x) = -24x - 23$
(e) $f_5'(x) = 54x - 174$
(f) $f_6'(x) = 3x^2 - 8x + 3$
(g) $f_7'(x) = 75x^2 + 266x + 40$
(h) $f_8'(x) = -108x^3 + 90x^2 + 26x$
(i) $f_9'(x) = 3x^2 - 8x + 3$

3. (a) $f'(x) = 50x + 30$
   (b) $g'(x) = 48x^3 + 48x$
   (c) $h'(x) = 144x^2 + 240x + 75$

1.3.5. Quotientenregel

1. $f'(x) = 2\,x - \dfrac{a}{x^2} \quad , \quad f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

   $\mathrm{P_a}\,(x_1|y_1)$ mit $y_1 = 3 \cdot \left(\dfrac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, Kurve der Minima: $y = 3 \cdot x^2$

1.3.6. Sinus- und Kosinusfunktion

1. $f'(x) = \dfrac{x\,\cos x - \sin x}{x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \tan x = x$

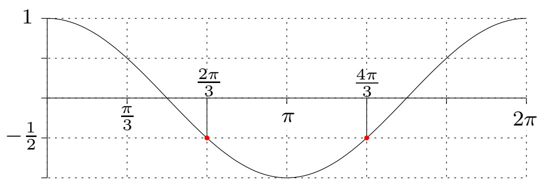
   Mit dem Newtonverfahren oder durch Probieren berechnet man die Koordinaten des Tiefpunktes: T(4,4934 | − 0,2172)

2. (a) $f'(x) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}\cos\left(\dfrac{\pi}{3} \cdot x\right)$

   $f'(x) = 0 \Longrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{3} \cdot x\right) = -\dfrac{1}{2}$

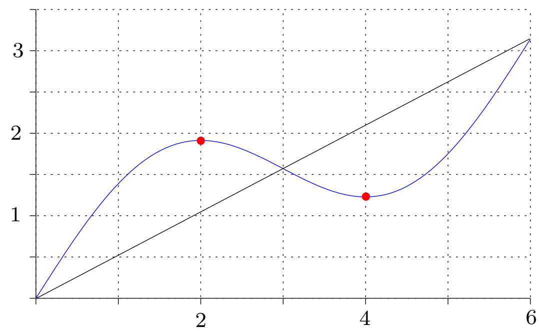
   $\dfrac{\pi}{3} \cdot x_1 = \dfrac{2\pi}{3} \Longrightarrow x_1 = 2$

   $\dfrac{\pi}{3} \cdot x_2 = \dfrac{4\pi}{3} \Longrightarrow x_2 = 4$



(b)

x	$f(x)$	$f(x)$
0	0	0
1	$\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}$	1,39
2	$\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}$	1,91
3	$\frac{1}{2}\pi$	1,57
4	$\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}$	1,23
5	$\frac{5}{6}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}$	1,75
6	π	3,14



3. (a) $f'(x) = 2x\cos(x^2)$
   (b) $g'(x) = 2\sin x \cos x (= \sin(2x))$
   (c) $h'(x) = 2x\cos x - x^2 \sin x = x\,(2\cos x - x\sin x)$

1.3.7. Wurzelfunktion

1. Minimum bei $(0|0)$, Maximum bei $(2|\frac{6}{7}\sqrt{2})$

2. (a) $f'\,g\,h + f\,g'\,h + f\,g\,h'$ (b) $x\,\sqrt{x} \cdot \left(\dfrac{5}{2}\,\sin x + x\,\cos x\right)$

   (c) $-\dfrac{2}{x^3}$

3. (a) $D_f = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{4\}$; die Nullstelle des Zählers ist $4 \notin D_f$, d.h. keine NS.

   (b) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{\sqrt{x}+2} = \dfrac{1}{4}$

   $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}+2} = 0^+$; $f(0) = \frac{1}{2}$

   (c) Zuerst $f(x)$ umformen: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$

   $f'(x) = -\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+2)^2} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2}$

   oder direkt:

$$f'(x) = \frac{(x-4)\frac{1}{2\sqrt{x}} - (\sqrt{x}-2)}{(x-4)^2} = -\frac{x-4\sqrt{x}+4}{2\sqrt{x}(x-4)^2} =$$
$$= -\frac{(\sqrt{x}-2)^2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^2(\sqrt{x}+2)^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2}$$

   $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\infty$

4. (a) $f(x) = |x|^{\frac{1}{3}}$ ist überall stetig. $f'(x) = \dfrac{2 \cdot \operatorname{sgn}(x)}{3 \cdot \sqrt[3]{|x|}}$

$\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} f'(x) = \pm\infty$, d.h. f bei $x = 0$ nicht differenzierbar.

(b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x\sqrt{x} & \text{für } x \geqq 0 \end{cases}$, $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{3}{2}\sqrt{x} & \text{für } x \geqq 0 \end{cases}$

f stetig und differenzierbar in $\mathbb{R}$ ($f'(0) = 0$).

(c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leqq 0 \\ x^{\frac{2}{3}} & \text{für } x > 0 \end{cases}$, $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \dfrac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}} & \text{für } x > 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} f(x) = f(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^{-}} f'(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^{+}} f'(x) = +\infty$

f stetig aber nicht differenzierbar bei $x = 0$.

1.3.8. Kettenregel

1. $v(t) = A\omega \cos \omega t$, $\quad a(t) = -A\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 \cdot x(t)$

2. (a) $f'(x) = -\sin 2\,x - \cos \dfrac{x}{7}$ (b) $f'(x) = 2\,\cos 6\,x + 2\,\sin \dfrac{2x}{3}$

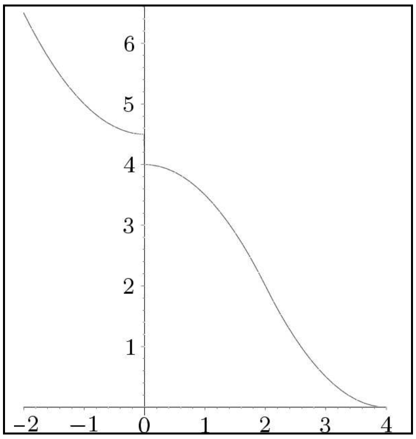
3. (a) $f'(x) = 2x \cdot \cos(x^2)$
   (b) $f'(x) = -3x^2 \cdot \sin(x^3)$
   (c) $f'(x) = 4x^3 \cdot \dfrac{1}{\cos^2(x^4)}$
   (d) $f'(x) = (2x + 2)\cos(x^2 + 2x + 2)$
   (e) $f'(x) = -(4x^3 + 6x + 1)\sin(x^4 + 3x^2 + x)$
   (f) $f'(x) = (5x^4 + 6x^2 + 3)\dfrac{1}{\cos^2(x^5 + 2x^3 + 3x)}$
   (g) $f'(x) = -\sin(x) \cdot \cos(\cos(x))$
   (h) $f'(x) = -\cos(x) \cdot \sin(\sin(x))$
   (i) $f'(x) = -\dfrac{\sin(\tan(x))}{\cos^2(x)}$
   (j) $f'(x) = -\dfrac{\sin(x)}{\cos^2(\cos(x))}$
   (k) $f'(x) = \dfrac{\cos(\tan(x))}{\cos^2(x)}$
   (l) $f'(x) = \dfrac{\cos(x)}{\cos^2(\sin(x))}$

1.3.9. Betrag im Funktionsterm

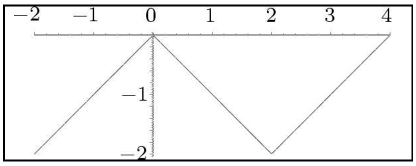
1. (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 4{,}5 & \text{für } x < 0 \\ -\frac{x^2}{2} + 4 & \text{für } 0 < x \leqq 2 \\ \frac{x^2}{2} - 4\,x + 8 & \text{für } x > 2 \end{cases}$

   (b) Nicht stetig bei $x = 0$, stetig und differenzierbar bei $x = 2$.

   (c)



   (d)



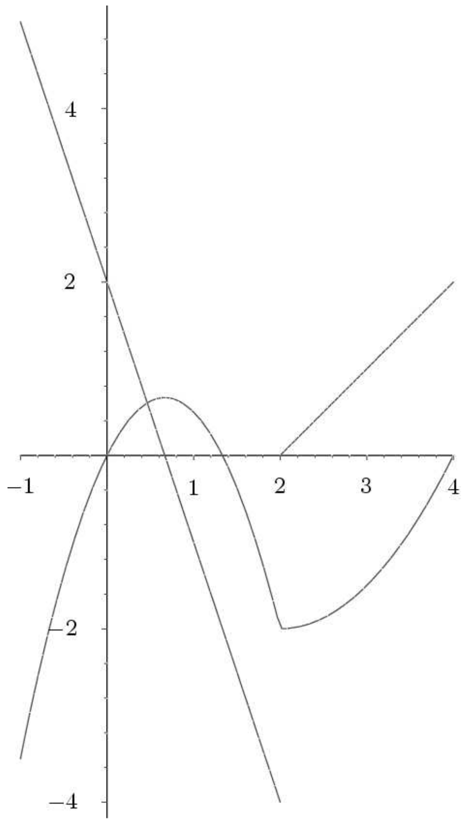
$$f'(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 0 \\ -x & \text{für } 0 < x \leqq 2 \\ x - 4 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

2. (a) $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x^2 + 2\,x & \text{für } x \leqq 2 \\ \frac{x^2}{2} - 2\,x & \text{für } x > 2 \end{cases}$

   (b) Stetig in $\mathbb{R}$, nicht differenzierbar bei $x = 2$.

$$f'(x) = \begin{cases} -3\,x + 2 & \text{für } x < 2 \\ x - 2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

   (c)



3. (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,(x^2+x-2) & \text{für } x \geqq 1,\ x \neq 2 \\ -\frac{1}{2}\,(x^2+x-2) & \text{für } x < 1 \end{cases}$

f stetig bei $x=1$, stetig fortsetzbar bei $x=2$: $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq 2 \\ 2 & \text{für } x = 2 \end{cases}$

(b) $f'(x) = \begin{cases} x+\frac{1}{2} & \text{für } x > 1,\ x \neq 2 \\ -x-\frac{1}{2} & \text{für } x < 1 \end{cases}$, $\quad f'_+(1) = \frac{3}{2}$, $f'_-(1) = -\frac{3}{2}$

f nicht differenzierbar bei $x=1$ (bei $x=2$ nicht def. und damit auch nicht differenzierbar).

$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$, waagrechte Tangente bei $(-0{,}5\,|\,1{,}125)$

(c) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,(x^2+x-2) & \text{für } x \leqq 1 \text{ und } x > 2 \\ -\frac{1}{2}\,(x^2+x-2) & \text{für } 1 < x < 2 \end{cases}$

g stetig bei $x=1$, nicht stetig bei $x=2$ (Sprung).

$g'(x) = \begin{cases} x+\frac{1}{2} & \text{für } x < 1 \text{ und } x > 2 \\ -x-\frac{1}{2} & \text{für } 1 < x < 2 \end{cases}$, $\quad g'_+(1) = -\frac{3}{2}$, $g'_-(1) = \frac{3}{2}$

g nicht differenzierbar bei $x=1$ (bei $x=2$ nicht def. und damit auch nicht differenzierbar).

$g'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$, waagrechte Tangente bei $(-0{,}5\,|\,-1{,}125)$

4. (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $\quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 - x - 2) & \text{für } x < -1,\ x \neq -2 \\ -\frac{1}{2}(x^2 - x - 2) & \text{für } x \geqq -1 \end{cases}$

   f stetig bei $x = -1$, stetig fortsetzbar bei $x = -2$: $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq -2 \\ 2 & \text{für } x = -2 \end{cases}$

   (b) $f'(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2} & \text{für } x < -1,\ x \neq -2 \\ -x + \frac{1}{2} & \text{für } x > -1 \end{cases}$, $\quad f'_+(-1) = \frac{3}{2}$, $f'_-(-1) = -\frac{3}{2}$

   f nicht differenzierbar bei $x = -1$ (bei $x = -2$ nicht def. und damit auch nicht differenzierbar).

   $f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$, waagrechte Tangente bei $(0{,}5\,|\,1{,}125)$

   (c) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $\quad g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x^2 - x - 2) & \text{für } x \geqq -1 \text{ und } x < -2 \\ \frac{1}{2}(x^2 - x - 2) & \text{für } -2 < x < -1 \end{cases}$

   g stetig bei $x = -1$, nicht stetig bei $x = -2$ (Sprung).

   $g'(x) = \begin{cases} -x + \frac{1}{2} & \text{für } x > 1 \text{ und } x < -2 \\ x - \frac{1}{2} & \text{für } -2 < x < -1 \end{cases}$, $\quad g'_+(-1) = \frac{3}{2}$, $g'_-(-1) = -\frac{3}{2}$

   g nicht differenzierbar bei $x = -1$ (bei $x = -2$ nicht def. und damit auch nicht differenzierbar).

   $g'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$, waagrechte Tangente bei $(0{,}5\,|\,1{,}125)$

1.3.10. vermischte Aufgaben

1. (a) $f'(x) = a$ (b) $f'(x) = 2\,a\,x + b - \dfrac{d}{x^2}$

2. (a) $f'(x) = -0{,}6\,x + 1{,}5$; $\quad f'(x) = 0 \quad$ für $\quad x = 2{,}5$

   (b) $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$; $\quad f'(x) = 0 \quad$ für $\quad x = \pm 2$

   (c) $f'(x) = -\dfrac{1}{8\,x^2} - x$; $\quad f'(x) = 0 \quad$ für $\quad x = -\frac{1}{2}$

3. (a) $f'(x) = n\,a\,x^{n-1} - m\,b\,x^{m-1} - \dfrac{c}{x^2} - \dfrac{d}{2\sqrt{x}}$

   (b) $f'(x) = x^{n-1} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

4. (a) $f'(x) = \left(x^3 + x^{-3} + x^{\frac{1}{3}}\right)' = 3x^2 - 3x^{-4} + \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = 3x^2 - \dfrac{3}{x^4} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

   (b) $g'(x) = 3x^2 \sin^2 x + 2x^3 \sin x \cos x$

   (c) $h'(x) = \dfrac{x + 1 - x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

   (d) $k'(x) = \dfrac{3x^2 \cos\left(x^3\right)}{2\sqrt{\sin\left(x^3\right)}}$

(e) $r'(x) = \dfrac{3\sin^2 x \cos x}{2\sqrt{\sin^3 x}} = \dfrac{3}{2}\cos x\sqrt{\sin x}$

(f) $s'(x) = 3\sin^2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3\sin^2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

5. (a) $-999\,x^{-1000}$ (b) $-\dfrac{3}{(x-3)^2}$ (c) $\dfrac{2\,x^2-10\,x+5}{(2\,x-5)^2}$

(d) $\dfrac{x^2+6\,x+7}{(7-x^2)^2}$ (e) $(x-2)'=1$ (f) $\dfrac{2\,x\,\cos x - \sin x}{2\,x\,\sqrt{x}}$

(g) $\dfrac{x\,\sin x\left(3\,x-\frac{5}{2}\sqrt{x}\right)+x^2\,(x-\sqrt{x})\cos x}{(x-\sqrt{x})^2}$ (h) $\dfrac{2\,(-5\,x^3+x^2+5)}{x^{11}}$

(i) $\dfrac{x-\sin 2x}{x^3\,\cos^2 x}$

6. $f'(x) = \dfrac{x\,\cos x - \sin x}{x^2} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \tan x = x$

Mit dem Newtonverfahren oder durch Probieren berechnet man die Koordinaten des Tiefpunktes: T(4,4934 | − 0,2172)

7. (a) $f'(x) = -\dfrac{6}{x^3}$

(b) $g'(x) = \dfrac{9}{2}\sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

(c) $h'(x) = -\dfrac{20}{x^5} - \dfrac{30}{x^6}$

8. $g'(x) = \sin\dfrac{1}{x} + x\cos\dfrac{1}{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$

$x = \dfrac{1}{u} \quad\Longrightarrow\quad \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u} = 1$

9. (a) $f_1'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$

(b) $f_2'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

(c) $f_3'(x) = \dfrac{-1+\sin x + x\sin x + \cos x - x\cos x}{(\sin x - x)^2}$

(d) $f_4'(x) = \dfrac{-x^3+2x^2+x+8}{\sqrt{x^2+4}\cdot(1-x^2)}$

10. (a) $h'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{x}} + 5x^4$

(b) $l'(x) = -\dfrac{4x}{(2x^2+1)^2}$

(c) $k'(x) = 45x^4 + 12x^2$

11. $g'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x - \frac{x\sin x + \cos x}{x^2}$

12. (a)
$$f'(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{für} \quad x > 0 \\ -\cos(-x) & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0+0} f'(x) = 1 \neq \lim\limits_{x\to 0-0} f'(x) = -1$, also bei $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

(b)
$$f'(x) = \begin{cases} x\cos(x) + \sin(x) & \text{für} \quad 2k\pi < x < (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \\ -x\cos(-x) - \sin(x) & \text{für} \quad (2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$\Rightarrow$ bei $x_0 = 0$ differenzierbar, bei $x_n = n\pi$ nicht differenzierbar.

(c)
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+4x-4}{(x^2-x-2)^2} & \text{für} \quad x > 0 \\ \frac{x^2+4x}{(x^2-x-2)^2} & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0+0} f'(x) = -1 \neq \lim\limits_{x\to 0-0} f'(x) = 0$; bei $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

(d)
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{für} \quad x > 0 \\ \frac{1}{(-x+1)^2} & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0+0} = 1 = \lim\limits_{x\to 0-0} = 1$; bei $x_0 = 0$ differenzierbar.

13. (a) $f'(x) = x^2\cos x + 2x\sin x$

(b) $g'(x) = 2x^2\cos 2x + 2x\cos 2x + 2x\sin 2x + \sin 2x$

(c) $\begin{aligned} h'(x) = {} & 2x^2\cos 2x + 8x\cos 2x + 8\cos 2x \\ & +2x\sin 2x + 4\sin 2x \end{aligned}$

(d) $l'(x) = 4x^3\cos(x^2) - 2x^5\sin(x^2)$

(e) $m'(x) = 3x^2\cos 3x - 3x^3\sin 3x - 9\sin 3x$

(f) $\begin{aligned} n'(x) = {} & 4x^3\cos 3x + 8x\cos 3x \\ & -3x^4\sin 3x - 12x^2\sin 3x - 12\sin 3x \end{aligned}$

(g) $p'(x) = 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$

(h) $q'(x) = 2\sin x\cos^2 x - \sin^3 x$

(i) $r'(x) = 2\sin x\cos^3 x - 2\sin^3 x\cos x = \frac{1}{2}\,\sin 4x$

14. (a) $f_1'(x) = 24 \cdot (2x+3)^3(4x^2-6)^6(6x^2+7x-2)$

(b) $f_2'(x) = 4 \cdot (2x^4 - 3)^4 (3x - 4x^5)^3 (-80x^8 + 96x^4 - 9)$

(c) $f_3'(x) = \dfrac{(3x+2)^3(15x^2 + 2x + 12)}{\sqrt{1+x^2}}$

(d) $f_4'(x) = \dfrac{(x+2)\,(5x+6)}{2\sqrt{x+1}}$

(e) $f_5'(x) = \dfrac{(x^3-1)^2(20x^4 + 19x^3 + 18x^2 - 2x - 1)}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

(f) $f_6'(x) = -\dfrac{2}{(x-2)^2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$

(g) $f_7'(x) = -\dfrac{x\sqrt{x^2-2}}{(x^2-2)^2}$

(h) $f_8'(x) = \dfrac{-x^3 - 2x^2 + 6x + 4}{2\sqrt{1+x}(x^2+2)^2} = \dfrac{(2-x)(x^2+4\,x+2)}{2\sqrt{1+x}(x^2+2)^2}$

(i) $f_9'(x) = \dfrac{x^2\,(-9x^3 + 6x^2 + 28x - 24)}{(3x^2-4)^2\sqrt{1-x}}$

15. (b) $\dfrac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}}$ (c) $\dfrac{101}{100}\ \sqrt[100]{x}$ (d) $\dfrac{2}{3}\,(x-1)^{-\frac{1}{3}}$

(e) $\dfrac{\cos x}{3\,\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ (f) $\dfrac{-1}{3\,\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}}$ (g) $\dfrac{3\,x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$

(h) $\dfrac{3\,\cos x}{4\,\sqrt[4]{\sin x}}$ (i) $\dfrac{2\,\cos x}{5\,\sqrt[5]{\sin^3 x}}$ (j) $\dfrac{9\,\sqrt{x}\,\cos x^{\frac{3}{2}}}{10\,\sqrt[5]{\sin^2 x^{\frac{3}{2}}}}$

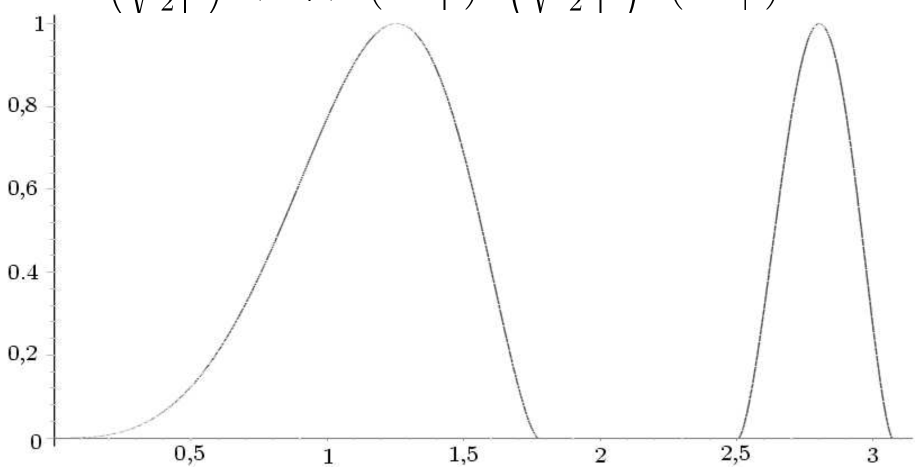
16. (a) Nullstellen: $0,\ \sqrt{\pi},\ \sqrt{2\pi},\ \sqrt{3\pi}$

$D_f = [0\,;\ \sqrt{\pi}] \cup [\sqrt{2\pi}\,;\ \sqrt{3\pi}] \approx [0\,;\ 1{,}77] \cup [2{,}51\,;\ 3{,}07]$

(b) $f'(x) = 3\,x\cos\left(x^2\right) \cdot \sqrt{\sin\left(x^2\right)}$

$(\,0\,|\,0\,)$, $\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\middle|\,1\right)$, $\left(\sqrt{\pi}\,\middle|\,0\right)$, $\left(\sqrt{2\pi}\,\middle|\,0\right)$, $\left(\sqrt{\dfrac{5\pi}{2}}\,\middle|\,1\right)$, $\left(\sqrt{3\pi}\,\middle|\,0\right)$

(c)



17. $\dfrac{x - \sin x \cos x}{x^2\, \cos^2 x}$

18. $-\dfrac{x + \sin x \cos x}{x^2\, \sin^2 x}$

19. $f'(x) = \dfrac{-\sin(x^2)\cdot 2x + 2\sin(3x)\cos(3x)\cdot 3}{2\sqrt{\cos(x^2)+\sin^2(3x)}} = \dfrac{-2x\sin(x^2) + 3\sin(6x)}{2\sqrt{\cos(x^2)+\sin^2(3x)}}$

20. $1 + 2\,x\cdot e^{x^2}$, $-e^{-x} + \cos x$, $5\cdot\frac{\cos x\cdot e^{\sqrt{\sin x}}}{2\cdot\sqrt{\sin x}}$, $2\,x\cdot\cos\left(x^2\right)\cdot e^{\sin\left(x^2\right)}$,

    $e^{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}}}{2}$, $e^{x\,\sin x} + x\,e^{x\,\sin x}\cdot(x\,\cos x + \sin x)$, $\frac{\ln 2\cdot 2^{\ln x}}{x}$, $\frac{x}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{\ln x}{2}\right)$.

21. $-\frac{1}{2\,x}$, $\tan x$, $-1 + 2\,x - \ln x$, $\frac{\cot\sqrt{x}}{2\,\sqrt{x}}$.

22. (a) $[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x) = 1 \quad\Longrightarrow\quad g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$

    (b) $(\arccos x)' = \dfrac{1}{-\sin(\arccos x)} = \dfrac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

    (c) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad\Longrightarrow$

    $$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \quad\Longrightarrow\quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

    $$(\arctan x)' = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

1.4. Begriff der Stammfunktion

1. (a) $f(x) = 2x^3 - 10x + c \Rightarrow f(2) = -4 + c = 3 \Rightarrow c = 7 = f(0)$

   (b) $f(x) = 4x^3 - x^2 + 10x + c \Rightarrow f(3) = 129 + c = 10$
   $\Rightarrow c = -119 = f(0)$

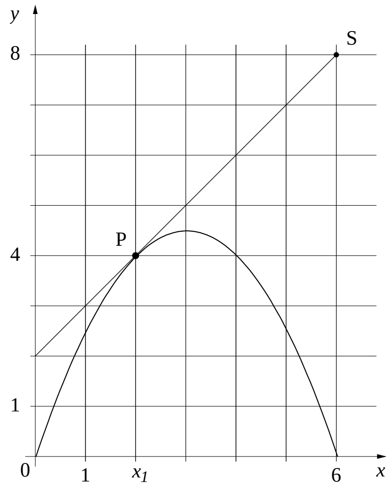
   (c) $f(x) = x^3 + 2x^2 + c \Rightarrow f(4) = 96 + c = 4 \Rightarrow c = -92 = f(0)$

   (d) $f(x) = 5x^3 - 3x^2 - 7x + c \Rightarrow f(1) = -5 + c = 1 \Rightarrow c = 6 = f(0)$

2. Anwendungen der ersten Ableitung

2.1. Tangente, Normale, Schnittwinkel

1.
$$\begin{aligned}
\frac{8-f(x_1)}{6-x_1} &= f'(x_1) = -x_1+3 \\
8-f(x_1) &= (6-x_1)(-x_1+3) \\
8+\frac{x_1^2}{2}-3x_1 &= 18-9x_1+x_1^2 \\
\frac{x_1^2}{2}-6x_1 &= -10 \\
x_1^2-2\cdot 6x_1+6^2 &= 36-20=16 \\
x_1 &= 6\pm 4
\end{aligned}$$



$x_1=2$ (bei $x_1=10$ zeigen die Rückstrahler zum Schloss), also P $(2|4)$.

2. (a)

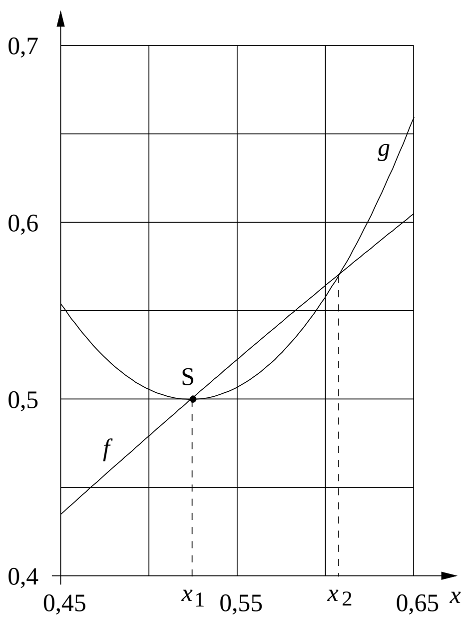
x	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65
f	0,435	0,479	0,525	0,565	0,605
g	0,554	0,506	0,507	0,558	0,660

Scheitel von g: S $\left(\frac{\pi}{6}\middle|\frac{1}{2}\right)$

(b) Mit $x_1=\frac{\pi}{6}$ und $f'(x)=\cos x$ folgt

$f(x_1)=\frac{1}{2}$ und $f'(x_1)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\begin{aligned}
t(x) &= f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1) = \\
&= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x+\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{12}
\end{aligned}$$



(c) Aus $g(x)=t(x)$ folgt

$$10\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \quad\Longrightarrow\quad 10\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$10\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = x_2^* = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{20} = 0{,}61020$$

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{x_2^* - x_2}{x_2} = 0{,}364\%$$

3. (a) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$

   $t(x) = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a^2}(x-a) = \dfrac{2}{a} - \dfrac{x}{a^2}$

   Schnittpunkte mit den Achsen: $\left(0\middle|\frac{2}{a}\right)$ und $(2a|0)$

   (b) a durch $\frac{1}{a}$ in $t(x)$ ersetzen:

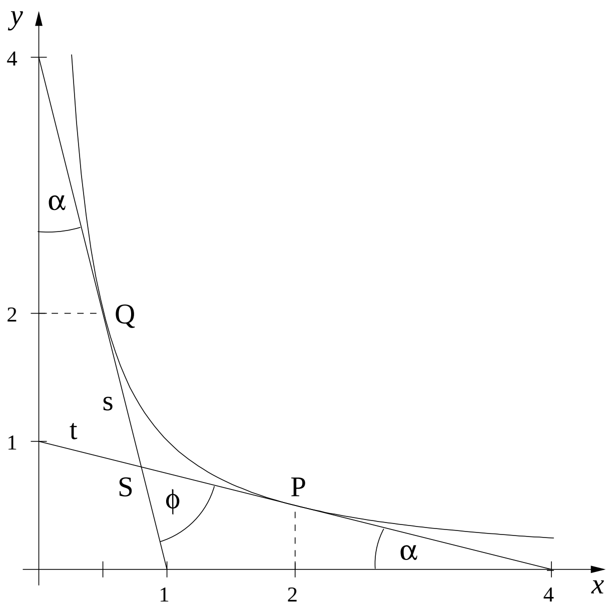
   $s(x) = 2a - a^2 x$

   Schnittpunkte mit den Achsen: $(0|2a)$ und $\left(\frac{2}{a}\middle|0\right)$

   $t(x_\text{s}) = s(x_\text{s}) \quad \Longrightarrow \quad x_\text{s} = 2\,\dfrac{a - \frac{1}{a}}{a^2 - \frac{1}{a^2}} = \dfrac{2a}{1+a^2}$

   $y_\text{s} = 2a - a^2 x_\text{s} = \dfrac{2a}{1+a^2} = x_\text{s}$

   (c) $\tan\alpha = \dfrac{\frac{2}{a}}{2a} = \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \approx 14^\circ \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 90^\circ - 2\alpha \approx 62^\circ$



4. (a) $f'(x) = x + 1, \quad g'(x) = -\dfrac{5}{x^2}.$

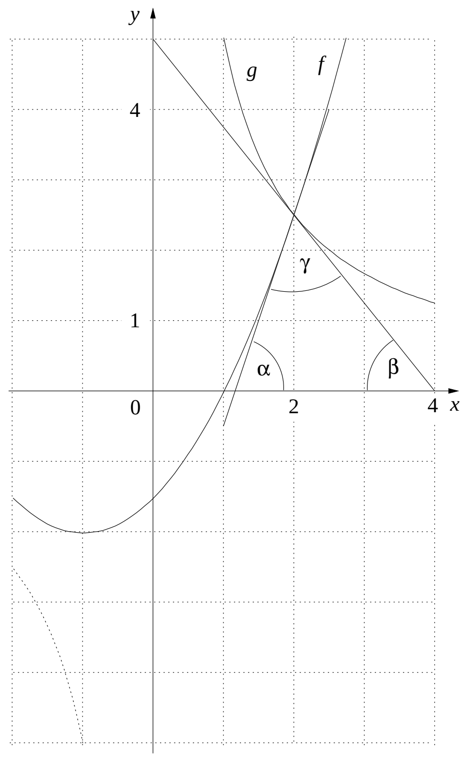
   (b) $f'(x_\text{s}) = x_\text{s} + 1 = 0, \quad x_\text{s} = -1, \quad y_\text{s} = f(x_\text{s}) = -2, \quad f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$

(c)

x	-1	0	1	2	3	4
f	-2	$-1{,}5$	0	$2{,}5$	6	$10{,}5$
g	-5	–	5	$2{,}5$	$1{,}67$	$1{,}25$

x	$-0{,}5$	$0{,}5$	$1{,}5$	$2{,}5$
f	$-1{,}875$	$-0{,}875$	$1{,}125$	$4{,}125$
g	-10	10	$3{,}33$	2

Schnittpunkt: S $(2|2{,}5)$



(d) $g'(2) = -\frac{5}{4}$, $\quad t(x) = -\frac{5}{4}x + b$

S $\in t:\quad t(2) = g(2) = \frac{5}{2} = -\frac{5}{4} \cdot 2 + b$

$\Longrightarrow \quad b = 5, \quad t(x) = -\frac{5}{4}x + 5$

Schnittp. mit Achsen: $(0|5)$ und $(4|0)$

(e) $\tan\beta = |g'(2)| = 1{,}25, \quad \beta = 51{,}34°$

$\tan\alpha = f'(2) = 3, \quad \alpha = 71{,}57°$

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 57{,}1°$

5. $t(x) = 2\,a\,x - a^2, \quad n(x) = -\dfrac{1}{2\,a} \cdot x + a^2 + \dfrac{1}{2}$

   NS von t: $x_{0,t} = \dfrac{a}{2}$, $\quad$ NS von n: $x_{0,n} = 2\,a^3 + a$

   Konstruktion der Tangente: A $(a|f(a))$ mit NS $\left(\frac{a}{2}\middle|0\right)$ verbinden.

6. $t(x) = 2\,a\,x - a^2, \quad n(x) = -\dfrac{1}{2\,a} \cdot x + a^2 + \dfrac{1}{2}$

   P $\left(p|p^2\right)$ mit $p = -a - \dfrac{1}{2\,a}$, $\quad h(x) = 2\,p\,x - p^2, \quad$ S $\left(-\dfrac{1}{4\,a}\middle| -\dfrac{1}{2} - a^2\right)$

   Kurve der Schnittpunkte S: $\quad y(x) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{16\,x^2}$

7. $t(x) = 2\,a\,x - a^2, \quad n(x) = \dfrac{1}{2\,a} \cdot x + a^2 + \dfrac{1}{2}$

a	0	0,1	0,3	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,5	2,0	3,0
x_s	0	-0,11	-0,64	-1,82	3,33	2,16	1,83	1,70	1,66	1,875	2,27	3,17
y_s	0	-0,03	-0,47	-1,62	3,63	2,53	2,28	2,26	2,33	3,375	5,07	10,03

8. $\tan(90° - \alpha) = -\tan(\alpha - 90°) = -\dfrac{\sin(\alpha - 90°)}{\cos(\alpha - 90°)} = -\dfrac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

Steigung von g: $\quad m = \tan\gamma = \tan(90^\circ - 2\varphi) = \dfrac{1}{\tan 2\varphi} = \dfrac{1-\tan^2\varphi}{2\,\tan\varphi}$

$\tan\varphi = \tan(90^\circ - \tau) = \dfrac{1}{\tan\tau} = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{2ba} \quad \Longrightarrow \quad m = ba - \dfrac{1}{4ba}$

Aus $g(x) = m\,x + p$ und $A \in g$ folgt

$$g(a) = \left(ba - \frac{1}{4ba}\right)a + p = ba^2 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{1}{4b}$$

Da p nicht von a abhängt, geht jeder zur y-Achse parallel einfallende Strahl durch P.

9. $f'(x) = 4\,x - 4 \quad . \quad g'(x) = -x + 2 \quad , \quad f(x) = g(x) \quad \Longrightarrow$

   $x_1 = \dfrac{6}{5} - \dfrac{2}{5}\sqrt{19} \approx -0{,}54 \quad x_2 = \dfrac{6}{5} + \dfrac{2}{5}\sqrt{19} \approx 2{,}94$

   $\varphi_1 = 30{,}66^\circ \quad , \quad \varphi_2 = 53{,}99^\circ$

10. Schnittpunkt: S $(4|4)$. Schnittwinkel: $\varphi = 71{,}565^\circ$

11. (a) Steigung der Tangente: $m = \dfrac{f(a)}{\Delta x} = f'(a) = f(a)$, d.h. $\Delta x = 1$

    Die Tangente geht durch den Punkt Q $(a-1|0)$

    (b) $f(x) = f'(x) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 2$ und $x_2 = -2$

    $P_1\,(2|6)$, $P_2\,(-2|-2)$

    $t_1(x) = 6\,x - 6 \quad , \quad t_2(x) = -2\,x - 6 \quad , \quad$ S $(0|-6)$

12. (a) Kreis um $(0|0)$ mit Radius 5.

    (b) $f_1(x) = \sqrt{25-x^2}$, $f_2(x) = -\sqrt{25-x^2}$

    (c) $f'_{1;2} = -\frac{x}{y}$

    (d) $t_{1;2} = \frac{25 - x_0 x}{y_0}$

    (e) $n_{1;2} = \frac{y_0}{x_0}x$

    (f) Schnittpunkt $(0|0)$ = Mittelpunkt des Kreises

13. (a) $O(rt|2r)$

    (b) $v_x = r(1-\cos t)$, $v_y = r\sin t$, $v = \sqrt{2ry}$

    (c) $\phi = 90^\circ - \frac{t}{2}$

    $$\tan(\phi) = m = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{t}{2}} = \tan(90^\circ - \frac{t}{2})$$

    (d) $T(x) = r(1-\cos t) + \tan(90^\circ - \frac{t}{2})(x - r(t - \sin t))$

(e) $x = rt$ in $t(x)$ einsetzten liefert die Behauptung.

(f) $m^* = -\tan\frac{t}{2} = -\frac{1}{m}$

(g) T^* geht aus $T(x)$ durch die Substitution $t \to t + \pi$ hervor. Setzt man nun in $T^*(x)$ $x = rt - \pi$ ein erhält man natürlich den gleichen Wert, wie wenn man in $T(x)$ direkt rt einsetzt. Dies hat aber gerade den obersten Punkt des Kreises geliefert.

14. Waagrechte Tangenten bei $x_{1n} = 2\,\pi \cdot \left(n + \dfrac{1}{3}\right)$ und $x_{2n} = 2\,\pi \cdot \left(n + \dfrac{2}{3}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. $t(x) = -\dfrac{x}{2} + \pi$. t schneidet die x-Achse bei $2\,\pi$.

15. Die Gleichung der Normale:

$$n_a : \begin{cases} y = n_a(x) = \dfrac{x}{\sin a} + \cos a - \dfrac{a}{\sin a} & \text{für} \quad a \neq k\cdot\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \qquad x = a & \text{für} \quad a = k\cdot\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$g(a) = x_a = a - \frac{1}{2}\,\sin 2\,a \quad \text{(gilt auch für } a = k\,\pi)$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}a} = 1 - \cos 2\,a \quad \Longrightarrow \quad \text{waagrechte Tangenten bei } a = k\,\pi.$$

Steigung maximal, wenn $\cos 2\,a$ minimal, d.h. für $a = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$.

$$g'\left(\frac{\pi}{2} + k\,\pi\right) = 2$$

16. (a) $t_0(x) = 20(x - 10) + 100$

(b) $S_1(5|0)$

(c) $t_1(x) = 10(x - 5) + 25$, $S_2(2\frac{1}{2}|0)$

(d) $t_2(x) = 5(x - 2\frac{1}{2}) + 6\frac{1}{4}$, $S_3(1\frac{1}{4}|0)$
$t_3(x) = 2\frac{1}{2}(x - 1\frac{1}{4}) + 1\frac{9}{16}$, $S_4(\frac{5}{8}|0)$
$t_4(x) = 1\frac{1}{4}(x - \frac{5}{8}) + \frac{25}{64}$, $S_5(\frac{5}{16}|0)$

17. (a) $t_n(x) = 2x_n(x - x_n) + x_n^2$

(b) $S_{n+1}(\frac{1}{2}x_n|0)$

(c) $x_0 = 10$, $x_1 = 5$, $x_2 = 2\frac{1}{2}$, $x_3 = 1\frac{1}{4}$, $x_4 = \frac{5}{8}$, $x_5 = \frac{5}{16}$, $x_6 = \frac{5}{32}$, $x_7 = \frac{5}{64}$, $x_8 = \frac{5}{128}$ und $x_9 = \frac{5}{256}$

(d) Es gilt allgemein $x_n = \frac{x_0}{2^n}$.
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_0}{2^n} = 0$

18. (a) $t_n(x) = (2x_n - 4)(x - x_n) + y_n = 2(x_n - 2)(x - x_n) + (x_n - 2)^2$

(b) $t_n(x_{n+1}) = 0 = (2x_n - 4)(x_{n+1} - x_n) + (x_n - 2)^2$
$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n - 2) = 1 + \frac{1}{2}x_n$
$\Rightarrow S_{n+1}(1 + \frac{1}{2}x_n|0)$

(c) $x_0 = 10$, $x_1 = 6$, $x_2 = 4$, $x_3 = 3$, $x_4 = 2{,}5$, $x_5 = 2{,}25$, $x_6 = 2{,}125$, $x_7 = 2{,}0625$, $x_8 = 2{,}03125$, $x_9 = 2{,}015625$, $x_{10} = 2{,}0078125$

(d) Nullstelle von $f(x)$ bei $N(2|0)$.

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n x_0 \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n x_0 = 2$$

19. (a)
(b) Es entsteht eine Parabel mit $y = -0{,}15x^2$.
(c) $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ sind Tangenten an die Parabel.
$x_1 = -0{,}67$, $x_4 = -2{,}67$, $x_7 = -4{,}67$
(d) $l_1(x) = \frac{1}{5}x + \frac{1}{15}$, $l_4(x) = \frac{4}{5}x + \frac{16}{15}$, $l_7(x) = \frac{7}{5}x + \frac{49}{15}$
(e) Geradensteigung $m = 2a \cdot x_n$
(f) Tangentensteigung $= \lim\limits_{x\to x_n} \dfrac{ax^2 - ax_n^2}{x - x_n} = \lim\limits_{x\to x_n} a(x + x_n) = 2ax_n$

20. (b) $t_n : y = \dfrac{n\,s}{r} \cdot x + \dfrac{n^2}{r}$
(c) $T_{x_0} : y = 2\,a\,x_0 \cdot x - a\,x_0^2$
(d) $\dfrac{n\,s}{r} = 2\,a\,x_0 \quad , \quad \dfrac{n^2}{r} = -a\,x_0^2 \quad \Longrightarrow \quad a = -\dfrac{s^2}{4\,r} \quad , \quad x_0 = -\dfrac{2\,n}{s}$
(e) $\mathrm{B}\left(-\dfrac{2\,n}{s}\,\middle|\,-\dfrac{n^2}{r}\right)$
(f) $a = -\dfrac{1}{3} \quad , \quad \mathrm{B}\left(-2\,\middle|\,-\dfrac{4}{3}\right)$

21. Schnittpunkt der Funktionen berechnen; Tangentensteigung von f bzw. g im Schnittpunkt berechnen; Schnittwinkel ist Winkel zwischen den Tangenten;
(a) $S_1(2|4), S_2(-1|-2)$, $\alpha_1 = 15{,}3°$, $\alpha_2 = 71{,}6°$
(b) $S(-1|4)$, $\alpha = 0°$ (Kurven berühren sich im Schnittpunkt)
(c) $S_1(3|18)$, $S_2(-1|2)$, $\alpha_1 = 4{,}3°$, $\alpha_2 = 85{,}2°$
(d) $S_1(-1|2)$, $\alpha = 0°$ (Kurven berühren sich im Schnittpunkt, Steigung der Tangenten im Schnittpunkt: 76,0°)

22. x-Koordinate des Schnittpunkts der Funktionen berechnen; Tangentensteigung von f bzw. g im Schnittpunkt berechnen; Schnittwinkel ist Winkel zwischen den Tangenten;
    (a) $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = -2,\ \alpha_1 = \alpha_3 = 7{,}1°,\ \alpha_2 = 8{,}1°$
    (b) $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ \alpha_1 = 36{,}9°, \alpha_2 = 90{,}0°,\ \alpha_3 = 31{,}0°$
    (c) $x_1 = -3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ \alpha_1 = 21{,}2°,\ \alpha_2 = 71{,}6°,\ \alpha_3 = 6{,}9°$
    (d) $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{57},\ x_3 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{57}$
    $\alpha_1 = 19{,}4°,\ \alpha_2 = 3{,}0°\ \alpha_3 = 17{,}3°$

23. (a) $P_1(0|7), P_2(-2|25), P_3(-1|15)$
    (b) $f'(-2) = -9 \Rightarrow \alpha_1 = -83{,}66°$
    $g'(-2) = -11 \Rightarrow \alpha_2 = -84{,}81° \Rightarrow \alpha = 1{,}15°$
    (c) $t(x) = -3x + 3$

24. (a) $t(x) = 2x_o x - x_0^2 + c$
    (b) $n(x) = -\frac{1}{2x_0}x + \frac{1}{2} + x_0^2 + c$
    (c) $t = 2x_0^3 + x_0(1 + 2c)$
    (d) $x' = x_0 - (t - x_0) = x_0(1 - 2c - 2x_0^2),\ y' = 2x_0^2 + 2c$
    (e) $c < \frac{1}{2}$: „Schleife“ (Relation), Schnittpunkt der beiden Zweige bei $(0|1)$, Minimum bei $(0|2c)$
    $c = \frac{1}{2}$: Funktion ($D = \mathbb{R}$), die bei $x = 0$ nicht differenzierbar ist
    $c > \frac{1}{2}$: Funktion, die im Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ differenzierbar ist, Minimum bei $(0|2c)$
    (f) $x' = x_0(1 - y')$ und $y' = 2(x_0^2 + c) \Rightarrow x'^2 = (\frac{1}{2}y' - c)(1 - y')^2$
    Wertebereich $W = [2c; \infty[$, Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$
    Bilder der Punkte $\mathrm{S}_1(x_0|0)$ und $\mathrm{S}_2(-x_0|0)$: Beide Punkte liefern $y' = 2(x_0^2 + c)$. Im Gegensatz dazu liefert S_1 den Wert $x' = x_0(1-y')$ und S_2 den Wert $x' = -x_0(1-y')$. D. h. die Relation $(x'|y')$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

    1. Fall: $c = \frac{1}{2}$
    $x' = -2x_0^3, y' = 2x_0^2 + 1 \Rightarrow y' = 1 + 2^{\frac{1}{3}}|x'^{\frac{2}{3}}|$
    Die Punkte $\mathrm{Q}'(x'|y')$ beschreiben also eine Funktion, die die y-Achse in $\mathrm{Y}(0|1)$ schneidet. Dort ist die Funktion aber nicht differenzierbar. Für $x' < 0$ ($x' > 0$) ist die Funktion streng monoton fallend (steigend).

    2. Fall: $c > \frac{1}{2}$
    Graph hat nur einen Schnittpunkt $\mathrm{Y}(0|2c)$ mit der y-Achse. Betrachte für die weitere Diskussion die Umkehrrelation zur Ortskurve von Q:

$r(x) = \pm\sqrt{(\frac{1}{2}x - c)(1-x)^2}, \quad D = [2c, \infty[$:

$$r'(x) = \pm\frac{(1-x)(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x + 2c)}{2|1-x|\sqrt{\frac{1}{2}x - c}}$$

Der Graph von $r(x)$ hat bei $x = 2c$ eine vertikale Tangente, also hat die Ortskurve von Q bei $y' = 2c$ eine waagrechte Tangente.
$r'(x) \neq 0$ im gesamten Definitionsbereich ($2c < x' = \frac{1}{3} + \frac{4c}{3}$ und $c > \frac{1}{2}$ führen zu einem Widerspruch!). D. h. $r(x)$ hat keine waagrechte Tangente, also hat die Ortskurve von Q keine vertikale Tangente.

3. Fall: $c < \frac{1}{2}$
Graph hat zwei Schnittpunkte $Y_1(0|2c)$ und $Y_2(0|1)$ mit der y-Achse.
Nullstellen: $y' = 0 \Leftrightarrow x' = \pm\sqrt{-c}$, d. h. die Relation hat für $c = 0$ die Nullstelle N(0|0) und für $c < 0$ zwei Nullstellen $N_{1/2}(\pm\sqrt{-c}|0)$
Betrachte für die weitere Diskussion wieder die Umkehrrelation zur Ortskurve von Q:
$r(x) = \pm\sqrt{(\frac{1}{2}x - c)(1-x)^2}, \quad D = [2c, \infty[$:

$$r'(x) = \pm\frac{(1-x)(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x + 2c)}{2|1-x|\sqrt{\frac{1}{2}x - c}}$$

Der Graph von $r(x)$ hat bei $x = 2c$ eine vertikale Tangente, also hat die Ortskurve von Q bei $y' = 2c$ ($x' = 0$) eine waagrechte Tangente.
$r'(x) = 0$ für $x = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}c$. D. h. $r(x)$ hat für diesen x-Wert eine waagrechte Tangente, also hat die Ortskurve von Q bei $y = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}c$ eine vertikale Tangente.

Anregungen für eine weitere Betrachtung der Kurven:
Berechnen Sie den Schnittwinkel der Schleife im Punkt (0|1).
Berechnen Sie die Breite der Schleife in Abhängigkeit von c.
Berechnen Sie den Krümmungsradius der Kurve in $(0|2c)$ in Abhängigkeit von c.

Literatur: Meyer J., Von der Normalparabel zu kubischen Kurven in Geometrie und Computer, Hischer H. (Hrsg.), Franzbecker, 1998

25. (a) $t_{x_0}(x) = 2x_0x - x_0^2$
    (b) $\tilde{t}_{x_0}(x) = -\frac{1}{2x_0}x - \frac{1}{16x_0^2}$
    (c) $S(\frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{8x_0}| - \frac{1}{4})$
    (d) Parallele zur x-Achse: $y = -\frac{1}{4}$

26. (a) $t(x) = x - \frac{3}{2}$
    (b) $g_1(x) = x - \frac{1}{2}$, $g_2(x) = x + \frac{1}{2}$, $g_3(x) = x + \frac{3}{2}$
    (c) g_1: $M_1(3|2\frac{1}{2})$, g_2: $M_2(3|3\frac{1}{2})$, g_3: $M_2(3|4\frac{1}{2})$

(d) Verschiebt man die Tangente kontinuierlich nach oben schneidet die Gerade die Parabel in zwei Punkten, die symmetrisch zum Punkt $M(3|?)$ liegen.
$g_c(x) = x + c = p(x)$ liefert die Lösungen $x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{3+2c}$. Damit liegt der Mittelpunkt der Schnittpunkte bei $M(3|3+c)$

27. (a) $t_1(x) = x - \frac{1}{2}$, $t_2(x) = 2x - 2$, $t_3(x) = 3x - 4\frac{1}{2}$

(b) $Y_1(0|-\frac{1}{2})$, $Y_2(0|-2)$, $Y_3(0|-4\frac{1}{2})$

(c) $M_1(\frac{1}{2}|0)$, $M_2(1|0)$, $M_3(1\frac{1}{2}|0)$

(d) Eine Tangente an die Parabel mit der Gleichung $p(x) = \frac{1}{2}x^2$ im Punkt $\mathrm{C}(c|\frac{1}{2}c^2)$ schneidet die x-Achse im Punkt X und die y-Achse im Punkt Y. X ist dann der Mittelpunkt der Strecke [YC]
$t_c(x) = cx - \frac{1}{2}c^2$, $\mathrm{Y}(0|-\frac{1}{2}c^2)$, $\mathrm{X}(\frac{1}{2}c|0)$

28. (a) $t_\mathrm{A}(x) = 4ax - 4a^2, \quad t_\mathrm{B}(x) = -2ax - a^2, \quad n(x) = \dfrac{1}{2a}\,x + a^2 + \dfrac{1}{2}$

(b) $\mathrm{S}\left(\dfrac{a}{2}\,\Big|\,-2a^2\right), \quad y_\mathrm{S} = -8\,x_\mathrm{S}^2$, d.h. $g(x) = -8\,x^2$ mit $D_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

(c) $a_0 = \dfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad , \quad \mathrm{A}\left(\sqrt{2}|2\right) \quad , \quad \mathrm{B}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}|\frac{1}{2}\right) \quad , \quad \mathrm{S}\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}|-1\right)$

$F = \dfrac{27}{16}\sqrt{2} \quad , \quad \varphi = 54{,}7°$

29. (a) Nullstellen von f: $x_{01} = 0$, $x_{02} = 4$; Nullstelle von g: $x_{03} = 4$

$f'(x) = 3 - \dfrac{3}{\sqrt{x}}$; waagrechte Tangente von f bei $\mathrm{P}_f(1|-3)$

$g'(x) = -\dfrac{3\,x^2}{32}$; waagrechte Tangente von g bei $\mathrm{P}_g(0|2)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$, d.h. senkrechte Tangente

(b) $n(x) = -2\,x$, $t(x) = \dfrac{3}{2}\,x - 6$, $\mathrm{S}\left(\frac{12}{7}\big|-\frac{24}{7}\right)$

(d) $f'(4) = \dfrac{3}{2}$, $g'(4) = -\dfrac{3}{2}$, f und g schließen mit der x-Achse jeweils den Winkel $\alpha = 56{,}31°$ ein, der Schnittwinkel der beiden Funktionsgraphen ist $\varphi = 180° - 2\,\alpha = 67{,}38°$

30. (a) $t(x) = -2\,a\,x - a^2, \quad h(x) = \dfrac{2a}{5}\cdot x - \dfrac{a^2}{25}$

$t(x) = 0$ bei $x = -\dfrac{a}{2}, \quad h(x) = 0$ bei $x = \dfrac{a}{10}$

(b) $x_a = -\dfrac{2a}{5}$, $y_a = -\dfrac{a^2}{5}$

(c) $x_a = -1,\ y_a = -1{,}25$

(d) $g(x) = -\dfrac{5}{4}\,x^2$

31. (a) $g(x) = 2\,b\,x - b^2, \quad h(x) = -\dfrac{2b}{7} \cdot x - \dfrac{b^2}{49}$

$g(x) = 0$ bei $x = \dfrac{b}{2}, \quad h(x) = 0$ bei $x = -\dfrac{b}{14}$

(b) $x_b = \dfrac{3b}{7},\ y_b = -\dfrac{b^2}{7}$

(c) $x_b = 1{,}5,\ y_b = -1{,}75$

(d) $k(x) = -\dfrac{7}{9}\,x^2$

32. $t(x) = \dfrac{3}{2}\,x - \dfrac{9}{16}, \quad n(x) = \dfrac{2}{3}\,x + \dfrac{17}{16}, \quad \mathrm{S}\left(\frac{39}{20}\middle|\frac{189}{80}\right) = \mathrm{S}\,(1{,}95|2{,}3625)$

33. (a) $t_a(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}} \cdot x + \dfrac{\sqrt{a}}{2}$

(b) $n_a(x) = -2\sqrt{a} \cdot x + (1 + 2a)\sqrt{a}$

(c) $\mathrm{T}_a(-a\,|\,0), \quad \mathrm{N}_a\left(a + \frac{1}{2}\,|\,0\right), \quad \overline{\mathrm{T}_a\mathrm{N}_a} = 2a + \dfrac{1}{2}$

(d) t_a und n_a stehen senkrecht aufeinander: $\alpha + \beta = 3\,\alpha = 90°, \quad \alpha = 30°$

$\tan\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{a}} \quad \Longrightarrow \quad a = \dfrac{3}{4}$

2.2. Numerische Lösung von Gleichungen - Das Newtonverfahren

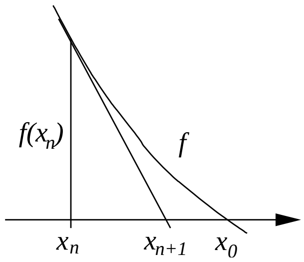
1. (a) x_n ist ein Näherungswert für eine Nullstelle von f, x_{n+1} ist eine bessere Näherung.

(b) $f(x) = \cos 2x - \sqrt{x} = 0, \quad f'(x) = -2\sin 2x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\cos 2x_n - \sqrt{x_n}}{2\sin 2x_n + \frac{1}{2\sqrt{x_n}}}$$

$x_0 = 0{,}4,\ x_1 = 0{,}428873279,\ x_2 = 0{,}428547914,\ x_3 = 0{,}428547874$

2. (a) x_n sei ein Näherungswert für die Nullstelle x_0 von f. Die Tangente an f in $\mathrm{P}\,(x_n|f(x_n))$ hat die Steigung



$$f'(x_n) = \frac{0 - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \quad \Longrightarrow$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

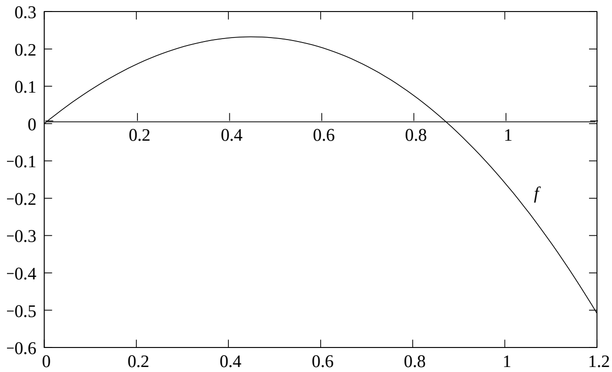
(b) Erste Nullstelle: $x_{01} = 0$

Geeignete Startwerte für die zweite Nullstelle x_{02}:

$x_1 = 1$ oder $x_1 = 0,8$

$f'(x) = \cos x - 2x$

$x_{x+1} = x_n - \frac{\sin x_n - x_n^2}{\cos x_n - 2x_n}$



x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$f(x)$	0	0,159	0,229	0,205	0,077	−0,159	−0,508

$x_1 = 1{,}0$	$x_1 = 0{,}8$
$x_2 = 0{,}8913959953$	$x_2 = 0{,}8856378451$
$x_3 = 0{,}8769848448$	$x_3 = 0{,}8768229140$
$x_4 = 0{,}8767262985$	$x_4 = 0{,}8767262271$
$x_5 = 0{,}8767262154$	$x_5 = 0{,}8767262153$
$x_6 = 0{,}8767262154$	$x_6 = 0{,}8767262154$
	$x_7 = 0{,}8767262154$

3. (a) $-1 \leqq \sin x \leqq 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 \leqq 2 + \sin x \leqq 3$, d.h. der Nenner von $f(x)$ kann nie null werden.

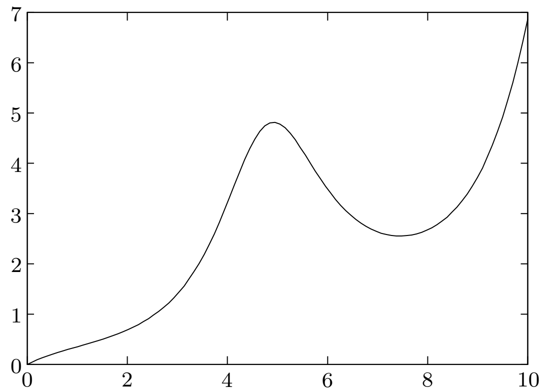
(b)

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	0,352	0,687	1,40

x	4	5	6	7
$f(x)$	3,22	4,80	3,49	2,63

x	8	9	10
$f(x)$	2,67	3,73	6,87

Zwei waagrechte Tangenten, d.h. zwei Nullstellen von f'.



(c) $f'(x) = \dfrac{2 + \sin x - x\cos x}{(2+\sin x)^2}$

(d) $f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad g(x) = 2 + \sin x - x\cos x = 0$

$g'(x) = \cos x - (\cos x + x(-\sin x)) = x \sin x$

$x_{k+1} = x_k - \dfrac{g(x_k)}{g'(x_k)} = x_k - \dfrac{2 + \sin x_k - x_k \cos x_k}{x_k \sin x_k}$

$x_0 = 5,\ x_1 = 4{,}921321169,\ x_2 = 4{,}921526621,\ x_3 = 4{,}921526621$

4. (a) $t_i(x) = f'(x_i)(x - x_i) + f(x_i)$

   (b) $f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + f(x_i) = 0 \Rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

   (c) i. $x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2 - 3x_i + 2{,}25}{2x_i - 3}$
   $x_1 = 1{,}25,\ x_2 = 1{,}375,\ x_3 = 1{,}4375,$
   $x_4 = 1{,}46875,\ x_5 = 1{,}484375$

   ii. $x_{i+1} = x_i - \frac{x^2 - x + 0{,}25}{2x - 1}$
   $x_1 = 0{,}75,\ x_2 = 0{,}625,\ x_3 = 0{,}5625,$
   $x_4 = 0{,}53125,\ x_5 = 0{,}515625$

   iii. $x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 - x_i - 4}{3x_i^2 - 1}$
   $x_1 = 3,\ x_2 = 2{,}230769,\ x_3 = 1{,}881119,$
   $x_4 = 1{,}800478,\ x_5 = 1{,}796333$

   iv. $x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 - x_i^2 - 4}{3x_i^2 - 2x}$
   $x_1 = 5,\ x_2 = 3{,}523077,\ x_3 = 2{,}618256,$
   $x_4 = 2{,}155509,\ x_5 = 2{,}01334$

   v. $x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^4 + x_i^2 - 4}{4x_i^3 + 2x_i}$
   $x_1 = 1{,}333333,\ x_2 = 1{,}256098,\ x_3 = 1{,}249663,$
   $x_4 = 1{,}249621,\ x_5 = 1{,}249621$

5. $f(x) = \tan x - x, \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad$ Startwert: $x_0 = 4{,}5$

$x_1 = 4{,}493613934,\ x_2 = 4{,}493409656,\ x_3 = 4{,}493409458$

6. $x = \sqrt[n]{a} \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = x^n - a = 0$

   Newtonverfahren: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \dfrac{1}{n} \cdot \left[(n-1)\,x_k + \dfrac{a}{x_k^{n-1}}\right]$

   Für $n = 7$ und $a = 100$: $\quad x_{k+1} = \dfrac{1}{7} \cdot \left[6\,x_k + \dfrac{100}{x_k^6}\right]$

   $$\begin{array}{lcl@{\quad , \quad}lcl} x_0 & = & 2 & x_3 & = & 1{,}930697737 \\ x_1 & = & 1{,}9375 & x_4 & = & 1{,}930697729 \\ x_2 & = & 1{,}930768956 & x_5 & = & 1{,}930697729 \end{array}$$

7. Newtonverfahren für f: $\quad x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \dfrac{x_k^2 - \sqrt{x_k} - 1}{2\,x_k - \frac{1}{2\sqrt{x_k}}}$

   $$\boxed{\begin{array}{lcl@{\quad , \quad}lcl} x_0 & = & 1{,}000000000 & x_3 & = & 1{,}490267918 \\ x_1 & = & 1{,}666666667 & x_4 & = & 1{,}490216121 \\ x_2 & = & 1{,}501433283 & x_5 & = & 1{,}490216120 \end{array}}$$

   Newtonverfahren für f': $\quad x_{k+1} = x_k - \dfrac{f'(x_k)}{f''(x_k)} = x_k - \dfrac{2\,x_k - \frac{1}{2\sqrt{x_k}}}{2\,x_k}$

   $$\boxed{\begin{array}{lcl@{\quad , \quad}lcl} x_0 & = & 1{,}000000000 & x_3 & = & 1{,}071600526 \\ x_1 & = & 1{,}125000000 & x_4 & = & 1{,}071598716 \\ x_2 & = & 1{,}075418994 & x_5 & = & 1{,}071598716 \end{array}}$$

   Newtonverfahren für g: $\quad x_{k+1} = x_k - \dfrac{g(x_k)}{g'(x_k)} = x_k - \dfrac{x_k^4 - 2\,x_k^2 - x + 1}{4\,x_k^3 - 4\,x_k - 1}$

   $$\boxed{\begin{array}{lcl@{\quad , \quad}lcl} x_0 & = & 1{,}000000000 & x_3 & = & 0{,}000000000 \\ x_1 & = & 0{,}000000000 & x_4 & = & 1{,}000000000 \\ x_2 & = & 1{,}000000000 & x_5 & = & 0{,}000000000 \end{array}}$$

   $$\boxed{\begin{array}{lcl@{\quad , \quad}lcl} x_0 & = & 1{,}500000000 & x_3 & = & 0{,}490216120 \\ x_1 & = & 1{,}490384615 & x_4 & = & 1{,}490216120 \\ x_2 & = & 1{,}490216171 & & & \end{array}}$$

8. Newtonverfahren für f: $\quad x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \dfrac{x_k^3 - 3\,x_k^2 + 4}{3\,x_k^2 - 6\,x_k}$

   $$\boxed{\begin{array}{lcl@{\quad , \quad}lcl} x_0 & = & -2{,}000000000 & x_3 & = & -1{,}001949932 \\ x_1 & = & -1{,}333333333 & x_4 & = & -1{,}000002528 \\ x_2 & = & -1{,}055555556 & x_5 & = & -1{,}000000000 \end{array}}$$

   $$\boxed{\begin{array}{lcl@{\quad , \quad}lcl} x_0 & = & 1{,}000000000 & x_3 & = & 1{,}924408746 \\ x_1 & = & 1{,}666666667 & \ldots & = & \ldots \\ x_2 & = & 1{,}844444444 & x_{20} & = & 1{,}999999438 \end{array}}$$

   Der Grund für das schlechte Funktionieren: $f'(2) = 0$!!!

9. (a) Für x gegen minus (plus) unendlich geht der Graph von $f(x)$ gegen minus (plus) unendlich. Der Graph kann kein, zwei oder vier Extrema haben. Der Graph kann einen, zwei oder drei Wendepunkte haben.

   (b) $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 = 5x^3(x-4)$, $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x-3) \Rightarrow$
   Maximum bei $H(0|1)$, Minimum bei $T(4|-255)$, Wendepunkt bei $W(3|-161)$

   (c)

   (d)

   (e)

   (f) $t_{x_i}(x) = f'(x_i)(x - x_i) + f(x_i) = 0 \Rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{y_i}{f'(x_i)}$

   (g) $x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^5 - 5x_i^4 + 1}{5x_i^4 - 20x_i^3} \Rightarrow$
   $x_1 = 1$, $x_2 = 0{,}8$, $x_3 = 0{,}712070...$, $x_4 = 0{,}694818...$,
   $x_5 = 0{,}694204$, $x_6 = 0{,}6942032$

10. $f'(x) = \cos x - x\,\sin x$, $f''(x) = -2\,\sin x - x\,\cos x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n\,\sin x_n}{2\,\sin x_n + x_n\,\cos x_n}$$

$x_0 = \pi$, $x_1 = 3{,}459902540$, $x_2 = 3{,}425891573$

11. $f'(x) = \dfrac{x\,\cos x - \sin x}{x^2}$, $f''(x) = -\dfrac{(x^2-2)\sin x + 2\,x\,\cos x}{x^3}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} = x_n + \frac{x_n\,(x_n\,\cos x_n - \sin x_n)}{(x_n^2 - 2)\sin x_n + 2\,x_n\,\cos x_n}$$

$x_0 = \frac{3\pi}{2}$, $x_1 = 4{,}479178709$, $x_2 = 4{,}493365248$

12. (a) x_n ist ein Näherungswert für eine Nullstelle von f, x_{n+1} ist eine bessere Näherung.

   (b) $f(x) = \cos 2x - \sqrt{x} = 0, \quad f'(x) = -2\sin 2x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\cos 2x_n - \sqrt{x_n}}{2\sin 2x_n + \frac{1}{2\sqrt{x_n}}}$$

   $x_0 = 0{,}4$, $x_1 = 0{,}428873279$, $x_2 = 0{,}428547914$, $x_3 = 0{,}428547874$

13. (a) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^3 - 2}{3\,x_n^2} = \dfrac{2}{3}\,x_n + \dfrac{2}{3\,x_n^2} = \dfrac{2}{3}\left(x_n + \dfrac{1}{x_n^2}\right)$

i	x_i
0	2
1	1,500000
2	1,296296
3	1,260932

(b) $\dfrac{|1{,}259920 - 1{,}260932|}{1{,}259920} \cdot 100\% = 0{,}08\%$

2.3. Die lineare Näherung

1. (a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ für $|h| \ll 1$

   (b) $f(x) = x^n$, $f'(x) = n\,x^{n-1}$, $f(1) = 1$, $f'(1) = n$

   lineare Näherung: $f(1+h) \approx f(1) + f'(1) \cdot h = 1 + n \cdot h$

   $$\boxed{(1+h)^n \approx 1 + n \cdot h} \quad n = -1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{1+h} \approx 1 - h}$$

   (c) $(a+h)^n = a^n \left(1 + \dfrac{h}{a}\right)^n \approx a^n \left(1 + \dfrac{n\,h}{a}\right) = a^{n-1}\,(a + n\,h)$

   (d) $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f(1) = 1$, $f'(1) = \frac{1}{2}$

   lineare Näherung: $f(1+h) \approx f(1) + f'(1) \cdot h = 1 + \frac{h}{2}$

   $$\boxed{\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}}$$

2. (a) $\dfrac{1}{\sqrt{1+h}} \approx \dfrac{1}{1+\frac{h}{2}} \approx 1 - \dfrac{h}{2}$

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$, $f(1) = 1$, $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$

   lineare Näherung: $f(1+h) \approx f(1) + f'(1) \cdot h = 1 - \dfrac{h}{2}$

   $$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+h}} \approx 1 - \frac{h}{2}}$$

   (c) $\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx 1 + \dfrac{\beta^2}{2}$, $\quad 1{,}000\,000\,005 \quad , \quad 1 + 5 \cdot 10^{-17}$

3. $\Delta t = t - t' = t\left(1 - \sqrt{1-\beta^2}\right) \approx \dfrac{s}{v}\left[1 - \left(1 - \dfrac{\beta^2}{2}\right)\right] = \dfrac{s\,\beta^2}{2\,v}$

   $s = 300\,\mathrm{km}$, $\beta = 10^{-7} \quad \Longrightarrow \quad \Delta t \approx 5 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s}$, (TR: $\Delta t = 0$)

   $s = 40\,000\,\mathrm{km}$, $\beta = 4 \cdot 10^{-7} \quad \Longrightarrow \quad \Delta t \approx 2{,}7 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$, (TR: $\Delta t = 3{,}3 \cdot 10^{-8}\mathrm{s}$)

4. (a) $(1 + 0{,}0008)^3 \approx 1 + 3 \cdot 0{,}0008 = 1{,}0024 \quad , \quad$ TR: 1,002401921

(b) $(1-5\cdot 10^{-8})^{20} \approx 1-20\cdot 5\cdot 10^{-8} = 0{,}999\,999$, TR: 0,999 999

(c) $2^6\cdot(1+0{,}0004)^6 \approx 64{,}1536$, TR: 64,153 753 68

(d) $2\cdot\sqrt{1+1{,}5\cdot 10^{-6}} \approx 2\,(1+0{,}75\cdot 10^{-6}) = 2{,}000\,001\,5$

TR: 2,000 001 5

(e) $\sqrt{1-0{,}000\,000\,8} \approx 1-0{,}000\,000\,4 = 0{,}999\,999\,6$

TR: 0,999 999 6

(f) $\dfrac{1}{1+0{,}008} \approx 1-0{,}008 = 0{,}992$, TR: 0,992 063 492

(g) $\dfrac{1}{1-0{,}000\,000\,5} \approx 1+0{,}000\,000\,5 = 1{,}000\,000\,5$

TR: 1,000 000 5

(h) $(1+0{,}000\,002)^{-6} \approx 1-6\cdot 0{,}000\,002 = 0{,}999\,988$, TR: 0,999 988

(i) $(1-0{,}000\,000\,5)^{-4} \approx 1+4\cdot 0{,}000\,000\,5 = 1{,}000\,002$

TR: 1,000 002

(j) $\dfrac{3}{[2\,(1+0{,}000\,25)]^2} \approx \dfrac{3}{4}(1-2\cdot 0{,}000\,25) = 0{,}749\,625$

TR: 0,749 625 141

5. $x \approx \big(1-(1-5\cdot 10^{-17})\big)\cdot 10^{20} = 5000$ (TR: $x=0$)

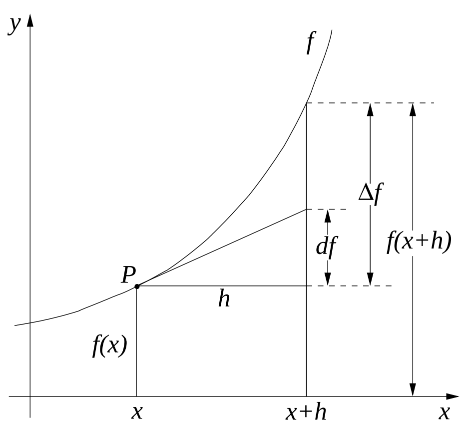
6. $f(4+h) \approx f(4)+f'(4)\cdot h = 2+\dfrac{h}{4}$, $\sqrt{4{,}02} = 2{,}0049938$, $\sqrt{4{,}02} \approx 2{,}005$, $\delta_{\text{rel}} = 3\cdot 10^{-6}$

7. $f(3+h) \approx f(3)+f'(3)\cdot h = \dfrac{1}{3}-\dfrac{h}{9}$, $\dfrac{1}{2{,}9982} = 0{,}333533453$

$$\frac{1}{2{,}9982} \approx \frac{1}{3}-\frac{-0{,}0018}{9} = 0{,}333533333\ldots, \quad \delta_{\text{rel}} = -3{,}6\cdot 10^{-7}$$

8. (a) Die Tangente an f in $\mathrm{P}\,(x|f(x))$ hat die Steigung $\dfrac{\mathrm{d}f}{h} = f'(x)$. Das Differential $\mathrm{d}f = f'(x)h$ ist für kleine $|h|$ eine gute Näherung für $\Delta f = f(x+h)-f(x)$, d.h.

$$f(x+h) = f(x)+\Delta f \approx f(x)+f'(x)h$$



(b) Mit $\sqrt{1+h} \approx 1+\frac{h}{2}$, $(1+h)^2 \approx 1+2h$ und $\dfrac{1}{1+h} \approx 1-h$ für $|h| \ll 1$ folgt

$$f^* \approx f\frac{1+\frac{\beta}{2}}{1-\frac{\beta}{2}} \approx f\left(1+\frac{\beta}{2}\right)^2 \approx f(1+\beta)$$

9. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$, $\quad f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$, $\quad f''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}}$, $\quad f'''(x) = \frac{10}{27}(1+x)^{-\frac{8}{3}}$

   $f(0) = 1$, $\quad f'(0) = \frac{1}{3}$, $\quad f''(0) = -\frac{2}{9}$, $\quad f'''(0) = \frac{10}{27}$

$$\sqrt[3]{1+x} \approx T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 + \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9}\,x^2 + \frac{5}{81}\,x^3$$

$$T_3(0{,}03) = \underbrace{1 + 0{,}01 - 0{,}0001}_{1{,}0099} + \frac{5}{3} \cdot 10^{-6} = 1{,}009901667$$

   Taschenrechnerwert: $y = 1{,}009901634$, $\quad \delta_{\text{rel}} = \dfrac{T_3(0{,}03) - y}{y} = 3{,}23 \cdot 10^{-8}$

2.4. Monotonieverhalten differenzierbarer Funktionen

1. Echt monoton steigend in ganz $\mathbb{R}$ $(f(x) = (x+2)^3 - 5)$

2. (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\,0\,;\,4\,\}$

   $\lim\limits_{x \to 0^\pm} f(x) = \mp\infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \quad , \quad \lim\limits_{x \to 4^\pm} f(x) = \pm\infty$

   (b) $f'(x) = \dfrac{-4\,(x-2)}{x^2\,(x-4)^2}$

   f echt steigend in $]-\infty\,;\,0\,[$ und in $]\,0\,;\,2\,[$

   f echt fallend in $]\,2\,;\,4\,[$ und in $]\,4\,;\,+\infty\,[$

   Waagrechte Tangente bei $(\,2\,|\,0{,}5\,)$

   (d) Symmetrieachse: $\quad x = 2 \quad , \quad f(2+h) = f(2-h)$

3. (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\,3\,\}$

   $\lim\limits_{x \to 3^\pm} f(x) = \mp\infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty$

   (b) $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 6x - 8}{(3-x)^2}$

   f echt steigend in $]\,2\,;\,3\,[$ und in $]\,3\,;\,4\,[$

   f echt fallend in $]-\infty\,;\,2\,[$ und in $]\,4\,;\,+\infty\,[$

   Waagrechte Tangente bei $(\,2\,|\,4\,)$ und $(\,4\,|\,0\,)$

   (d) Symmetriezentrum: $\quad \mathrm{Z}\,(3|2) \quad , \quad 2 - f(3+h) = f(3-h) - 2$

4. Echt monoton fallend in ganz D_f. $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \cdot \left(1 + \cos\dfrac{1}{x}\right)$

Unendlich viele Terassenpunkte: $\quad \mathrm{T}\left(\frac{1}{(1+2k)\pi}\middle|(1+2k)\pi\right)$

2.5. Ganzrationale Funktionen

1. $f(x) = \frac{x^3}{8} \cdot (x-4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{01} = 0, \quad x_{02} = 4$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[\frac{x^3}{8} \cdot (x-4)\right] = ((-\infty)\cdot(-\infty)) = +\infty$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{x^3}{8} \cdot (x-4)\right] = ((+\infty)\cdot(+\infty)) = +\infty$

   $f'(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \cdot (x-3), \quad f''(x) = \frac{3x^2}{2} - 3x = \frac{3x}{2} \cdot (x-2)$

   $f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{11} = 0, \quad x_{12} = 3, \qquad f''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{21} = 0, \quad x_{22} = 2$

   $f'(x) > 0$ für $x > 3$ und $f'(x) \leqq 0$ für $x \leqq 3 \quad \Longrightarrow$

   f streng fallend in $]-\infty; 3[$ und f streng steigend in $]3; +\infty[$.

   $f'(x_{12}) = 0$ und $f''(x_{12}) = \frac{9}{2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Tiefpunkt bei $\mathrm{T}\left(3\middle|\frac{27}{8}\right)$

   $f'''(x) = 3x - 3 = 3(x-1)$

   $f'(x_{11}) = 0$ und $f''(x_{11}) = 0$ und $f''(x_{11}) = -3 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Terrassenpunkt bei $\mathrm{F}\,(0|0)$

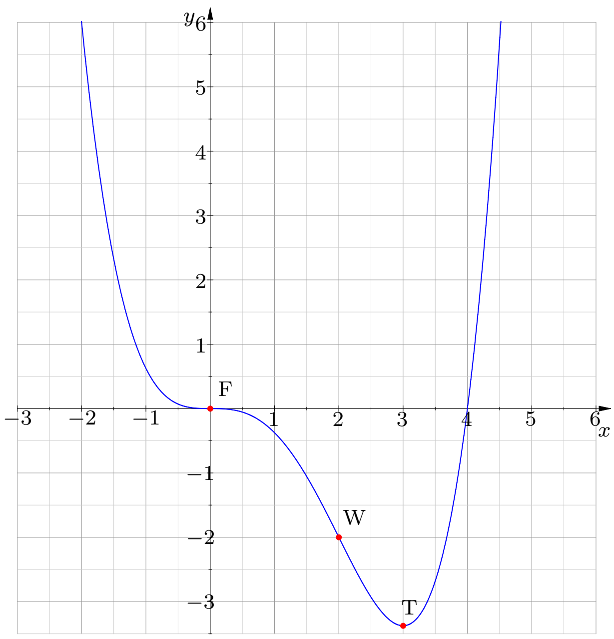
   $f''(x_{22}) = 0$ und $f'''(x_{22}) = 3 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Wendepunkt bei $\mathrm{W}\,(2|-2)$

   $f(x) = -2 \quad \Longrightarrow \quad g(x) = x^4 - 4x^3 + 16 = 0$, eine Lösung ist $X_1 = 2$, die zweite Lösung findet man mit dem Newtonverfahren:

   $$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - 4x_n^3 + 16}{4x_n^3 - 12x_n^2}$$

   $x_0 = 3{,}5$
   $x_1 = 3{,}721938776$
   $x_2 = 3{,}680359091$
   $x_3 = 3{,}678576718$
   $x_4 = 3{,}678573510$
   $x_5 = 3{,}678573510$

   $X_2 \approx 3{,}678573510$



2. $f(-x) = f(x) \quad \Longrightarrow \quad f$ symmetrisch zur y-Achse

$$f(x) = \frac{x^2}{4} \cdot \left(x^2 - 8\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{01} = 0, \quad x_{02} = -2\sqrt{2}, \quad x_{03} = 2\sqrt{2}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2}{4} \cdot \left(x^2 - 8\right)\right] = ((+\infty) \cdot (+\infty)) = +\infty$$

$$f'(x) = x^3 - 4x = x \cdot \left(x^2 - 4\right), \quad f''(x) = 3x^2 - 4, \quad f'''(x) = 6x$$

$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{11} = 0, \quad x_{12} = -2, \quad x_{13} = 2$$

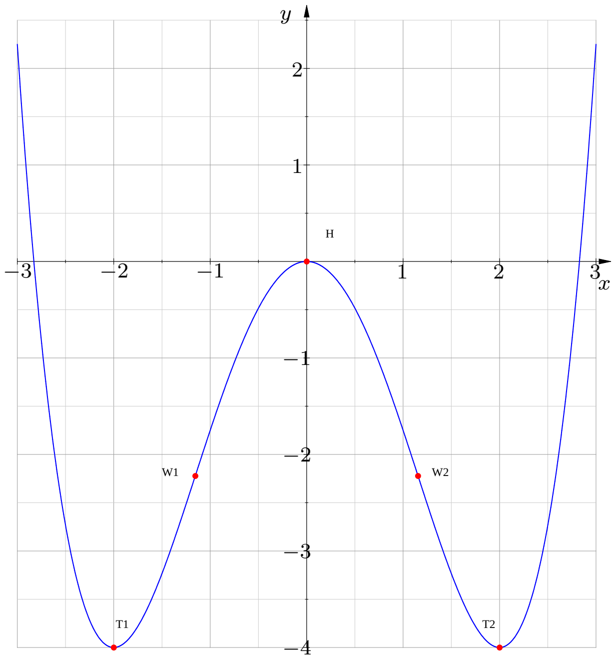
$$f''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{21} = 0, \quad x_{22} = -\tfrac{2}{3}\sqrt{3}, \quad x_{23} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}$$

$f'(x_{11}) = 0$ und $f''(x_{11}) = -4 < 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Hochpunkt bei $\mathrm{H}\,(0|0)$

$f'(x_{13}) = 0$ und $f''(x_{13}) = 8 > 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Tiefpunkte bei $\mathrm{T}_{1,2}\,(\pm 2| - 4)$

$f''(x_{22}) = 0$ und $f'''(x_{22}) = 4\sqrt{3} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Wendepunkte bei $\mathrm{W}_{1,2}\,\left(\pm\tfrac{2}{3}\sqrt{3}\middle| - \tfrac{20}{3}\right)$

$f(x) = -2 \quad \Longrightarrow \quad x^4 - 8x^2 = -2$ hat die vier Lösungen $x = \pm\sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}}$.



3. $f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{01} = 2$ (durch Probieren)

$f(x) : (x-2) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x_{02,3} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{33}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3}{4} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right)}_{\to 1} \right] = \pm\infty$$

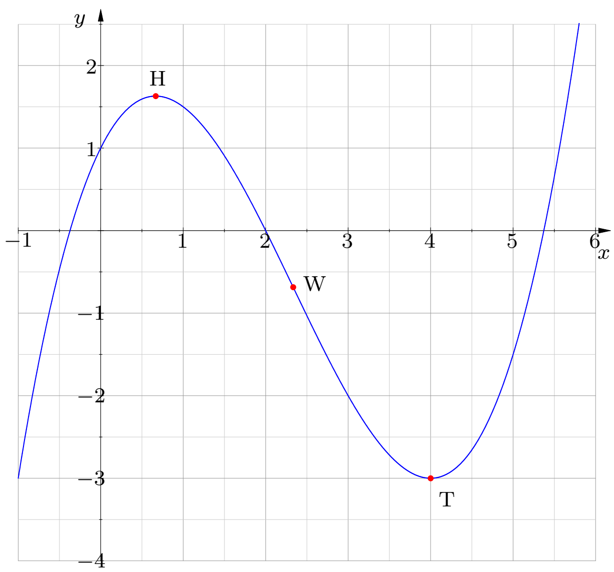
$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + 2, \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}, \quad f'''(x) = \frac{3}{2}$

$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{11} = \frac{2}{3}, \quad x_{12} = 4, \qquad f''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{21} = \frac{7}{3}$

Da der Graf von f' eine nach oben geöffnete Parabel ist, folgt $f'(x) > 0$ für $x < \frac{2}{3}$ und $x > 4$, $f'(x) < 0$ für $\frac{2}{3} < x < 4 \quad \Longrightarrow$

f streng steigend in $\left]-\infty; \frac{2}{3}\right[$ und $]4; +\infty[$, f streng fallend in $\left]\frac{2}{3}; 4\right[\quad \Longrightarrow$

Hochpunkt bei H $\left(\frac{2}{3} \middle| \frac{44}{27}\right)$ und Tiefpunkt bei T $(4| - 3)$



4. (a) $N_1(0|0)$, $N_2(-\frac{b}{a}|0)$

   (b) $f'(x) = x(3ax + 2b) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ oder $x_2 = -\frac{2b}{3a}$
   $f''(x) = 6ax + 2b \neq 0$ für x_1 und x_2 (a und $b \neq 0$!).
   Also Extrema bei $(0|0)$ und $(-\frac{2b}{3a}|\frac{4b^3}{27a^2})$

   (c)

   (d) Extrema liegen auf einer Parabel.

   (e) $f(x_2) = \frac{4b^3}{27a^2} = \frac{b}{3} \cdot (-\frac{2b}{3a})^2 = \frac{b}{3} \cdot x_2^2$

5. (a) $N_1(0|0)$, $N_2\left(\sqrt{-\frac{b}{a}}\,\middle|\,0\right)$

   (b) $f'(x) = 3ax^2 + b = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{-\frac{b}{3a}}$

   $f''(x) = 6ax \Rightarrow f''\left(\sqrt{-\frac{b}{3a}}\right) \neq 0.$

   Also Extrema bei $\left(\sqrt{-\frac{b}{3a}}\,\middle|\,\frac{2}{3}b\sqrt{-\frac{b}{3a}}\right)$.

   (c)

   (d) Extrema liegen auf einer Geraden.

   (e) $f(x_{\text{Max}}) = \sqrt{-\frac{b}{3a}}(-\frac{b}{3} + b) = \frac{2}{3}b \cdot x_{\text{Max}}$

6. (b) $E_1(0|0)$, $E_2\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\,\middle|\,-\frac{b^2}{4a}\right)$, $E_3\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}\,\middle|\,-\frac{b^2}{4a}\right)$
   Drei Extrema genau dann, wenn a und b verschiedene Vorzeichen haben.

(d) Vermutung: Extrema liegen auf einer nach oben geöffneten Parabel.

(e) $e(x) = \frac{b}{2}x^2$

7. (a) $E_1(0|0)$, $E_2\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\middle| -\frac{b^2}{4a}\right)$, $E_3\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}\middle| -\frac{b^2}{4a}\right)$
Drei Extrema genau dann, wenn a und b verschiedene Vorzeichen haben.

(b) Vermutung: Extrema liegen auf einer nach oben geöffneten Parabel.

(c) $e(x) = \frac{b}{2}x^2$

8. (a) $f'(x) = 4ax^3 + 2bx = 2x \cdot (2ax^2 + b) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_{2/3} = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.
Also: drei waagrechte Tangenten, wenn a und b verschiedene Vorzeichen haben.

(b) $f'(x) = 5x^4 + 3bx^2 - 1 = 5q^2 + 3bq - 1 = 0$
(Substitution: $q = x^2$)$\Rightarrow$
$q_1 = \frac{-3b+\sqrt{9b^2+20}}{10} > 0$. Da $\sqrt{9b^2+20} > |3b| \geq 3b \Rightarrow$
$x_1 = \sqrt{\frac{1}{10}(-3b + \sqrt{9b^2+20})}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{10}(-3b + \sqrt{9b^2+20})}$
$q_2 = \frac{-3b-\sqrt{9b^2+20}}{10} < 0$. Da $\sqrt{9b^2+20} > |3b| \geq 3b$.
Also: Der Graph von $f(x)$ hat zwei waagrechte Tangenten.

(c) $f'(x) = 5x^4 + 3bx^2 + 1 = 5q^2 + 3bq + 1 = 0$
(Substitution: $q = x^2$)$\Rightarrow$
$q_1 = \frac{-3b+\sqrt{9b^2-20}}{10}$. Da $\sqrt{9b^2-20} < |3b|$ folgt: $q_1 > 0$ für $b < 0$ und $q_1 < 0$ für $b > 0$.
$q_2 = \frac{-3b-\sqrt{9b^2-20}}{10}$. Da $\sqrt{9b^2-20} < |3b|$ folgt: $q_2 > 0$ für $b < 0$ und $q_2 < 0$ für $b > 0$.
Also:
Der Graph von $f(x)$ hat vier waagrechte Tangenten wenn $b < -\frac{\sqrt{20}}{3}$ (q_1 und q_2 positiv; Voraussetzung für b beachten).
Der Graph von $f(x)$ hat keine waagrechte Tangenten wenn $b > -\frac{\sqrt{20}}{3}$ (q_1 und q_2 negativ; Voraussetzung für b beachten)).

9. (a) Extrema bei $x_E = -\frac{1\pm\sqrt{1-3k}}{3} \Rightarrow$
$k = -3x^2 - 2x \Rightarrow f(x_E) = x^3 + x^2 + (-3x^2 - 2x) \cdot x = -2x^3 - x^2$

(b) Extrema bei $x_E = -\frac{k\pm\sqrt{k^2-3}}{3} \Rightarrow$
$k = -\frac{1}{2x} - \frac{3}{2}x \Rightarrow f(x_E) = x^3 + (-\frac{1}{2x} - \frac{3}{2}x) \cdot x^2 + x = -\frac{1}{2}(x^3 - x)$

(c) Extrema bei $x_E = -\frac{1}{3k}(1 \pm \sqrt{1-3k}) \Rightarrow$
$k = -\frac{2x+1}{3x^2} \Rightarrow f(x_E) = (-\frac{2x+1}{3x^2})x^3 + x^2 + x = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x$

10. (a) $f(x) = a \cdot (x-1)(x-2)^2 \Rightarrow f(3) = 2a \Rightarrow$
$f(x) = 2 \cdot (x-1)(x-2)^2$

(b) $f(x) = a \cdot (x-2)^2(x+2)^2 \Rightarrow f(0) = 16a \Rightarrow$
$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^2(x+2)^2$

(c) $f(x) = a \cdot (x-3)(x+3)(x-5)(x+5) \Rightarrow f(0) = 225a \Rightarrow$
$f(x) = \frac{1}{225} \cdot (x-3)(x+3)(x-5)(x+5)$

(d) $f(x) = a \cdot (x-1)^2(x-2)^2(x-3) \Rightarrow f(0) = -12a \Rightarrow$
$f(x) = -2(x-1)^2(x-2)^2(x-3)$

(e) $f(x) = a \cdot (x+1)^2(x+1)(x+2)(x+3) \Rightarrow f(0) = 24a \Rightarrow$
$f(x) = \frac{1}{150}(x+5)^2(x+1)(x+2)(x+3)$

11. (a) $f'(x) = 8x^3 + 6x = 2x \cdot (4x^2+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(b) $f'(x) = 8x^3 - 10x = 2x \cdot (4x^2-5) = 0 \Leftrightarrow$
$x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{\frac{5}{4}},\ x_3 = -\sqrt{\frac{5}{4}}$

(c) $f'(x) = -16x^3 + 4x = -4x \cdot (4x^2-1) = 0 \Leftrightarrow$
$x_1 = 0,\ x_{2/3} = \pm\frac{1}{2}$

(d) $f'(x) = 5x^4 - 6x^2 - 3 = 5q^2 - 6q - 3 = 0 \Leftrightarrow q_{1/2} = \frac{1}{5}(3 \pm 2\sqrt{6});$
$q_1 \approx 1{,}579796 \Rightarrow$ waagrechte Tangenten bei $x_1 = 1{,}26$ und $x_2 = -1{,}26$
$q_2 \approx -0{,}3798 \Rightarrow$ keine weitere waagrechte Tangente.

(e) $f'(x) = -25x^4 + 9x^2 + 1 = -25q^2 + 9q + 1 = 0 \Leftrightarrow$
$q_{1/2} = -\frac{1}{50}(-9 \pm \sqrt{181});$
$q_1 \approx -0{,}09 \Rightarrow$ liefert keine waagrechte Tangente
$q_2 \approx 0{,}449 \Rightarrow$ waagrechte Tangenten bei $x_1 = 0{,}67$ und $x_2 = -0{,}67$

(f) $f'(x) = 5x^4 - 18x^2 + 7 = 5q^2 - 18q + 7 = 0 \Leftrightarrow q_{1/2} = \frac{1}{5}(9 \pm \sqrt{46});$
$q_1 \approx 3{,}1565 \Rightarrow$ waagrechte Tangenten bei $x_1 = 1{,}777$ und $x_2 = -1{,}777$
$q_2 \approx 0{,}443534 \Rightarrow$ waagrechte Tangenten bei $x_3 = 0{,}666$ und $x_4 = -0{,}666$

(g) $f'(x) = 12x^4 - 48x^2 = 12q^2 - 48q = 12q(q-4) = 0 \Leftrightarrow$
$q_1 = 0 \Rightarrow$ waagrechte Tangente bei $x_1 = 0$
$q_2 = 4 \Rightarrow$ waagrechte Tangenten bei $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$

(h) $f'(x) = -6x^5 + 27x^2 = 3x^2(-2x^3+9) = 0 \Rightarrow$ waagrechte Tangenten bei $x_1 = 0$ und $x_2 = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$.

(i) $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1 = 5q^2 - 3q + 1 = 0 \Leftrightarrow$
$q_{1/2} = -\frac{1}{10}(3 \pm \sqrt{9-20})$. Da der Wert unter der Wurzel negativ ist, gibt es keine waagrechten Tangenten.

12. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 2$

13. (a) $N_1(2|0), N_{1/2}(2 \pm \sqrt{2}|0)$

(b) $P_1(2{,}8|-1{,}1), P_2(1{,}2|1{,}1)$

(c) $f(2+x) = x^3 - 2x = -f(2-x)$

14. (a) z. B. $a(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
    (b) z. B. $b(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$
    (c) z. B. $c(x) = x^4 - 24x^2$
    (d) z. B. $d(x) = x^4 - 18x^3 + 84x^2 - 475$
    (e) z. B. $e(x) = x^3 - 6x^2$
    (f) z. B. $f(x) = 2x^3 - 24x^2 + 54x$
    (g) z. B. $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$
    (h) z. B. $h(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 208$
    (i) z. B. $i(x) = 3x^5 - 15x^4 + 20x^3$
    (j) z. B. $j(x) = x^5 - 10x^4 + 36\frac{2}{3}x^3 - 60x^2$

15. (a) Minima: $(-3|-2\frac{1}{8})$, $(4|-6\frac{8}{9})$
    Maximum: $(0|2)$
    (b) $p'(2) = f'(2)$ und $p(2) = f(2) \quad \Longrightarrow$

    $b + c = 1\dfrac{5}{9}$ und $a = -\dfrac{5}{6} - \dfrac{b}{4}$

    Es gibt unendlich viele Lösungen, z. B. $p(x) = x^2 - \dfrac{22}{3}x + \dfrac{80}{9}$

2.6. Gebrochen rationale Funktionen

1. (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, Nullstelle: $x_0 = 0$

$$\begin{array}{l} \left(\quad x^2\right) \div \left(4x - 8\right) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \dfrac{4}{4x-8} \\ \underline{-\,x^2 + 2x} \\ \qquad\quad 2x \\ \qquad \underline{-\,2x + 4} \\ \qquad\qquad\quad 4 \end{array}$$

   (b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{4 - \frac{8}{x}} = \pm\infty$

$$\lim_{x\to 2^\pm} f(x) = \lim_{h\to 0^+} f(2 \pm h) =$$
$$= 1 + \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2 \pm h - 2} = \pm\infty$$

   schräge Asympt.: $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$

   Senkrechte Asympt.: $x = 2$

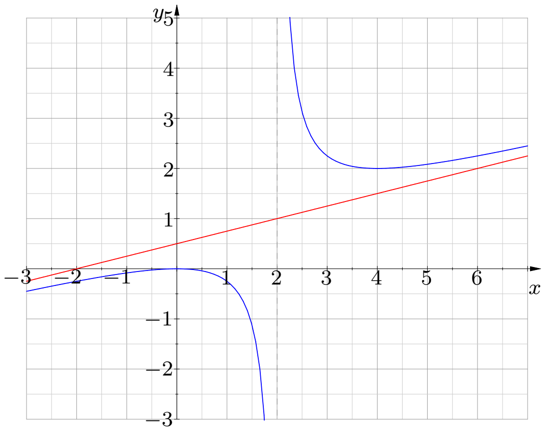
   (c) $f'(x) = \dfrac{2x(4x-8) - x^2 \cdot 4}{(4x-8)^2} = \dfrac{4x^2 - 16x}{(4x-8)^2} = \dfrac{4x(x-4)}{16(x-2)^2} = \dfrac{x(x-4)}{4(x-2)^2}$

   $f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{11} = 0, \quad x_{12} = 4$

(d)

x	$f(x)$
−3,0	−0,450
−2,0	−0,250
−1,0	$-0{,}08\overline{3}$
0,0	0,000
1,0	−0,250
1,5	−1,125

x	$f(x)$
2,5	3,125
3,0	2,250
4,0	2,000
5,0	$2{,}08\overline{3}$
6,0	2,250
7,0	2,450



2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 3} = \dfrac{(x-2)^2}{x-3}$, $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $\quad$ Nullstelle bei $x_0 = 2$

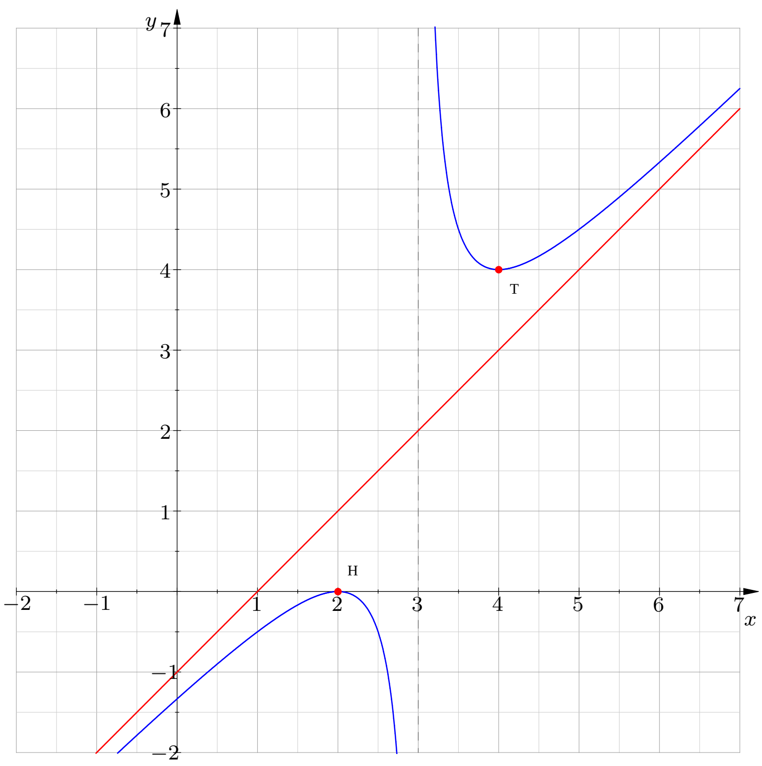
   $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x - 4 + \frac{x}{4}}{1 - \frac{3}{x}} = \pm\infty \qquad \lim\limits_{x\to 3^\pm} f(x) = \left(\dfrac{1}{0^\pm}\right) = \pm\infty$

   Polynomdivision $\Longrightarrow \quad f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-3} \quad \Longrightarrow$ Asymptote: $a : x \to x - 1$

   $f'(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}$

   $f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{11} = 2, \quad x_{12} = 4$

   Da $x^2 - 6x + 8$ eine nach oben geöffnete Parabel ist, gilt $f'(x) > 0$ für $x < 2$ und $x > 4$ sowie $f'(x) < 0$ für $2 < x < 3$ und $3 < x < 4$. f ist also streng steigend in $]-\infty; 2[$ und in $]4; +\infty[$ und streng fallend in $]2; 3[$ und $]3; 4[\quad \Longrightarrow$ Hochpunkt bei H $(2|0)$ und Tiefpunkt bei T $(4|4)$.

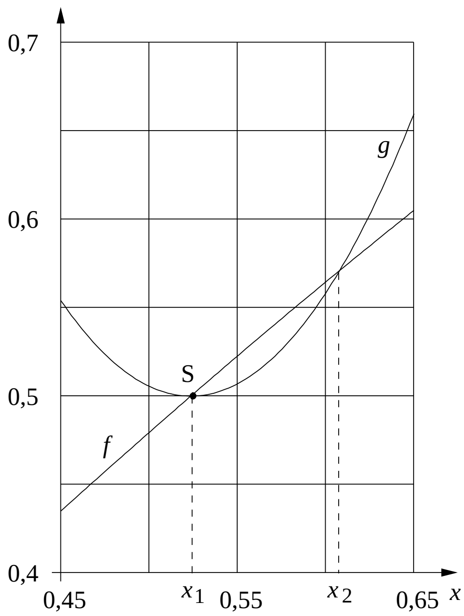


2.7. Trigonometrische Funktionen

1. (a)

x	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65
f	0,435	0,479	0,525	0,565	0,605
g	0,554	0,506	0,507	0,558	0,660

Scheitel von g: $\mathrm{S}\left(\frac{\pi}{6}\middle|\frac{1}{2}\right)$



(b) Mit $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$ und $f'(x) = \cos x$ folgt

$f(x_1) = \dfrac{1}{2}$ und $f'(x_1) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\begin{aligned} t(x) &= f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

(c) Aus $g(x) = t(x)$ folgt

$$10\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \quad \Longrightarrow \quad 10\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$10\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = x_2^* = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{20} = 0{,}61020$$

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{x_2^* - x_2}{x_2} = 0{,}364\%$$

2. (a) $-1 \leqq \sin x \leqq 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 \leqq 2 + \sin x \leqq 3$, d.h. der Nenner von $f(x)$ kann nie null werden.

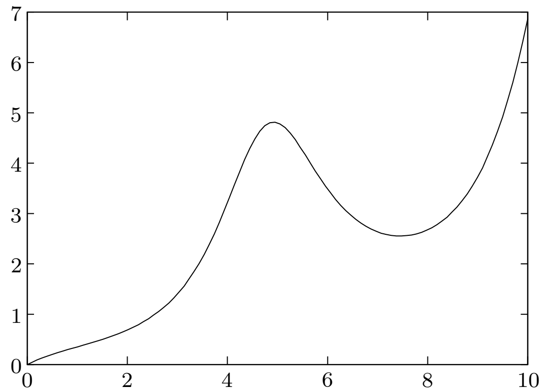
(b)

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	0,352	0,687	1,40

x	4	5	6	7
$f(x)$	3,22	4,80	3,49	2,63

x	8	9	10
$f(x)$	2,67	3,73	6,87

Zwei waagrechte Tangenten, d.h. zwei Nullstellen von f'.



(c) $f'(x) = \dfrac{2 + \sin x - x\cos x}{(2 + \sin x)^2}$

(d) $f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad g(x) = 2 + \sin x - x\cos x = 0$

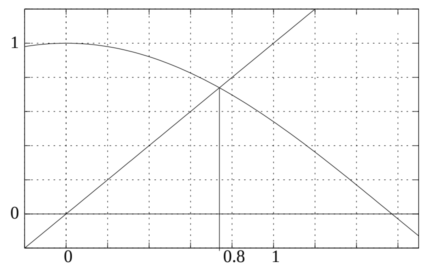
$g'(x) = \cos x - (\cos x + x(-\sin x)) = x \sin x$

$x_{k+1} = x_k - \dfrac{g(x_k)}{g'(x_k)} = x_k - \dfrac{2 + \sin x_k - x_k \cos x_k}{x_k \sin x_k}$

$x_0 = 5,\ x_1 = 4{,}921321169,\ x_2 = 4{,}921526621,\ x_3 = 4{,}921526621$

3. (a) $n(x) = x - \cos x = 0$ löst man mit dem Newton-Verfahren. Einen geeigneten Startwert findet man z.B., wenn man die Grafen von x und $\cos x$ schneidet: $x_0 = 0{,}8$. $n'(x) = 1 + \sin x \quad \Longrightarrow$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{n(x_k)}{n'(x_k)} = x_k - \frac{x_k - \cos x_k}{1 + \sin x_k}$$



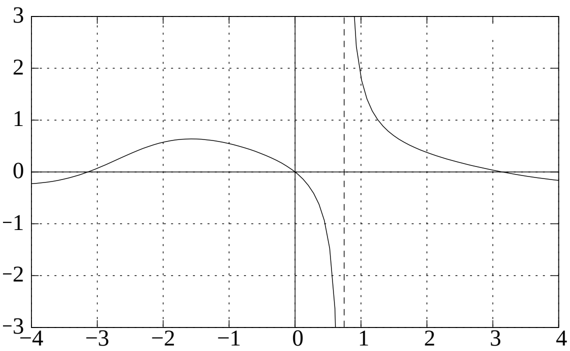
$x_0 = 0{,}8,\ x_1 = 0{,}7398533064,\ x_2 = 0{,}7390852634,\ x_3 = 0{,}7390851332$

(b)

x	-4	-3	-2	-1
$f(x)$	$-0{,}22$	$0{,}07$	$0{,}57$	$0{,}54$

x	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$
$f(x)$	0	$-1{,}27$	$1{,}83$	$0{,}70$

x	2	3	4
$f(x)$	$0{,}38$	$0{,}035$	$-0{,}16$



Nullstellen:

$x_{01} = -\pi, \quad x_{02} = 0, \quad x_3 = \pi$

(c) $f'(x) = \dfrac{\cos x \cdot (x - \cos x) - \sin x \cdot (1 + \sin x)}{(x - \cos x)^2} = \dfrac{x \cos x - \sin x - 1}{(x - \cos x)^2}$

4. Waagrechte Tangenten bei $x_{1n} = 2\,\pi \cdot \left(n + \dfrac{1}{3}\right)$ und $x_{2n} = 2\,\pi \cdot \left(n + \dfrac{2}{3}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. $t(x) = -\dfrac{x}{2} + \pi$. t schneidet die x-Achse bei $2\,\pi$.

5. Nullstellen: $-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\,\pi}{6}, \dfrac{3\,\pi}{2}$

$f'(x) = 2\,\cos 2\,x + \sin x = -4\,\sin^2 x + \sin x + 2 = 0 \quad \Longrightarrow$

$\sin x = \frac{1}{8} \pm \frac{\sqrt{33}}{8}$

Waagrechte Tangenten bei $-0{,}202\,\pi$, $0{,}319\,\pi$, $0{,}681\,\pi$ und $1{,}202\,\pi$.

6. (a) $f'(0) = -2$

(b) $g'(x) = a\,k\,\cos kx \quad \Longrightarrow \quad g'(0) = a\,k = -2$ und $g'(2) = a\,k\,\cos 2k = 0$

$k = \dfrac{\pi}{4} \cdot (2\,n + 1)$ mit $n \in \mathbb{Z}$, $\quad a = -\dfrac{2}{k} = -\dfrac{8}{(2n+1)\pi}$

7. (a) $f'(0) = -3$

(b) $g'(x) = b\,m\,\cos mx \quad \Longrightarrow \quad g'(0) = b\,m = -3$ und $g'(3) = b\,m\,\cos 3m = 0$

$m = \dfrac{\pi}{6} \cdot (2\,n + 1)$ mit $n \in \mathbb{Z}$, $\quad b = -\dfrac{3}{m} = -\dfrac{18}{(2n+1)\pi}$

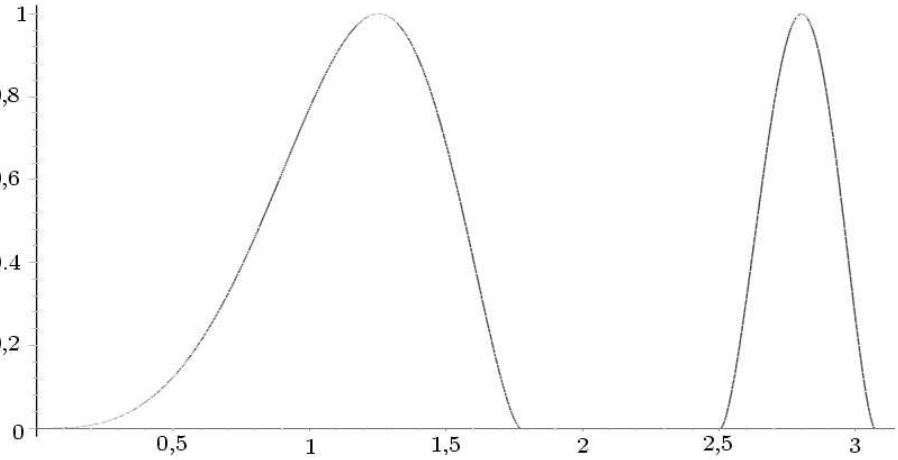
8. (a) Nullstellen: 0, $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{2\pi}$, $\sqrt{3\pi}$

$D_f = [0\,;\, \sqrt{\pi}] \cup [\sqrt{2\pi}\,;\, \sqrt{3\pi}] \approx [0\,;\, 1{,}77] \cup [2{,}51\,;\, 3{,}07]$

(b) $f'(x) = 3\,x \cos\left(x^2\right) \cdot \sqrt{\sin\left(x^2\right)}$

$(\,0\,|\,0\,)$, $\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\middle|1\right)$, $\left(\sqrt{\pi}\middle|0\right)$, $\left(\sqrt{2\pi}\middle|0\right)$, $\left(\sqrt{\dfrac{5\pi}{2}}\middle|1\right)$, $\left(\sqrt{3\pi}\middle|0\right)$

(c)

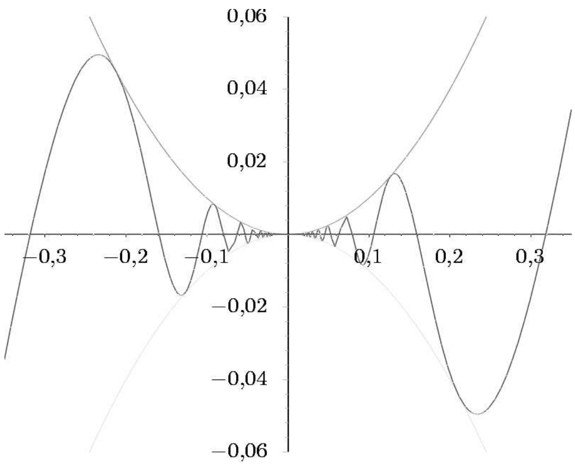


9. (a) $x_{00} = 0$, $x_{0k} = \dfrac{1}{k\,\pi}$ für $k \neq 0$

$$x_{1k} = \frac{1}{(0{,}5 + 2k)\pi}$$

$$x_{2k} = \frac{1}{(1{,}5 + 2k)\pi}$$

k	x_{0k}	x_{1k}	x_{2k}
0	0,000	0,637	0,212
1	0,318	0,127	0,091
2	0,159	0,071	0,058
3	0,106	0,049	0,042
4	0,080	0,037	0,034
5	0,064	0,030	0,028
6	0,053	0,025	0,024
7	0,045	0,022	0,021



(b) $f'(x) = 2\,x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$

(c) $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = 0$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$, d.h. f ist stetig bei $x = 0$.

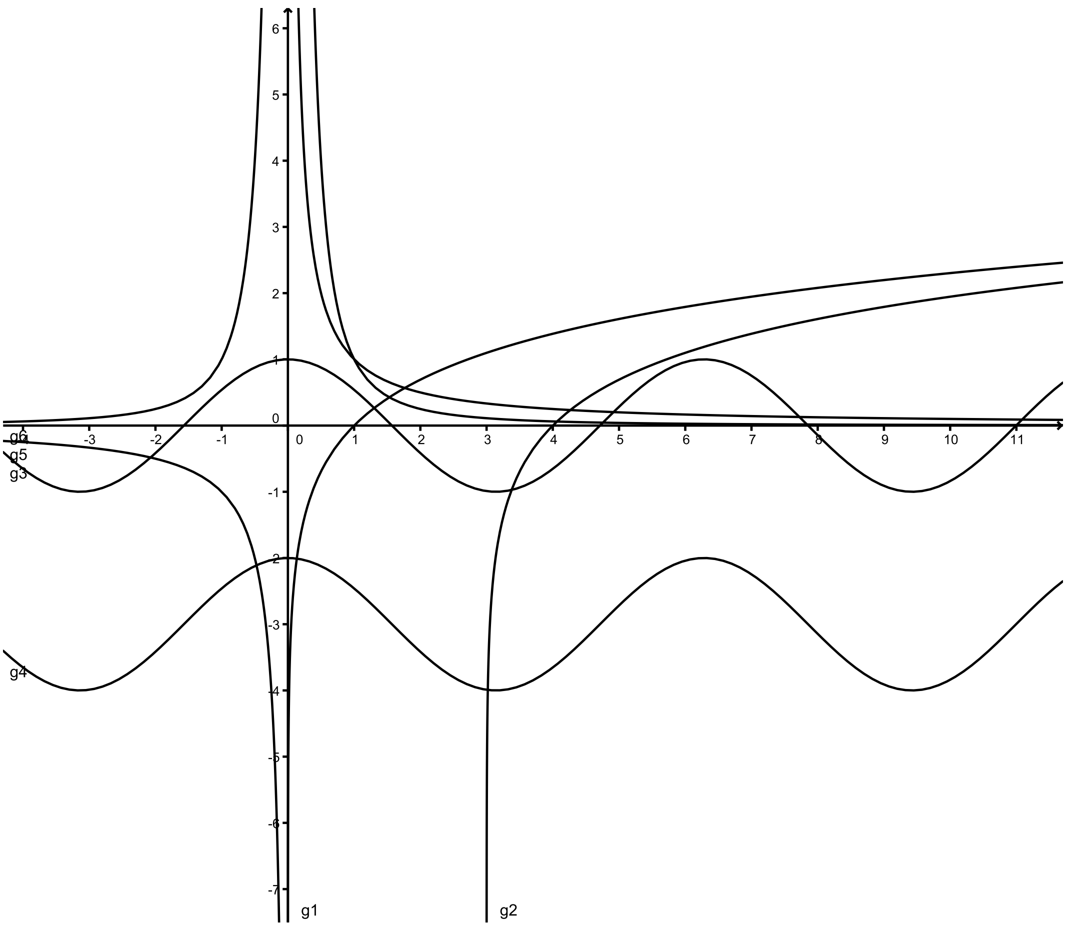
$$f'(x) = \begin{cases} 2\,x \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}, \quad \text{aber } \lim_{x\to 0} f'(x) \text{ existiert nicht.}$$

f ist in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, aber f' ist bei $x = 0$ unstetig!!

Teil II.

Natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion

3. Die natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion

1. 

2. (a) Mit $x = \dfrac{a}{\text{cm}}$ folgt

   - $x = \dfrac{40\,000\,\text{km}}{\text{cm}} = 4 \cdot 10^9 \quad \Longrightarrow \quad h = 1\,\text{cm} \cdot \ln x = 22{,}1\,\text{cm}$
   - $x = \dfrac{1{,}5 \cdot 10^8\,\text{km}}{\text{cm}} = 1{,}5 \cdot 10^{13} \quad \Longrightarrow \quad h = 1\,\text{cm} \cdot \ln x = 30{,}3\,\text{cm}$
   - $1\,\text{LJ} = 3 \cdot 10^8\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600\,\text{s} = 9{,}47 \cdot 10^{15}\,\text{m}$

$$x = \frac{1\,\text{LJ}}{\text{cm}} = 9{,}47 \cdot 10^{17} \quad \Longrightarrow \quad h = 1\,\text{cm} \cdot \ln x = 41{,}4\,\text{cm}$$

- $$x = \frac{3 \cdot 10^{10}\,\text{LJ}}{\text{cm}} = 2{,}84 \cdot 10^{28} \quad \Longrightarrow \quad h = 1\,\text{cm} \cdot \ln x = 65{,}5\,\text{cm}$$

(b) $x = \mathrm{e}^{100} = 2{,}69 \cdot 10^{43} \quad \Longrightarrow \quad a = 2{,}69 \cdot 10^{41}\,\text{m} = 2{,}84 \cdot 10^{25}\,\text{LJ}$

a ist ungefähr 10^{15} mal so groß wie der Durchmesser des sichtbaren Universums!

3. (a) Definition der Ableitung:

$$(\mathrm{e}^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \mathrm{e}^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\left(\mathrm{e}^h - 1\right)}{h} = \mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} \approx 1 \text{ für } |h| \ll 1$$

$$\mathrm{e} \approx (1+h)^{\frac{1}{h}} \text{ für } |h| \ll 1$$

Mit der Substitution $h = \dfrac{1}{n}$ folgt aus $h \to 0^+$, dass $n \to \infty$ und damit

$$\mathrm{e} = \lim_{h\to 0^+} (1+h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(b) Berechnung von x^n mit $n = (1...01...)_2$:

Erste Ziffer (immer 1)	:	x hinschreiben
Jede der folgenden Ziffern	:	(Q) Quadrieren, wenn 0
		(QM) Quadrieren und mit x Multiplizieren, wenn 1

Beginnend mit der zweiten Ziffer der Dualdarstellung des Exponenten bedeutet jede Null eine und jede Eins zwei Multiplikationen.

Für x^{100} ergibt sich: QMQQQMQQ

(c) $10^6 = (1111\,0100\,0010\,0100\,0000)_2 \quad \Longrightarrow \quad 25$ Multiplikationen

Mit $x = 1{,}000\,001$ und QMQMQMQQMQQQQQMQQQMQQQQQQ folgt

$\mathrm{e}_n = 2{,}718280469$ genauso wie bei der direkten Eingabe des Terms $1{,}000\,001^{1\,000\,000}$.

(d) Zeigt der Rechner z.B. bei $n = 10^{13}$ noch das Ergebnis 2,71828..., bei $n = 10^{14}$ aber das Ergebnis 1, dann stellt er intern $1 + 10^{-13} = 1{,}000\,000\,000\,000\,1$ noch richtig dar, $1 + 10^{-14}$ wird aber auf 1 gerundet: intern 14 geltende Ziffern.

(e) Man rechnet rekursiv:

$$E_{n+1} = E_n + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{E_n}{e} - 1$$

n	E_n	δ_{rel}
0	1,0	$-6{,}321205588 \cdot 10^{-1}$
1	2,0	$-2{,}642411177 \cdot 10^{-1}$
2	2,5	$-8{,}030139707 \cdot 10^{-2}$
3	2,666666667	$-1{,}898815688 \cdot 10^{-2}$
4	2,708333333	$-3{,}659846827 \cdot 10^{-3}$
5	2,716666667	$-5{,}941848176 \cdot 10^{-4}$
6	2,718055556	$-8{,}324114929 \cdot 10^{-5}$
7	2,718253968	$-1{,}024919667 \cdot 10^{-5}$
8	2,71827877	$-1{,}125202598 \cdot 10^{-6}$
9	2,718281526	$-1{,}114254783 \cdot 10^{-7}$
10	2,718281801	$-1{,}004776638 \cdot 10^{-8}$
11	2,718281826	$-8{,}316107427 \cdot 10^{-10}$

4. (a) $f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (1+x)\mathrm{e}^x$
   (b) $g'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$
   (c) $h'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} - 2x^2\mathrm{e}^{-x^2} = (1-2x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$
   (d) $k'(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{x^2} = \dfrac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}$
   (e) $r'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = x(2-x)\mathrm{e}^{-x}$
   (f) $s'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2} - 2x^3\mathrm{e}^{-x^2} = 2x\left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2}$
   (g) $t'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\sin x + \mathrm{e}^{-x}\cos x = (\cos x - \sin x)\mathrm{e}^{-x}$
   (h) $u'(x) = \mathrm{e}^{\sin x}\cos x$
   (i) $v'(x) = \mathrm{e}^x \cos\left(\mathrm{e}^x\right)$

5. (a) $x = \ln 100 = 2\ln 10 \approx$
   (b) $-0{,}2x = -3\ln 10 \quad\Longrightarrow\quad x = 15\ln 10 \approx$
   (c) $x = -2x + 1 \quad\Longrightarrow\quad x = \dfrac{1}{3}$
   (d) Mit dem Newtonverfahren berechnet man die Nullstelle der Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x - 3x$:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - 3 \quad\Longrightarrow\quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\mathrm{e}^{x_n} - 3x_n}{\mathrm{e}^{x_n} - 3} = \frac{(x_n-1)\mathrm{e}^{x_n}}{\mathrm{e}^{x_n} - 3}$$

   Mit den Startwerten $x_{01} = 0{,}6$ und $x_{02} = 1{,}5$, die man z.B. einer Grafik entnimmt, folgen die beiden Lösungen $x_1 = 0{,}6190612867$ und $x_2 = 1{,}512134552$.

6. (a) $\ln x = \pm 2 \quad\Longrightarrow\quad x_1 = \mathrm{e}^2, \quad x_2 = \mathrm{e}^{-2}$
   (b) $x = \mathrm{e}^{-10^5} = 10^{-\frac{-10^5}{\ln 10}} = 10^{-43429{,}44819} = 10^{-0{,}44819} \cdot 10^{-43429} = 0{,}35629 \cdot 10^{-43429}$

$$x = 0,\underbrace{0000\ldots000}_{43429\text{ Nullen}}35629\ldots$$

(c) $\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{3}\ln x = \frac{5}{6}\ln x = 2 \quad\Longrightarrow\quad x = \mathrm{e}^{\frac{12}{5}} = \sqrt[5]{\mathrm{e}^{12}} \approx 11{,}023$

(d) $\frac{1}{2}\ln(1-x^2) = -\frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad 1-x^2 = \mathrm{e}^{-1} \quad\Longrightarrow\quad x = \pm\sqrt{1-\frac{1}{\mathrm{e}}} \approx \pm 0{,}795$

(e) keine Lösung

(f) Wir suchen eine Nullstelle von $f(x) = \mathrm{e}^x + \ln x$ mit dem Newtonverfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} = x_n - \frac{\mathrm{e}^x + \ln x}{\mathrm{e}^x + \frac{1}{x}}$$

$$x \approx 0{,}2698741376$$

$$\begin{aligned} x_0 &= 0{,}5 \\ x_1 &= 0{,}2381071287 \\ x_2 &= 0{,}2684966975 \\ x_3 &= 0{,}2698717782 \\ x_4 &= 0{,}2698741376 \\ x_5 &= 0{,}2698741376 \end{aligned}$$

7. (a) $\alpha = \frac{2\pi}{6{,}626\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}} \cdot \sqrt{2\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}\cdot 2\cdot 1{,}0\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}} = 7{,}247\cdot 10^9\,\frac{1}{\mathrm{m}}$

$$2\alpha d = 1{,}449 \text{ und } \gamma = 3{,}84 \quad\Longrightarrow\quad T = 0{,}606 = 60{,}6\%$$

(b) $W_0 = mgy = 10^{-4}\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\cdot 0{,}02\,\mathrm{m} = 1{,}962\cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}$

$$W = \frac{m}{2}v^2 = 5\cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg}\cdot\left(0{,}02\,\frac{\mathrm{m}}{2}\right)^2 = 2\cdot 10^{-8}\,\mathrm{J}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{6{,}626\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}} \cdot \sqrt{2\cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg}\cdot 1{,}96\cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}} = 5{,}94\cdot 10^{29}\,\frac{1}{\mathrm{m}}$$

$$k = 2\alpha d = 2{,}377\cdot 10^{27} \text{ und } \gamma = 0{,}0163$$

Die letzten drei Summanden im Nenner von T kann man vernachlässigen:

$$T = \frac{\gamma}{\mathrm{e}^k} = \gamma\mathrm{e}^{-k}$$

Wegen

$$\mathrm{e} = \mathrm{e}^{\frac{\ln 10}{\ln 10}} = 10^{\frac{1}{\ln 10}}$$

gilt

$$T = \gamma\cdot 10^{-\frac{k}{\ln 10}} = 10^{\lg\gamma - \frac{k}{\ln 10}} = 10^{-1{,}03\cdot 10^{27}}$$

Also $1{,}03\cdot 10^{27}$ Nullen zwischen Komma und der ersten Ziffer ungleich null, mit der Länge

$$L = 5\cdot 10^{27}\,\mathrm{cm} = 5\cdot 10^{25}\,\mathrm{m} = 5{,}3\cdot 10^9\,\mathrm{LJ}$$

Die Kugel müsste ungefähr $\frac{1}{T} = 10^{10^{27}}$-mal an die Gefäßwand stoßen, um einmal zu tunneln.

8. (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{a\cos ax}{b\cos bx} = \frac{a}{b}$

(b) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

(c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{a}}} = \lim\limits_{x\to a} \sqrt{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}} = 0$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = \infty$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{100}}{\mathrm{e}^{0{,}01x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{100 mal de l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{100!}{0{,}01^{100}\mathrm{e}^{0{,}01x}} = 0$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\mathrm{e}^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\mathrm{e}^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x\mathrm{e}^x} = 0$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{x}\right) = \infty$

(h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2}-\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}-1\right) = (\infty\cdot\infty) = \infty$

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+\sin x}{2x-\sin x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{\sin x}{x}}{2-\frac{\sin x}{x}} = \frac{2}{2} = 1$

9. (a) $x = \mathrm{e}^{1000} = 10^{\frac{1000}{\ln 10}} = 10^{434{,}29448} = 10^{0{,}29448}\cdot 10^{434} = 1{,}97\cdot 10^{434}$

(b) $y = \mathrm{e}^{-5^5} = 10^{-\frac{3125}{\ln 10}} = 10^{-1357{,}170256} = 10^{0{,}829744}\cdot 10^{-1358} = 6{,}76\cdot 10^{-1358}$

(c) $z = 9^{9^9} = 10^{387\,420\,489\cdot\lg 9} = 10^{369\,693\,099+0{,}6} \approx 4\cdot 10^{369\,693\,099}$

10.

11. Quelle: mathematik lehren (2001), H. 106, S. 55-57

(a) Beim absoluten Zuwachs wird die Differenz gebildet, beim relativen Zuwachs der Quotient.

(b) Der Wachstumsfaktor q ist größer als 1; für den Zerfallsfaktor gilt: $0 < q < 1$

(c) In Prozent.

(d) Die Halbwertszeit gibt an, in welchem Zeitraum sich bei einem Zerfallsprozess die Substanz jeweils um die Hälfte verringert.

(e) Äquidistant bedeutet den gleichen Abstand habend.

(f) Der Logarithmus a einer Grundzahl b ist die Hochzahl k, mit der man b potenzieren muss, um a zu erhalten.

(g) Hochzahl oder Exponent

(h) Numerus

(i) Grundzahl = Basis; Hochzahl = Exponent

(j) $\lg x$

(k) $\log_2 16 = x$

(l) $r = q - 1 = \frac{W_{i+1}}{W_i} - 1 = \frac{W_{i+1} - W_i}{W_i}$

(m) $x = 6$

(n) $x = 4$

(o) $x = 4$

12. (a) $d = W_{i+1} - W_i$

(b) $d = W_{i+1} - W_i$

(c) Die Differenz d gibt an, um wie viel der neue Wert gegenüber dem vorhergehenden Wert in der entsprechenden Zeiteinheit gestiegen ist.
Die Differenz d gibt den (regelmäßigen) Zuwachs pro Zeiteinheit an.

(d) $q = \frac{W_{i+1}}{W_i}$

(e) Der Quotient q gibt an, auf welchen Anteil des vorausgegangenen Wertes der neue Wert angestiegen (bzw. gesunken) ist.

(f) Der absolute Zuwachs

(g) i. Wachstum einer Bakterienkultur - radioaktiver Zerfall - Abbau eines Pflanzenschutzmittels - Verwesung eines abgestorbenen Organismus

ii. Zinsen ohne Zinseszins - Füllen bei gleichmäßiger Fließgeschwindigkeit

(h) $K_n = K \cdot q^n = K \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$

(i) i. Zinsfaktor $q = 1 + \frac{p}{100}$ mit Zinssatz p

ii. Wachstumsfaktor q: $f(t + h) = q \cdot f(t)$ bzw. $q = \frac{f(t+h)}{f(t)}$

(j) Indem man die beiden Hochzahlen multipliziert. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

(k) Alle Graphen gehen durch $(1|0)$ - monoton steigend für $a > 1$ - monoton fallend für $0 < a < 1$ - y-Achse ist Asymptote

(l) Wertebereich ist R^+ für alle $a \in R^+$ - alle Graphen durch $(0|1)$ - monoton steigend für $a > 1$

(m) Der Graph der Exponentialfunktion

(n) $P(0|1)$

(o) $P(1|0)$

4. Verhalten von Exponential- und Logarithmusfunktionen

1. (a) $(0|e^t)$, $(-t|0)$, $lim_{x\to\infty} = 0$.
   (b) Max $(1-t|\frac{1}{t}\ e^{2t-1})$, Wendepunkt bei $x = 2-t$
   (c) $t = \frac{1}{2}$

2. (a) $Y(0|\ln(a+e^{-a^2})$, $\lim_{x\to\pm\infty} = \ln a$
   (b) $f(a+x') = f(a-x')$
   (c) $Max(a|\ln(a+1))$, Ortkurve: $g(x) = \ln(x+1)$
   (d)
   (e) $p(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \ln 2$

3. (a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x^2 - x - 6)$ mit NS bei $x_{11} = -2$ und $x_{12} = 3$. Da der Graf von f eine nach oben geöffnete Parabel ist, gilt

$$\begin{array}{lll} f'(x) > 0 & (f \text{ streng steigend}) & \text{für } -\infty < x < -2 \text{ oder } 3 < x < \infty \\ f'(x) < 0 & (f \text{ streng fallend}) & \text{für } -2 < x < 3 \end{array}$$

   (b) $g'(x) = 1 + \cos x \geqq 0$ für alle x und nur isolierte NS von g' $\Longrightarrow$ f streng steigend in $\mathbb{R}$.
   (c) $h'(x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x)$. Wegen $\mathrm{e}^{-x} > 0$ ist das Vorzeichen von $h'(x)$ gleich dem Vorzeichen von $\cos x - \sin x$:

$$h'(x) > 0 \Longleftrightarrow \cos x - \sin x > 0 \Longleftrightarrow \cos x > \sin x$$

$$\begin{array}{rcl} \text{streng steigend} \Longleftrightarrow h'(x) > 0 & \Longleftrightarrow & -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\ \text{streng fallend} \Longleftrightarrow h'(x) < 0 & \Longleftrightarrow & \frac{3\pi}{4} + 2k < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

4. Einzige Nullstelle bei $x_0 = 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \left(\dfrac{\infty}{0^+}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{\mathrm{e}^{x-1}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\mathrm{e}^{x-1}} = 0^+$

$f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{1-x}$

$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{1-x} - x^2\mathrm{e}^{1-x} = x(2-x)\mathrm{e}^{1-x}$

$f''(x) = 2\mathrm{e}^{1-x} - 2x\mathrm{e}^{1-x} - 2x\mathrm{e}^{1-x} + x^2\mathrm{e}^{1-x} = (2-4x+x^2)\mathrm{e}^{1-x}$

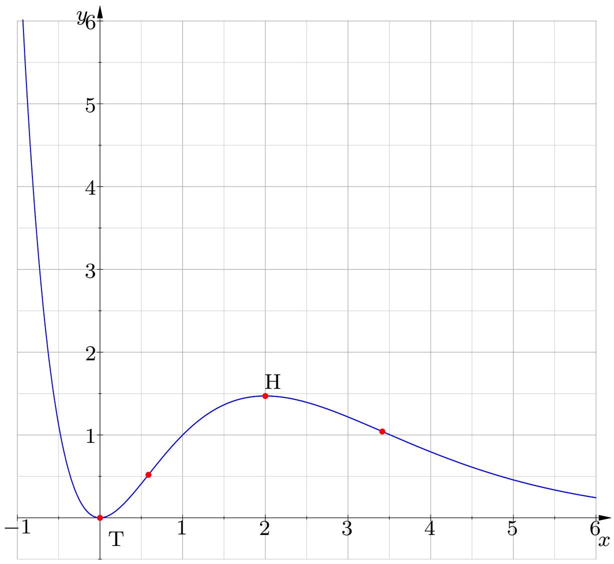
$f'''(x) = -2\mathrm{e}^{1-x} - 4\mathrm{e}^{1-x} + 4x\mathrm{e}^{1-x} + 2x\mathrm{e}^{1-x} - x^2\mathrm{e}^{1-x} = (-x^2+6x-6)\mathrm{e}^{1-x}$

$f'(x) = 0 \implies x_{11} = 0, \quad x_{12} = 2, \quad f''(x) = 0 \implies x_{21} = 2-\sqrt{2}, \quad x_{22} = 2+\sqrt{2}$

Da der Graf von $x(2-x)$ eine nach unten geöffnete Parabel ist, folgt
$f'(x) < 0$ für $x < 0$ und $x > 2$, $f'(x) > 0$ für $0 < x < 2 \implies$

f streng fallend in $]-\infty; 0[$ und $]2; +\infty[$, f streng steigend in $]0; 2[\implies$

Tiefpunkt bei $\mathrm{T}\,(0|0)$ und Hochpunkt bei $\mathrm{T}\left(2\middle|\dfrac{4}{\mathrm{e}}\right)$



5. Einzige Nullstelle bei $x_0 = 1$.

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \left(\dfrac{-\infty}{0^+}\right) = -\infty$

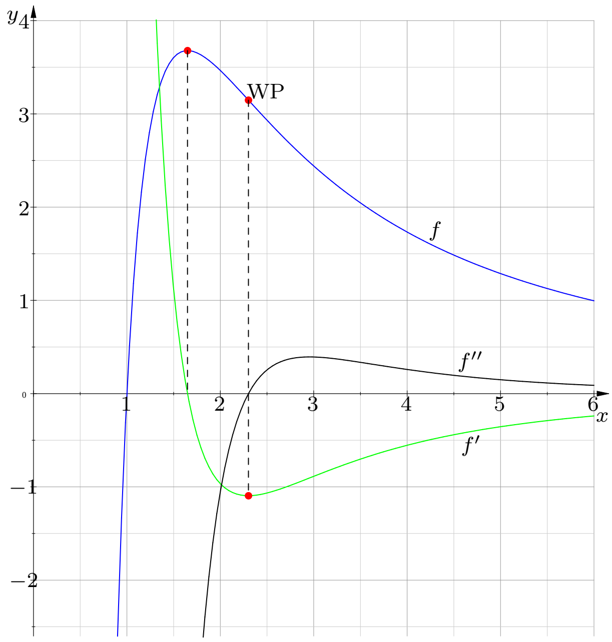
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{20}{x}}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{10}{x^2} = 0^+$

$f'(x) = \dfrac{20(1-2\ln x)}{x^3}$

$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = \sqrt{\mathrm{e}},\ f'(x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad x < \sqrt{\mathrm{e}} \quad \Longrightarrow$

f streng steigend in $]0; \sqrt{\mathrm{e}}[$ und f streng fallend in $]\sqrt{\mathrm{e}}; +\infty[\quad \Longrightarrow$

$$\text{Hochpunkt bei H}\left(\sqrt{\mathrm{e}}\,\middle|\,\frac{10}{\mathrm{e}}\right) \approx \mathrm{H}\,(1{,}65|3{,}68)$$



6. (a) Nullstellen: $x_{a0} = -\dfrac{2}{a}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \left(\frac{-\operatorname{sgn}(a)\cdot\infty}{0^+}\right) = -\operatorname{sgn}(a)\cdot\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \left(\frac{\operatorname{sgn}(a)\cdot\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{a}{2\mathrm{e}^x} = \left(\frac{a}{+\infty}\right) = 0^{\pm}$$

(b) $f_a(x) = f_b(x) \quad \Longrightarrow \quad ax = bx \quad \Longrightarrow \quad (a-b)x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0\ (a \neq b)$

Der gemeinsame Punkt aller Grafen ist also $(0|1)$.

(c) $f'_a(x) = \dfrac{-ax + a - 2}{2\mathrm{e}^x}$

$f'_a(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{a1} = \dfrac{a-2}{a} = 1 - \dfrac{2}{a}, \quad f_a(x_{a1}) = \dfrac{a}{2}\mathrm{e}^{\frac{2-a}{a}}$

$f'_a(x) > 0 \Longleftrightarrow x < \dfrac{a-2}{a}$ für $a > 0$ oder $x > \dfrac{a-2}{a}$ für $a < 0$.

$a > 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ steigend in $]-\infty; \frac{a-2}{a}[$ und fallend in $]\frac{a-2}{a}; \infty[\quad \Longrightarrow$

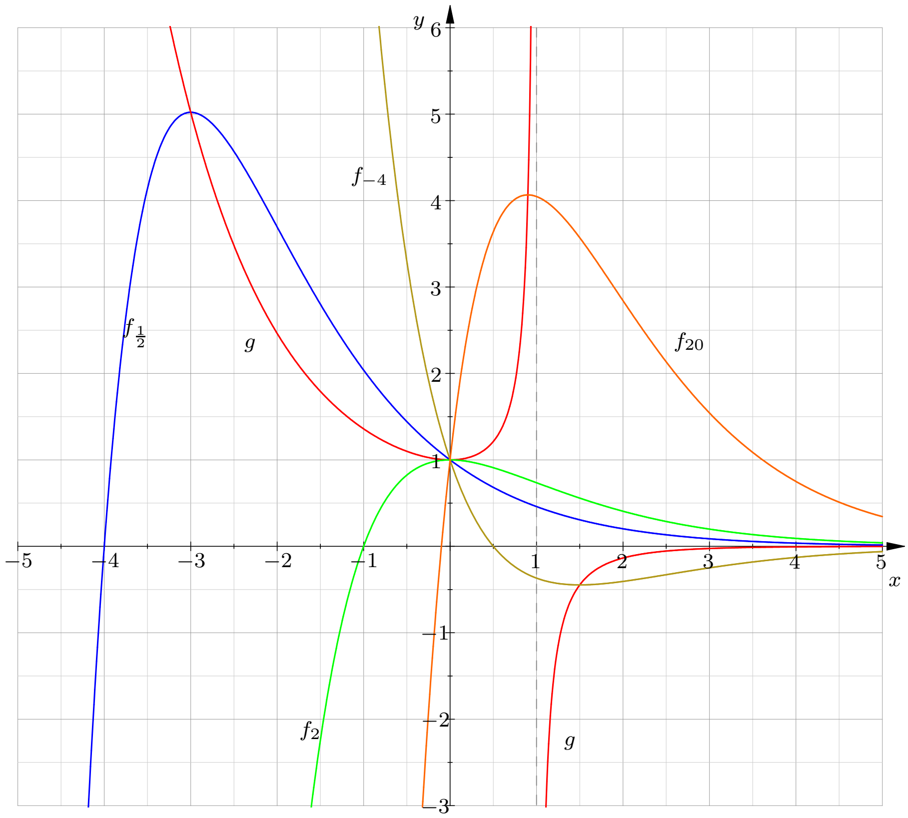
Hochpunkt bei H $\left(\frac{a-2}{a}\middle|\frac{a}{2}\mathrm{e}^{\frac{2-a}{a}}\right)$

$a < 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ fallend in $]-\infty; \frac{a-2}{a}[$ und steigend in $]\frac{a-2}{a}; \infty[\quad \Longrightarrow$

Tiefpunkt bei $\mathrm{H}\left(\frac{a-2}{a}\middle|\frac{a}{2}\mathrm{e}^{\frac{2-a}{a}}\right)$

(d)

a	0,5	2	20	-4
x_{a0}	-4	-1	$-0{,}1$	0,5
x_{a1}	-3	0	0,9	1,5
$f(x_{a1})$	$\frac{\mathrm{e}^3}{4} \approx 5{,}02$	1	$\frac{10}{\mathrm{e}^{0,9}} \approx 4{,}07$	$-\frac{2}{\mathrm{e}^{1,5}} \approx -0{,}446$



(e) $f'_{0,5}(0) = -0{,}75 = \tan\alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = -36{,}87°$

$f'_{20}(0) = 9 = \tan\beta \quad \Longrightarrow \quad \beta = 83{,}66°$

Schnittwinkel: $\varphi = 180° - (\beta + |\alpha|) = 59{,}47°$

(f) $x_1 = 1 - \frac{2}{a} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{2} = \frac{1}{1-x_1} \quad \Longrightarrow \quad y_1 = \frac{a}{2}\mathrm{e}^{\frac{2-a}{a}} = \frac{\mathrm{e}^{-x_1}}{1-x_1} \quad \Longrightarrow$

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$$

Teil III.

Anwendungen der Differentialrechnung

5. Extremwertaufgaben

1. (a) $b = \dfrac{L}{2} - x \quad \Longrightarrow \quad h = \sqrt{b^2 - x^2} = \sqrt{\left(\dfrac{L}{2} - x\right)^2 - x^2} = \sqrt{\dfrac{L^2}{4} - Lx}$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot h = x\sqrt{\frac{L}{4}\,(L - 4x)} = \frac{\sqrt{L}}{2}\sqrt{x^2\,(L-4x)} = \frac{\sqrt{L}}{2}\sqrt{Lx^2 - 4x^3}$$

   (b) $A(x)$ ist maximal, wenn der Radikand $f(x) = Lx^2 - 4x^3$ maximal ist.

$$f'(x) = 2Lx - 12x^2 = 2x(L - 6x)$$

$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = \frac{L}{6}$$

$$f''(x) = 2L - 24x \quad \Longrightarrow$$

$$f''(x_1) = 2L > 0 \text{ (Minimum)}, \qquad f''(x_2) = 2L - \frac{24L}{6} = -2L < 0 \text{ (Maximum)}$$

   Also: $x_0 = \dfrac{L}{6}$.

   Aus $x = x_0$ folgt $b = \dfrac{L}{2} - \dfrac{L}{6} = \dfrac{L}{3}$ und $2x = \dfrac{L}{3}$, d.h. das Dreieck ist gleichseitig.

   (c)

$$A(x_0) = \frac{\sqrt{L}}{2}\sqrt{Lx_0^2 - 4x_0^3} = \frac{\sqrt{L}}{2}\sqrt{x_0^2(L - 4x_0)} =$$
$$= \frac{\sqrt{L}}{2}\sqrt{\frac{L^2}{6^2}\left(L - \frac{4L}{6}\right)} = \frac{\sqrt{L}}{2} \cdot \frac{L}{6}\sqrt{\frac{L}{3}} = \frac{L^2}{12\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{36}\,L^2$$

2. (a) Preis für die Dämmung: $k_1(x) = 50\,\frac{€}{\mathrm{m}^2} \cdot A \cdot 1{,}5 + \alpha \cdot x \cdot A \cdot 1{,}5 = 37\,500\,€ + 600\,€ \cdot x$

   Ölmenge in Litern: $m = \dfrac{\Delta W}{10\,\mathrm{kWh}} = \dfrac{\beta A \Delta t}{10\,\mathrm{kWh}} \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{3} + \frac{x}{2}} = \dfrac{10^5\,\mathrm{l}}{\frac{1}{3} + \frac{x}{2}}$

   Ölpreis: $k_2(x) = m \cdot 1{,}2\dfrac{€}{\mathrm{l}} = \dfrac{120\,000\,€}{\frac{1}{3} + \frac{x}{2}} \qquad \Longrightarrow$

$$k(x) = k_1(x) + k_2(x) = 37\,500\,€ + 600\,€ \cdot x + \frac{120\,000\,€}{\frac{1}{3} + \frac{x}{2}}$$

(b) Umformen von k: $k(x) = p + qx + \dfrac{6r}{2+3x} \quad\Longrightarrow$

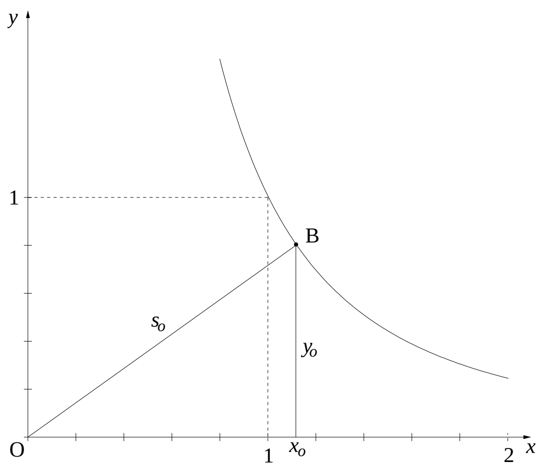
$$k'(x) = q - \frac{6r \cdot 3}{(2+3x)^2} = 0 \quad\Longrightarrow\quad x = x_0 = -\frac{2}{3} \overset{+}{(-)} \frac{1}{3}\sqrt{\frac{18r}{q}} = -\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{2r}{q}}$$

$$x_0 = -\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{2 \cdot 120\,000\,€}{600\,€}} = -\frac{2}{3} + 20 = 19\frac{1}{3}$$

(c) $k(18) = 61\,157{,}14\,€$, $k(20) = 61\,112{,}90\,€$, $k(0) = 397\,500{,}00\,€$

$$\frac{k(20)}{k(0)} = 0{,}154 = 15{,}4\% \quad\Longrightarrow\quad \text{um } 84{,}6\% \text{ kleiner}$$

3. (a)



(b) $s(x) = \sqrt{x^2 + f(x)^2} = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^4}}$

$$s'(x) = \frac{2x - \frac{4}{x^5}}{2\sqrt{x^2 + f(x)^2}}$$

$s'(x_0) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_0 = 2^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}122$

$y_0 = f(x_0) = 2^{-\frac{1}{3}} \approx 0{,}7937$

$\lim\limits_{x\to 0^+} s(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to +\infty} s(x) = +\infty$ und nur eine Nullstelle von s' $\Longrightarrow$ relatives Minimum bei B$\,(x_0|y_0)$

(c) $s_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2} \approx 1{,}375$

In der Zeichnung hat s_0 die Länge $5 \cdot 1{,}375\,\text{cm} = 6{,}875\,\text{cm}$, in der Wirklichkeit also $2000 \cdot 6{,}875\,\text{cm} = 137{,}5\,\text{m}$.

4. (a) $t = \dfrac{s_1 + s_2}{c} = \dfrac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{(l - x_1)^2 + y_2^2}}{c}$

$0 = \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x_1} = \dfrac{x_1}{cs_1} - \dfrac{x_2}{cs_2} = \dfrac{\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2}{c} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$

(b) $t = \dfrac{s_1 n_1}{c} + \dfrac{s_2 n_2}{c} = \dfrac{n_1\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{c} + \dfrac{n_2\sqrt{(l - x_1)^2 + y_2^2}}{c}$

$0 = \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x_1} = \dfrac{n_1 x_1}{cs_1} - \dfrac{n_2 x_2}{cs_2} = \dfrac{n_1\sin\alpha_1 - n_2\sin\alpha_2}{c} \Longrightarrow \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}$

5. (a) $V = r^2\pi h \Rightarrow h(r) = \frac{V}{r^2\pi} \Rightarrow A(r) = 2r^2\pi + \frac{2V}{r}$

$A'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Da $A(0) = \infty$ und $\lim\limits_{r\to\infty} A(r) = \infty$ handelt es sich hierbei um ein Minimum.

(b) $A = 2r\pi(r+h) \Rightarrow h(r) = \frac{A}{2r\pi} - r \Rightarrow V(r) = \frac{1}{2}Ar - r^3\pi$
$V'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$.
Aus einer Grenzwertbetrachtung von $V(r)$ schließt man auf ein Maximum.

6. $p(x) = x(15-x) \Rightarrow p'(x) = 15 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 7{,}5$
Maximum, da der Graph von $p(x)$ eine nach unten geöffnete Parabel ist.

7. $b = 2c, a = 30 - 3c \Rightarrow V(c) = (30-3c) \cdot 2c \cdot c$
$V'(c) = 120c - 18c^2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0, c_2 = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$
Maximum, da $V'(6) > 0$ und $V'(7) < 0$.

8. (a) $V(x) = x(1\mathrm{m} - 2x)^2 = 1\mathrm{m}^2 x - 4\mathrm{m}x^2 + 4x^3$
(b) $V'(x) = 1\mathrm{m}^2 - 8\mathrm{m}x + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}\mathrm{m}$ oder $x_2 = \frac{1}{6}\mathrm{m}$
$V(0) = V(\frac{1}{2}\mathrm{m}) = 0$.
$V''(x) = -8\mathrm{m} + 24x \Rightarrow V''(\frac{1}{6}\mathrm{m}) = -4\mathrm{m} < 0 \Rightarrow$
Maximum bei $x_2 = \frac{1}{6}\mathrm{m}$.
(c) $V(\frac{1}{6}\mathrm{m}) = \frac{2}{27}\mathrm{m}^3$

9. (a) $V(x) = x(a-2x)^2 = a^2x - 4ax^2 + 4x^3$
(b) $V'(x) = a^2 - 8ax + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}a$ oder $x_2 = \frac{1}{6}a$
$V(0) = V(\frac{1}{2}a) = 0$.
$V''(x) = -8a + 24x \Rightarrow V''(\frac{1}{6}a) = -4a < 0 \Rightarrow$
Maximum bei $x_2 = \frac{1}{6}a$.
(c) $V(\frac{1}{6}a) = \frac{2}{27}a^3$

10. (a) $V(x) = x(a-2x)(b-2x) = abx - 2(a+b)x^2 + 4x^3$
(b) $V'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab = 0 \Leftrightarrow$
$x_1 = \frac{1}{6}(a + b + \sqrt{a^2+b^2-ab})$ oder $x_2 = \frac{1}{6}(a + b - \sqrt{a^2+b^2-ab})$
$V''(x) = -4(a+b) + 24x \Rightarrow$
$V''(x_1) = 4\sqrt{a^2+b^2-ab} > 0 \Rightarrow$ Minimum bei x_1
$V''(x_2) = -4\sqrt{a^2+b^2-ab} < 0 \Rightarrow$ Maximum bei x_2.

11. (a) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_{2/3} = \pm 1$
(b)
(c) $A'(x) = (x \cdot f(x))' = 5x^4 - 6x^2 + 1 = 0 \Rightarrow$
$x_{1/2} = \frac{1}{10}(6 \pm \sqrt{36-20}) = \frac{1}{10}(6 \pm 4) \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{5}\sqrt{5}$.
$A''(x) = 20x^3 - 12x$,

$A''(1) > 0$, also Minimum.
$A''(\frac{1}{5}) = -\frac{8}{5}\sqrt{5} < 0$, also Maximum. Also: $\mathrm{P}\big(\frac{1}{5}\sqrt{5}\,|\,0{,}64\big)$

12. (a) $P(2|0)$, $Q(r\cos\varphi|r\sin\varphi)$, $R(-r\cos\varphi|r\sin\varphi)$, $S(-2|0)$
    (b) $A(\varphi) = 4(1+\cos\varphi)\sin\varphi$, $\varphi \in [0; 90°]$
    (c) $A(30°) = 3{,}732$, $A(45°) = 4{,}828$, $A(60°) = 5{,}196$, $A(90°) = 4$
    (d) $$\begin{aligned} A'(\varphi) &= 4(\cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 4(\cos\varphi + \cos(2\varphi)) \\ &= 8\cdot\cos(\tfrac{3}{2}\varphi)\cdot\cos(\tfrac{1}{2}\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 60° \end{aligned}$$

13. (a)
    (b) $A(\varphi) = \cos\varphi\cdot(1+\sin\varphi)$, $\varphi \in [-90°; 90°]$
    (c) $$\begin{aligned} A'(\varphi) &= -\sin\varphi\cdot(1+\sin\varphi) + \cos^2\varphi \qquad \Leftrightarrow \\ &= -\sin\varphi - \sin^2\varphi + 1 - \sin^2\varphi \\ &= 1 - \sin\varphi - 2\sin^2\varphi = (1-2\sin\varphi)(1+\sin\varphi) = 0 \end{aligned}$$
    1. Fall: $\sin\varphi = -1$. Für $\sin\varphi = -1$ folgt $A(\varphi) = 0$, also kein Maximum!
    2. Fall: $\sin\varphi = \frac{1}{2}$ ($\Leftrightarrow \varphi = 30°$!).
    Bei $\varphi = 30°$ liegt ein Maximum vor, da $A(0°) = 1$, $A(90°) = 0$ und $A(30°) = \frac{3}{4}\sqrt{3} \approx 1{,}299$.

14. (a) $b^2 + h^2 = d^2 \Rightarrow V(b) = b\cdot\sqrt{d^2 - b^2}\cdot l$. Da das Volumen immer positiv ist, ist $V(b)$ genau dann maximal, wenn $V^2(b) = b^2\cdot(d^2 - b^2)\cdot l^2$ maximal ist $\Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}d$. $\Rightarrow$ 64% des Baumes werden genutzt.
    (b) $bh^2 = b\cdot(d^2 - b^2)$ ist maximal, wenn $b = \frac{1}{\sqrt{3}}d \Rightarrow$ 60% des Baumes werden genutzt.

15. (a) $W(Z) = (m_p - m_n)c^2 Z + m_n A c^2 - 6\varepsilon A + 6\varepsilon A^{\frac{2}{3}} + \beta\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \eta\frac{(A-2Z)^2}{A}$
    (b) $W'(Z) = -\alpha + Z\left(\frac{2\beta}{A^{\frac{1}{3}}} + \frac{8\eta}{A}\right) - 4\eta \Rightarrow$
    minimale Bindungsenergie für
    $$Z = \frac{A}{2}\cdot\frac{1+\frac{\alpha}{4\eta}}{1+\frac{\beta}{4\eta}A^{\frac{2}{3}}} = \frac{A}{2}\cdot\frac{1+9\cdot10^{-3}}{1+7{,}4\cdot10^{-3}\cdot A^{\frac{2}{3}}}$$
    (c) Für kleine A erhält man etwa gleich viele Neutronen und Protonen. Je größer A ist, umso mehr weicht die Protonenzahl von $\frac{A}{2}$ ab (kleiner).
    TIP: $Z(A)$ und $\frac{A}{2}$ mit Funktionsplotprogramm zeichnen!

16. (a) Schwerpunkt jeweils bei $\frac{H}{2}$ (H: Dosenhöhe)

(b)

$$S(h) = \frac{m_D \frac{H}{2} + m_L \frac{h}{H} \frac{h}{2}}{m_D + m_L \frac{h}{H}} = \frac{m_D H^2 + m_L h^2}{2m_D H + 2m_L h}$$

$S'(h) = 0 \Leftrightarrow m_L h^2 + 2m_D Hh - m_D H^2 = 0 \Leftrightarrow$
$h = \frac{1}{m_L}\left(-m_D H \pm H\sqrt{m_D(m_D + m_L)}\right)$
Da der Term unter der Wurzel größer als m_D ist und für h nur positive Werte sinnvoll sind, folgt

$$h = \frac{1}{m_L}\left(-m_D H + H\sqrt{m_D(m_D + m_L)}\right)$$

(c) $h = 0{,}28989H = 4{,}6\,\mathrm{cm}$

17. Bei einem zylindrischen Turm ist eine Querschnittsfläche, die um den Winkel ϕ gegen die Horizontale geneigt ist eine Ellipse mit der Fläche $\frac{r^2\pi}{\cos\phi}$. Die Kraft parallel zur Fläche beträgt $F_0 \sin\phi$ (F_0 ist die Gewichtskraft des abrutschenden Teils).
$\Rightarrow \sigma = \frac{F_0}{r^2\pi}\sin\phi\cos\phi$
σ ist bei festem F_0 und $r^2\pi$ für den Winkel $\phi = 45°$ maximal.

18. (a) $a + b = c = \text{konst} \Longrightarrow a \cdot b = ac - a^2 = f(a)$
1. Lösungsweg: $f'(a) = c - 2a = 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{2}c$, $f''(a) = -2 < 0$
Also: Produkt maximal für $a = \frac{1}{2}c$
2. Lösungsweg: $f(a)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel $\Longrightarrow$ $f(a)$ maximal am Scheitel $(\frac{1}{2}c|\frac{1}{4}c^2)$

(b) $a \cdot b = c = \text{konst} \Longrightarrow a + b = a + \dfrac{c}{a} = f(a)$
$f'(a) = 1 - \frac{c}{a^2} = 0 \Longrightarrow a = \pm\sqrt{c}$, $f''(a) = 2\dfrac{c}{a^3}$
1. Fall: $c > 0$, d. h. a und b haben gleiches Vorzeichen.
Für $a, b > 0$ ist $f''(a) > 0$ und damit erhält man für $a = b = \sqrt{c}$ ein Minimum. Für $a, b < 0$ ist $f''(a) < 0$ und damit erhält man für $a = b = -\sqrt{c}$ ein Maximum.
2. Fall: $c < 0 \Longrightarrow f'(a) > 1$, also kein Extremum.

19. Mit $m = \overline{\mathrm{SM}} > 0$ und $n = \overline{\mathrm{SN}} > 0$ folgt $A = \dfrac{1}{2}mn\sin\alpha \Longrightarrow$
$mn = \dfrac{2A}{\sin\alpha}$ und $m = \dfrac{2A}{n\sin\alpha}$.

$$\overline{\mathrm{MN}}^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha = \frac{4A^2}{n^2\sin^2\alpha} + n^2 - \frac{4A}{\tan\alpha} = f(n)$$

$$f'(n) = 0 \Longleftrightarrow n^4 = \frac{4A^2}{\sin^2\alpha} \Longrightarrow n = \sqrt{\frac{2A}{\sin\alpha}},\ m = \sqrt{\frac{2A}{\sin\alpha}}$$

20. $l = a + b$. Die Dreiecksfläche $A = ab\sin\alpha$ ist bei festem a und b maximal, wenn die Teilstücke einen Winkel von 90° einschließen. $\Rightarrow A(a) = ab = al - a^2$

1. Lösungsweg: $A'(a) = l - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}l$, $A''(a) = -2 < 0$, also Maximum für $a = b = \frac{1}{2}l$
2. Lösungsweg: $A(a)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel. Damit wird das Maximum am Scheitel $(\frac{1}{2}l|\frac{1}{4}l^2)$ angenommen.
3. Lösungsweg: Das Produkt zweier Zahlen mit konstanter Summe ist maximal, wenn die zwei Zahlen gleich groß sind.

21. $V(x) = x \cdot (8 - 2x) \cdot (5 - 2x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x \Rightarrow$
$V'(x) = 12x^2 - 52x + 40 = 0$ für $x_1 = 3\frac{1}{3}, x_2 = 1$
$V''(3\frac{1}{3}) > 0$, also Minimum bei $x_1 = 3\frac{1}{3}$
$V''(1) < 0$, also Maximum bei $x_2 = 1$

22. Seitenlängen des Rechtecks: a, $b \Longrightarrow A = ab \Longrightarrow d^2(a) = a^2 + \dfrac{A^2}{a^2}$
Minimum von d^2 bei $(\sqrt{A}, 2A) \Longrightarrow$ Minimum für $a = b = \sqrt{A}$, d.h. Quadrat

23.
$$d(x) = \sqrt{\left(3 - \sqrt{1 + \frac{1}{2}x^2}\right)^2 + (0 - x)^2}$$
gibt den Abstand eines Punktes A$(x|f(x))$ von P an. $d(x)^2$ und damit auch $d(x)$ (da $d(x) \geq 0$) hat nur ein Minimum bei P$(0|1)$.

24. $U(x) = 2\,x + \dfrac{2\,A}{x}, \quad U'(x) = 2 - \dfrac{2\,A}{x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = y = \sqrt{A}$

25. Mantelfläche: $A(r) = r\,s\,\pi = \sqrt{r^4\,\pi^2 + \dfrac{9\,V^2}{r^2}}$

$A(r)$ minimal $\Longleftrightarrow g(r) = r^4\,\pi^2 + \dfrac{9\,V^2}{r^2}$ minimal

$g'(r) = 4\,\pi^2\,r^3 - \dfrac{18\,V^2}{r^3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = r_0 = \sqrt[3]{\dfrac{3\,V}{\pi\sqrt{2}}}$

$g''(r) = 12\,\pi^2\,r^2 + \dfrac{54\,V^2}{r^4} > 0 \quad \Longrightarrow \quad A$ hat bei r_0 ein Minimum.

$h_0 = \dfrac{3\,V}{r_0^2\,\pi} = r_0\,\sqrt{2}$

26. (a) $r(x) = \left(1 + \dfrac{b}{x}\right)\sqrt{a^2 + x^2}$, $r'(x) = \dfrac{x^3 - b\,a^2}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}}$

$r'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = x_0 = a^{\frac{2}{3}}\,b^{\frac{1}{3}}$

$r'(x) < 0$ für $x < x_0$ und $r'(x) > 0$ für $x > x_0 \quad \Longrightarrow \quad$ rel. Min. von r bei x_0.

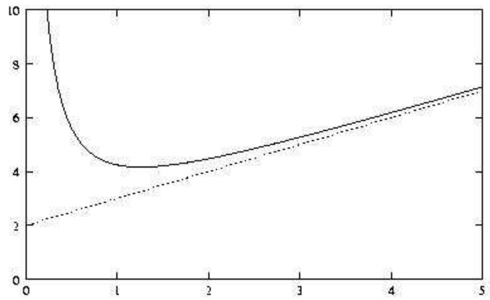
$L = r(x_0) = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

(b)
$$a = b \implies L = 2a\sqrt{2}$$
$$a \ll b \implies L \approx b$$
$$b = 2a \implies L \approx 4{,}16\,a$$

(c) $r(x) = \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)\sqrt{1+x^2} = (x+2)\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$

$$\lim_{x\to\infty}[r(x) - (x+2)] = \lim_{x\to\infty}\left[(x+2)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x+2}} \overset{\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^2}{x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 0$$



27. (a) $P(R) = R\,I^2 = U^2 \cdot \dfrac{R}{(R+R_\mathrm{i})^2}$

$$P'(R) = U^2 \cdot \frac{R_\mathrm{i} - R}{(R+R_\mathrm{i})^3} = 0 \implies R = R_\mathrm{i}$$

$$P''(R) = U^2 \cdot \frac{2R - 4R_\mathrm{i}}{(R+R_\mathrm{i})^4} \implies P''(R_\mathrm{i}) < 0 \implies \text{Maximum}$$

$$P_\mathrm{max} = P(R_\mathrm{i}) = \frac{U^2}{4R_\mathrm{i}}$$

28. (a) $V = \dfrac{13}{16}x^2 y, \quad y = \dfrac{16V}{13x^2}, \quad s = \dfrac{5}{8}x$

(b) $A'(x) = \dfrac{13}{4}x - \dfrac{40V}{13x^2}$

$$A'(x) = 0 \implies x = \sqrt[3]{\frac{160V}{169}}, \quad k = \frac{y}{x} = \frac{13}{10}$$

(c) $x = 8\,\mathrm{m}$, $y = 10{,}4\,\mathrm{m}$, $h = 5\,\mathrm{m}$ und $g = 3\,\mathrm{m}$

29. (a) $A_y(x) = 2\left[x\,y + \frac{V}{y} + \frac{V}{x}\right]$

(b) $A_y'(x) = 2\left[y - \frac{V}{x^2}\right] = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_y = \sqrt{\frac{V}{y}}$

(c) $F(y) = A_y(x_y) = 2\left[2\sqrt{V}\sqrt{y} + \frac{V}{y}\right]$

$F'(y) = 2\left[\frac{\sqrt{V}}{\sqrt{y}} - \frac{V}{y^2}\right] = 0 \quad\Longrightarrow\quad y = \sqrt[3]{V}$

Damit gilt auch $x = x_y = \sqrt[3]{V}$ und $z = \frac{V}{xy} = \sqrt[3]{V}$, Würfel!!

30. $p(x) = x(a-x)$, $\quad p'(x) = a - 2x = 0 \;\Longrightarrow\; x = \frac{a}{2}$
$p''(x) = -2 < 0 \;\Longrightarrow\;$ Maximum

31.

(a) $G(v) = a\,s\,B + b\,s\,B\,v^2 + \frac{c\,s}{v}$

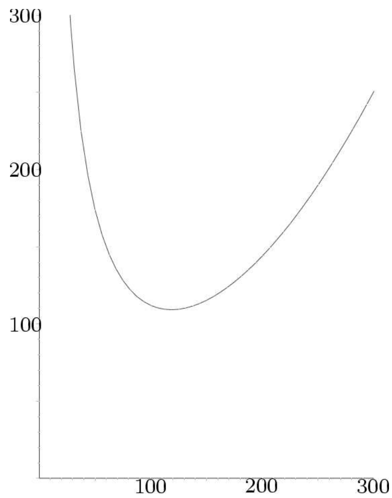
(b) $G'(v) = 2\,b\,s\,B\,v - \frac{c\,s}{v^2}$

$G'(v) = 0 \quad\Longrightarrow$

$v = v_0 = \sqrt[3]{\frac{c}{2\,b\,B}}$

(c) $v_0 = 118{,}6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

$G_0 = G(v_0) = 109{,}21$ €



32. f symmetrisch zur y-Achse. Für $x \geqq 0$ gilt $d = f(x) = a - x^n$. A $(-x|d)$, B $(x|d)$

$F(x) = \frac{1}{2}\cdot 2x \cdot f(x) = a\,x - x^{n+1}$

$F(x)$ maximal für $x_0 = \sqrt[n]{\frac{a}{n+1}}$, $d_0 = f(x_0) = \frac{n\,a}{n+1}$

33. A $\left(a - \sqrt{c+a^2}\middle|c\right)$, B $\left(a + \sqrt{c+a^2}\middle|c\right)$, $\quad \overline{\mathrm{AB}} = 2\sqrt{c+a^2}$

$F(c) = \frac{1}{2}\cdot|c|\cdot\overline{\mathrm{AB}} = |c|\cdot\sqrt{c+a^2}$

$$F'(c) = \pm \frac{3c + 2a^2}{2\sqrt{c + a^2}}$$

$F(c)$ hat relatives Maximum bei $c = -\frac{2\,a^2}{3}$ und ein relatives und absolutes Minimum bei $c = 0$ (Spitze von $F(c)$).

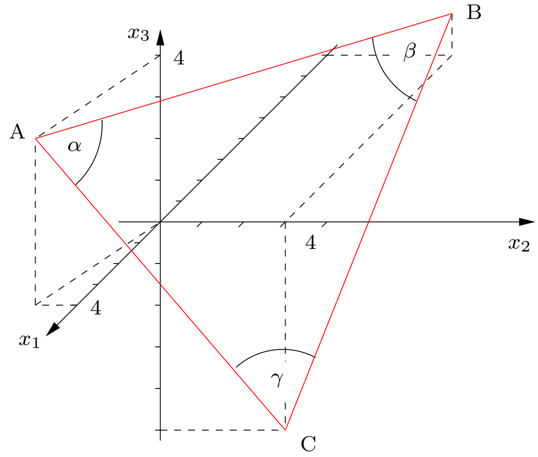
6. Funktionen anpassen

Teil IV.

Geometrie

7. Punkte und Körper im dreidimensionalen Koordinatensytem

1. (a)



(b) $a = \sqrt{(0-(-8))^2+(3-3)^2+(-5-1)^2} = \sqrt{8^2+0^2+6^2} = 10$

$b = \sqrt{(4-0)^2+(-1-3)^2+(4-(-5))^2} = \sqrt{4^2+4^2+9^2} = \sqrt{113}$

$c = \sqrt{(4-(-8))^2+(-1-3)^2+(4-1)^2} = \sqrt{12^2+4^2+3^2} = 13$

(c) $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{7\sqrt{113}}{113} \implies \alpha = 48{,}8^\circ$

$\cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{3}{5} \implies \beta = 53{,}1^\circ$

$\cos\gamma = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{11\sqrt{113}}{565} \implies \gamma = 78{,}1^\circ$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \dfrac{8}{\sqrt{113}} \implies A = \dfrac{1}{2}cb\sin\alpha = 52$

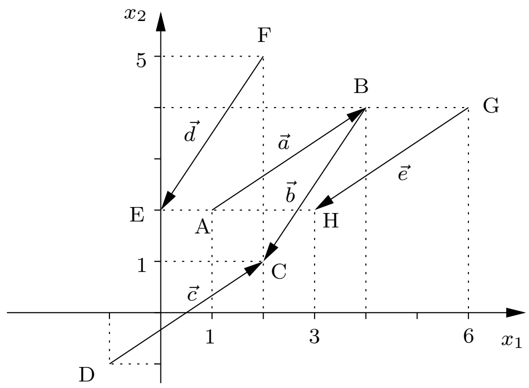
8. Vektoren

1. $\vec{a} = \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -\vec{e}$

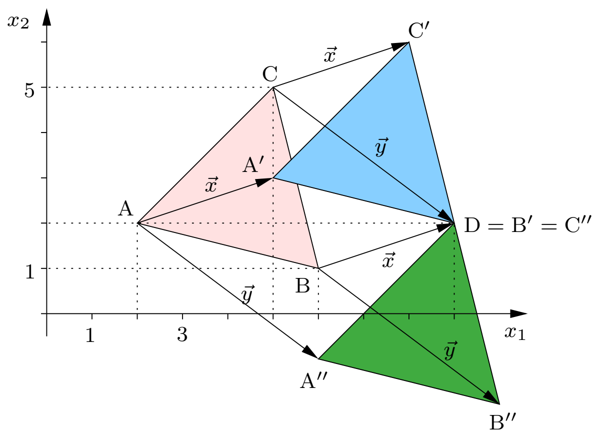
   $\vec{b} = \vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

   Alle Vektoren haben den Betrag

   $$\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$



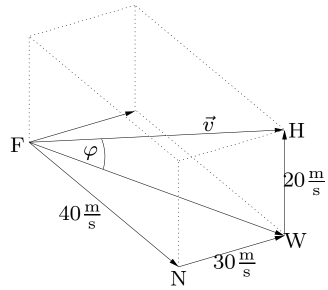
2. Die Dreiecke $\triangle$A′B′C′ und $\triangle$A″B″C″ sind kongruent zu $\triangle$ABC und entsprechende Seiten sind parallel, d.h. durch einen Vektor wird eine Parallelverschiebung beschrieben.



3. Von jeder der acht Ecken kann man zu den restlichen sieben Ecken je einen Pfeil zeichnen, d.h. es können $7 \cdot 8 = 56$ Pfeile gezeichnet werden.

	Vektoren	Vielfachheit	Pfeile
Kanten	6	4	24
Flächendiag.	12	2	24
Raumdiag.	8	1	
	26		56

4. $\left|\overrightarrow{\mathrm{FW}}\right| = \sqrt{40^2\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} + 30^2\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = 50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$



$$|\vec{v}| = \sqrt{50^2\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} + 20^2\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = \sqrt{2900}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 53{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

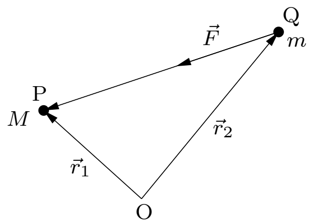
$$\tan\varphi = \frac{20}{50} = 0{,}4 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 21{,}8^\circ$$

5.

n	Wegdifferenz	neuer Ort
1	$\vec{w}_1 = \vec{x}$	$\vec{s}_1 = \vec{x}$
2	$\vec{w}_2 = \vec{y}$	$\vec{s}_2 = \vec{s}_1 + \vec{w}_2 = \vec{x} + \vec{y}$
3	$\vec{w}_3 = \vec{w}_2 - \vec{w}_1 = \vec{y} - \vec{x}$	$\vec{s}_3 = \vec{s}_2 + \vec{w}_3 = \vec{x} + \vec{y} + \vec{y} - \vec{x} = 2\vec{y}$
4	$\vec{w}_4 = \vec{w}_3 - \vec{w}_2 = -\vec{x}$	$\vec{s}_4 = \vec{s}_3 + \vec{w}_4 = 2\vec{y} - \vec{x}$
5	$\vec{w}_5 = \vec{w}_4 - \vec{w}_3 = -\vec{y}$	$\vec{s}_5 = \vec{s}_4 + \vec{w}_5 = 2\vec{y} - \vec{x} - \vec{y} = \vec{y} - \vec{x}$
6	$\vec{w}_6 = \vec{w}_5 - \vec{w}_4 = -\vec{y} + \vec{x}$	$\vec{s}_6 = \vec{s}_5 + \vec{w}_6 = \vec{y} - \vec{x} - \vec{y} + \vec{x} = \vec{o}$

Der Schatz liegt also genau unter dem Totenkopf!

6. (a) Mit $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ist $r = |\vec{r}|$ und damit



$$\vec{F} = |\vec{F}| \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{GMm}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{GMm}{r^3} \cdot \vec{r}$$

$$\vec{F} = \frac{GMm}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

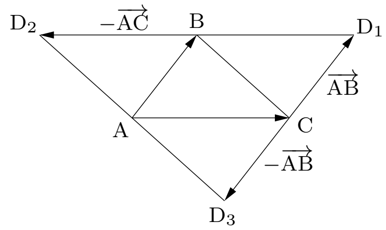
(b) $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3-9 \\ 6-(-3) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{10}\,\mathrm{m} = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{10}\,\mathrm{m} \quad \Longrightarrow \quad r = |\vec{r}| = 15 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}$

Der Einheitsvektor in Richtung von $\vec{r}$ ist $\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r} = \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ 0{,}6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$F = \frac{GMm}{r^2} = 0{,}47\,\mathrm{N} \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} = F\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} -0{,}38 \\ 0{,}28 \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{N}$$

7. (a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\frac{-11}{-4} \neq \frac{6}{2} \Longrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ nicht parallel $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \Longrightarrow$ die Beh.

(b) $\overrightarrow{\mathrm{OD_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \implies \mathrm{D_1}(-10|6|7)$



$\overrightarrow{\mathrm{OD_2}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix} \implies \mathrm{D_2}(12|-6|-5)$

$\overrightarrow{\mathrm{OD_3}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \implies \mathrm{D_3}(-2|2|3)$

8. (a) $$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{1}{\Delta t} \left[\begin{pmatrix} x(t+\Delta t) \\ y(t)+\Delta t \\ z(t+\Delta t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \right] \right) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

Analog beweist man die Aussage über $\dot{\vec{a}}(t)$.

(b) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix}$

$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega\sin\omega t \\ r\omega\cos\omega t \end{pmatrix} = r\omega \begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix}$

$v = |\vec{v}(t)| = r\omega\sqrt{(-\sin\omega t)^2 + (\cos\omega t)^2} = r\omega$

$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega^2\cos\omega t \\ -r\omega^2\sin\omega t \end{pmatrix} = -r\omega^2 \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} = -\omega^2\vec{r}(t)$

$a = |\vec{a}(t)| = \omega^2 r = \dfrac{\omega^2 r^2}{r} = \dfrac{v^2}{r}$

9. Viereck ABCD mit $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ und $\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{DA}}$. Die Mittelpunkte der Seiten sind E, F, G und H mit $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ und $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \overrightarrow{\mathrm{AF}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{o} \implies \vec{d} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{HG}} = \overrightarrow{\mathrm{AG}} - \overrightarrow{\mathrm{AH}} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a} - \vec{b} - \vec{c} - \frac{1}{2}\left(-\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{EF}}$$

10. (a) Für $\lambda \neq 0$ und $\mu \neq 0$ folgt aus $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{o}$:

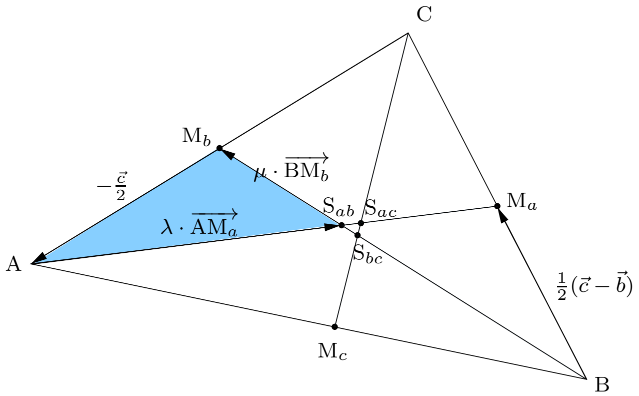
$$\vec{a} = -\frac{\mu}{\lambda}\vec{b},$$

d.h. $\vec{a} \| \vec{b}$ im Widerspruch zur Annahme. Die Gleichung $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{o}$ kann also nur für $\lambda = \mu = 0$ erfüllt werden.

(b) Bezeichnungen im $\triangle$ABC: $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, Seitenmittelpunkte: M_a, M_b, M_c

Schnittpunkte: $\{S_{ab}\} = AM_a \cap BM_b$, $\{S_{ac}\} = AM_a \cap CM_c$, $\{S_{bc}\} = BM_b \cap CM_c$,

$$\overrightarrow{AM_a} = \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{\vec{b}}{2} + \frac{\vec{c}}{2}, \quad \overrightarrow{BM_b} = \frac{\vec{c}}{2} - \vec{b}$$



Geschlossene Vektorkette: $\underbrace{\overrightarrow{AS_{ab}}}_{\lambda\overrightarrow{AM_a}} + \underbrace{\overrightarrow{S_{ab}M_b}}_{\mu\overrightarrow{BM_b}} + \underbrace{\overrightarrow{M_bA}}_{-\frac{\vec{c}}{2}} = \vec{o} \quad \Longrightarrow$

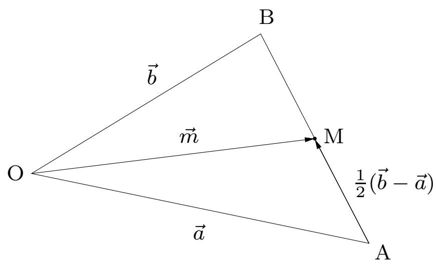
$$\lambda\left(\frac{\vec{b}}{2} + \frac{\vec{c}}{2}\right) + \mu\left(\frac{\vec{c}}{2} - \vec{b}\right) - \frac{\vec{c}}{2} = \vec{o}$$
$$\vec{b}\left(\frac{\lambda}{2} - \mu\right) + \vec{c}\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{2}\right) = \vec{o}$$

Da $\vec{b} \nparallel \vec{c}$ folgt: $\frac{\lambda}{2} - \mu = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu = \frac{\lambda}{2}$ und $\frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{2} = 0$

$$\Longrightarrow \quad \lambda = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \overline{AS_{ab}} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AM_a} \quad \text{und} \quad \overline{BS_{ab}} = \frac{2}{3} \cdot \overline{BM_b}$$

Genauso zeigt man $\overline{AS_{ac}} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AM_a}$ und $\overline{BS_{bc}} = \frac{2}{3} \cdot \overline{BM_b}$, d.h. S_{ab}, S_{ac} und S_{bc} fallen in einem Punkt S zusammen und $\frac{\overline{AS}}{\overline{SM_a}} = \frac{2}{1}$.

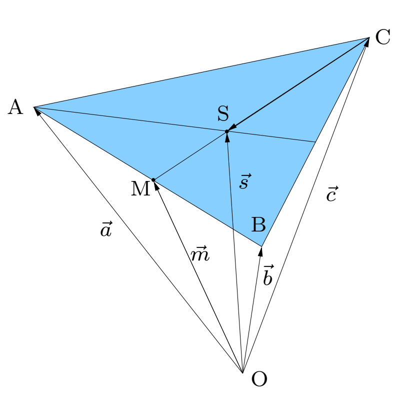
(c) $\vec{m} = \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$



(d) $\vec{m} = \dfrac{1}{2}\,(\vec{a} + \vec{b}), \quad \overrightarrow{\mathrm{CM}} = \vec{m} - \vec{c} = \dfrac{\vec{a}}{2} + \dfrac{\vec{b}}{2} - \vec{c}$

$$\vec{s} = \vec{c} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CM}} = \vec{c} + \frac{\vec{a}}{3} + \frac{\vec{b}}{3} - \frac{2\vec{c}}{3}$$

$$\vec{s} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$$



11. (a) A $(5|6|3)$, B $(5|10|3)$, C $(2|10|3)$, D $(2|6|3)$, E $(5|6|5)$, F $(5|10|5)$, G $(2|10|5)$, H $(2|6|5)$

(b) $\mathrm{A}_1\,(5|6|-3)$, $\mathrm{B}_1\,(5|10|-3)$, $\mathrm{C}_1\,(2|10|-3)$, $\mathrm{D}_1\,(2|6|-3)$, $\mathrm{E}_1\,(5|6|-5)$, $\mathrm{F}_1\,(5|10|-5)$, $\mathrm{G}_1\,(2|10|-5)$, $\mathrm{H}_1\,(2|6|-5)$

(c) Spiegeln an der x_1x_2-Ebene : $\mathrm{P}\,(p_1|p_2|p_3) \longrightarrow \mathrm{P}'\,(p_1|p_2|-p_3)$
Spiegeln an der x_1x_3-Ebene : $\mathrm{P}\,(p_1|p_2|p_3) \longrightarrow \mathrm{P}'\,(p_1|-p_2|p_3)$
Spiegeln an der x_2x_3-Ebene : $\mathrm{P}\,(p_1|p_2|p_3) \longrightarrow \mathrm{P}'\,(-p_1|p_2|p_3)$

(d) $\mathrm{A}_2\,(-5|6|-3)$, $\mathrm{B}_2\,(-5|10|-3)$, $\mathrm{C}_2\,(-2|10|-3)$, $\mathrm{D}_2\,(-2|6|-3)$, $\mathrm{E}_2\,(-5|6|-5)$,
$\mathrm{F}_2\,(-5|10|-5)$, $\mathrm{G}_2\,(-2|10|-5)$, $\mathrm{H}_2\,(-2|6|-5)$

(e) Spiegeln an der x_1-Achse : $\mathrm{P}\,(p_1|p_2|p_3) \longrightarrow \mathrm{P}'\,(p_1|-p_2|-p_3)$
Spiegeln an der x_2-Achse : $\mathrm{P}\,(p_1|p_2|p_3) \longrightarrow \mathrm{P}'\,(-p_1|p_2|-p_3)$
Spiegeln an der x_3-Achse : $\mathrm{P}\,(p_1|p_2|p_3) \longrightarrow \mathrm{P}'\,(-p_1|-p_2|p_3)$

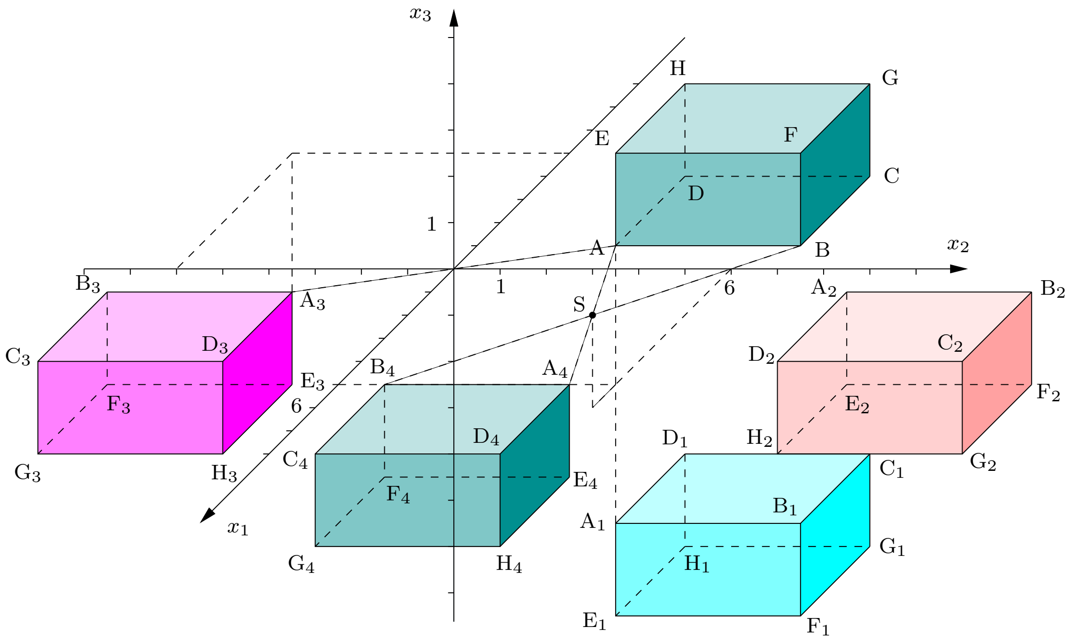
(f) $\mathrm{A}_3\,(-5|-6|-3)$, $\mathrm{B}_3\,(-5|-10|-3)$, $\mathrm{C}_3\,(-2|-10|-3)$, $\mathrm{D}_3\,(-2|-6|-3)$, $\mathrm{E}_3\,(-5|-6|-5)$, $\mathrm{F}_3\,(-5|-10|-5)$, $\mathrm{G}_3\,(-2|-10|-5)$, $\mathrm{H}_3\,(-2|-6|-5)$

(g) $\mathrm{P}\,(p_1|p_2|p_3) \longrightarrow \mathrm{P}'\,(-p_1|-p_2|-p_3)$

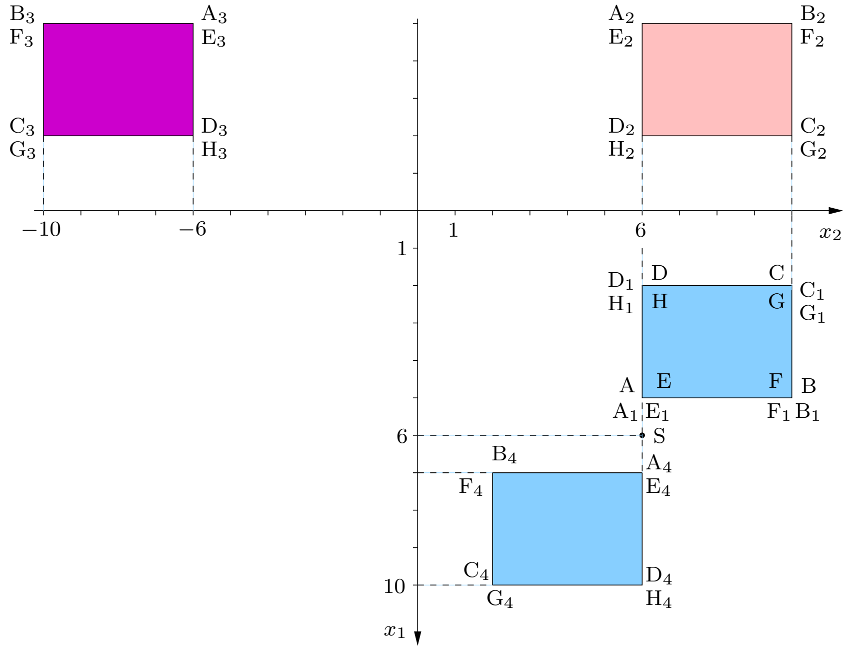
(h) $\mathrm{A}_4\,(7|6|1)$, $\mathrm{B}_4\,(7|2|1)$, $\mathrm{C}_4\,(10|2|1)$, $\mathrm{D}_4\,(10|6|1)$, $\mathrm{E}_4\,(7|6|-1)$, $\mathrm{F}_4\,(7|2|-1)$, $\mathrm{G}_4\,(10|2|-1)$, $\mathrm{H}_4\,(10|6|-1)$

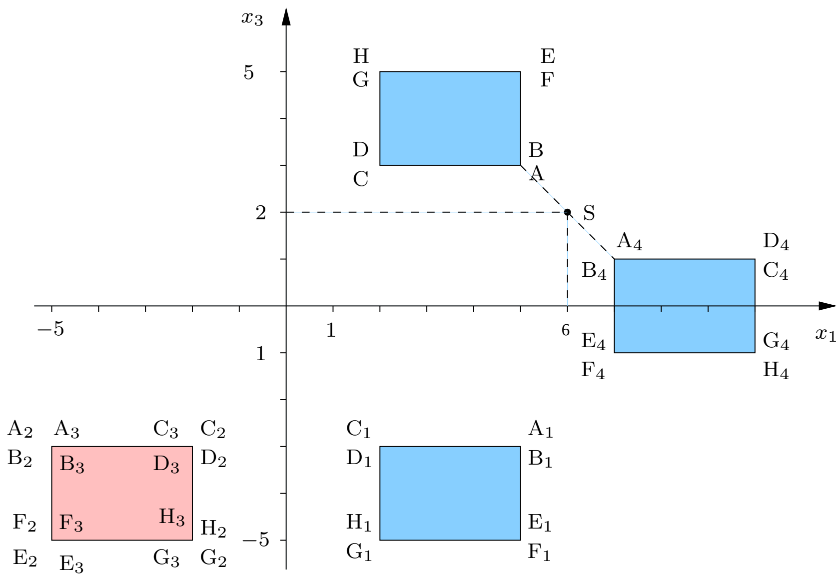
(i) $\mathrm{P}\,(p_1|p_2|p_3) \longrightarrow \mathrm{P}'\,(2s_1 - p_1|2s_2 - p_2|2s_3 - p_3)$

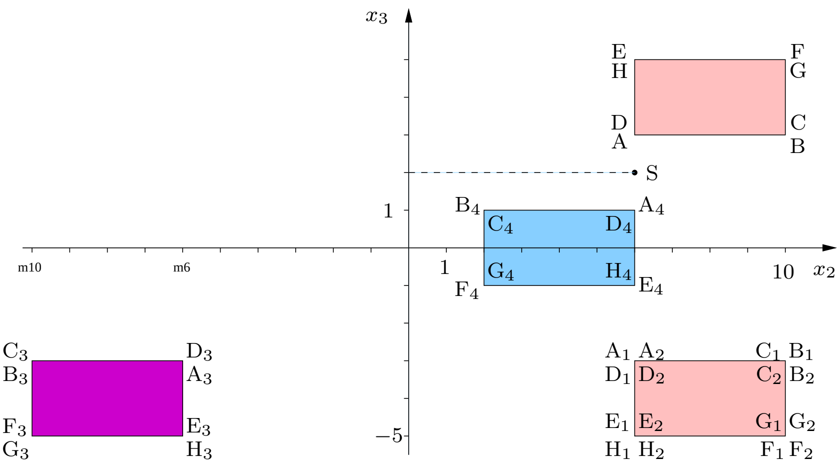
(j)


x_3
x_2
x_1
1
1
6
6
A
B
C
D
E
F
G
H
S
A_1
B_1
C_1
D_1
E_1
F_1
G_1
H_1
A_2
B_2
C_2
D_2
E_2
F_2
G_2
H_2
A_3
B_3
C_3
D_3
E_3
F_3
G_3
H_3
A_4
B_4
C_4
D_4
E_4
F_4
G_4
H_4

(k)


B_3
F_3
A_3
E_3
C_3
G_3
D_3
H_3
A_2
E_2
B_2
F_2
D_2
H_2
C_2
G_2
−10
−6
1
6
x_2
1
D_1
H_1
D
H
C
G
C_1
G_1
A
E
F
B
A_1
E_1
F_1
B_1
6
S
B_4
A_4
E_4
F_4
C_4
G_4
D_4
H_4
10
x_1


x_3
5
2
1
−5
1
6
x_1
H
G
E
F
D
C
B
A
S
A_4
D_4
B_4
C_4
E_4
G_4
F_4
H_4
A_2
A_3
C_3
C_2
B_2
B_3
D_3
D_2
F_2
F_3
H_3
H_2
E_2
E_3
G_3
G_2
C_1
A_1
D_1
B_1
H_1
E_1
G_1
F_1


x_3
E
H
F
G
D
A
C
B
S
1
B_4
A_4
C_4
D_4
m10
m6
1
10
x_2
G_4
H_4
F_4
E_4
C_3
D_3
B_3
A_3
F_3
E_3
G_3
H_3
−5
A_1 A_2
C_1 B_1
D_1 D_2
C_2 B_2
E_1 E_2
G_1 G_2
H_1 H_2
F_1 F_2

9. Skalar- und Vektorprodukt

1. Die Punkte X liegen in der von $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ aufgespannten Ebene, da $\overrightarrow{X} - \overrightarrow{T}$ senkrecht zu $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$

2. (a) $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{72}$, also gleichschenklig; $< BAD = 45°$; A=36FE
   (b) B liegt auf der Kugel und $E(1|7|2)$ außerhalb

3. (a) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = ab - ba = 0$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = -ab + ba = 0$

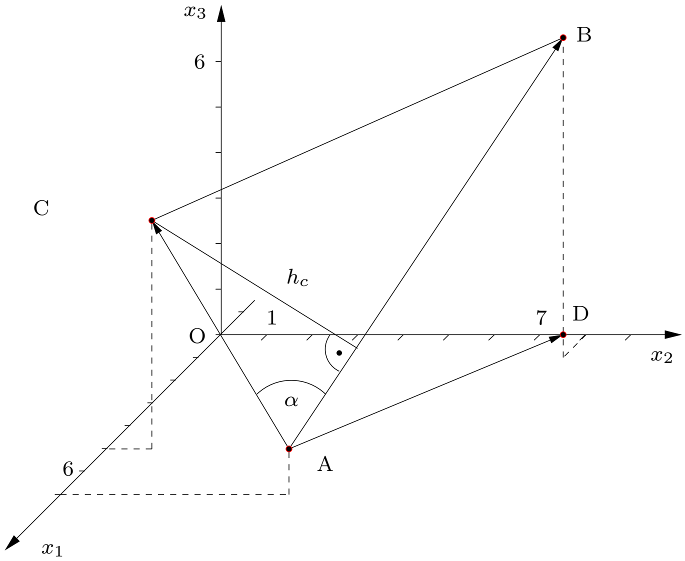
   (b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}_{10} = \dfrac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_{20} = -\vec{a}_{10}$

   (c) $\begin{pmatrix} x \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x - 2y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \dfrac{3x}{2}$

   z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$,
   $\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

4. $\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ h \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} q \\ -h \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = pq - h^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad h^2 = pq$

5. (a)



(b) $\vec{b} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad b = |\vec{b}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{81} = 9$

$$\vec{c} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c = |\vec{c}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{bc} = \frac{12 - 12 + 24}{9 \cdot 6} = \frac{24}{6 \cdot 9} = \frac{4}{9} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 63{,}61°$$

$$A = \frac{1}{2} bc \sin\alpha = \frac{bc}{2}\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{6 \cdot 9}{2} \cdot \sqrt{\frac{65}{81}} = 3\sqrt{65} \approx 24{,}19$$

(c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -7 \\ d-5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 14 - 4d + 20 - 4 = 30 - 4d = 0 \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{15}{2} = 7{,}5$

6. Aus $\cos 30° = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{108 + 2y}{\sqrt{108 + 4} \cdot \sqrt{108 + y^2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$ folgt durch Quadrieren

$$\begin{aligned} (108 + 2y)^2 &= \frac{3}{4} \cdot 112 \cdot (108 + y^2) \\ 80\,y^2 - 432\,y &= 2592 \\ y^2 - 2 \cdot \frac{27}{10}\,y + \left(\frac{27}{10}\right)^2 &= \frac{162}{5} + \frac{729}{100} = \frac{3969}{100} \\ y &= \frac{27}{10} \pm \frac{63}{10} \\ y_1 = 9 \qquad y_2 &= -3{,}6 \end{aligned}$$

7. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \dfrac{25\sqrt{7}}{231} \quad\Longrightarrow\quad \alpha = 73{,}361°$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\cos\beta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|} = \dfrac{26\sqrt{22}}{231} \quad\Longrightarrow\quad \alpha = 58{,}135°$

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 48{,}504°$$

$$A = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}} \cdot \underbrace{\overline{\mathrm{AC}}\sin\alpha}_{h_c} = 41{,}83$$

8. (a) Zunächst zeigen wir, dass $|\vec{b}| = |\vec{a}|$:

$$\begin{aligned} |\vec{b}|^2 &= (a_1\cos\varphi - a_2\sin\varphi)^2 + (a_1\sin\varphi + a_2\cos\varphi)^2 = \\ &= a_1^2\cos^2\varphi - 2a_1a_2\sin\varphi\cos\varphi + a_2^2\sin^2\varphi + \\ &\qquad + a_1^2\sin^2\varphi + 2a_1a_2\sin\varphi\cos\varphi + a_2^2\cos^2\varphi = \\ &= a_1^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + a_2^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = a_1^2 + a_2^2 = |\vec{a}|^2 \end{aligned}$$

Wegen $|\vec{x}| \geqq 0$ folgt daraus $|\vec{b}| = |\vec{a}|$.

Aus

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1^2\cos\varphi - a_1a_2\sin\varphi + a_2a_1\sin\varphi + a_2^2\cos\varphi = (a_1^2 + a_2^2)\cos\varphi$$

folgt mit $\varphi' = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$:

$$\cos\varphi' = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2} = \frac{(a_1^2 + a_2^2)\cos\varphi}{a_1^2 + a_2^2} = \cos\varphi \quad\Longrightarrow\quad \varphi' = \pm\varphi$$

$\vec{b}$ entsteht also tatsächlich durch eine Drehung um φ aus $\vec{a}$. Wir müssen noch zeigen, dass es eine Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn ist. Dazu wählen wir $\vec{a}$ parallel zur x_1-Achse:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1\cos\varphi \\ a_1\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Da für $0 < \varphi < 90°$ beide Koordinaten vob $\vec{b}$ positiv sind, handelt es sich tatsächlich um eine Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn.

(b)

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4\cos 60° - 3\sin 60° \\ 4\sin 60° + 3\cos 60° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot\frac{1}{2} - 3\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} + 3\cdot\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} + \frac{3}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0{,}60 \\ 4{,}96 \end{pmatrix}$$

9. (a) In einer kleinen Zeitspanne $\mathrm{d}t$ ist die Ortsänderung von K durch $\mathrm{d}\vec{s} = \vec{v}\,\mathrm{d}t$ gegeben. In dieser Zeitspanne verrichtet die Zentripetalkraft $\vec{F}_\mathrm{z}$ an K die Arbeit

$$\mathrm{d}W = \vec{F}_\mathrm{z}\mathrm{d}\vec{s} = \vec{F}_\mathrm{z}\vec{v}\,\mathrm{d}t$$

Wegen $\vec{F}_\mathrm{z} \perp \vec{v}$ ist aber $\vec{F}_\mathrm{z}\vec{v} = 0$, d.h. $\mathrm{d}W = 0$ und damit auch $W = 0$.

(b) Aus $\mathrm{d}W = \vec{F}\mathrm{d}\vec{s}$ folgt

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\dot{\vec{s}} = \vec{F}\vec{v}$$

Die Reibungskraft zeigt in die Richtung von $-\vec{v}$ und hat den Betrag R:

$$\vec{R} = -\frac{\vec{v}}{v} \cdot R \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} = \vec{G} + \vec{R} = \vec{G} - \frac{\vec{v}}{v} \cdot R = \vec{G} - kv\vec{v}$$

$$P = \vec{F}\vec{v} = \vec{G}\vec{v} - kv\vec{v}^2 = \vec{G}\vec{v} - kv^3$$

Mit

$$v = \sqrt{4^2 + 20^2 + 5^2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 21\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

folgt

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \mathrm{N} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ -5 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 5 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}} \cdot 21^3\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^3} = -26{,}3\,\mathrm{W}$$

10. Mit $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$, $\vec{b}^{\,2} = |\vec{b}|^2$, $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ und $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$ folgt

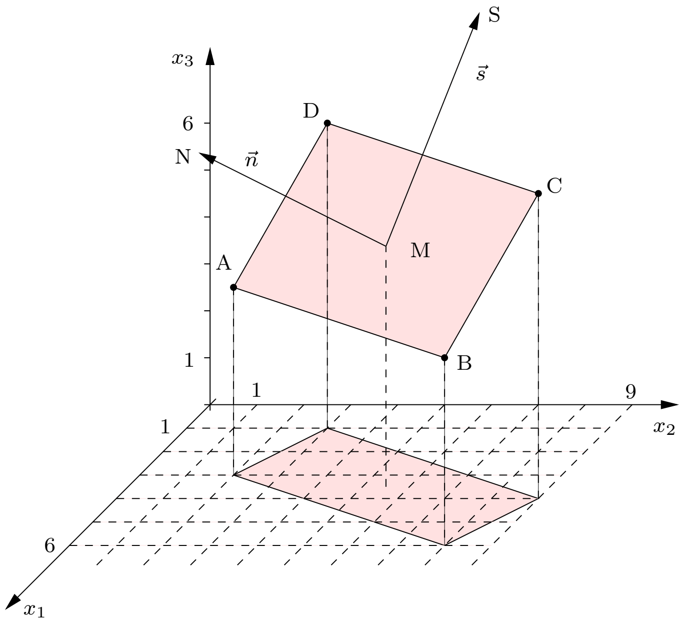
$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^{\,2} \cdot |\vec{b}|^2 \sin^2\varphi = |\vec{a}|^{\,2} \cdot |\vec{b}|^2(1 - \cos^2\varphi) = \\ = |\vec{a}|^{\,2} \cdot |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\cos\varphi)^2 = \vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2\end{aligned}$$

11. (a) $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathrm{C}} = \vec{\mathrm{B}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 6{,}5 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{C}(4|9|6{,}5)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = 3 \cdot (-2) + 6 \cdot 1 + 0 \cdot 2{,}5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sphericalangle\mathrm{BAD} = 90°$, also Rechteck.

$\vec{\mathrm{M}} = \vec{\mathrm{A}} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 5{,}5 \\ 5{,}25 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{M}(3{,}5|5{,}5|5{,}25)$

(b)



(c) $\vec{n}' = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 2{,}5 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 2{,}5 - 0 \\ 0 - 3 \cdot 2{,}5 \\ 3 \cdot 1 - 6 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -7{,}5 \\ 15 \end{pmatrix} = 7{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$|\vec{n}'| = 7{,}5 \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 7{,}5 \cdot 3 = 22{,}5, \quad \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = 6\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{N} = \vec{M} + \vec{n} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 5{,}5 \\ 5{,}25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 3{,}5 \\ 9{,}25 \end{pmatrix}$$

(d) $\vec{S} = \vec{M} + \vec{s} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 5{,}5 \\ 5{,}25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 8{,}5 \\ 11{,}25 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{S}(5{,}5|8{,}5|11{,}25)$

$$\vec{s}_0 = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \cos\sigma = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} = \vec{n}_0 \cdot \vec{s}_0 = \frac{2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 6}{21} = \frac{13}{21}$$

$$\sigma = 51{,}75^\circ$$

(e) $\frac{A_\mathrm{s}}{\mathrm{m}^2} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| = 3\sqrt{5} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{5} = 22{,}5 \quad \Longrightarrow$

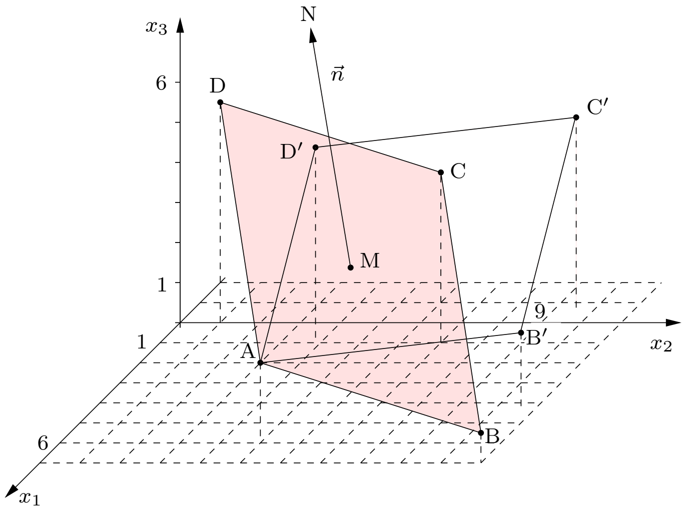
$$P = 0{,}11\,\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m}^2} \cdot 22{,}5\,\mathrm{m}^2 \cdot \frac{13}{21} = \frac{429}{280}\,\mathrm{kW} = 1{,}53\,\mathrm{kW}$$

12. (a) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -60 \\ 40 \\ 35 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ 60 \\ -12{,}5 \end{pmatrix}, \quad \vec{C} = \vec{B} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \\ 42{,}5 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{C}(10|70|42{,}5)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = -600 + 2400 - 437{,}5 = 1362{,}5 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \sphericalangle \mathrm{BAD} \neq 90°$, also kein Rechteck.

$$\overrightarrow{\mathrm{M}} = \overrightarrow{\mathrm{A}} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 60 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -50 \\ 20 \\ 22{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 60 \\ 31{,}25 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{M}(35|60|31{,}25)$$

(b)



(c) $$\vec{n}' = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 10 & 60 & -12{,}5 \\ -60 & -40 & 35 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \cdot 35 - 12{,}5 \cdot 40 \\ 12{,}5 \cdot 60 - 10 \cdot 35 \\ -10 \cdot 40 + 60 \cdot 60 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} 1600 \\ 400 \\ 3200 \end{pmatrix} = 400 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}'| = 400 \cdot \sqrt{4^2 + 1^2 + 8^2} = 400 \cdot 9 = 3600, \quad \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = 90 \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 80 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{N}} = \overrightarrow{\mathrm{M}} + \vec{n} = \begin{pmatrix} 35 \\ 60 \\ 31{,}25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 70 \\ 111{,}25 \end{pmatrix}$$

(d) φ ist der Winkel, um den $\vec{n}$ von der Vertikalen abweicht, also der Winkel zwischen $\vec{n}$ und $\vec{e}_3$:

$$\cos\varphi = \vec{n}_0 \cdot \vec{e}_3 = \frac{8}{9} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 27{,}27°$$

(e) $F = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{AD}}| \cdot \sin\alpha = |\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AD}}| = |\vec{n}'| = 3600$

(f) Aus $F = 3600$ folgt $|\vec{p}| = |\vec{s}| = 60$. Aus $\vec{p} \perp \vec{n}$ und $p_3 = 0$ folgt

$$\vec{p} \cdot \vec{n} = 40p_1 + 10p_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_2 = -4p_1 \quad \Longrightarrow \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ -4p_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{p}|^2 = p_1^2 + 16p_1^2 = 3600 \quad\Longrightarrow\quad p_1 = \pm\frac{60}{\sqrt{17}}$$

Aus den Zusatzbedingungen folgt:

$$\vec{p} = \frac{60}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}$$

Wegen der Forderung „Quadrat“ muss $\vec{s}$ auf $\vec{p}$ senkrecht stehen und wegen $\vec{s}$ parallel zur Ebene E muss $\vec{s}$ auf $\vec{n}$ senkrecht stehen:

$$\vec{s} = 60\cdot\vec{n}_0\times\vec{p}_0 = \frac{60}{9\sqrt{17}}\begin{pmatrix}4\\1\\8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix} = \frac{20}{3\sqrt{17}}\begin{pmatrix}-32\\-8\\17\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-51{,}74\\-12{,}94\\27{,}49\end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathrm{B}}' = \vec{\mathrm{A}} + \vec{p} = \begin{pmatrix}45{,}45\\108{,}21\\20{,}00\end{pmatrix},\quad \vec{\mathrm{C}}' = \vec{\mathrm{B}}' + \vec{s} = \begin{pmatrix}-6{,}29\\95{,}27\\47{,}49\end{pmatrix},\quad \vec{\mathrm{D}}' = \vec{\mathrm{A}} + \vec{s} = \begin{pmatrix}8{,}26\\37{,}06\\47{,}49\end{pmatrix}$$

13. (a) Kugelgleichung: $k:\quad (x_1+12)^2 + (x_2-10)^2 + (x_3-9)^2 = 17^2$

$k\cap x_2$-Achse: $x_1 = x_3 = 0 \quad\Longrightarrow\quad 12^2 + (x_2-10)^2 + 9^2 = 17^2$

$$x_2 = 10\pm 8 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{A}(0|2|0) \text{ und } \mathrm{B}(0|18|0)$$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{MA}} = \begin{pmatrix}12\\-8\\-9\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \begin{pmatrix}12\\8\\-9\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow$

$$\vec{n}' = \overrightarrow{\mathrm{MA}}\times\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \begin{pmatrix}8\cdot 9 + 8\cdot 9\\-9\cdot 12 + 9\cdot 12\\8\cdot 12 + 8\cdot 12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}144\\0\\192\end{pmatrix} = 48\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$$

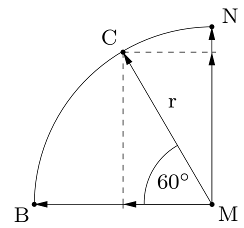
$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}6\\0\\0{,}8\end{pmatrix},\quad \vec{n} = 17\vec{n}_0 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}51\\0\\68\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10{,}2\\0\\13{,}6\end{pmatrix}$$

$$\vec{N} = \vec{M} + \vec{n} = \begin{pmatrix}-1{,}8\\10{,}0\\22{,}6\end{pmatrix}$$

(c) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{161}{289} \quad\Longrightarrow\quad \alpha = 0{,}9799 = 56{,}14^\circ \quad\Longrightarrow\quad s = r\alpha = 16{,}66$

(d) $\mathrm{M}'(-12|10|0) \quad\Longrightarrow\quad r'^{\,2} = \overline{\mathrm{M'B}}^2 = 12^2 + 8^2 = 208 \quad\Longrightarrow\quad A = r'^{\,2}\pi = 653{,}5$

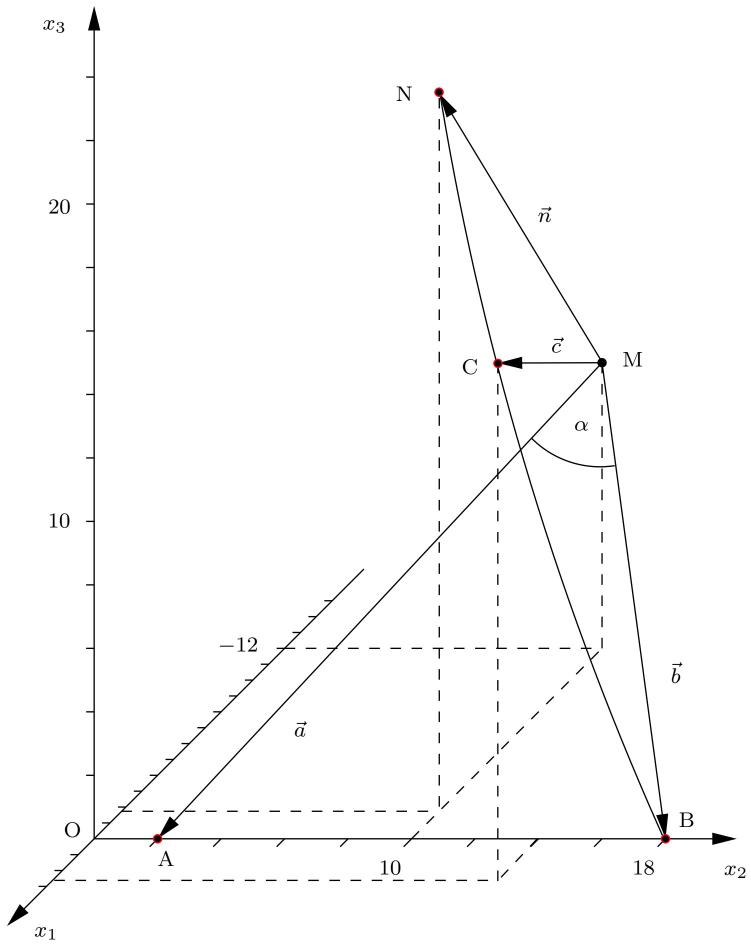
(e) $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{MC}} = r\cos 60° \cdot \frac{\vec{b}}{r} + r\sin 60° \cdot \frac{\vec{n}}{r}$



$$\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4{,}5 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{10}\begin{pmatrix} 51 \\ 0 \\ 68 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 14{,}8 \\ 4 \\ 7{,}3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = \vec{M} + \vec{c} \approx \begin{pmatrix} 2{,}8 \\ 14{,}0 \\ 16{,}3 \end{pmatrix}$$

(f)



14. (a) Kugelgleichung: $k: \quad (x_1 + 9)^2 + (x_2 - 6)^2 + (x_3 - 6)^2 = 11^2$

$k \cap x_1$-Achse: $x_2 = x_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x_1 + 9)^2 + 6^2 + 6^2 = 11^2$

$x_1 = -9 \pm 7 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{A}_1(-2|0|0)$ und $\mathrm{A}_2(-16|0|0)$

$k \cap x_2$-Achse: $x_1 = x_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 9^2 + (x_2 - 6)^2 + 6^2 = 11^2$

$x_2 = 6 \pm 2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{B}_1(0|4|0)$ und $\mathrm{B}_2(0|8|0)$

$k \cap x_3$-Achse: $x_1 = x_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 9^2 + 6^2 + (x_3 - 6)^2 = 11^2$

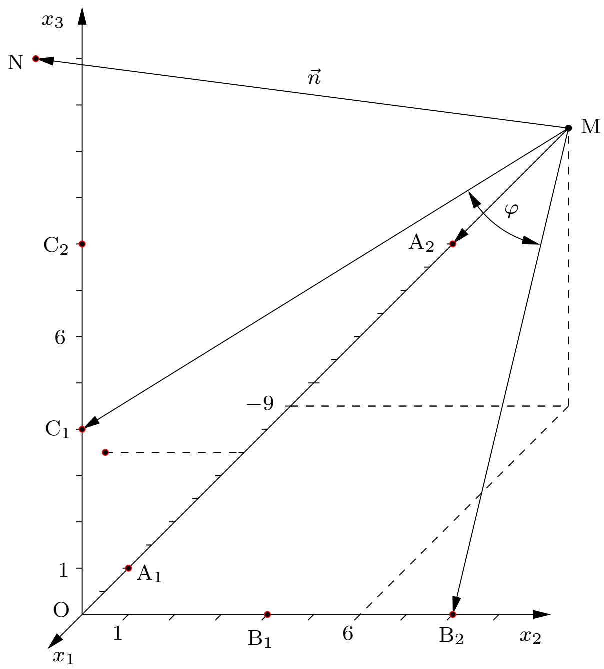
$$x_3 = 6 \pm 2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{C_1}(0|0|4) \text{ und } \mathrm{C_2}(0|0|8)$$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{MA}_2} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{MB}_2} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}' = \overrightarrow{\mathrm{MA}_2} \times \overrightarrow{\mathrm{MB}_2} = \begin{pmatrix} 48 \\ -96 \\ 40 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} = \frac{8}{\sqrt{205}} \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{n} = 11\vec{n}_0 = \frac{88}{\sqrt{205}} \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4{,}61 \\ -9{,}22 \\ 3{,}84 \end{pmatrix}$$

$$\vec{N} = \vec{M} + \vec{n} \approx \begin{pmatrix} -4{,}39 \\ -3{,}22 \\ 9{,}84 \end{pmatrix}, \quad \vec{S} = \vec{M} - \vec{n} \approx \begin{pmatrix} -13{,}6 \\ 15{,}2 \\ 2{,}16 \end{pmatrix}$$

(c)



(d) $\mathrm{M}_{12}(-9|6|0)$ ist der Fußpunkt des Lotes von M auf die x_1x_2-Ebene und der Mittelpunkt von k_{12}.

$\overrightarrow{\mathrm{M}_{12}\mathrm{B}_2} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_{12} = \overline{\mathrm{M}_{12}\mathrm{B}_2} = \sqrt{85}, \quad A_{12} = r_{12}^2\pi = 85\pi$

$k_2 : \quad (x_1 + 9)^2 + (x_2 - 6)^2 = 85$

(e) $\overrightarrow{\mathrm{MC}_1} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\quad \cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{MC}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}_2}}{|\overrightarrow{\mathrm{MC}_1}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{MB}_2}|} = \dfrac{81}{121} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 0{,}8374 = 47{,}98°$

$$s = r\varphi = 9{,}211$$

(f) $\mathrm{P}(-7|-3|x_3) \in k \quad \Longrightarrow \quad 2^2 + 9^2 + (x_3 - 6)^2 = 11^2 \quad \Longrightarrow \quad x_3 \in \{0;\ 12\}$

(g) $\overrightarrow{\mathrm{MQ}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \overline{\mathrm{MQ}} = 5\sqrt{5} \approx 11{,}18 > r \quad \Longrightarrow \quad$ nein

15. (a) $k: \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5^2$ und $x_3 \geqq 0$

$$\mathrm{A} \in k \quad \Longrightarrow \quad 4{,}8^2 + 0^2 + a_3^2 = 25 \quad \Longrightarrow \quad a_3 = \sqrt{1{,}96} = 1{,}4$$

$$\mathrm{B} \in k \quad \Longrightarrow \quad 0^2 + b_2^2 + 4^2 = 25 \quad \Longrightarrow \quad b_2 = 3$$

$$\vec{C}' = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} -1{,}4 \cdot 3 \\ -4{,}8 \cdot 4 \\ 4{,}8 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4{,}2 \\ -19{,}2 \\ 14{,}4 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} -7 \\ -32 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{C}'| = \frac{3}{5}\sqrt{7^2 + 32^2 + 24^2} = \frac{3}{5}\sqrt{1649}$$

$$\vec{C} = \frac{5}{|\vec{C}'|} \cdot \frac{3}{5} \begin{pmatrix} -7 \\ -32 \\ 24 \end{pmatrix} = \frac{5}{\sqrt{1649}} \begin{pmatrix} -7 \\ -32 \\ 24 \end{pmatrix} = \frac{5\sqrt{1649}}{1649} \begin{pmatrix} -7 \\ -32 \\ 24 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0{,}862 \\ -3{,}94 \\ 2{,}96 \end{pmatrix}$$

(b) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} = \dfrac{28}{125} = 0{,}224 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 1{,}3449 = 77{,}056° \quad \Longrightarrow$

$$s = r\alpha = 6{,}72\,\mathrm{m} = 672\,\mathrm{cm} \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{672\,\mathrm{cm}}{15\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}}} = 44{,}8\mathrm{min}$$

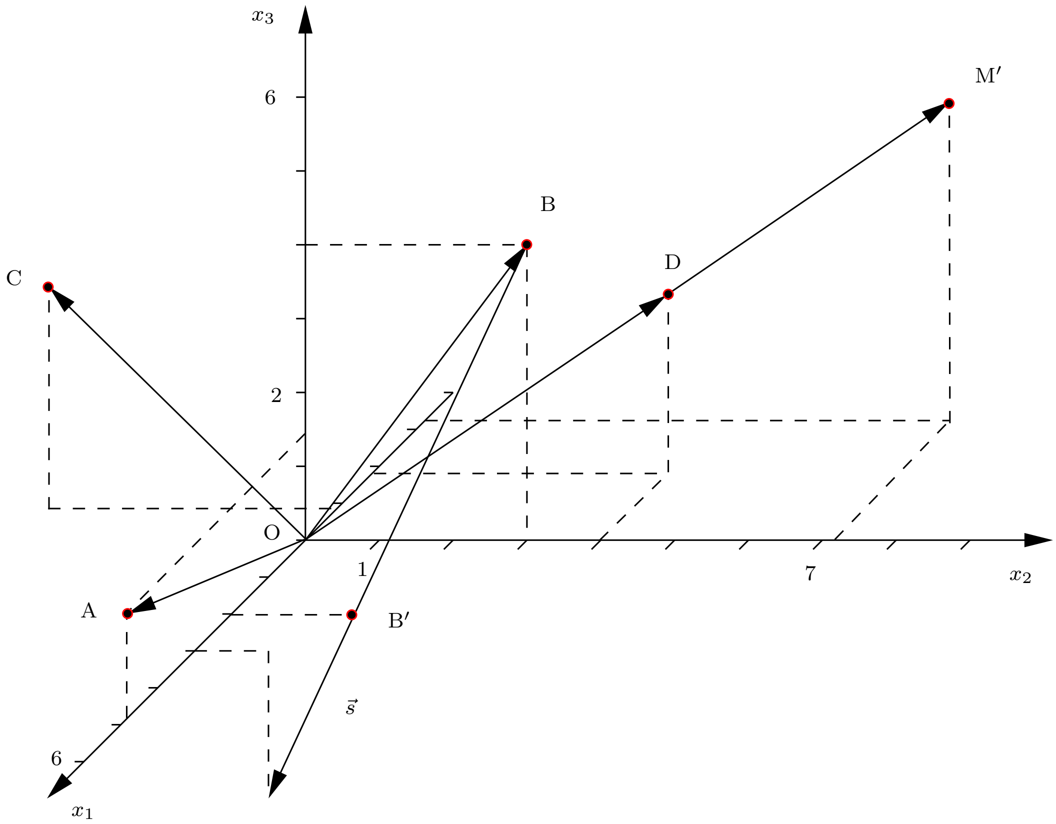
(c) $\vec{b} + \lambda\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 + 3\lambda \\ 3 - 2\lambda \\ 4 - 6\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \dfrac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad \vec{b}' = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

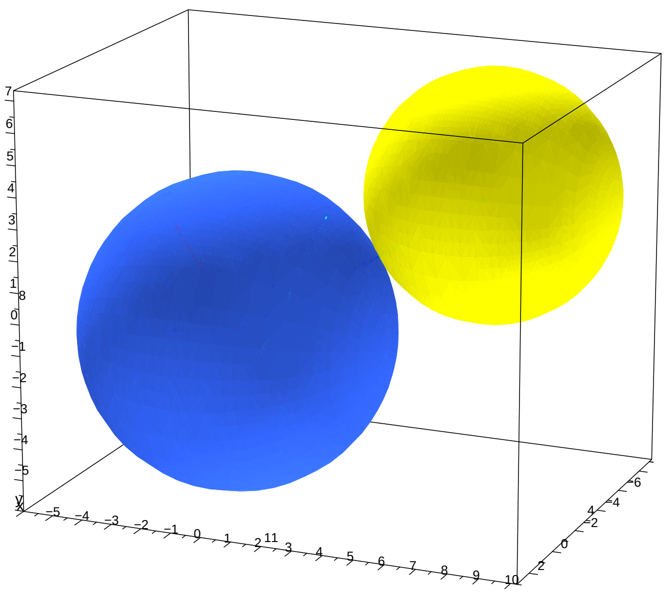
(d) $\mathrm{D} \in k \quad \Longrightarrow \quad 1{,}8^2 + 4^2 + d_3^2 = 25 \quad \Longrightarrow \quad d_3 = 2{,}4$

$$\vec{M}' = \vec{D} + \frac{4}{5}\vec{D} = \frac{9}{25} \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}24 \\ 7{,}2 \\ 4{,}32 \end{pmatrix}$$

$$k': \quad (x_1 + 3{,}24)^2 + (x_2 - 7{,}2)^2 + (x_3 - 4{,}32)^2 = 4^2$$

(e)

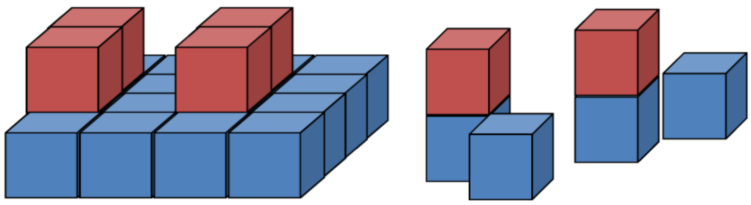




10. Berechnungen an Körpern, u. a. Flächeninhalte und Volumina

11. Raumvorstellung

1. 4, 1, 2
2. (a) ja, nein, ja
   (b) ja, ja, nein
3. ja, ja, nein
4. A, D, C, B
5. C, A, B, D
6. Augenzahl 3
7. Würfel F
8. Baustein C
9. Das Gebäude lässt sich mit maximal 20 und minimal 6 Würfeln (vgl. Abb.) aufbauen.

   
10. Bruchstück C

Teil V.

Stochastik - Wahrscheinlichkeitsbegriff

12. axiomatische Definition von Wahrscheinlichkeit

1. (a) $A \times B = \{(1|3), (1|4), (1|5), (1|6), (2|3), (2|4), (2|5), (2|6), (3|3), (3|4), (3|5), (3|6)\}$
   (b) $C \times (D \times E) = \{(1|(3|5)), (1|(3|6)), (1|(4|5)), (1|(4|6)), (2|(3|5)),$ $(2|(3|6)), (2|(4|5)), (2|(4|6))\}$
   (c) $|H| = 1\,158\,400$, $|K| = 2\,620\,880$

2. (a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 = \{11, 12, 13, \ldots, 66\}$ mit $|\Omega| = 6^2 = 36$
   (b) $A = \{11, 13, 15, 22, 24, 26, 31, 33, 35, 42, 44, 46, 51, 53, 55, 62, 64, 66\}$
   $B = \{11, 13, 15, 21, 23, 25, 31, 33, 35, 41, 43, 45, 51, 53, 55, 61, 63, 65\}$
   (c) $C = A \cap B = \{11, 13, 15, 31, 33, 35, 51, 53, 55\}$: „beide Würfel ungerade“ $C = A \cup B = \{11, 13, 15, 31, 33, 35, 51, 53, 55\}$: „beide Würfel ungerade“

3. (a) Da A und B endlich sind, kann man schreiben:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_a\} \quad \text{und} \quad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_b\}$$

Jede Funktion $f : A \longrightarrow B$ mit $D_f = A$ ist eine Menge von Wertepaaren der Form

$$f = \{(a_1|x_1), (a_2|x_2), \ldots, (a_a|x_a)\} \quad \text{mit} \quad x_i \in B$$

f ist also durch das a-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_a)$ mit $x_i \in B$ eindeutig charakterisiert. Die gesuchte Zahl von Funktionen ist also gleich der Zahl der verschiedenen a-Tupel. Da es für jedes x_i genau b Möglichkeiten gibt, ist die gesuchte Zahl

$$\mathrm{GZ}(a, b) = b^a$$

$\mathrm{GZ}(a, b)$ steht für „Zahl der geordneten Stichproben der Länge b mit Zurücklegen aus einer a-Menge“.

   (b) Die Umkehrrelation f^{-1} von f ist

$$f^{-1} = \{(x_1|a_1), (x_2|a_2), \ldots, (x_a|a_a)\}$$

f^{-1} ist nur dann eine Funktion, wenn alle x_i verschieden sind. Die gesuchte Zahl von umkehrbaren Funktionen ist also gleich der Zahl der verschiedenen a-Tupel mit lauter verschiedenen $x_i \in B$, d.h. es muss $b \geqq a$ sein:

$$\mathrm{G\overline{Z}}(a, b) = b \cdot (b-1) \cdot (b-2) \cdot \ldots \cdot (b-a+1) = \frac{b!}{(b-a)!}$$

$\mathrm{G\overline{Z}}(a,b)$ steht für „Zahl der geordneten Stichproben der Länge b ohne Zurücklegen aus einer a-Menge".

(c) Zu jeder Teilmenge C von A gibt es eine Funktion f_C und umgekehrt. Die Zahl der verschiedenen Funktionen f_C ist also gleich der Mächtigkeit von $\mathcal{P}(A)$. Wegen $b = |B| = 2$ folgt aus (a):

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^a = 2^{|A|}$$

13. verknüpfte Ereignisse und ihr Wahrscheinlichkeiten

1. (a) $|B \cap E| = 0{,}38 \cdot |E| = 0{,}38 \cdot 4000 = 1520$

$|\overline{B} \cap E| = |E| - |B \cap E| = 4000 - 1520 = 2480$

$63\frac{1}{3}\% \cdot |B| = |B \cap E| \quad \Longrightarrow$

$|B| = \frac{|B \cap E|}{\frac{19}{30}} = \frac{1520 \cdot 30}{19} = 2400$

$|B \cap \overline{E}| = |B| - |B \cap E| = |B| - 1520 = 880$

$|\overline{E}| = |B \cap \overline{E}| + |\overline{B} \cap \overline{E}| = 880 + 120 = 1000$

	E	$\overline{E}$	
B	1520	880	2400
$\overline{B}$	2480	120	2600
	4000	1000	5000

%	E	$\overline{E}$	
B	30,4	17,6	48
$\overline{B}$	49,6	2,4	52
	80,0	20,0	100

(b) $P_{\overline{E}}(\overline{B}) = \frac{|\overline{B} \cap \overline{E}|}{|\overline{E}|} = \frac{120}{1000} = 12\%$

(c) $P_{\overline{B}}(\overline{E}) = \frac{|\overline{B} \cap \overline{E}|}{|\overline{B}|} = \frac{120}{2600} = \frac{3}{65}\,\% \approx 4{,}6\%$

(d) $P(E) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}48 = 0{,}384 \neq 0{,}304 = P(E \cap B) \quad \Longrightarrow \quad$ abhängig

2. (a)

B	S	$\overline{S}$	
M	3	b_2	$3 + b_2$
$\overline{M}$	b_3	b_4	$b_3 + b_4$
	$3 + b_3$	4	$\lvert B\rvert$

$\overline{B}$	S	$\overline{S}$	
M	1	m_2	$1 + m_2$
$\overline{M}$	5	2	7
	6	$m_2 + 2$	$\lvert\overline{B}\rvert$

Addition der entsprechenden Elemente der beiden Vierfeldertafeln ergibt die Tafel für alle Schüler, da $B \cap \overline{B} = \emptyset$:

Ω	S	$\overline{S}$	
M	4	s_2	7
$\overline{M}$	14	s_4	18
	18	$s_2 + s_4$	$\lvert\Omega\rvert$

oder

Ω	S	$\overline{S}$	
M	4	3	7
$\overline{M}$	14	4	18
	18	7	25

$b_4 = s_4 - m_4 = 2,\ b_2 = 4 - b_4 = 2,\ m_2 = s_2 - b_2 = 1 \quad \Longrightarrow$

B	S	$\overline{S}$	
M	3	2	5
$\overline{M}$	b_3	2	$b_3 + 2$
	$3 + b_3$	4	$\lvert B\rvert$

$\overline{B}$	S	$\overline{S}$	
M	1	1	2
$\overline{M}$	5	2	7
	6	3	9

$b_3 = 14 - 5 \quad \Longrightarrow$

B	S	$\overline{S}$	
M	3	2	5
$\overline{M}$	9	2	11
	12	4	16

$\Longrightarrow$ 16 Buben, 9 Mädchen

(b) i. Buben, die weder Mathe noch Sport mögen, $|B \cap \overline{M} \cap \overline{S}| = 2$

ii. $(B \cap M \cap \overline{S}) \cup (\overline{B} \cap M \cap \overline{S}) = M \cap \overline{S}$, also Schüler, die zwar Mathe aber keinen Sport mögen. $|M \cap \overline{S}| = 3$

(c) i. $E = B \cap \overline{M} \cap S, \quad |E| = 9$

ii. $E = (\overline{B} \cap \overline{M} \cap S) \cup (\overline{B} \cap \overline{S} \cap M), \quad |E| = 5 + 1 = 6$

iii. $E = M \cup S, \quad |E| = |M| + |S| - |M \cap S| = 7 + 18 - 4 = 21$

3.

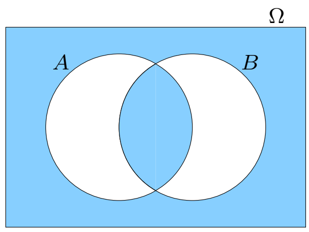
Ω	T	$\overline{T}$	
S	8 %	24 %	32 %
$\overline{S}$	32 %	36 %	68 %
	40 %	60 %	100 %

$$36\,\% \cdot x = 180 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{180}{0{,}36} = 500$$

Es gibt 500 Dorfbewohner.

4. (a)

$$\begin{aligned} M &= (A \cap B) \cup \overline{A \cup B} = \\ &= (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \\ &= \overline{(A \cup B) \setminus (A \cap B)} = \\ &= \overline{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)} = \\ &= \overline{A \setminus B} \cap \overline{B \setminus A} \end{aligned}$$



(b) $D = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B)$

5. $A = \{ww, ws\},\ P(A) = \frac{z}{n} \cdot \frac{z-1}{n-1} + \frac{z}{n} \cdot \frac{n-z}{n-1} = \frac{z(z-1+n-z)}{n(n-1)} = \frac{z(n-1)}{n(n-1)} = \frac{z}{n}$

$B = \{ww, sw\},\ P(B) = \frac{z}{n} \cdot \frac{z-1}{n-1} + \frac{n-z}{n} \cdot \frac{z}{n-1} = \frac{z(z-1+n-z)}{n(n-1)} = \frac{z(n-1)}{n(n-1)} = \frac{z}{n}$

$A \cap B = \{ww\},\ P(A \cap B) = \frac{z}{n} \cdot \frac{z-1}{n-1} \neq \frac{z^2}{n^2} = P(A) \cdot P(B)$

d.h. A und B stochastisch abhängig.

6. (a)

	M	W	
S	22 %	18 %	40 %
B	33 %	27 %	60 %
	55 %	45 %	100 %

$P(M) \cdot P(B) = 0{,}55 \cdot 0{,}6 = 0{,}33 = P(M \cap B) \Longrightarrow$ M und B sind stochastisch unabhängig.

(b) $P_M(S) = \frac{P(M \cap S)}{P(M)} = \frac{0{,}22}{0{,}55} = \frac{2}{5} = 40\,\%$

(c) $P_B(W) = \frac{P(W \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}27}{0{,}6} = \frac{9}{20} = 45\,\%$

7. Definition der Unabhängigkeit und 1. Pfadregel:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot p_1 \quad \Longrightarrow \quad p_1 = P(B)$$

1. Pfadregel:

$$p_2 = 1 - p_1 = 1 - P(B) = P(\overline{B}) \quad \Longrightarrow \quad P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot p_2 = P(A) \cdot P(\overline{B})$$

1. Pfadregel:

$$p_5 = P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) = P(\overline{B}) \cdot p_3 \quad \Longrightarrow \quad p_3 = P(A)$$

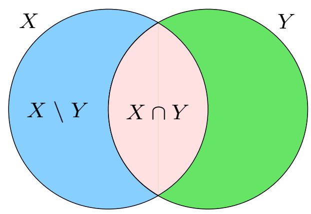
$$p_4 = 1 - p_3 = 1 - P(A) = P(\overline{A})$$

1. Pfadregel:

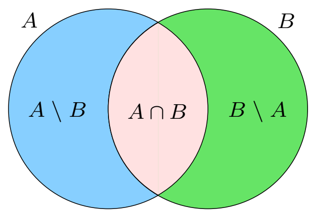
$$p_6 = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) \cdot p_4 = P(\overline{B}) \cdot P(\overline{A})$$

$$\Longrightarrow \quad \overline{A} \text{ und } \overline{B} \text{ sind stochastisch unabhängig.}$$

8. Aus $(X \cap Y) \cap (X \setminus Y) = \emptyset$
und $X = (X \setminus Y) \cup (X \cap Y)$ folgt mit (1)
$|X| = |X \setminus Y| + |X \cap Y|$
und damit (2).



Aus $(A \cap B) \cap (A \setminus B) = \emptyset$
und $(A \cap B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$
und $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$
und $(A \cup B) = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$
folgt mit (1)



$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|$$

und daraus mit (2)

$$|A \cup B| = \underbrace{|A| - |A \cap B|}_{|A \setminus B|} + |A \cap B| + \underbrace{|B| - |A \cap B|}_{|B \setminus A|} = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Für $A \cap B = \emptyset$ ist (3) mit (1) identisch, also ja.

9. Die Ergebnisse sind unabhängig, d. h. es ist egal auf welche Farbe man setzt.