SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Jahrgangsstufe 11 (Gymnasium)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

19. April 2014

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Analysis

1. Änderungsverhalten von Funktionen

1.1. Graphen gebrochen rationaler Funktionen

1.1.1. Definitionslücken

1. Geben Sie für folgende Funktionen die maximale Definitionsmenge an ($G = \mathbb{R}$):

(a) $f(x) = \dfrac{2ax + 4bx^2 + 8cx^3}{80 - 5x^2}$

(b) $g(x) = (2 - x) \cdot \dfrac{x + x^2 + x^3 + x^4}{x^3 - \frac{1}{4}x}$

(c) $h(x) = \dfrac{x}{\sin x}$

(d) $k(x) = 5x \tan(x)$

(e) $l(x) = 7x^2 \tan(2 - x)$

(f) $m(x) = (x + 5) \tan\left(x^2 - \dfrac{1}{2}\pi\right)$

(g) $n(x) = \dfrac{1 + 3x + 33x^2}{\sin(x)}$

(h) $p(x) = 123 \cdot \dfrac{4 + 5x + 6x^2}{\cos(x + 4)}$

(i) $p(x) = \dfrac{12345}{1 - \sin(x - \frac{1}{2}\pi)}$

(j) $q(x) = \dfrac{6789}{\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x)}$

2. Geben Sie für folgende Funktionen die Definitionsmenge D an ($G = \mathbb{R}$):

(a) $f_1(x) = \dfrac{\sin x}{x^2 - 4x + 4}$

(b) $f_2(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{\frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{4}}$

(c) $f_3(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}x^2 - 2}$

(d) $f_4(x) = \dfrac{2x + x^7}{\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}}$

(e) $f_5(x) = \dfrac{2x^4 - x^2}{0{,}01x^2 - 1}$

(f) $f_6(x) = \dfrac{5x + 17}{0{,}64x^2 + 1{,}12x + 0{,}49}$

3. Für welche Belegungen der unabhängigen Variablen x liefern die Funktionen
   (a) $f : x \mapsto y = f\,(x) = \frac{x}{3\,x-5}$
   (b) $g : x \mapsto y = g\,(x) = \frac{2\,x-1}{x-1}$
   Werte größer als 100, 1000, 10 000, M (wobei „M sehr groß ist")?

4. Berechnen Sie die maximale Definitionsmenge folgender Funktionen:

   (a) $f(x) = \sqrt{7\,x+4}$
   (b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5\,x + 6}$
   (c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 6\,x + 9}}$
   (d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4\,x + 4}}{\sqrt{2\,x^2 + 20\,x + 60}}$
   (e) $f(x) = \dfrac{(4\,x-9)^{\frac{1}{2}}}{18 - 8\,x}$
   (f) $f(x) = \dfrac{\lg(x^2 - x)}{\sqrt{x+2}}$
   (g) $f(x) = \lg(6\,x - x^2 - 9)$
   (h) $f(x) = \sqrt{6\,x - x^2 - 9}$

5. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

   (a) In welchen x-Bereichen ist $f(x)$ positiv, in welchen negativ?
   (b) Gib den maximalen Definitionsbereich D_f von f an und untersuche das Verhalten von f an den Rändern von D_f.
   (c) Zeichne den Grafen von f in geeigneten Einheiten.
   (d) Für welche x ist $f(x) > 100$?

6. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{2x - 4}$$

   (a) Bestimme die maximale Definitionsmenge D_f von f und berechne die Nullstellen von f.
   (b) In welchen x-Bereichen ist $f(x)$ positiv, in welchen negativ?
   (c) Untersuche das Verhalten von f an den Rändern von D_f. Gib die Gleichungen der Asymptoten an.

(d) Zeichne den Grafen von f gemeinsam mit den Asymptoten im x-Intervall $[-4; 8]$.

(e) $p(x)$ sei die Gleichung der schrägen Asymptote. Für welche x-Werte gilt

$$|f(x) - p(x)| < 10^{-3}\,?$$

7. Es ist die Funktion
$$f : x \mapsto y = f\,(x) = \frac{8}{2\,x - 1}$$
gegeben. Wie groß muss man die Belegung der unabhängigen Variablen x wählen, damit der Funktionswert $f\,(x)$ für positive x kleiner als $0{,}01; 0{,}001; \varepsilon$ ist?

8. Es ist die Funktion
$$f : x \mapsto y = f\,(x) = \frac{3\,x}{6\,x + 5}$$
gegeben.
   (a) Bestimme die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen der Funktion f.
   (b) Wie groß muss man die Belegung der unabhängigen Variablen x wählen, damit der Graph von $f\,(x)$ für positive x weniger als $0{,}01; 0{,}001; \varepsilon$ von der horizontalen Asymptote der Funktion f abweicht?

1.1.2. Grenzwerte mit x -¿ a

1. $f(x) = \dfrac{(3-x)(x^2-4)}{5(x+2)}$; zeichnen Sie G_f und berechnen Sie $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$.

2. Berechnen Sie folgende Grenzwerte.
   (a) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x+1}$, $\lim\limits_{x\to+1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}$, $\lim\limits_{x\to+1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}$
   (b) $\lim\limits_{x\to+2} \dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x+2}$, $\lim\limits_{x\to+2} \dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-4}$, $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-4}$
   (c) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x-3}$, $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$

3. (a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^n\cdot\sin\frac{1}{x}\right)$ mit $n\in\mathbb{N}$

4. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$ (b) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ (c) $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$

   (e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0^\pm}\frac{1-\cos x}{x^3}$ (g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x+\sin x}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

5. (a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$ (b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}|\tan x|$

6. Verwenden Sie den Satz

   $f(a)=g(a) \quad\wedge\quad f'(x)>g'(x) \quad\text{in}\quad]\,a\,;b\,[\quad\Longrightarrow\quad f(x)>g(x) \quad\text{in}\quad]\,a\,;b\,[$

   und beweisen Sie damit: $\tan x > x \quad\text{in}\quad]\,0\,;\frac{\pi}{2}\,[$.

   Von welchen Seiten nähert sich $h(x)=\frac{\tan x}{x}$ für $x\to 0^\pm$ an seinen Grenzwert an?

1.1.3. Beliebige Grenzwerte

1. Geben sie gebrochen rationale Funktionen an, die folgende Eigenschaften haben:
   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} a(x)=2,\ \lim\limits_{x\to-\infty} a(x)=2$
   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} b(x)=\frac{1}{3},\ \lim\limits_{x\to-\infty} b(x)=\frac{1}{3}$
   (c) $\lim\limits_{x\to\infty} c(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} c(x)=-\infty$
   (d) $\lim\limits_{x\to\infty} d(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} d(x)=-\infty$
   (e) $\lim\limits_{x\to 2+0} e(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to 2-0} e(x)=-\infty$
   (f) $\lim\limits_{x\to -3+0} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to -3-0} f(x)=-\infty$
   (g) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 2\pm 0} g(x)=\infty$
   (h) $\lim\limits_{x\to 5} h(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 2\pm 0} h(x)=-\infty$

2. Skizzieren Sie sorgfältig den Graphen einer Funktion f mit folgenden Eigenschaften:
   - f ist (mindestens) auf dem Intervall $[-6;6]$ definiert;
   - $f(-2)=3$;
   - $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ existiert, ist aber von $f(-2)$ verschieden;

- $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$ existieren, aber $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existiert nicht;
- $f'(3)$ ist negativ, $f'(5)$ ist positiv.

Geben Sie auch die Werte der genannten Grenzwerte an (soweit die Grenzwerte existieren) und zeichnen Sie Tangenten ein, wo es für das Verständnis der Skizze angemessen ist.

3. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\frac{1}{x}}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 2^\pm} \dfrac{3-x}{\frac{3}{x-2}}$ (c) $\lim\limits_{x\to 2^\pm} \dfrac{x}{x^2-4}$

4. Zeichnen Sie G_f und berechnen Sie alle Grenzwerte an den Rändern von D_f:

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2}{9-x^2}$; D_f maximal (b) $f(x) = \dfrac{x}{9-x^2}$; D_f maximal

5. Geben Sie für folgende Funktionen die maximale Definitionsmenge an und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionen an den Grenzen der Definitionsmenge.

   (a) $f(x) = \dfrac{2}{1-\sqrt{x}}$

   (b) $g(x) = \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

6. Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

   (a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x|+2}{|x-2|}$, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{|x-2|}$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-|x|}{1+x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-|x|}{1+x}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{|2x|-4x^2}$, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{1}{|2x|-4x^2}$, $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{1}{|2x|-4x^2}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|+x^2}$

7. Berechnen Sie D_f, untersuchen Sie das Verhalten von f am Rande von D_f und zeichnen Sie den Graphen G_f:

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-6}$

8. Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 4^\pm} [6-x+3\cdot\operatorname{sgn}(x-4)]$ und zeichnen Sie den Graphen G_f.

9. (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\sin\frac{1}{x}\right)$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ (c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(x-\frac{\pi}{2})\tan x\right]$

10. Berechnen Sie D_f für $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$.
    Berechnen Sie alle relevanten Grenzwerte von f im Bereich $0<x<\pi$. Wenn möglich, sind die Ergebnisse exakt (durch Wurzeln) auszudrücken, Tendenzen (+ oder −) sind numerisch mit dem Taschenrechner zu ermitteln!

11. Berechnen Sie in nachvollziehbarer Weise die folgenden Grenzwerte:
    (a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2x}-2x}$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2x}-2x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 3x}{x^2+\sin 2x}$

1.1.4. Anwendungsaufgaben zu Grenzwerten

1. In den verschiedensten Bereichen der Physik, wie z. B. der Akustik und der Elektrodynamik, treten Schwingungen auf. Wird ein schwingungsfähiges System von außen mit der Frequenz f angeregt (maximale Anregungskraft konstant), hängt seine Reaktion (Amplitude) stark von der Anregungsfrequenz f ab.
   Die Amplitude $A(f)$ kann durch folgende Formel beschrieben werden:

$$A(f)=\frac{C}{\sqrt{({f_0}^2-f^2)^2+(f\gamma)^2}}$$

   Neben Konstanten des Systems (C enthält die maximale Anregungskraft und den Reibungsfaktor γ) hängt $A(f)$ von der Eigenfrequenz f_0 des Systems und der Anregungsfrequenz f ab. Hier werden nur Fälle mit $\gamma<\frac{f_0}{\sqrt{2}}$ betrachtet.

   (a) Untersuchen Sie, wie sich die Amplitude $A(f)$ für $f\to 0$ und für $f\to\infty$ verhält und interpretieren Sie die Ergebnisse.
   (b) Berechnen Sie allgemein die Resonanzfrequenz (Frequenz, bei der die Amplitude maximal ist) f_R des Systems.
   (c) Von welchen Parametern hängt die Resonanzfrequenz in welcher Weise ab? Skizzieren Sie qualitativ die Resonanzfrequenz in Abhängigkeit vom Reibungsfaktor.
   (d) Stellen Sie $A(f)$ für $C=50$, $f_0=5$ und $\gamma=1{,}1$ für $f\in[0;15]$ graphisch dar.
   (e) Diskutieren Sie mit Hilfe einer geeigneten Software, wie sich der Verlauf von $A(f)$ in Abhängigkeit von den vorkommenden Parametern ändert.

1.1.5. Graphen, Polstellen, Asymptoten

1. Welcher der angegebenen Terme nähert die Funktion $f(x) = \frac{2}{x} + x^2 + 3$ für große Werte am besten an? Mache deine Antwort plausibel.

$$(i)\ \frac{2}{x} \qquad (ii)\ x^2 \qquad (iii)\ x^2+3 \qquad (iv)\ \frac{2}{x}+3 \qquad (v)\ \frac{2}{x}+x^2$$

2. Erstellen Sie für die folgende Funktion eine Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen:
$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$
Für welche x ist $|f(x)| < \varepsilon = 10^{-5}$? Rechnen Sie zuerst allgemein!

1.1.6. Stetigkeit

1. Widerlegen Sie folgende Behauptungen mit Hilfe der angegebenen Funktionen.
   (a) Existiert der Grenzwert von f an der Stelle x, so ist f an der Stelle x stetig.
   $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \neq 3 \\ 2 & \text{für} \quad x = 3 \end{cases}$$
   (b) Jede Unstetigkeitsstelle einer Funktion ist eine Sprungstelle.
   $$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$
   (c) Ist f an der Stelle x stetig, so ist f an der Stelle x auch differenzierbar.
   $$f(x) = |x|, D = \mathbb{R}$$
   (d) Ist eine stetige Funktion f an einer Stelle x nicht differenzierbar, so hat f an der Stelle x eine Knickstelle.
   $$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$
   (e) Ist f an der Stelle x differenzierbar, so ist f' an der Stelle x stetig.
   $$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

(f) Ist die Ableitung einer reellen Funktion f an einer Stelle x_0 positiv, so ist f in einer Umgebung von x_0 streng monoton wachsend.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + \frac{x}{2}, & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

Quelle: Mathematik lehren, Heft 75, S. 64ff

2. Bei der Fahrt von einer Haltestelle zur nächsten Haltestelle lässt sich der zurückgelegte Weg einer U-Bahn durch folgende Funktion beschreiben:

$$s(t) = \begin{cases} 0{,}5t^2, & \text{für} \quad 0 \leq t < 12 \\ 0{,}2(t+18)^2 - 108 & \text{für} \quad 12 \leq t < 35 \\ 21{,}2(t-35) + 453{,}8 & \text{für} \quad 35 \leq t < 38 \\ -0{,}48(t-60)^2 + 749{,}72 & \text{für} \quad 38 \leq t \leq 60 \end{cases}$$

   (a) Untersuchen Sie die Funktion auf Stetigkeit.
   (b) Zeichnen Sie den Graphen von $s(x)$ für $0 \leq t \leq 60$.
   (c) Berechnen Sie abschnittsweise die erste Ableitung von $s(t)$ und untersuchen Sie die Ableitung auf Stetigkeit.
   (d) Zeichnen Sie den Graphen von $s'(x)$ für $0 \leq t \leq 60$.
   (e) Interpretieren Sie die Funktion $s'(x)$.
   (f) Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit im Bereich $0 \leq t \leq 60$.

   Literatur: *Mathematikaufgaben, Anwendungen aus der modernen Technik und Arbeitswelt*, Werner Schmidt, Ernst Klett Verlag, 1984

3. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2, & \text{falls} \quad x \leq 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{falls} \quad x > 0 \end{cases}$$

   (a) Geben Sie die Nullstellen der Funktion im gesamten Definitionsbereich an.
   (b) Untersuchen Sie, ob $f(x)$ im Definitionsbereich stetig und differenzierbar ist.

1.2. Lokales Differenzieren

1.2.1. Numerische Differentiation

1. **Numerische Berechnung der Ableitung:**

   Wenn man die Ableitungsfunktion f' einer Funktion f nicht kennt, kann man $f'(x)$

durch einen der folgenden Differenzenquotienten (DQ) annähern:

$f_{\mathrm{R}}(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$	$f_{\mathrm{L}}(x) = \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h}$	$f_{\mathrm{Z}}(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2\,h}$
rechtsseitiger DQ	linksseitiger DQ	zentraler DQ

(a) Beweisen Sie, dass der zentrale Differenzenquotient der Mittelwert aus dem rechtsseitigen und dem linksseitigen Differenzenquotienten ist!

(b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{-x^2 + 10\,x - 5}{4}$$

im Intervall $[\,0\,;\,6\,]$ und veranschaulichen Sie die Bedeutung der drei Differenzenquotienten für $x = 3$ und $h = 2$. Welcher Quotient liefert wohl die beste Näherung für $f'(x)$?

(c) Berechnen Sie die drei Differenzenquotienten für die Funktion aus Teilaufgabe (b) an der Stelle $x = 3$ mit $h = 0{,}1$ und $h = 0{,}001$. Wie groß ist der relative Fehler der Näherungswerte?

(d) Beweisen Sie, dass der zentrale Differenzenquotient einer quadratischen Funktion $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ gleich der Ableitung $f'(x)$ ist!

2. Berechnen Sie $f'(a)$ numerisch mit dem rechten, dem linken und dem zentralen Differenzenquotienten und geben Sie jeweils den relativen Fehler an:

(a)	$f(x) = x^2$;	$a = 2$;	$h = 0{,}01$
(b)	$f(x) = \sin x$;	$a = \frac{\pi}{3}$;	$h = 0{,}1$
(c)	$f(x) = \sin x$;	$a = \frac{\pi}{3}$;	$h = 0{,}001$
(d)	$f(x) = \sin x$;	$a = \frac{\pi}{3}$;	$h = 0{,}00001$
(e)	$f(x) = 2^x$;	$a = 1$;	$h = 0{,}0001$
(f)	$f(x) = x \cdot \cos x$;	$a = \frac{\pi}{3}$;	$h = 0{,}0001$

(g) Die numerische Berechnung der Ableitung mit dem Taschenrechner liefert für $h \approx 0{,}0001$ optimale Ergebnisse. Warum wird die Genauigkeit des Ergebnisses für kleinere h wieder schlechter?

3. Berechnen Sie $f'\left(\frac{\pi}{18}\right)$ für $f(x) = \cos 3x$ einmal exakt und einmal numerisch mit dem zentralen Differenzenqotienten ($h = 0{,}01$).
Wie groß ist der relative Fehler des Näherungswertes?

4. Berechnen Sie $f'\left(\frac{\pi}{30}\right)$ für $f(x) = \cos 5x$ einmal exakt und einmal numerisch mit dem zentralen Differenzenqotienten ($h = 0{,}01$).
   Wie groß ist der relative Fehler des Näherungswertes?

5. Berechnen Sie numerisch so genau wie möglich die Ableitung der Funktion $f(x) = 2^x$ an der Stelle $x = 1$.

6. Berechnen Sie numerisch so genau wie möglich die Ableitung der Funktion
   $$f(x) = \frac{1}{\sin x}$$
   an der Stelle $x = \dfrac{\pi}{6}$.

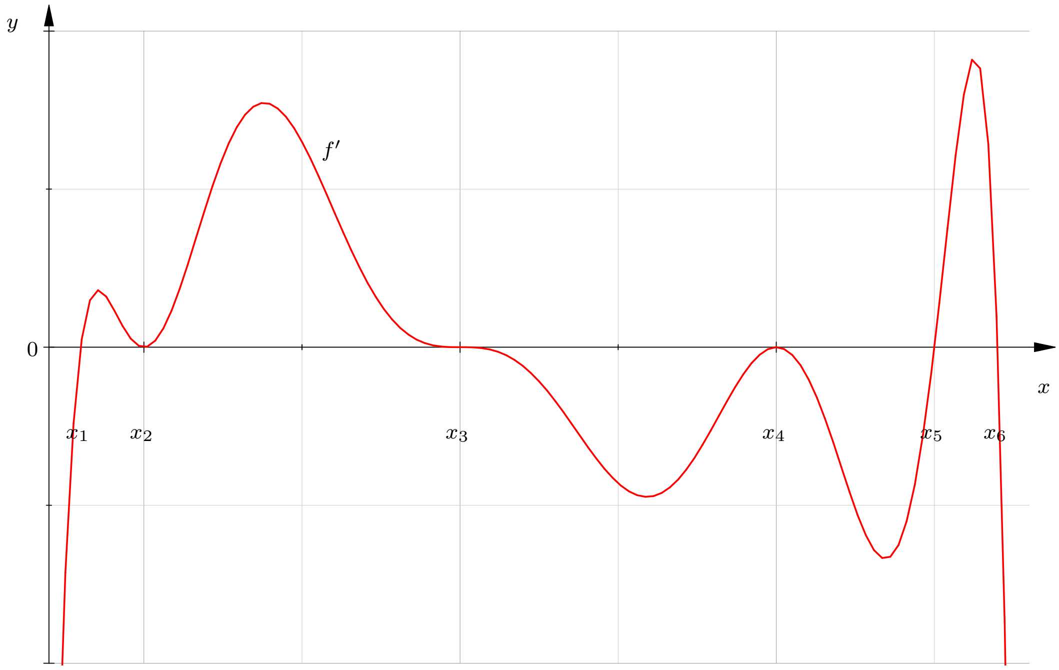
7. Die Ableitungsfunktion der Funktion f mit $f(x) = 2^{-x} \sin x$ können wir noch nicht berechnen. Bestimme trotzdem so genau wie möglich den Wert von $f'(0{,}6)$.

1.3. Globales Differenzieren

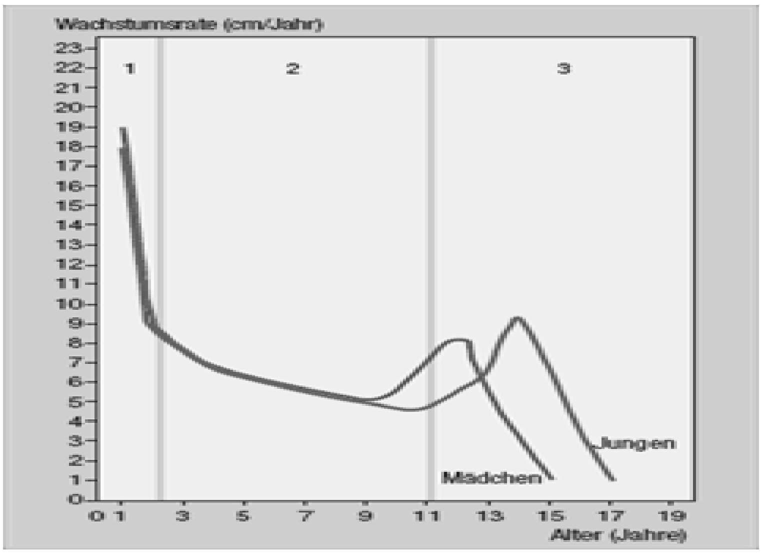
1.3.1. Ableitungsfunktion

1. Was bedeutet die Ableitung der Funktion f an der Stelle x, wenn
   (a) $f(x)$ der Ort eines Körpers zur Zeit x ist
   (b) $f(x)$ die Geschwindigkeit eines Körpers zur Zeit x ist
   (c) $f(x)$ das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge x ist
   (d) $f(x)$ das Volumen einer Kugel mit dem Radius x ist
   (e) $f(x)$ das Teilvolumen eines Körpers von der Höhe null bis zur Höhe x ist
   (f) $f(x)$ die Zahl der zur Zeit x lebenden Menschen ist
   (g) $f(x)$ die Ladung ist, die bis zur Zeit x durch den Querschnitt eines Leiters geflossen ist
   (h) $f(x)$ die Arbeit ist, die zum Bewegen eines Körpers bis an den Ort x verrichtet wurde

2. Skizziere den ungefähren Verlauf von f'' und von f.



3. Im folgenden Diagramm ist die Wachstumsrate von Jungen und Mädchen nach der Geburt dargestellt:



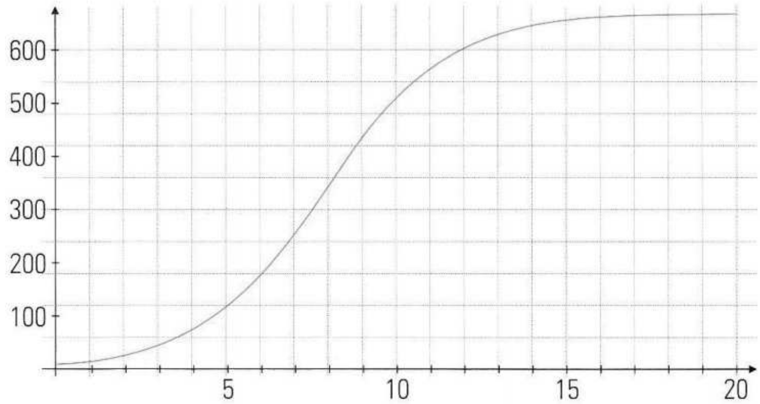
   (a) Erläutere den Verlauf der beiden Wachstumsgraphen. Gehe dabei auf alle interessanten Stellen ein.

   (b) Zeichne zu beiden Graphen einen passenden Graphen, der für jedes Alter die Körpergröße angibt.

(c) Untersuche auch die Körpergrößen-Graphen auf interessante Stellen. Wie hängen die Stellen ndieser Graphen mit den interessanten Stellen der ursprünglichen Wachstumsgraphen zusammen?

Quelle: Veränderungen verstehen - qualitativ und diskret, Stefan Hußmann und Timo Leuders, PM Heft 31, Februar 2010, 52.Jg, S. 2-3; www.wachstum.de

4. **Hefewachstum**
In der Graphik ist das Wachstum einer Hefekultur dargestellt (Zeitangaben in Stunden, Hefemenge in mg)



(a) Schätze die ungefähre Lage des Wendepunktes ab und zeichnen Sie ihn in der Graphik ein.

(b) Schätze ab, wie groß die Wachstumsgeschwindigkeit an der Wendestelle ist.

(c) Deute den Wendepunkt im Hinblick auf die Wachstumsgeschwindigkeit.

Quelle: Kopiervorlage: Beispiele für Abituraufgaben, PM Heft 31, Februar 2010, 52.Jg, S. 38

5. Berechne die Lage der Extrema für den Graphen der Funktion $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

6. Verwenden Sie die Definition der Ableitung, um f' von $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ zu berechnen.

7. Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{1}{x-1}; \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

(a) Berechnen Sie $f'(2)$, indem Sie den Grenzwert des entsprechenden Differenzenquotienten ermitteln. (**Falsches** Ersatzergebnis, falls Sie diese Teilaufgabe nicht lösen können: -2.)

(b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $\mathrm{P}(\,2\,|\,y_{\mathrm{P}}\,)$.

8. (a) Schreiben Sie die Formel für die Definition der Ableitung einer Funktion f an der Stelle x hin. Erläutern Sie die in der Formel vorkommenden Begriffe an Hand einer beschrifteten Skizze.

   (b) Verwenden Sie die Definition der Ableitung, um die Ableitung von $f(x) = \dfrac{1}{x}$ zu berechnen.

9. Berechnen Sie $f'(2)$ für die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x}$ mit Hilfe der Ableitungsdefinition!

10. (a) Schreiben Sie die Formel für die Definition der Ableitung einer Funktion f an der Stelle x hin. Erläutern Sie die in der Formel vorkommenden Begriffe an Hand einer beschrifteten Skizze.

    (b) Verwenden Sie die Definition der Ableitung, um die Ableitung von $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ zu berechnen.

11. (a) Schreiben Sie die Formel für die Definition der Ableitung einer Funktion f an der Stelle x hin. Erläutern Sie die in der Formel vorkommenden Begriffe an Hand einer beschrifteten Skizze.

    (b) Verwenden Sie die Definition der Ableitung, um die Ableitung von $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ zu berechnen.

12. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

mit Hilfe der Definition der Ableitung und weisen Sie nach, dass die Formel für die Ableitung von x^n somit auch für $n = -\frac{1}{2}$ gilt.

1.3.2. ganzrationale Funktionen

1.3.3. Summenregel

1.3.4. Produktregel

1. Überprüfen Sie die Produktregel mit der Berechnung von

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^n \cdot x^m\right) \quad , \quad n, m \in \mathbb{N}$$

auf zwei Arten (einmal mit und einmal ohne Produktregel)!

2. Leite folgende Funktionen mit der Produktregel ab!
   (a) $f_1(x) = (x+1)(x+4)$
   (b) $f_2(x) = (3x+5)(x-2)$
   (c) $f_3(x) = (5x+13)(4x-17)$
   (d) $f_4(x) = (35+12x)(1-x)$
   (e) $f_5(x) = (14-3x)(16-9x)$
   (f) $f_6(x) = (x-4)(x^2+3)$
   (g) $f_7(x) = (x^2+5x)(8+25x)$
   (h) $f_8(x) = (3x^2+x)(13x-9x^2)$
   (i) $f_9(x) = (x-4)(x^2+3)$

3. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen auf zwei Arten:
   (i) Ausmultiplizieren und Differenzieren
   (ii) mit Hilfe der Produktregel
   (a) $f(x) = (5x+3)^2$
   (b) $g(x) = 3(2x^2+2)^2$
   (c) $h(x) = 3x(4x+5)^2$

1.3.5. Quotientenregel

1. Wir betrachten die Funktionenschar $f_a(x) = x^2 + \frac{a}{x}$. P_a sei ein Punkt auf G_{f_a} mit waagrechter Tangente. Berechnen Sie die Koordinaten von P_a! Auf welcher Kurve liegen alle Punkte P_a mit $a \in \mathbb{R}$?

1.3.6. Sinus- und Kosinusfunktion

1. Wir betrachten $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ im Intervall $]\,0\,;\,2\,\pi\,]$. Zeichnen Sie den Graphen von f und berechnen Sie die Koordinaten des Punktes mit waagrechter Tangente.

2. Wir betrachten die Funktion f mit
$$f(x) = \frac{\pi}{6} \cdot x + \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right)$$
mit $D_f = [0, 6]$.

(a) Berechne $f'(x)$. Berechne die Nullstellen von f' im Definitionsbereich und verwende dazu den Grafen einer geeigneten Funktion als Überlegungsfigur.

(b) Zeichne den Grafen von f und markiere die Punkte mit waagrechter Tangente.

3. Berechne die Ableitungen folgender Funktionen:

   (a) $f(x) = \sin(x^2)$, (b) $g(x) = \sin^2 x$, (c) $h(x) = x^2 \cos x$,

1.3.7. Wurzelfunktion

1. Bestimmen Sie die Extrema der Funktion

$$f(x) = \sqrt{x}\,(1 - \frac{1}{56}x^3).$$

2. (a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))$ (b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sin x\right)$

   (c) Berechnen Sie mit der Produktregel: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

3. Wir betrachten die Funktion $f\,:\,x \to f(x)$ mit

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

   (a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge D_f und untersuchen Sie f auf Nullstellen.

   (b) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs.

   (c) Berechnen Sie die Ableitung von f und vereinfachen Sie so weit wie möglich. Berechnen Sie auch den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$.

   (d) Skizzieren Sie den Graphen von f in geeignet gewählten Einheiten im Intervall $x \in [0\,;\,9]$.

4. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. An nichtdifferenzierbaren Stellen sind die einseitigen Ableitungen zu berechnen. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen.

   (a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ (b) $f(x) = \frac{x + |x|}{2} \cdot \sqrt{|x|}$ (c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + |x|}{2 \cdot \sqrt[3]{|x|}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

1.3.8. Kettenregel

1. Für einen Körper, der sich entlang der x-Achse bewegt, gilt

$$x(t) = A \sin \omega t.$$

   Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v(t) = \dot{x}(t)$ und die Beschleunigung $a(t) = \ddot{x}(t)$. Drücken Sie $a(t)$ durch $x(t)$ aus.

2. (a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{2}\cos 2x - 7\sin\dfrac{x}{7}\right)$ (b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{3}\sin 6x - 3\cos\dfrac{2x}{3}\right)$

3. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen mit der Kettenregel.
   (a) $f(x) = \sin(x^2)$
   (b) $f(x) = \cos(x^3)$
   (c) $f(x) = \tan(x^4)$
   (d) $f(x) = \sin(x^2 + 2x + 2)$
   (e) $f(x) = \cos(x^4 + 3x^2 + x)$
   (f) $f(x) = \tan(x^5 + 2x^3 + 3x)$
   (g) $f(x) = \sin(\cos(x))$
   (h) $f(x) = \cos(\sin(x))$
   (i) $f(x) = \cos(\tan(x))$
   (j) $f(x) = \tan(\cos(x))$
   (k) $f(x) = \sin(\tan(x))$
   (l) $f(x) = \tan(\sin(x))$

1.3.9. Betrag im Funktionsterm

1. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{2\,x^3 - 8\,x^2 + 25\,x + (2\,x^2 - 4\,x)\cdot|x-2| - (2\,x^2+1)\cdot|x|}{4\,x}$$

   (a) Wie lautet die Definitionsmenge von f? Geben Sie eine betragsfreie Darstellung von f an.
   (b) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.
   (c) Zeichnen Sie den Graphen von f im x-Intervall $[-2\,;\,4]$.
   (d) Zeichnen Sie den Graphen von f' im x-Intervall $[-2\,;\,4]$.

2. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + x \cdot |x-2|$$

   (a) Geben Sie eine betragsfreie Darstellung von f an.

   (b) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

   (c) Zeichnen Sie die Graphen von f und von f' im x-Intervall $[-1\,;\,4]$ in ein Diagramm.

3. Wir betrachten die Funktion $\quad f(x) = \dfrac{(x^2-4)\cdot|x-1|}{2\,x-4}$.

   (a) Schreiben Sie die Definitionsmenge und eine betragsfreie, möglichst einfache Darstellung von f hin. Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und geben Sie, wenn möglich, eine stetige Fortsetzung von f an.

   (b) Untersuchen Sie f auf Differenzierbarkeit. An nichtdifferenzierbaren Stellen sind die einseitigen Ableitungen zu berechnen. Wo hat der Graph G_f eine waagrechte Tangente? Zeichnen Sie G_f in der Einheit 1 cm im Intervall $[\,-3\,;3\,]$.

   (c) Die Teilaufgaben (a) und (b) sind jetzt für die Funktion

$$g(x) = \frac{(x^2-4)\cdot|x-1|}{|2\,x-4|}$$

   zu lösen. Dabei ist reger Gebrauch von den Ergebnissen der Teilaufgaben (a) und (b) zu machen!

4. Wir betrachten die Funktion $\quad f(x) = \dfrac{(4-x^2)\cdot|x+1|}{2\,x+4}$.

   (a) Schreiben Sie die Definitionsmenge und eine betragsfreie, möglichst einfache Darstellung von f hin. Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und geben Sie, wenn möglich, eine stetige Fortsetzung von f an.

   (b) Untersuchen Sie f auf Differenzierbarkeit. An nichtdifferenzierbaren Stellen sind die einseitigen Ableitungen zu berechnen. Wo hat der Graph G_f eine waagrechte Tangente? Zeichnen Sie G_f in der Einheit 1 cm im Intervall $[\,-3\,;3\,]$.

   (c) Die Teilaufgaben (a) und (b) sind jetzt für die Funktion

$$g(x) = \frac{(4-x^2)\cdot|x+1|}{|2\,x+4|}$$

   zu lösen. Dabei ist reger Gebrauch von den Ergebnissen der Teilaufgaben (a) und (b) zu machen!

1.3.10. vermischte Aufgaben

1. Berechnen Sie die Ableitung: (a) $f(x) = a\,x + b$ (b) $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c + \dfrac{d}{x}$

2. Zeichnen Sie die Graphen von $f$und f' und berechnen Sie die Nullstellen von f':

   (a) $f(x) = -0{,}3\,x^2 + 1{,}5\,x + 2{,}125$ (b) $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{8\,x} - \dfrac{x^2}{2}$

3. Berechnen Sie $f'(x)$: (a) $f(x) = a\,x^n - b\,x^m + \dfrac{c}{x} - d\,\sqrt{x}$

   (b) $f(x) = \dfrac{x^n}{n} - \dfrac{1}{x} + 2\,\sqrt{x}$

4. Berechne die Ableitungen folgender Funktionen und vereinfache (Ergebnisse ohne negative und ohne gebrochene Exponenten):

   (a) $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x^3} + \sqrt[3]{x}$ (b) $g(x) = x^3 \sin^2 x$ (c) $h(x) = \dfrac{x}{x+1}$

   (d) $k(x) = \sqrt{\sin\left(x^3\right)}$ (e) $r(x) = \sqrt{\sin^3 x}$ (f) $s(x) = \sin^3 \sqrt{x}$

5. Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x^{999}}$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$ (c) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{2\,x - 5}$

   (d) $f(x) = \dfrac{x+3}{7-x^2}$ (e) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$ (f) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

   (g) $f(x) = \dfrac{x^2\,\sin x}{x-\sqrt{x}}$ (h) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^{10}}$ (i) $f(x) = \dfrac{\tan x}{x^2}$

6. Wir betrachten $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ im Intervall $]\,0\,;\,2\,\pi\,]$. Zeichnen Sie den Graphen von f und berechnen Sie die Koordinaten des Punktes mit waagrechter Tangente.

7. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen mit Hilfe der Produktregel und mit Hilfe der Quotientenregel.

   (a) $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{x^2}$

   (b) $g(x) = \dfrac{3x^2+4x}{\sqrt{x}}$

   (c) $h(x) = \dfrac{5x^3+6x^2}{x^7}$

8. Berechnen Sie für die Funktion

$$g\,:\,x\,\rightarrow\,g(x)\quad\text{mit}\quad g(x)=x\cdot\sin\frac{1}{x}$$

die Ableitung und den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$.

Tipp für den Grenzwert: Substitution!

9. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen
   (a) $f_1(x)=\sqrt{1-x}$
   (b) $f_2(x)=\sqrt{\sin x}$
   (c) $f_3(x)=\dfrac{\cos x+x}{\sin x-x}$
   (d) $f_4(x)=\sqrt{x^2+4}\cdot\dfrac{1+x}{1-x}$

10. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen:
    (a) $h(x)=5\sqrt{x}+x^5$
    (b) $l(x)=\dfrac{1}{2x^2+1}$
    (c) $k(x)=\dfrac{27x^7+12x^5+3x^2}{3x^2}$

11. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$g(x)=x^2\sin x+\frac{\cos x}{x}\quad;\qquad x\neq 0.$$

12. Untersuchen Sie ob folgende Funktionen bei x_0 bzw. x_n differenzierbar sind.
    (a) $f(x)=\sin|x|,\qquad x_0=0$
    (b) $f(x)=|\sin x|\cdot x,\qquad x_0=0, x_n=n\pi$ mit $n\in\mathbb{Z}$
    (c) $f(x)=\dfrac{|x|-2}{x^2-x-2},\qquad x_0=0$
    (d) $f(x)=\dfrac{x}{|x|+1},\qquad x_0=0$

13. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen.
    (a) $f(x)=x^2\sin x$

(b) $g(x) = (x^2 + x)\sin 2x$

(c) $h(x) = (x + 2)^2 \sin 2x$

(d) $l(x) = x^4 \cos(x^2)$

(e) $m(x) = (x^3 + 3)\cos 3x$

(f) $n(x) = (x^2 + 2)^2 \cos 3x$

(g) $p(x) = \sin x \cos x$

(h) $q(x) = \sin^2 x \cos x$

(i) $r(x) = \sin^2 x \cos^2 x$

14. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen.

(a) $f_1(x) = (2x + 3)^4(4x^2 - 6)^7$

(b) $f_2(x) = (2x^4 - 3)^5(3x - 4x^5)^4$

(c) $f_3(x) = (3x + 2)^4\sqrt{1 + x^2}$

(d) $f_4(x) = (x + 2)^2\sqrt{x + 1}$

(e) $f_5(x) = (x^3 - 1)^3\sqrt{x^2 + x + 1}$

(f) $f_6(x) = \sqrt{\dfrac{x + 2}{x - 2}}$

(g) $f_7(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2 - 2}}$

(h) $f_8(x) = \dfrac{x\sqrt{1 + x}}{x^2 + 2}$

(i) $f_9(x) = \dfrac{2x^3\sqrt{1 - x}}{3x^2 - 4}$

15. (a) Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = x^{\frac{n}{m}} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \quad \text{und} \quad x > 0$$

Potenzieren Sie die Funktionsgleichung mit m und differenzieren Sie beide Gleichungsseiten (Kettenregel!). Beweisen Sie dann, dass die bekannte Ableitungsregel für die Potenzfunktion auch für rationale Exponenten gilt.

Berechnen Sie die Ableitung von f und geben Sie D_f an:

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (c) $f(x) = \sqrt[100]{x^{101}}$ (d) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$ (f) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}$ (g) $f(x) = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

(h) $f(x) = \sqrt[4]{\sin^3 x}$ (i) $f(x) = \sqrt[5]{\sin^2 x}$ (j) $f(x) = \sqrt[5]{\sin^3\left(x^{\frac{3}{2}}\right)}$

16. Wir untersuchen die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \sqrt{\sin^3(x^2)} \quad \text{mit} \quad D_f \subseteqq [0\,,\,\pi].$$

   (a) Berechnen Sie die Nullstellen und die Definitionsmenge D_f von f.
   (b) Wie lauten die Koordinaten der Punkte auf G_f mit waagrechten Tangenten?
   (c) Zeichnen Sie den Graphen von f. Wählen Sie auf der x-Achse 2 cm und auf der y-Achse 5 cm als Einheit.

17. Berechnen Sie $f'(x)$ und vereinfachen Sie: $\qquad f(x) = \dfrac{\sin x}{x \cdot \cos x}$.

18. Berechnen Sie $f'(x)$ und vereinfachen Sie: $\qquad f(x) = \dfrac{\cos x}{x \cdot \sin x}$.

19. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \sqrt{\cos(x^2) + \sin^2(3x)}$$

   ohne Berücksichtigung der Definitionsmenge.

20. Berechne jeweils die Ableitung:
   (a) $f_1 : x \mapsto y = f_1(x) = x + e^{x^2}$
   (b) $f_2 : x \mapsto y = f_2(x) = e^{-x} + \sin x$
   (c) $f_3 : x \mapsto y = f_3(x) = 5\,e^{\sqrt{\sin x}}$
   (d) $f_4 : x \mapsto y = f_4(x) = e^{\sin\left(x^2\right)}$
   (e) $f_5 : x \mapsto y = f_5(x) = x\,e^{\sqrt{x}}$
   (f) $f_6 : x \mapsto y = f_6(x) = x\,e^{x\,\sin x}$
   (g) $f_7 : x \mapsto y = f_7(x) = 2^{\ln x}$
   (h) $f_8 : x \mapsto y = f_8(x) = x^{\sqrt{x}}$

21. Berechne jeweils die Ableitung:
    (a) $g_1 : x \mapsto y = g_1(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{x}}$
    (b) $g_2 : x \mapsto y = g_2(x) = -\ln(\cos x)$
    (c) $g_3 : x \mapsto y = g_3(x) = x^2 - x \ln x$
    (d) $g_4 : x \mapsto y = g_4(x) = \ln(\sin \sqrt{x})$

22. (a) $g = f^{-1}$ ist die Umkehrfunktion von f. Benutze die Beziehung

    $$f \circ g(x) = f(g(x)) = x,$$

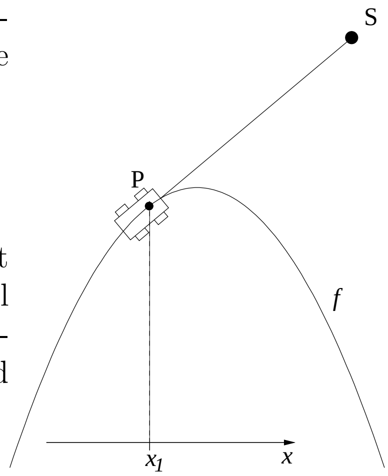
    um die Ableitungsregel für die Umkehrfunktion zu beweisen.
    (b) Es sei $f(x) = \cos x$ mit $D_f = [0; \pi]$. Mit $g(x) = \arccos x$ wird die Umkehrfunktion von f bezeichnet. Berechne die Ableitung von g.
    (c) Es sei $f(x) = \tan x$ mit $D_f = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Mit $g(x) = \arctan x$ wird die Umkehrfunktion von f bezeichnet. Berechne die Ableitung von g.

1.4. Begriff der Stammfunktion

1. (a) $f'(x) = 6x^2 - 10$ und $f(2) = 3$. Welchen Wert hat $f(0)$?
   (b) $f'(x) = 12x^2 - 2x + 10$ und $f(3) = 10$. Welchen Wert hat $f(0)$?
   (c) $f'(x) = 3x^2 + 4x$ und $f(4) = 4$. Welchen Wert hat $f(0)$?
   (d) $f'(x) = 15x^2 - 6x - 7$ und $f(1) = 1$. Welchen Wert hat $f(0)$?

2. Anwendungen der ersten Ableitung

2.1. Tangente, Normale, Schnittwinkel



1. Ein Auto fährt (in Richtung größer werdender x-Werte) entlang einer Straße, deren Verlauf durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$$

gegeben ist. Wo befindet sich der Wagen (Punkt $\mathrm{P}\,(x_1|f(x_1))$), wenn seine Scheinwerfer, deren Strahl immer tangential zur Straße verläuft, gerade das alte Schloss am Ort $\mathrm{S}\,(6|8)$ erhellen? Zeichnung und Rechnung!

2. (a) Zeichnen Sie die Grafen der Funktionen f und g mit den Gleichungen

$$f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = 10\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

im x-Intervall $[0{,}45; 0{,}65]$ (Einheit: $0{,}1 \mathrel{\widehat{=}} 2\,\mathrm{cm}$, y-Achse von 0,4 bis 0,7). Zeichnen Sie den Scheitel von g ein.

(b) Stellen Sie die Gleichung $t(x)$ der Tangente an f im Punkt $\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{6}\middle|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ auf.

(c) Neben $x_1 = \frac{\pi}{6}$ gibt es noch einen zweiten Schnittpunkt von f und g bei $x = x_2$. Berechnen Sie einen Näherungswert x_2^* für x_2, indem Sie nicht g mit f, sondern g mit t schneiden. Wie groß ist der prozentuale Fehler dieser Näherung, wenn auf fünf geltende Ziffern $x_2 = 0{,}60799$ gilt.

3. Wir betrachten die Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = \frac{1}{x}$.

(a) Berechnen Sie den Funktionsterm $t(x)$ der Tangente an G_f im Punkt $\mathrm{P}\,(a|f(a))$. Wo schneidet die Tangente die Koordinatenachsen?

(b) $s(x)$ ist der Funktionsterm der Tangente an G_f im Punkt $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{a}\middle|f\left(\frac{1}{a}\right)\right)$. Berechnen Sie $s(x)$ mit Hilfe des Ergebnisses von Teilaufgabe (a). Wie lauten die Koordinaten des Schnittpunktes $\mathrm{S}(x_\mathrm{s}|y_\mathrm{s})$ von t und s?

(c) Zeichnen Sie den Grafen von f im x-Intervall $]0; 4]$ mit der Einheit 2 cm und zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse die Tangenten t und s für $a = 2$ ein. Unter welchem Winkel φ schneiden sich die beiden Tangenten für $a = 2$?

4. Wir betrachten die Funktionen f und g mit den Termen

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{5}{x}$$

(a) Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$.

(b) Berechnen Sie die Scheitelkoordinaten von G_f und schreiben Sie $f(x)$ in der Scheitelform hin.

(c) Erstellen Sie eine Wertetabelle für f und g für alle ganzzahligen x-Werte im Intervall $[-1; 4]$. In welchem Punkt S schneiden sich also f und g? Zeichnen Sie die Grafen von f und g im Intervall $[-1; 4]$ in ein Koordinatensystem. Ergänzen Sie die Wertetabelle in geeigneter Weise.

(d) Stellen Sie die Gleichung $t(x)$ der Tangente an G_g im Punkt S auf. Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte dieser Tangente mit den Koordinatenachsen an.

(e) Zeichnen Sie die Tangenten an die beiden Funktionsgrafen in S ein und berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Grafen.

5. G_t sei die Tangente an G_f mit $f(x) = x^2$ im Punkt $\mathrm{A}\,(a|f(a))$, G_n sei die Normale auf G_f in A. Stellen Sie die Funktionsgleichungen $t(x)$ bzw. $n(x)$ auf und berechnen Sie die Nullstellen von t und n. Stellen Sie eine Regel zum *Konstruieren* von G_t auf.

6. G_t sei die Tangente an G_f mit $f(x) = x^2$ im Punkt $\mathrm{A}\,(a|f(a))$, G_n sei die Normale auf G_f in A. $\{\mathrm{P}\} = (\mathrm{G}_f \cap \mathrm{G}_n)\backslash\{\mathrm{A}\}$ und G_h ist die Tangente an G_f in P. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S von G_t und G_h, jeweils ausgedrückt durch a! Auf welcher Kurve liegen alle möglichen Schnittpunkte S, wenn a alle Werte aus $\mathbb{R}$ durchläuft?

7. G_t sei die Tangente an G_f mit $f(x) = x^2$ im Punkt $\mathrm{A}\,(a|f(a))$, G_n sei die Normale auf G_f in $\mathrm{B}\,(-a|f(-a))$. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S von G_t und G_n, jeweils ausgedrückt durch a!

$$\left[\text{Ergebnis: } \mathrm{S}\,(x_s|y_s) = \mathrm{S}\left(\frac{(4a^2+1)\cdot a}{4a^2-1}\middle|\frac{(4a^2+3)\cdot a^2}{4a^2-1}\right)\right]$$

Der Graph G_s der Relation s sei die Menge aller möglichen Schnittpunkte S. Zeichnen Sie G_s *ohne* die Gleichung dieser Kurve in der Form $y = s(x)$ zu berechnen! Füllen Sie dazu folgende Wertetabelle aus (eventuell ergänzen):

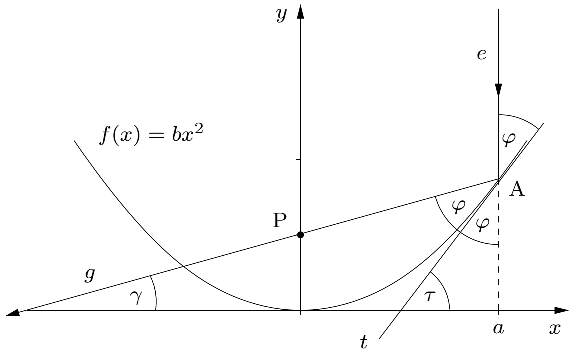
a	0	0,1	0,3	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,5	2,0	3,0
x_s												
y_s												

Ist s eine Funktion?

8. Licht fällt parallel zur y-Achse in einen Parabolspiegel, dessen spiegelnde Fläche durch

$$f(x) = bx^2$$

beschrieben wird. Wir betrachten einen Lichtstrahl, der den Spiegel im Punkt A $(a|f(a))$ trifft. Nach dem Reflexionsgesetz schließen der einfallende Strahl e und der reflektierte Strahl g mit der Tangente t an G_f im Punkt A den gleichen Winkel φ ein. Beweisen Sie, dass *jeder* zur y-Achse parallel einfallende Strahl die y-Achse im selben Punkt P $(0|p)$ (dem *Brennpunkt*) trifft und berechnen Sie p.



Benutzen Sie die trigonometrische Formel: $\tan 2\varphi = \dfrac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}$.

9. Unter welchen Winkeln schneiden sich die beiden Parabeln $f(x) = 2\,x^2 - 4\,x$ und $g(x) = -\dfrac{x^2}{2} + 2\,x + 4$? Zeichnung!

10. Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen $f(x) = \dfrac{16}{x}$ und $g(x) = 2\sqrt{x}$ und berechnen Sie ihren Schnittwinkel.

11. (a) P $(a|f(a))$ sei ein Punkt auf G_f, für den $f'(a) = f(a)$ gilt. Wo schneidet die Tangente an G_f im Punkt P die x-Achse?

    (b) Auf der Parabel $f(x) = x^2+2\,x-2$ gibt es zwei Punkte $P_1\,(x_1|y_1)$ und $P_2\,(x_2|y_2)$ mit $f'(x_1) = f(x_1)$ und $f'(x_2) = f(x_2)$. Konstruieren Sie die Tangenten an G_f in P_1 und P_2 unter Verwendung des Ergebnisses von Teilaufgabe (a) und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Tangenten.

12. (a) Erstellen Sie für folgende Relation eine Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen: $f = \{\,(x|y) \mid x^2 + y^2 = 25; D_f = [\,-5\,;\,5\,]\}$

    (b) Geben Sie zwei Funktionen f_1 und f_2 an, deren Vereinigung der Graphen mit dem Graph obiger Relation übereinstimmt.

(c) Berechnen Sie f_1' und f_2'.

(d) Geben Sie allgemein die Gleichung der Tangente an den Graphen der Relation im Punkt $(x_0|y_0)$ an.

(e) Geben Sie allgemein die Gleichung der Normale an den Graphen der Relation im Punkt $(x_0|y_0)$ an.

(f) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Normalen in zwei verschiedenen Punkten $(x_1|y_1)$ und $(x_2|y_2)$ der Relation. Welche geometrische Bedeutung hat dieser Schnittpunkt?

13. Gewöhnliche Zykloiden sind Kurven, die dadurch entstehen, dass ein Kreis auf einer Gerade abrollt. Die Koordinaten eines festen Punktes P lassen sich durch folgende Parameterdarstellung beschreiben:

$$x = r(t - \sin t),\ \ y = r(1 - \cos t),\ \ t \in \mathbb{R}$$

Dabei ist r der Radius des Kreises und t die Größe des Wälzwinkels im Bogenmaß. t kann aber ebenso als „dimensionslose“ Zeit betrachtet werden.

(a) Geben Sie die Koordinaten des obersten Punktes O des Kreises in Abhängigkeit von t an.

(b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Punktes P in x- und y-Richtung. Berechnen Sie daraus Betrag und Richtung der Gesamtgeschwindigkeit von P.

(c) Berechnen Sie die Steigung der Tangente an die Zykloide in Abhängigkeit von t. Nutzen sie dazu aus, dass die Geschwindigkeit des Punktes P immer tangential zur Zykloide verläuft.
Berechnen Sie für $t = 10°, 20°, 30°...$ den Steigungswinkel φ der Tangente im Gradmaß und stellen Sie einem Zusammhang zwischen t und φ her.
Begründen Sie den gefundenen Zusammenhang.

(d) Geben Sie die Tangente an die Zykloide in Abhängigkeit von t an.

(e) Zeigen Sie, dass die Tangente stets den obersten Punkt des Kreises enthält.

(f) Geben Sie die Gleichung der Tangente $T^*(x)$ durch den Punkt zum Parameterwert $t^* = t + \pi$ an und zeigen Sie, dass die Tangente an die Zykloide stets senkrecht auf $T(x)$ steht.

(g) Begründen Sie, warum $T^*(x)$ ebenfalls durch den obersten Punkt des Kreises für t^* geht.

14. Wo hat die Funktion

$$f\ :\ x \longrightarrow \frac{x}{2} + \sin x \qquad ; \qquad D_f = \mathbb{R}$$

waagrechte Tangenten? t sei die Tangente an G_f im Punkt P $(\pi|f(\pi))$. Wo schneidet t die x-Achse? Zeichnen Sie die Graphen von f und t im Intervall $[\,0\,;\,3\pi\,]$.

15. n_a sei die Normale auf G_f mit $f(x) = \cos x$ im Punkt $P\,(a|f(a))$ und x_a die Nullstelle von n_a. Die Funktion g ist definiert durch

$$g \; : \; a \longrightarrow g(a) = x_a$$

Zeichnen Sie den Graphen von g im a-Intervall $[\,0\,;\,2\pi\,]$. Wo hat g waagrechte Tangenten? Berechnen Sie die maximale Steigung von g.

16. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2, D = \mathbb{R}$.
   (a) Geben Sie die Gleichung der Tangente $t_0(x)$ im Punkt $(x_0|x_0^2)$ für $x_0 = 10$ an.
   (b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt $S_1(x_1|0)$ von $t_0(x)$ mit der x-Achse.
   (c) Geben Sie nun die Gleichung der Tangente $t_1(x)$ im Punkt $(x_1|x_1^2)$ an und bestimmen Sie den Schnittpunkt $S_2(x_2|0)$ von $t_1(x)$ mit der x-Achse.
   (d) Bestimmen Sie analog dazu aus $t_2(x)$, $t_3(x)$ und $t_4(x)$ die Punkte $S_3(x_3|0)$, $S_4(x_4|0)$ und $S_5(x_5|0)$.

17. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2, D = \mathbb{R}$.
   (a) Geben Sie allgemein die Gleichung der Tangente $t_n(x)$ im Punkt $(x_n|x_n^2)$ an.
   (b) Bestimmen Sie allgemein den Schnittpunkt $S_{n+1}(x_{n+1}|0)$ von $t_n(x)$ mit der x-Achse.
   (c) Geben Sie x_n für $n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ und $x_0 = 10$ an.
   (d) Zeigen Sie, dass x_n für jedes x_0 und n gegen Unendlich gegen die Nullstelle von $f(x)$ konvergiert.

18. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 4, D = \mathbb{R}$.
   (a) Geben Sie allgemein die Gleichung der Tangente $t_n(x)$ im Punkt $(x_n|f(x_n))$ an.
   (b) Bestimmen Sie allgemein den Schnittpunkt $S_{n+1}(x_{n+1}|0)$ von $t_n(x)$ mit der x-Achse für $x_n \neq 2$.
   (c) Geben Sie x_n für $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ und $x_0 = 10$ an.
   (d) Zeigen Sie, dass x_n für n gegen Unendlich gegen die Nullstelle von $f(x)$ konvergiert.

19. Gekreuzte Linien
   (a) Zeichnen Sie in ein Koordinatensystem für $x \in [-7; 7]$ die Geraden
   $g_1(x) = -3x + 15$ und $g_2(x) = 3x + 15$.
   Tragen Sie auf g_1 die Punkte $P_n(?|n)$ und auf g_2 die Punkte $Q_n(?|-n)$ für $n = 0, \pm1, \pm2, ..., \pm9$ ein.
   Ergänzen Sie Ihre Zeichnung mit den Strecken $[P_nQ_n]$ für $n = 0, \pm1, \pm2, ..., \pm9$.

(b) Welche Figur entsteht? Geben Sie die Funktionsgleichung an.

(c) Welche Lage haben die Strecken $[\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n]$ bezüglich der Parabel?
Lesen Sie die x-Koordinaten x_n der Berührpunkte der Geraden für $n = 1{,}4{,}7$ ab.

(d) Geben Sie die Gleichungen der Geraden $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$, $\mathrm{P}_4\mathrm{Q}_4$ und $\mathrm{P}_7\mathrm{Q}_7$ an.

(e) Vergleichen Sie die Steigung der Tangenten mit $a \cdot x_n$ (a aus der Funktionsgleichung der entstandenen Parabel). Formulieren Sie eine Vermutung.

(f) Beweisen Sie Ihre Vermutung.

20. (a) Gegeben sind die Geraden

$$g_1 : \ y = g_1(x) = -s\,x + r \quad \text{und} \quad g_2 : \ y = g_2(x) = s\,x + r$$

$\mathrm{P}_n(?|n)$ sind Punkte auf g_1 und $\mathrm{Q}_n(?|-n)$ Punkte auf g_2. Die Geraden $t_n = \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ sind Tangenten an den Graphen einer Funktion f. Veranschaulichen Sie den Sachverhalt, indem Sie g_1, g_2 und t_n mit $n \in \{\pm 1,\ \pm 2,\ ...\ \pm 7\}$ für $r = 12$ und $s = 4$ in ein Koordinatensystem zeichnen.

(b) Stellen Sie, jetzt wieder in allgemeinen Größen, die Gleichung von t_n auf.

(c) Der Zeichnung nach könnte der Graph von f eine nach unten geöffnete Parabel sein: $f(x) = a\,x^2$. T_{x_0} sei die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0|f(x_0))$. Stellen Sie die Gleichung von T_{x_0} auf.

(d) Wenn unsere Vermutung stimmt, dann müssen die beiden Funktionenscharen t_n und T_{x_0} übereinstimmen, d.h. der Koeffizient bei x und der konstante Term in den beiden Funktionsgleichungen müssen gleich sein. Berechnen Sie daraus die Konstante a in der Gleichung von f und drücken Sie x_0 durch n aus!

(e) B sei der Berührpunkt von t_n mit dem Graphen von f. Drücken Sie die Koordinaten von B durch r, s und n aus.

(f) Jetzt wieder zu unserem konkreten Beispiel mit $r = 12$ und $s = 4$: Berechnen Sie a und zeichnen Sie den Graphen von f in das schon vorhandene Koordinatensystem ein. In welchem Punkt B berührt t_4 den Graphen von f?

21. Berechnen Sie die Schnittpunkte und die Schnittwinkel folgender Funktionen ($D = \mathbb{R}$):

(a) $f(x) = x^2 + x - 2$ und $g(x) = 2x$

(b) $f(x) = 2x^2 + 5x + 7$ und $g(x) = x + 5$

(c) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ und $g(x) = 4x^2 - 4x - 6$

(d) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ und $g(x) = 5x^2 + 6x + 3$

22. Berechnen Sie die Schnittwinkel folgender Funktionen ($D = \mathbb{R}$):
    (a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 1$ und $g(x) = 3x + 1$
    (b) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + 2$ und $g(x) = x + 2$
    (c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1$ und $g(x) = x^2 + 2x + 1$
    (d) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 7$ und $g(x) = x^2 + 7x + 7$

23. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 7$ und $g(x) = x^2 - 7x + 7$
    (a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Funktionen.
    (b) Berechnen Sie für den Schnittpunkt mit der kleinsten x-Koordinate den Schnittwinkel der Funktionen.
    (c) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von $g(x)$ im Punkt $P(2|-3)$

24. Gegeben ist die Funktion $p(x) = x^2 + c$.
    (a) Berechnen Sie allgemein die Gleichung der Tangente t an $p(x)$ im Punkt $\mathrm{P}(x_0|y_0)$.
    (b) Berechnen Sie allgemein die Gleichung der Normale zu $p(x)$ im Punkt $\mathrm{P}(x_0|y_0)$.
    (c) Berechnen Sie allgemein den Schnittpunkt $\mathrm{S}(t|0)$ dieser Normale mit der x-Achse.
    (d) Berechnen Sie die Koordinaten $\mathrm{Q}(x'|y')$ des Spiegelbildes von S an $t(x)$.
    (e) Durchläuft P alle Punkte der Parabel, so läuft Q natürlich auch auf einer Kurve. Zeichnen Sie diese Parameterkurve für verschiedene Werte von c mit einer geeigneten Software. Welche verschiedenen Kurventypen lassen sich unterscheiden? Für welche Werte von c erwartet man einen Wechsel des Kurventyps?
    (f) Belegen Sie Ihre Beobachtungen durch Rechnung.

    Literatur: Meyer J., Von der Normalparabel zu kubischen Kurven in Geometrie und Computer, Hischer H. (Hrsg.), Franzbecker, 1998

25. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$.
    (a) Berechnen Sie allgemein die Gleichung der Tangente t an den Graphen G_f im Punkt $\mathrm{P}(x_0|y_0)$.
    (b) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente $\tilde{t}$ an G_f, die senkrecht auf t steht. In welchem Punkt Q berührt $\tilde{t}$ den Graphen G_f?
    (c) Berechnen Sie den Schnittpunkt S von t und $\tilde{t}$ in Abhängigkeit von x_0.
    (d) Geben Sie die Ortskurve von S an, wenn x_0 die $x-$Achse durchläuft.

26. Gegeben ist eine Parabel mit der Funktionsgleichung $p(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$.
    (a) Bestimmen sie die Gleichung der Tangente $t(x)$ mit der Steigung $m = 1$.
    (b) Geben sie die Gleichungen der Geraden $g_i(x)$ an, die man erhält, indem man den Graphen von $t(x)$ um 1, 2 und 3 nach oben verschiebt.
    (c) Berechnen sie die Schnittpunkte der Geraden $g_i(x)$ mit der Parabel und jeweils den Mittelpunkt der beiden Schnittpunkte auf der Geraden $g_i(x)$ für $i = 1{,}2, 3$.
    (d) Formulieren sie ihre Beobachtung und beweisen Sie sie.

    Anregung:
    Verallgemeinern sie die Beobachtung für andere Steigungen.

    nach:
    Dieter Wensky, *Kurvendiskussion passé*, Praxis der Mathematik 3/40, Jg. 1998

27. Gegeben ist eine Parabel mit der Funktionsgleichung $p(x) = \frac{1}{2}x^2$.
    (a) Bestimmen sie die Gleichungen der Tangenten an die Parabel in den Punkten $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ und $x_2 = 3$.
    (b) Berechnen sie die Schnittpunkte der Geraden mit der y-Achse.
    (c) Berechnen sie den Mittelpunkt des Schnittpunkts mit der y-Achse und des Berührpunkts.
    (d) Formulieren sie ihre Vermutung und beweisen Sie sie.

    Anregung: Verallgemeinern sie die Beobachtung für andere Parabeln mit dem Scheitel bei $(0|0)$.

    Literatur:
    Dieter Wensky, *Kurvendiskussion passé*, Praxis der Mathematik 3/40, Jg. 1998

28. Die Punkte $\mathrm{A}(2a|f(2a))$ und $\mathrm{B}(-a|f(-a))$ $(a \neq 0)$ liegen auf dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^2$. Die Graphen der Funktionen t_A und t_B sind die Tangenten an G_f in den Punkten A und B, der Graph von n ist die Normale auf G_f im Punkt B.
    (a) Stellen Sie die Gleichungen von t_A, t_B und n auf!
    (b) Berechnen Sie die Koordinaten x_S und y_S des Schnittpunktes S der beiden Tangenten.
    [Zur Kontrolle: $\mathrm{S}\left(\frac{a}{2}\,\middle|\,-2a^2\right)$].
    Welche Kurve g beschreibt der Punkt S, wenn a alle reellen Zahlen ohne die Null durchläuft?

(c) Für welches positive $a = a_0$ liegt A auf G_n? Zeichnen Sie für diesen Fall die Graphen von f, t_A, t_B, n und g in der Einheit 2 cm in **ein** Koordinatensystem. Berechnen Sie für $a = a_0$ die Fläche F des Dreiecks BSA und den Winkel $\varphi = \sphericalangle ASB$.

29. Wir betrachten die Funktionen

$$f(x) = 3\,x - 6\,\sqrt{x} \quad \text{und} \quad g(x) = -\frac{x^3}{32} + 2$$

im x-Intervall $[\,0\,;6\,]$.

(a) Für beide Funktionen sind die Nullstellen, die Ableitungen und die Koordinaten der Punkte mit waagrechter Tangente zu ermitteln! Was läßt sich über die Steigung und den Funktionsverlauf von f in der Nähe von $x = 0$ aussagen?

(b) n sei die Normale auf G_f im Punkt A $(x_1|f(x_1))$ mit $x_1 = \frac{36}{25}$ und t die Tangente an G_f im Punkt B $(4|f(4))$. Stellen Sie die Gleichungen von n und t auf und berechnen Sie die Koordinaten ihres Schnittpunktes S. Mit Brüchen rechnen!

(c) Mit Hilfe einer Wertetabelle und der bisher gewonnenen Ergebnisse sind die Graphen von f, g, n und t mit größter Sorgfalt in **ein** Koordinatensystem zu zeichnen!

(d) Suchen Sie den Schnittpunkt von f und g in der Wertetabelle und berechnen Sie dann den Schnittwinkel der beiden Funktionsgraphen.

30. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$. G_t sei die Tangente an G_f im Punkt A $(-a|f(-a))$ und G_h die Tangente an G_f im Punkt B $\left(\frac{a}{5}\middle|f\left(\frac{a}{5}\right)\right)$.

(a) Stellen Sie die Funktionsgleichungen von t und h auf und berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktionen.

(b) Berechnen Sie die Koordinaten x_a und y_a des Schnittpunktes S_a von G_t und G_h.

(c) Zeichnen Sie den Graphen von f und ermitteln Sie zeichnerisch sowie rechnerisch den Punkt $S_{2,5}$.

(d) Die Menge aller Punkte S_a mit $a \in \mathbb{R}$ ist der Graph einer Funktion g. Ermitteln Sie die Gleichung von g.

31. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$. G_g sei die Tangente an G_f im Punkt A $(b|f(b))$ und G_h die Tangente an G_f im Punkt B $\left(-\frac{b}{7}\middle|f\left(-\frac{b}{7}\right)\right)$.

(a) Stellen Sie die Funktionsgleichungen von g und h auf und berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktionen.

(b) Berechnen Sie die Koordinaten x_b und y_b des Schnittpunktes S_b von G_g und G_h.

(c) Zeichnen Sie den Graphen von f und ermitteln Sie zeichnerisch sowie rechnerisch den Punkt $\mathrm{S}_{3,5}$.

(d) Die Menge aller Punkte S_b mit $b \in \mathbb{R}$ ist der Graph einer Funktion k. Ermitteln Sie die Gleichung von k.

32. Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2$.
t sei die Tangente an G_f im Punkt $\mathrm{A}\,(0{,}75|f(0{,}75))$. B ist der Spiegelpunkt von A an der y-Achse, n die Normale auf G_f in B. Ermittlen Sie graphisch und durch Rechnung die Koordinaten von $\{\mathrm{S}\} = t \cap n$.

33. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$.
    (a) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente t_a an $f(x)$ im Punkt $\mathrm{P}_a\,(a|f(a))$ mit $a > 0$.
    (b) Berechnen Sie die Gleichung der Normale n_a auf $f(x)$ im Punkt $\mathrm{P}_a\,(a|f(a))$ mit $a > 0$.
    (c) T_a und N_a sind die Schnittpunkte von t_a und n_a mit der x-Achse. Berechnen Sie die Koordinaten von T_a und N_a sowie die Länge $\overline{\mathrm{T}_a\mathrm{N}_a}$. Zeichnen Sie $f(x)$, t_4 sowie n_4 in *ein* Koordinatensystem!
    (d) α sei der Schnittwinkel von t_a, β derjenige von n_a mit der x-Achse.
    Für welches a gilt $\beta = 2 \cdot \alpha$?
    Hinweis: Die Verwendung der Formelsammlung ist nicht verboten!

2.2. Numerische Lösung von Gleichungen - Das Newtonverfahren

1. (a) Die Formel für das Newtonverfahren lautet

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Erläutern Sie die Bedeutung der einzelnen Größen in dieser Formel und leiten Sie die Formel anhand einer exakt beschrifteten Zeichnung her.

   (b) Lösen Sie die Gleichung

$$\cos 2x = \sqrt{x}$$

mit dem Newtonverfahren. Bestimmen Sie dazu zeichnerisch (Einheit 5 cm auf beiden Achsen) einen Näherungswert x_0 für die Lösung und berechnen Sie drei Verbesserungen dieses Näherungswertes.

2. (a) Leiten Sie an Hand einer vollständig beschrifteten Skizze her, wie man aus einem Näherungswert x_n für die Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ einen besseren Näherungswert x_{n+1} erhält (NEWTON-Verfahren).
   (b) Gesucht ist die Lösung der Gleichung $\sin x = x^2$ mit zehn geltenden Ziffern. Zeichnen Sie dazu den Grafen der Funktion $f(x) = \sin x - x^2$ (Einheit: $1 \mathrel{\widehat{=}} 5\,\text{cm}$) im x-Intervall $[0; 1{,}2]$ und entnehmen Sie dem Grafen einen geeigneten Startwert x_1 für das Newton-Verfahren.

3. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{x}{2 + \sin x}$$

   (a) Beweisen Sie, dass f für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist.
   (b) Erstellen Sie eine Wertetabelle in ganzzahligen Schritten und zeichnen Sie den Grafen von f im x-Intervall $[0\,;\,10]$. Entnehmen Sie der Zeichnung, wie viele Nullstellen die Ableitungsfunktion f' in diesem Intervall hat.
   (c) Berechnen Sie die Ableitung f' von f.
   (d) Berechnen Sie die Nullstelle von f' in der Nähe von $x_0 = 5$ mit dem Newton-Verfahren auf Taschenrechnergenauigkeit.

   Unbedingt beachten: „Ein Bruch ist null, wenn ...“.

4. **Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung**
   Zur numerischen Bestimmung von Nullstellen der Funktion $f(x)$ wird, ausgehend von einem Startwert x_0, iterativ folgendes Rezept angewendet:
   Zunächst wird die Tangente $t_i(x)$ an den Graphen von f im Punkt $(x_i|f(x_i)$ betrachtet. $\mathrm{S}_{i+1}(x_{i+1}|0)$ ist der Schnittpunkt dieser Tangente mit der x-Achse.
   (a) Geben Sie die Gleichung der Tangente $t_i(x)$ an.
   (b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt $(x_{i+1}|0)$ von $t_i(x)$ und der x-Achse.
   (c) Geben Sie für folgende Funktionen die Iterationsvorschrift an und berechnen Sie die ersten 5 Werte der Iteration für den Startwert $x_0 = 1$.
      i. $f(x) = x^2 - 3x + 2{,}25$
      ii. $f(x) = x^2 - x + 0{,}25$
      iii. $f(x) = x^3 - x - 4$
      iv. $f(x) = x^3 - x^2 - 4$
      v. $f(x) = x^4 + x^2 - 4$

Hinweis: Das Newton-Verfahren konvergiert, wenn $f(x)$ in einem Intervall $[a, b]$ das die Nullstelle enthält zweimal stetig differenzierbar mit $f'(x) \neq 0 \neq f''(x)$ ist und
f streng monoton wachsend und f' monoton wachsend ist
oder
f streng monoton fallend und f' monoton fallend ist.

5. Berechnen Sie die Lösung der Gleichung $\tan x = x$ im Intervall $]\,0\,;\,6\,]$!
   Der Startwert für das Newtonverfahren ist grafisch zu ermitteln!

6. Suchen Sie eine Rekursionsformel zur Berechnung von $x = \sqrt[n]{a}$!
   Berechnen Sie damit $x = \sqrt[7]{100}$ mit einem geeigneten ganzzahligen Startwert!

7. (a) Zeichnen Sie den Graphen und berechnen Sie dann mit dem Newtonverfahren die Nullstelle sowie die Stelle mit waagrechter Tangente der Funktion

   $$f(x) = x^2 - \sqrt{x} - 1 \quad .$$

   (b) Durch Umformen folgt aus $f(x) = 0$ die Gleichung $g(x) = 0$ mit

   $$g(x) = x^4 - 2\,x^2 - x + 1$$

   Zeichnen Sie den Graphen von g in das schon vorhandene Koordinatensystem und versuchen Sie diejenige Nullstelle von g, die der Nullstelle von f entspricht, mit dem Newtonverfahren (Startwert $x_0 = 1$) zu berechnen! Suchen Sie eine Erklärung für das Scheitern dieses Vorhabens und wenden Sie das Newtonverfahren noch einmal mit $x_0 = 1{,}5$ an!

8. Zeichnen Sie den Graphen und berechnen Sie dann die Nullstellen der Funktion

   $$f(x) = x^3 - 3\,x^2 + 4$$

   mit dem Newtonverfahren. Warum zieht sich das Verfahren bei einer der Nullstellen sehr in die Länge?

9. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^5 - 5x^4 + 1$.
   (a) Diskutieren Sie qualitativ, wie der Graph von $f(x)$ aussieht.
   (b) Bestimmen Sie Extrema und Wendepunkte der Funktion.

(c) Skizzieren Sie den Graph der Funktion.

(d) Bei Polynomen fünften Grades können die Nullstellen nicht mehr analytisch bestimmt werden. Ein Verfahren zur numerischen Nullstellenbestimmung ist das Newton-Verfahren:

An den Graphen der Funktion wird in einem Punkt $(x_i|y_i)$, in der Nähe einer Nullstelle, eine Tangente gelegt. Deren Schnittpunkt mir der x-Achse liefert x_{i+1}. Zu diesem $x-$Wert wird der zugehörige Funktionswert y_{i+1} berechnet. Nun beginnt das Verfahren erneut. Die Folge x_1, x_2, x_3... konvergiert gegen die Nullstelle, wenn $|f'' \cdot f/f'^2| < 1$ ist.

Machen Sie sich dieses Verfahren der Nullstellenbestimmung anhand einer Skizze klar.

(e) Zeichnen Sie den Graph der Funktion im Intervall [0,1] (Maßstab für x-Richtung: $1 \hat{=} 10cm$) und bestimmen Sie in diesem Intervall graphisch die Nullstelle.

(f) Leiten Sie eine Formel zur numerischen Iteration der Nullstelle her.

(g) Wenden Sie die Formel auf obige Funktion an. Starten Sie bei $x_1 = 1$ und rechnen Sie bis i=6.

10. Die Ableitung der Funktion $f(x) = x \cdot \cos x$ hat im Intervall $[\pi\,;\,2\pi]$ genau eine Nullstelle. Berechnen Sie diese Nullstelle mit dem Newtonverfahren. Beginnen Sie mit dem Startwert $x_0 = \pi$ und berechnen Sie zwei Verbesserungen (x_1 und x_2).

11. Für welches x hat die Funktion $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ im Intervall $[\,\pi\,;2\,\pi\,]$ eine waagrechte Tangente? Verwenden Sie das Newtonverfahren mit dem Startwert $x_0 = \dfrac{3\,\pi}{2}$ und berechnen Sie zwei Verbesserungen (x_1 und x_2).

12. (a) Die Formel für das Newtonverfahren lautet

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Erläutern Sie die Bedeutung der einzelnen Größen in dieser Formel und leiten Sie die Formel anhand einer exakt beschrifteten Zeichnung her.

(b) Lösen Sie die Gleichung

$$\cos 2x = \sqrt{x}$$

mit dem Newtonverfahren. Bestimmen Sie dazu zeichnerisch (Einheit 5 cm auf beiden Achsen) einen Näherungswert x_0 für die Lösung und berechnen Sie drei Verbesserungen dieses Näherungswertes.

13. Beim Newton–Verfahren erhält man gemäß

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}$$

aus einer Näherung x_n für die Nullstelle der Funktion f eine weitere Näherung x_{n+1}.

Durch Anwenden des Newton–Verfahrens auf die Funktion $f : x \mapsto y = f\left(x\right) = x^3 - 2$ mit dem Startwert $x_0 = 2$ soll eine Näherung für $\sqrt[3]{2}$ berechnet werden.

(a) Berechne x_1, x_2 und x_3 jeweils auf sechs Dezimalstellen nach dem Komma gerundet.

(b) Eine untere Grenze für $\sqrt[3]{2}$ ist 1,259920. Wie groß ist in diesem Fall die prozentuale Abweichung auf zwei Dezimalstellen nach dem Komma gerundet des Näherungswerts x_3 von diesem Wert?

2.3. Die lineare Näherung

1. **Die lineare Näherung**

In vielen Anwendungen der Mathematik, besonders in der Physik, taucht folgendes Problem auf: Man kennt den Wert einer Funktion f an der Stelle x und man braucht eine möglichst einfache Methode, um die Funktionswerte von f in einer kleinen Umgebung von x näherungsweise zu berechnen.

(a) Beweisen Sie unter Bezugnahme auf die Definition der Ableitung die Formel der **linearen Näherung**:

$$\boxed{f(x+h) \approx f(x) + f'(x) \cdot h \text{ für } |h| \ll 1}$$

(b) Berechnen Sie eine Näherungsformel für $(1+h)^n$ mit $|h| \ll 1$!
Wie lautet die Formel speziell für $n = -1$?

(c) Wie kann mit der in (b) gefundenen Formel $(a+h)^n$ berechnet werden?

(d) Berechnen Sie eine Näherungsformel für $\sqrt{1+h}$.

2. (a) Berechnen Sie eine lineare Näherungsformel für $\dfrac{1}{\sqrt{1+h}}$ mit $h \ll 1$! Verwenden Sie hintereinander zwei schon bekannte Näherungsformeln!

(b) Leiten Sie die in (a) gefundene Formel direkt mit der Formel der linearen Näherung her.

(c) Berechnen Sie $\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ für $\beta = 10^{-4}$ und $\beta = 10^{-8}$! Versuchen Sie in beiden Fällen auch das exakte Ergebnis mit dem Taschenrechner zu ermitteln!

3. Eine Atomuhr wird mit der Geschwindigkeit v über eine Strecke s transportiert. Dabei misst eine relativ zur Erde ruhende zweite Atomuhr die Transportzeit $t = \frac{s}{v}$. Die Relativitätstheorie Einsteins lehrt, dass die von der bewegten Uhr für den gleichen Vorgang gemessene Zeit durch

$$\boxed{t' = t \cdot \sqrt{1-\beta^2}}$$

mit $\beta = \frac{v}{c}$ und $c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (Lichtgeschwindigkeit) gegeben ist.
Berechnen Sie den Unterschied $\Delta t = t - t'$ der von beiden Uhren gemessenen Zeiten für $s = 300\,\mathrm{km}$ mit $v = 108\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und für $s = 40000\,\mathrm{km}$ mit $v = 432\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$!
Rechnen Sie mit der linearen Näherung!

4. Vergleichen Sie die Ergebnisse der linearen Näherung mit den Taschenrechnerergebnissen (siehe Aufgabe 1.):

(a) $1{,}0008^3$ (b) $0{,}99999995^{20}$ (c) $2{,}0008^6$ (d) $\sqrt{4{,}000006}$ (e) $\sqrt{0{,}9999992}$

(f) $\dfrac{1}{1{,}008}$ (g) $\dfrac{1}{0{,}9999995}$ (h) $\dfrac{1}{1{,}000002^6}$ (i) $\dfrac{1}{0{,}9999995^4}$ (j) $\dfrac{3}{2{,}0005^2}$

5. Die lineare Näherung liefert oft viel genauere Ergebnisse als die direkte Rechnung mit dem Taschenrechner. Als Beispiel sei folgender Ausdruck einmal mit dem Taschenrechner und einmal mit der linearen Näherung berechnet (siehe Aufgabe 1.):

$$x = \left(1 - \sqrt{1 - 10^{-16}}\right) \cdot 10^{20}$$

Das auf 24 Dezimalstellen genaue Ergebnis lautet übrigens

$$x = 5000{,}000000000000125000000000\,.$$

6. Berechnen Sie eine Näherungsformel für $\sqrt{4+h}$ mit $|h| \ll 1$. Wie groß ist der relative Fehler des mit dieser Formel berechneten Wertes von $\sqrt{4{,}02}$?

7. Berechnen Sie eine Näherungsformel für $\dfrac{1}{3+h}$ mit $|h| \ll 1$. Wie groß ist der relative Fehler des mit dieser Formel berechneten Wertes von $\dfrac{1}{2{,}9982}$?

8. (a) Wie lautet die Formel für die lineare Näherung von $f(x+h)$? Erläutern Sie das Zustandekommen dieser Formel an Hand einer vollständig beschrifteten Skizze.

(b) Eine Lichtquelle, die Licht der Frequenz f aussendet, bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ (c ist die Lichtgeschwindigkeit) auf einen Beobachter zu. Der Beobachter registriert dabei Licht der Frequenz

$$f^* = f \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

Weisen Sie unter Verwendung schon bekannter Näherungsformeln nach, dass unter der Voraussetzung $|\beta| \ll 1$ die Näherung $f^* \approx (1+\beta)f$ gilt.

9. Berechne für die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ das Taylorpolynom dritter Ordnung mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und ermittle damit einen Näherungswert für $\sqrt[3]{1{,}03}$.

   Vergleiche mit dem Taschenrechnerergebnis und gib den relativen Fehler der Näherung an.

2.4. Monotonieverhalten differenzierbarer Funktionen

1. Untersuchen Sie $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 3$ auf Monotonie!

2. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 4x}$$

   (a) Berechnen Sie die maximale Definitionsmenge D_f und untersuchen Sie das Verhalten am Rande von D_f (Grenzwerte)!
   (b) Monotoniebereiche und Punkte mit waagrechter Tangente!
   (c) Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[-2; 6]$!
   (d) Beweisen Sie, dass G_f achsensymmetrisch ist (die Achse ist dem Graphen zu entnehmen)!

3. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{3 - x}$$

   (a) Berechnen Sie die maximale Definitionsmenge D_f und untersuchen Sie das Verhalten am Rande von D_f (Grenzwerte)!
   (b) Monotoniebereiche und Punkte mit waagrechter Tangente!
   (c) Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[-2; 8]$!

(d) Beweisen Sie, dass G_f punktsymmetrisch ist (das Zentrum Z ist dem Graphen zu entnehmen)!

4. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}\ ,\ D_f =]\,0\,;\,1\,]$$

   (a) Untersuchen Sie f auf Monotonie!

   (b) Wie viele Terassenpunkte hat f und wie lauten deren Koordinaten?

   (c) Zeichnen Sie den Graphen von f

      i. im Intervall $]\,0\,;\,1\,]$ ($x = 1 \mathrel{\widehat{=}} 10\,\text{cm}$ und $y = 20 \mathrel{\widehat{=}} 10\,\text{cm}$)

      ii. im Intervall $]\,0\,;\,0{,}08\,]$ ($x = 0{,}01 \mathrel{\widehat{=}} 1\,\text{cm}$ und $y = 100 \mathrel{\widehat{=}} 10\,\text{cm}$).

   Für das Zeichnen der Graphen ist ein Computer natürlich sehr nützlich!

2.5. Ganzrationale Funktionen

1. Untersuche die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{2}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

   Nullstellen, Verhalten an den Rändern von D_f, Monotonie, Extremwerte und Wendepunkte. Zeichne den Grafen von f im Intervall $[-2; 4{,}5]$.

   Für welche x-Werte gilt $f(x) = -2$?

2. Untersuche die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2, \quad D_f = \mathbb{R}$$

   auf Symmetrie, Nullstellen, Verhalten an den Rändern von D_f, Extremwerte und Wendepunkte. Zeichne den Grafen von f im Intervall $[-3; 3]$.

   Für welche x-Werte gilt $f(x) = -2$?

3. Untersuche die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 2x + 1, \quad D_f = \mathbb{R}$$

   auf Nullstellen, Verhalten an den Rändern von D_f, Monotonie und Extremwerte. Zeichne den Grafen von f im Intervall $[-1; 6]$.

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2$ ($D = \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$).
   (a) Bestimmen Sie allgemein die Nullstellen der Funktion.
   (b) Bestimmen Sie allgemein die Koordinaten der Extrema.
   (c) Zeichnen Sie die Funktion für $a = 1$ und $b = 3$.
   (d) Zeichnen Sie für $b = 3$ und für zehn verschiedene Werte von a die Extrema in ein Koordinatensystem ein. Was fällt auf?
   (e) Beweisen Sie, dass für festes b und variables a die Extrema auf einer Parabel liegen.

5. Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^3 + bx$ ($D = \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$).
   (a) Bestimmen Sie allgemein die Nullstellen der Funktion.
   (b) Bestimmen Sie allgemein die Koordinaten der Extrema.
   (c) Zeichnen Sie die Funktion für $a = -\frac{1}{3}$ und $b = 1$.
   (d) Zeichnen Sie für $b = 1$ und für $a = -0{,}1, -0{,}2, ... - 0{,}9$ die Extrema in ein Koordinatensystem ein. Was fällt auf?
   (e) Beweisen Sie, dass für festes b und variables a die Extrema auf einer Ursprungsgeraden liegen.

6. Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^4 + bx^2$ ($D = \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$).
   (a) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion achsensymmetrisch ist.
   (b) Bestimmen Sie allgemein die Lage der Extrema.
   Welche Bedingung muss für die Variablen a und b gelten, damit der Graph der Funktion drei Extrema hat?
   (c) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion für
      i. $a = \frac{1}{2}$ und $b = -4$.
      ii. $a = \frac{1}{2}$ und $b = 4$.
   (d) Zeichnen Sie für $a = \frac{1}{2}$ und $b = -1, -4, -9, -16, -25$ die Extrema in ein Koordinatensystem. Auf welcher Kurve könnten die Extrema mit $x \neq 0$ liegen?
   (e) Berechnen Sie die Ortskurve der Extrema für festes a und variables b.

7. Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^4 + bx^2$ ($D = \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$).
   (a) Bestimmen Sie allgemein die Lage der Extrema.
   Welche Bedingung muss für die Variablen a und b gelten, damit der Graph der Funktion drei Extrema hat.

(b) Zeichnen Sie für $a = 2$ und $b = -1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{25}$ die Extrema in ein Koordinatensystem. Auf welcher Kurve könnten die Extrema mit $x \neq 0$ liegen?

(c) Berechnen Sie die Ortskurve der Extrema für festes b und variables a.

8. (a) Welche Bedingung müssen die Variablen a, b und c erfüllen, damit der Graph der Funktion $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($D = \mathbb{R}$) drei waagrechte Tangenten hat. Zeichnen Sie mit einer geeigneten Software die Graphen von $f(x)$ für $a = c = 1$ und verschiedene Werte für b.

   (b) Wieviele waagrechte Tangenten hat der Graph der Funktion
   $f(x) = x^5 + bx^3 - x$, $b \in \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}$?
   Zeichnen Sie mit einer geeigneten Software die Graphen von $f(x)$ für verschiedene Werte für b.

   (c) Wieviele waagrechte Tangenten hat der Graph der Funktion
   $f(x) = x^5 + bx^3 + x$, $b \in \mathbb{R}$ und $b^2 > \frac{20}{9}$, $D = \mathbb{R}$?
   Zeichnen Sie mit einer geeigneten Software die Graphen von $f(x)$ für verschiedene Werte für b.

9. Berechnen Sie für folgende Funktionen die Ortskurve der Extrema.

   (a) $f(x) = x^3 + x^2 + kx$

   (b) $f(x) = x^3 + kx^2 + x$

   (c) $f(x) = kx^3 + x^2 + x$

10. Geben Sie für ganzrationale Funktionen mit folgenden Eigenschaften die Funktionsgleichungen an.

   (a) Die Funktion dritten Grades wechselt bei $x_1 = 1$ das Vorzeichen und berührt bei $x_2 = 2$ die x-Achse. Darüber hinaus gilt $f(3) = 4$.

   (b) Die Funktion vierten Grades ist achsensymmetrisch zur y-Achse und berührt bei $x_1 = 2$ die x-Achse. Darüber hinaus gilt $f(0) = 8$.

   (c) Die Funktion vierten Grades ist achsensymmetrisch zur y-Achse und hat Nullstellen bei $x_1 = 3$ und $x_2 = -5$. Darüber hinaus gilt $f(0) = 1$.

   (d) Die Funktion fünften Grades berührt die x-Achse bei $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ und wechselt bei $x_3 = 3$ das Vorzeichen. Darüber hinaus gilt $f(0) = 24$.

   (e) Die Funktion fünften Grades berührt die x-Achse bei $x_1 = -5$ und wechselt bei $x_2 = -1$, $x_3 = -2$ und $x_4 = -3$ das Vorzeichen. Darüber hinaus gilt $f(0) = 1$.

11. Für welche Werte von x haben die folgenden Funktionen waagrechte Tangenten ($D = \mathbb{R}$)?
    (a) $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 12$
    (b) $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + 10$
    (c) $f(x) = -4x^4 + 2x^2$
    (d) $f(x) = x^5 - 2x^3 - 3x + 4$
    (e) $f(x) = -5x^5 + 3x^3 + x$
    (f) $f(x) = x^5 - 6x^3 + 7x + 8$
    (g) $f(x) = \frac{12}{5}x^5 - 16x^3 + 11$
    (h) $f(x) = -x^6 + 9x^3 + 18$
    (i) $f(x) = x^5 - x^3 + x$

12. Von einer Funktion $f(x)$, dessen Graph durch den Punkt $Q(0|2)$ geht, ist die Ableitungsfunktion $f'(x) = 2x^3 - 2x$ bekannt.
    Geben Sie die Gleichung von $f(x)$ an (Rechnung oder kurze Begründung).

13. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 4$.
    (a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion.
    (b) Berechnen Sie Punkte, an denen der Graph der Funktion eine waagrechte Tangente hat.
    (c) Zeigen Sie, dass der Graph von $f(x)$ punktsymmetrisch zu $(2|0)$ ist.
    (d) Zeichnen Sie die Funktion.

14. Skizzieren sie Funktionsgraphen mit folgenden Eigenschaften und geben sie Beispiele für Funktionsgleichungen an.
    (a) Nullstellen bei $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 3$
    (b) Nullstellen bei $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -5$
    (c) Nullstelle bei $x_1 = 0$, Wendepunkte $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$
    (d) Nullstelle bei $x_1 = 5$, Wendepunkte $x_2 = 2$ und $x_3 = 7$
    (e) Nullstellen bei $x_1 = 6$ und $x_2 = 0$, Wendepunkt bei $x_3 = 2$
    (f) Nullstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$, Wendepunkt bei $x_3 = 4$
    (g) Nullstelle bei $x_1 = 0$, Terrassenpunkt bei $x_2 = 1$
    (h) Nullstelle bei $x_1 = -4$, Terrassenpunkt bei $x_2 = 2$

(i) Wendepunkte bei $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$

(j) Wendepunkte bei $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 3$

15. Gegeben ist die ganzrationale Funktion 4. Grades mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{18}x^3 - x^2 + 2$

(a) Bestimmen Sie die Lage der Extrema.

(b) Die Parabel mit der Gleichung $p(x) = ax^2 + bx + c$ berührt den Graphen der Funktion $f(x)$ für $x = 2$. Berechnen Sie a, b und c.

Literatur:
Dieter Wensky, *Kurvendiskussion passé*, Praxis der Mathematik 3/40, Jg. 1998

2.6. Gebrochen rationale Funktionen

1. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{x^2}{4x - 8}$$

(a) Gib die maximale Definitionsmenge D_f und die Nullstellen von f an. Beweise durch eine ausführliche Rechnung, dass f auch in der Form

$$f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{x - 2}$$

dargestellt werden kann.

(b) Untersuche das Verhalten von f an den Rändern von D_f. Wie lauten die Gleichungen der Asymptoten?

(c) Berechne die erste Ableitung f' von f und die Nullstellen von f'.

(d) Zeichne den Grafen von f und die Asymptoten im x-Intervall $[-3; 7]$.

2. Untersuche die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 3}$$

auf maximale Definitionsmenge, Nullstellen, Verhalten an den Rändern von D_f, Extremwerte und Wendepunkte. Zeichne den Grafen von f und eventuelle Asymptoten im Intervall $[-1; 7]$.

2.7. Trigonometrische Funktionen

1. (a) Zeichnen Sie die Grafen der Funktionen f und g mit den Gleichungen

$$f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = 10\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

im x-Intervall $[0{,}45; 0{,}65]$ (Einheit: $0{,}1 \mathrel{\widehat{=}} 2\,\text{cm}$, y-Achse von 0,4 bis 0,7). Zeichnen Sie den Scheitel von g ein.

(b) Stellen Sie die Gleichung $t(x)$ der Tangente an f im Punkt $\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{6}\middle|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ auf.

(c) Neben $x_1 = \frac{\pi}{6}$ gibt es noch einen zweiten Schnittpunkt von f und g bei $x = x_2$. Berechnen Sie einen Näherungswert x_2^* für x_2, indem Sie nicht g mit f, sondern g mit t schneiden. Wie groß ist der prozentuale Fehler dieser Näherung, wenn auf fünf geltende Ziffern $x_2 = 0{,}60799$ gilt.

2. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{x}{2 + \sin x}$$

(a) Beweisen Sie, dass f für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist.

(b) Erstellen Sie eine Wertetabelle in ganzzahligen Schritten und zeichnen Sie den Grafen von f im x-Intervall $[0\,; 10]$. Entnehmen Sie der Zeichnung, wie viele Nullstellen die Ableitungsfunktion f' in diesem Intervall hat.

(c) Berechnen Sie die Ableitung f' von f.

(d) Berechnen Sie die Nullstelle von f' in der Nähe von $x_0 = 5$ mit dem Newton-Verfahren auf Taschenrechnergenauigkeit.

Unbedingt beachten: „Ein Bruch ist null, wenn ...“.

3. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{\sin x}{x - \cos x}$$

(a) Berechnen Sie mit einem geeigneten Verfahren den Wert x_0, an dem f nicht definiert ist.

(b) Berechnen Sie die Nullstellen von f im x-Intervall $[-4\,; 4]$, erstellen Sie eine Wertetabelle mit geeigneten Werten und zeichnen Sie den Grafen von f im angegebenen Intervall.

(c) Berechnen Sie die Ableitung f' von f.

4. Wo hat die Funktion

$$f \; : \; x \longrightarrow \frac{x}{2} + \sin x \qquad ; \qquad D_f = \mathbb{R}$$

waagrechte Tangenten? t sei die Tangente an G_f im Punkt $P\,(\pi\,|\,f(\pi))$. Wo schneidet t die x-Achse? Zeichnen Sie die Graphen von f und t im Intervall $[\,0\,;\,3\pi\,]$.

5. Wir betrachten die Funktion $\quad f(x) = \sin 2x - \cos x \quad$ mit $\quad D_f = \left[\,-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\,\right]$.

Berechnen Sie die Nullstellen und die Punkte mit waagrechter Tangente. Zeichnen Sie G_f.

6. Wir betrachten die Funktionen

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} - 2\,x \quad \text{mit} \quad D_f = [-4\,;0\,]$$

und

$$g(x) = a\,\sin k\,x \quad \text{mit} \quad D_g = [\,0\,;8\,]$$

(a) Zeichnen Sie den Graphen von f und berechnen Sie $f'(0)$.

(b) Bestimmen Sie die Konstanten a und k so, dass g und f an der Stelle $x = 0$ die gleiche Steigung haben und g an der Stelle $x = 2$ eine waagrechte Tangente besitzt.

Hinweis: Nur eine von unendlich vielen Möglichkeiten für g ist anzugeben!

Zeichnen Sie jetzt den Graphen von g in das schon vorhandene Koordinatensystem.

7. Wir betrachten die Funktionen

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} - 3\,x \quad \text{mit} \quad D_f = [\,-3\,;0\,]$$

und

$$g(x) = b\,\sin m\,x \quad \text{mit} \quad D_g = [\,0\,;9\,]$$

(a) Zeichnen Sie den Graphen von f und berechnen Sie $f'(0)$.

(b) Bestimmen Sie die Konstanten b und m so, dass g und f an der Stelle $x = 0$ die gleiche Steigung haben und g an der Stelle $x = 3$ eine waagrechte Tangente besitzt.

Hinweis: Nur eine von unendlich vielen Möglichkeiten für g ist anzugeben!

Zeichnen Sie jetzt den Graphen von g in das schon vorhandene Koordinatensystem.

8. Wir untersuchen die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \sqrt{\sin^3(x^2)} \quad \text{mit} \quad D_f \subseteqq [0\,,\,\pi].$$

   (a) Berechnen Sie die Nullstellen und die Definitionsmenge D_f von f.

   (b) Wie lauten die Koordinaten der Punkte auf G_f mit waagrechten Tangenten?

   (c) Zeichnen Sie den Graphen von f. Wählen Sie auf der x-Achse 2 cm und auf der y-Achse 5 cm als Einheit.

9. Wir untersuchen die Funktion $\quad f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \dfrac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

   (a) Welche Symmetrie hat der Graph von f? Berechnen Sie in $\mathbb{R}^+$ alle x_{0k} mit $f(x) = 0$, alle x_{1k} mit $f(x) = x^2$ sowie alle x_{2k} mit $f(x) = -x^2$ und zeichnen Sie dann die Graphen von x^2, $-x^2$ und f mit den Einheiten $0{,}1 \mathrel{\widehat{=}} 2\,\text{cm}$ auf der x-Achse und $0{,}1 \mathrel{\widehat{=}} 10\,\text{cm}$ auf der y-Achse im x-Intervall $[-0{,}35\,;0{,}35\,]$.

   (b) Berechnen Sie $f'(x)$ für $x \neq 0$.

   (c) Berechnen Sie $f'(0)$ mit der Definition der Ableitung.

   (d) Untersuchen Sie f und f' auf Stetigkeit.

Teil II.

Natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion

3. Die natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion

1. Skizzieren Sie in einem Koordinatensystem die Graphen folgender Funktionen

   $g_1(x) = ln(x)$, $\quad g_2(x) = ln(x-3)$, $\quad g_3(x) = cos(x)$,

   $g_4(x) = cos(x) - 3$, $\quad g_5(x) = \frac{1}{x}$, $\quad g_6(x) = \frac{1}{x^2}$

2. Der Graf der Funktion f mit $f(x) = \ln x$ wird in einem Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm auf beiden Achsen gezeichnet.

   (a) Berechne die Höhe h des Grafen über der x-Achse, wenn wir uns in der Entfernung a rechts vom Ursprung befinden:

   - $a = 40\,000\,\text{km}$ (Erdumfang)
   - $a = 1{,}5 \cdot 10^8\,\text{km}$ (Entfernung zur Sonne)
   - $a = 1\,\text{LJ}$ (1 LJ (Lichtjahr) ist die Strecke, die das Licht mit der Geschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ in einem Jahr zurücklegt)
   - $a = 3 \cdot 10^{10}\,\text{LJ}$ (ungefährer Durchmesser des sichtbaren Universums)

   (b) In welcher Entfernung a rechts vom Ursprung hat der Graf von f die Höhe $h = 1\,\text{m}$? Vergleiche mit dem Durchmesser des sichtbaren Universums.

3. **Numerische Berechnung von** e

   In manchen Schulbüchern wird zur numerischen Berechnung von e der Grenzwert

   $$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}_n \quad \text{mit} \quad \mathrm{e}_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (1)$$

   herangezogen und es werden mit dem Taschenrechner (TR) Werte von e_n für große n als Näherungen für e berechnet.

   (a) Verwende die Definition der Ableitung und die Forderung $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, um (1) herzuleiten.

   (b) Um z.B. $\mathrm{e}_{100} = 1{,}01^{100}$ zu berechnen, muss man nicht 99 mal multiplizieren, sondern es genügen acht Multiplikationen, wenn man geschickt rechnet:

   $$x^{100} = \left(x^{50}\right)^2 = \left(\left(x^{24} \cdot x\right)^2\right)^2 = \left(\left(\left(\left(\left(x^2 \cdot x\right)^2\right)^2\right)^2 \cdot x\right)^2\right)^2$$

Vergleiche mit der Dualdarstellung des Exponenten ($100 = (1100100)_2$) und formuliere eine Regel, wie man daraus die schnelle Potenzberechnung erhält (QM-Algorithmus für Quadrieren-Multiplizieren).

(c) Wie viele Multiplikationen sind nötig, um e_n mit $n = 10^6$ zu berechnen? Berechne jetzt e_n für $n = 10^6$ mit unserer neuen Methode und vergleiche mit dem TR-Ergebnis bei direkter Eingabe des Terms $1{,}000\,001^{1\,000\,000}$.

(d) Intern rechnet der TR mit mehr Stellen, als er im Ergebnis anzeigt. Ermittle die interne Genauigkeit deines TRs durch die Berechnung von e_n für $n = 10^9$, $n = 10^{10}$ usw.

Das Ergebnis der Berechnung von e_n mit $n = 10^{10}$, einmal mit dem QM-Algorithmus und einmal durch Eintippen des Terms für e_n, kann sich, abhängig von der internen Genauigkeit des Rechners, in den letzten Stellen unterscheiden. Das ist ein Hinweis darauf, dass der TR Potenzen nicht mit dem QM-Algorithmus berechnet.

(e) Zur genauen und schnellen Berechnung von e verwendet man

$$e = \lim_{n\to\infty} E_n \quad \text{mit} \quad E_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

Für welches n ist der relative Fehler

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{E_n - \mathrm{e}}{\mathrm{e}} < 10^{-9}\,?$$

4. Berechne die Ableitung folgender Funktionen:

(a) $f(x) = x\mathrm{e}^x$ (b) $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ (c) $h(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$

(d) $k(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ (e) $r(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$ (f) $s(x) = x^2\mathrm{e}^{-x^2}$

(g) $t(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x$ (h) $u(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$ (i) $v(x) = \sin(\mathrm{e}^x)$

5. Berechne x:

(a) $\mathrm{e}^x = 100$ (b) $\mathrm{e}^{-0{,}2x} = 10^{-3}$ (c) $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-2x+1}$ (d) $\mathrm{e}^x = 3x$

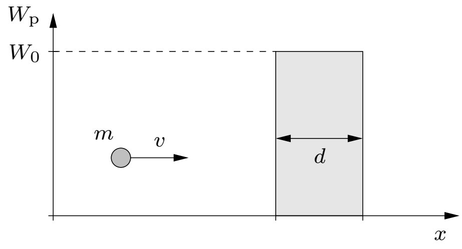
6. Berechne x:

(a) $(\ln x)^2 = 4$ (b) $\ln x = -10^5$ (c) $\ln\sqrt{x} + \ln\sqrt[3]{x} = 2$

(d) $\ln\sqrt{1-x^2} = -\dfrac{1}{2}$ (e) $\mathrm{e}^x = \ln x$ (f) $\mathrm{e}^x = -\ln x$

Veranschauliche das Ergebnis von (b) in der Form $0,\underbrace{0000\ldots000}_{\text{Zahl der Nullen}}$ nächste Ziffern.

7. Ein Körper der Masse m und der Geschwindigkeit v (also mit der kinetischen Energie $W = \frac{m}{2}v^2$) bewegt sich auf eine Potentialbarriere der Breite d und der Höhe W_0 zu. Nach der klassischen Physik kann der Körper für $W < W_0$ die Barriere nicht überwinden und wird reflektiert. Die Quantenmechanik lehrt aber, dass der Körper auch für $W < W_0$ die Barriere mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit T (*Transmissionswahrscheinlichkeit*) überwinden kann (*Tunneleffekt*). Dabei gilt



$$T = \frac{\gamma}{e^{2\alpha d} + e^{-2\alpha d} + \gamma - 2}$$

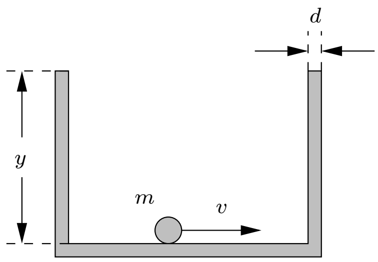
mit

$$\gamma = 16 \cdot \frac{W}{W_0} \cdot \left(1 - \frac{W}{W_0}\right) \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{2\pi}{h} \cdot \sqrt{2\,m\,(W_0 - W)},$$

wobei $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Js die Planckkonstante ist.

(a) Berechne die Transmissionswahrscheinlichkeit für ein Elektron mit der Masse $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg und der kinetischen Energie $W = 3\,\text{eV}$ ($1\,\text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J), das gegen eine Barriere der Höhe $W_0 = 5\,\text{eV}$ und der Breite $d = 10^{-10}$ m anläuft.

(b) Eine Kugel der Masse $m = 0{,}1\,\text{g}$ bewegt sich in einem Gefäß mit $v = 2\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ hin und her, die Höhe des Gefäßes ist $y = 2\,\text{cm}$, die Wandstärke $d = 2\,\text{mm}$ ($W_0 = mgy$). Berechne die Transmissionswahrscheinlichkeit T für die Kugel. Wie lang ist die ausgeschriebene Zahl T zwischen Komma und der ersten Ziffer ungleich null, wenn pro Ziffer 0,5 cm gebraucht werden?



8. Berechne folgende Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{100}\mathrm{e}^{-0{,}01x}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\mathrm{e}^{-x} \cdot \ln x\right)$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (x - \ln x)$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2} - \frac{\mathrm{e}^{x}}{x}\right)$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2x+\sin x}{2x-\sin x}$

9. Schreibe das Ergebnis in der Gleitkommadarstellung, d.h. in der Form

$$a \cdot 10^n \quad \text{mit} \quad 1 \leqq a < 10 \quad \text{und} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(a) $x = \mathrm{e}^{1000}$ (b) $y = \mathrm{e}^{-5^5}$ (c) $z = 9^{9^9}$

10. **Eigenschaften der Logarithmusfunktion**

    Logarithmusfunktionen sind Funktionen der Form $f(x) = \log_b x$ mit $x \in$ .... und $b \in$ .... d.h. die Logarithmusfunktion ist nur für .... x-Werte definiert: $D =$ ....

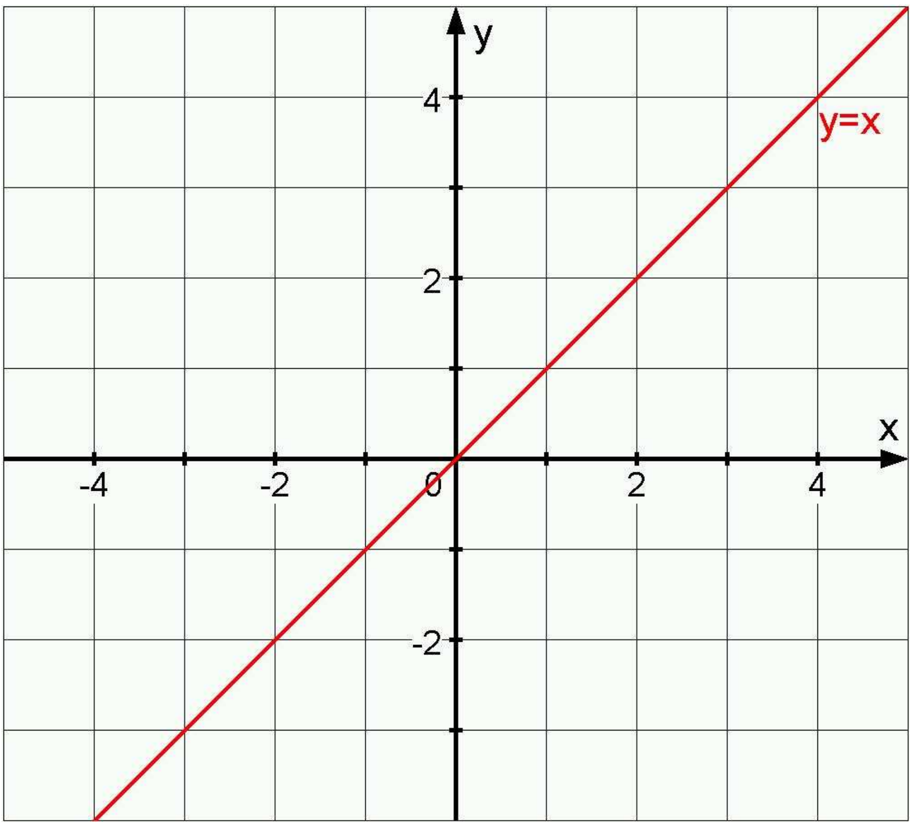
    (a) $\log_b x$ ist diejenige reelle Zahl, mit der man b potenzieren muss, um x zu erhalten. Damit ist die Logarithmusfunktion die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.
    Also gilt für den Wertebereich: $W =$ ....

    (b) Die Graphen der Logarithmusfunktionen $f(x) = \log_b x$ mit $b > 0$ gehen alle durch die Punkte $P_1 = (....; ....)$ und $P_2 = (....; ....)$.

    (c) Die Graphen der Logarithmusfunktionen $f(x) = \log_b x$

    - mit .... sind streng monoton ....;
    - mit .... sind streng monoton fallend.

    (d) Der Graph der Logarithmusfunktion $f(x) = \log_b x$ mit $b > 0$ hat die .... - Achse als Asymptote.



    Zeichne hier die Graphen von $f(x) = 2^x$ und $g(x) = \log_2 x$

    (e) Für das Rechnen mit Logarithmen gelten die folgenden Regeln ($u, v, a > 0;\ a \neq 1$):

i. $\log_b(u \cdot v) =$ ....
ii. $\log_b(\frac{u}{v}) =$ ....
iii. $\log_b(u^r) =$ ....

(f) Beispiele für Anwendungen der Logarithmusfunktion in der Realität sind:

(g) Was ich sonst noch wichtig finde:

11. **Mathe-Quiz I. selbstgemacht!**

(a) Was ist der Unterschied zwischen absolutem und relativem Zuwachs?

(b) Was ist der Unterschied zwischen dem Wachstumsfaktor und dem Zerfallsfaktor?

(c) Wie wird der relative Zuwachs in der Regel angegeben?

(d) Erkläre den Begriff Halbwertszeit.

(e) Was bedeutet äquidistant?

(f) Was sind Logarithmen?

(g) Wie nennt man die Zahl y in dem Term x^y?

(h) Wie nennt man in dem Ausdruck $\log_a x$ die Zahl x?

(i) Nenne je einen anderen Begriff für die Grundzahl und für die Hochzahl einer Potenz.

(j) Wie schreibt man kurz für $\log_{10} x$?

(k) Schreibe $2^x = 16$ als Logarithmengleichung.

(l) Gib die Formel für relativen Zuwachs an.

(m) Bestimme x in $x = \log_2 64$.

(n) Bestimme x in $x = \log_5 625$.

(o) Bestimme x in $x = \log_3 81$.

Quelle: mathematik lehren (2001), H. 106, S. 55-57

12. **Mathe-Quiz II. selbstgemacht!**
    (a) Wie berechnet man den absoluten Zuwachs?
    (b) Wie bildet man die Differenz beim absoluten Zuwachs?
    (c) Was gibt die Differenz d beim absoluten Zuwachs an?
    (d) Wie bildet man den Quotienten beim relativen Zuwachs?
    (e) Was gibt der Quotient beim relativen Zuwachs an?
    (f) Welcher Zuwachs wird mit der Formel $d = W_i - W_{i-1}$ ausgerechnet?
    (g) Nenne je ein Beispiel aus der Natur für relativen und absoluten Zuwachs.
    (h) Nenne die ZinseszinsFormel zur Berechnung des Endkapitals nach n Jahren.
    (i) Definiere den Wachstumsfaktor q
        i. bei der Zinsrechnung
        ii. allgemein bei Wachstumsvorgängen.
    (j) Wie wird eine Potenz potenziert?
    (k) Nenne drei Eigenschaften der Logarithmusfunktion.
    (l) Nenne drei Eigenschaften der Exponentialfunktion.
    (m) Der Graph welcher Funktion schneidet nie die x-Achse?
    (n) Welchen Punkt haben die Graphen aller Exponentialfunktionen gemeinsam?
    (o) Welchen Punkt haben die Graphen aller Logarithmusfunktionen gemeinsam?

4. Verhalten von Exponential- und Logarithmusfunktionen

1. Gegeben ist die Funktion $f_t(x) = (\frac{x}{t} + 1) \cdot e^{t-x}$ für $x \in R$ und $t > 0$.
   (a) Untersuchen Sie die Funktion f_t auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und das Verhalten für $x \to \infty$.
   (b) Weisen Sie nach, dass der Graph der Funktion ein Maximum und einen Wendepunkt hat und geben Sie die Koordianten des Extremums an.
   (c) Für welchen Wert von t ist das Maximum der Funktion am niedrigsten?

2. Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = \ln(a + e^{-(x-a)^2})$, $a > 0$, $D = R$.
   (a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von f mit der y-Achse und untersuchen Sie das Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge.
   (b) Zeige, dass der Graph der Funktion achsensymmetrisch zu $x = a$ ist.
   (c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Extremums und geben Sie die Ortskurve $g(x)$ der Extrema an.
   (d) Zeichnen Sie die Ortskurve der Extrema und skizzieren Sie den Graphen von f_1 (1LE $\hat{=}$ 2cm).
   (e) In der Umgebung des Maximums lässt sich die Funktion f_1 durch eine Parabel annähern, die den Graph von f_1 berührt und im Maximum die gleiche Krümmung hat. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel. Verwende dabei $f_1''(1) = -1$.

3. Untersuche folgende Funktionen auf Monotonie:
   (a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 3$ (b) $g(x) = x + \sin x$ (c) $h(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin x$

4. Untersuche die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x-1}}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

auf Symmetrie, Nullstellen, Verhalten an den Rändern von D_f, Monotonie und Extremwerte. Zeichne den Grafen von f im Intervall $[-1; 6]$.

5. Untersuche die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{20 \ln x}{x^2}, \quad D_f = \mathbb{R}^+$$

auf Nullstellen, Verhalten an den Rändern von D_f, Monotonie und Extremwerte. Zeichne die Grafen von f und f' im Intervall $[0{,}9; 6]$ in ein Diagramm. Veranschauliche die Zusammenhänge zwischen den Nullstellen der Ableitungsfunktion und den besonderen Stellen im Grafen von f.

6. Wir betrachten die Funktionenschar f_a mit

$$f_a(x) = \frac{ax+2}{2\mathrm{e}^x}, \quad D_{f_a} = \mathbb{R} \text{ und } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(a) Bestimme in Anhängigkeit des Scharparameters a die Nullstellen von f_a und das Verhalten von f_a für $x \to \pm\infty$.

(b) Zeige, dass alle Grafen der Funktionenschar genau einen Punkt gemeinsam haben und gib seine Koordinaten an.

(c) Bestimme die Koordinaten der lokalen Extrema der Funktionenschar in Abhängigkeit von a.

(d) Zeichne die Grafen der Funktionen $f_{0,5}$, f_2, f_{20} und f_{-4} in ein geeignetes Koordinatensystem. Stelle vorher die Nullstellen und die Koordinaten der Extremwerte in einer Tabelle zusammen.

(e) Unter welchem spitzen Winkel α schneiden sich die Grafen der beiden Funktionen $f_{0,5}$ und f_{20}?

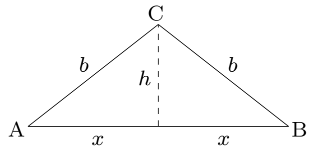
(f) Auf welcher Kurve $y = g(x)$ liegen die Extremwerte der Scharfunktionen? Zeichne sie in das schon bestehende Koordinatensystem ein.

Teil III.

Anwendungen der Differentialrechnung

5. Extremwertaufgaben

1. Ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basislänge $2x$ und den Schenkellängen b wird aus einem Draht der Länge L gebogen, d.h. $2x + 2b = L$.



   (a) Beweise für die Dreiecksfläche A die Beziehung

$$A(x) = \frac{\sqrt{L}}{2}\sqrt{Lx^2 - 4x^3}$$

   (b) Berechne $x = x_0$ so, dass $A(x_0)$ die maximale Dreiecksfläche ist. Untersuche, um welches besondere Dreieck es sich im Fall $x = x_0$ handelt.

   (c) Drücke die maximale Fläche $A(x_0)$ durch L aus und vereinfache so weit wie möglich.

2. Für den Bauherrn einer kleinen Fabrikhalle stellt sich die Frage nach der Wirtschaftlichkeit einer Wärmedämmung. Die gesamte zu isolierende Außenfläche ist $A = 500\,\mathrm{m}^2$, der Quadratmeterpreis einer Dämmplatte der Dicke 1 cm wird mit

$$\alpha = 0{,}8\,\frac{€}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{cm}}$$

angegeben, das Verlegen von einem Quadratmeter kostet 50 €. Weil der Gesamtpreis für die Dämmung über einen Kredit finanziert wird, muss dieser Preis noch mit 1,5 Multipliziert werden um die gesamten anfallenden Kosten für die Dämmung zu erhalten. Wenn die ganze Fläche A mit einer Dämmung der Dicke $d = x\,\mathrm{cm}$ versehen ist, beträgt der Energieverlust pro m^2 Außenfläche und pro Jahr

$$\frac{\Delta W}{A \cdot \Delta t} = \frac{\beta}{\frac{1}{3} + \frac{x}{2}} \quad \text{mit} \quad \beta = 100\,\frac{\mathrm{kWh}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{a}}$$

Die Halle soll $\Delta t = 20\,\mathrm{a}$ lang genutzt und mit Öl beheizt werden. Ein Liter Heizöl liefert die Energie 10 kWh und soll 1,20 € kosten (Mittelwert für die nächsten 20 Jahre). Mit $k(x)$ bezeichnen wir den Term für die gesamten Energiekosten in den zwanzig Jahren (Wärmedämmung plus Heizkosten).

   (a) Beweise mit begründeten Ansätzen:

$$k(x) = p + qx + \frac{r}{\frac{1}{3} + \frac{x}{2}} \quad \text{mit} \quad p = 37\,500\,€, \quad q = 600\,€, \quad r = 120\,000\,€$$

(b) Berechne die Dicke x_0 der Dämmung, für die $k(x)$ minimal wird. Rechne bis zum Ergebnis mit den allgemeinen Größen p, q und r.

(c) Die Dämmplatten gibt es nur in geradzahligen Werten von x. Ermittle die günstigste existierende Dämmstärke x_1. Um wieviel Prozent ist $k(x_1)$ kleiner als die Gesamtkosten $k(0)$ ohne Dämmung?

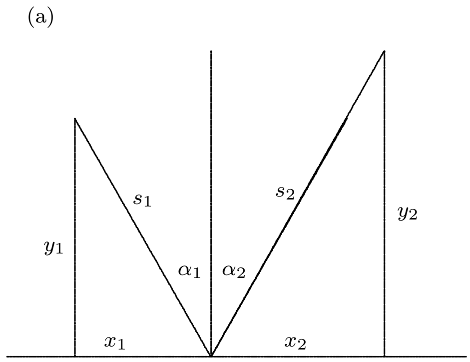
3. Der letzte Weg des Bären Bruno wird durch die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{x^2}$ und $D_f = \mathbb{R}^+$ beschrieben.

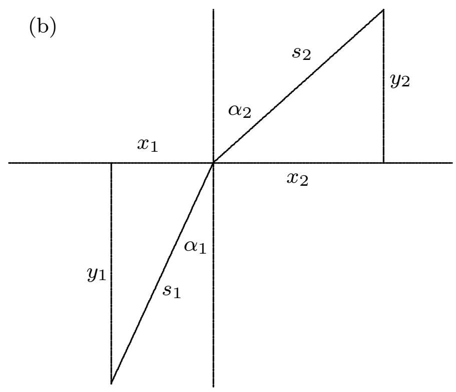
   (a) Zeichnen Sie den Grafen von f mit der Einheit 5 cm im x-Intervall [0,8; 2].

   (b) Der Bär wandert gemächlich von links nach rechts auf dem Grafen von f. Im Ursprung O des Koordinatensystems sitzt ein feiger Jaga, der Bruno genau dann erlegt, wenn er von ihm die kleinste Entfernung hat. Drücken Sie die Entfernung s zwischen dem Bären und dem Schützen durch die x-Koordinate des Bären aus und berechnen Sie die Koordinaten von Brunos Schicksalsort B $(x_0|y_0)$. Nachweis nicht vergessen, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt!

   (c) Wie lang ist die tatsächliche Schussweite $s_0 = \overline{\text{OB}}$, wenn der in (a) gezeichnete Weg einer Karte im Maßstab 1:2000 entspricht?

4. Die Lichtgeschwindigkeit für verschiedene Medien beträgt $\frac{c}{n}$, wobei $c = 3{,}0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und n die Brechungszahl des Mediums ist. Zeigen Sie, dass die Aussage „das Licht nimmt den Weg mit der minimalen Laufzeit“ äquivalent zu folgenden Gesetzen der geometrischen Optik ist:





   (a) Bei der Reflexion von Licht ist der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel.

   (b) Bei der Brechung von Licht an Grenzflächen gilt $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$.

5. **Die optimale Dose**
   (a) Aus Metall soll eine zylindrische Dose mit einem vorgegebenem Volumen V hergestellt werden. Für welchen Radius ist der Materialverbrauch minimal? Für die Rechnung soll der Materialverbrauch für Falze unberücksichtigt bleiben.
   (b) Aus Metall soll eine zylindrische Dose mit einer vorgegebenen Oberfläche A hergestellt. Für welchen Radius ist das Volumen maximal?

6. Zerlegen Sie 15 so in eine Summe, dass das Produkt maximal ist.

7. Aus einem Draht der Länge 120 cm wird das Kantenmodell eines Quaders hergestell. Die Seite b ist doppelt so lang wie die Seite c. Wie groß muss die Länge der Seite c gewählt werden, damit das Volumen des Quaders maximal wird.

8. Aus einem quadratischem Stück Karton der Seitenlänge 1 m soll eine quaderförmige Schachtel (ohne Deckfläche) mit der Höhe x hergestellt werden.
   (a) Drücken Sie das Volumen der Schachtel durch x aus. Bei der Rechnung soll die für Klebelaschen benötigte Fläche unberücksichtigt bleiben.
   (b) Für welche Höhe x ist das Volumen der Schachtel maximal?
   (c) Geben Sie das maximale Volumen der Schachtel an.

9. Aus einem quadratischem Stück Karton der Seitenlänge a soll eine quaderförmige Schachtel (ohne Deckfläche) mit der Höhe x hergestellt werden.
   (a) Drücken Sie das Volumen der Schachtel durch x aus. Bei der Rechnung soll die für Klebelaschen benötigte Fläche unberücksichtigt bleiben.
   (b) Für welche Höhe x ist das Volumen der Schachtel maximal?
   (c) Geben Sie das maximale Volumen der Schachtel an.

10. Aus einem rechteckigem Stück Karton der Seitenlängen a und b soll eine quaderförmige Schachtel mit der Höhe x hergestellt werden.
   (a) Drücken Sie das Volumen der Schachtel durch x aus. Bei der Rechnung soll die für Klebelaschen benötigte Fläche unberücksichtigt bleiben.
   (b) Für welche Höhe x ist das Volumen der Schachtel maximal?

11. Die Punkte $(x|f(x))$ auf dem Graphen der Funktion $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ erzeugen mit den Punkten $\mathrm{X}(x|0)$, $\mathrm{Y}(0|f(x))$ und dem Koordinatenursprung $\mathrm{O}(0|0)$ ein Rechteck der Fläche $A(x)$.
    (a) Berechnen Sie die Punkte des Graphen der Funktion $f(x)$ mit waagrechter Tangente.
    (b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ und zeichnen Sie für einen Punkt das zugehörige Rechteck ein.
    (c) Geben Sie die Koordinaten des Punktes P an, bei dem die Fläche des Rechtecks maximal ist.

12. In einen Kreis mit Radius 2 um den Koordinatenursprung $(0|0)$ soll ein Trapez mit möglichst großer Fläche einbeschrieben werden. Zwei Punkte des Trapezes liegen auf der x-Achse.
    (a) Drücken Sie die Koordinaten der vier Ecken des Trapezes in Polarkoordinaten aus.
    (b) Geben Sie einen Term zur Berechnung der Fläche des Trapezes an.
    (c) Berechnen Sie die Fläche für $\varphi = 30°, 45°, 60°$ und $90°$ (φ ist der Winkel zwischen der x-Achse und der rechten oberen Trapezecke).
    (d) Für welchen Winkel φ ist die Fläche des Trapezes maximal?

13. Betrachten Sie ein Dreieck mit den Ecken $\mathrm{A}(-a|b)$, $\mathrm{B}(a|b)$ und $\mathrm{C}(0|1)$, dessen Ecken auf dem Einheitskreis mit Mittelpunkt $\mathrm{M}(0|0)$ und Radius 1 liegen ($a \geq 0$).
    (a) Zeichnen Sie die Dreiecke für $a = 0{,}2;\ 0{,}5;\ 0{,}7$ ($1 \mathrel{\widehat{=}} 5\text{cm}$).
    (b) Berechnen Sie allgemein die Fläche $A(\varphi)$ des Dreiecks. Verwenden Sie zur Beschreibung den Winkel φ zwischen MB und der x-Achse ($\varphi < 0$, wenn B oberhalb der x-Achse).
    (c) Für welchen Winkel ist die Fläche des Dreiecks maximal?
    TIP: Verwenden Sie $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$ und den Satz von Vieta!

14. Aus einem Baumstamm mit kreisförmiger Querschnittsfläche (Durchmesser d, Länge l) soll ein Balken (Breite b, Höhe h, Länge l)
    (a) mit maximalem Volumen herausgeschnitten werden. Welcher Prozentsatz des Balkens wird genutzt?
    (b) mit maximaler Tragfähigkeit herausgeschnitten werden. Die Tragfähigkeit eines Balkens ist proportional zu bh^2. Welcher Prozentsatz des Balkens wird genutzt?

15. Mit dem Tröpfchenmodell zur Beschreibung eines Atomkerns läßt sich die Bindungsenergie des Kerns in Abhängigkeit von der Neutronenzahl N und der Protonenzahl Z berechnen. Für die Bindungsenergie erhält man:

$$W(Z,N) = (m_p Z + m_n N)\ c^2 - 6\varepsilon A + 6\varepsilon A^{2/3} + \beta \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \eta \frac{(A-2Z)^2}{A}$$

   (a) Geben Sie die Bindungsenergie für feste Nukleonenzahl $A = Z + N$ an.
   (b) Für welche Protonenzahl ist bei fester Nukleonenzahl A die Bindungsenergie mininal? Verwenden Sie dazu $\alpha = (m_n - m_p)\ c^2 = 0{,}78\,\text{MeV}$, $\beta = 0{,}639\,\text{MeV}$ und $\eta = 21{,}7\,\text{MeV}$.
   (c) Vergleichen Sie das in (b) erhaltene Ergebnis mit der einfachen Annahme, dass sich in einem Atomkern etwa gleich viele Protonen und Neutronen befinden.

16. **Schwerpunkt einer Limonadendose**
   (a) Wo liegt der Schwerpunkt einer vollen und einer leeren Dose?
   (b) Bis zu welcher Höhe muss man die Dose austrinken, damit der Schwerpunkt möglichst niedrig liegt und daher die Dose am besten stehen bleibt.
   (c) Welcher Wert ergibt sich für die Schwerpunktshöhe, wenn die Dose eine Höhe von 16 cm und eine Masse von 100 g hat. Die ganze Limonade soll eine Masse von 500 g haben.

17. Bauen Kinder aus Sand zylindrische Türme, sinken diese ab einer gewissen Höhe in sich zusammen. Dabei rutscht der obere Teil fast immer längs einer schrägen Fläche, die um 45° gegen die Horizontale geneigt ist nach unten. Wie läßt sich dies erklären? Nehmen Sie dazu an, dass für das Abrutschen eine gewisse Schubspannung

$$\sigma = \frac{\text{Kraft parallel zur Fläche } F_{||}}{\text{Abrutschfläche } A}$$

erreicht werden muss.

18. (a) Wann wird das Produkt zweier Zahlen mit konstanter Summe maximal?
   (b) Wann wird die Summe zweier Zahlen mit konstantem Produkt minimal?

19. Legen Sie die Punkte M und N auf den Schenkeln eines Winkels α mit Scheitel S so fest, dass bei konstanter Fläche des Dreiecks $\triangle$ SMN die Länge $\overline{\text{MN}}$ minimal ist.

20. Wie muss man einen Stab der Länge l in zwei Stücke zerbrechen, damit das aus den Teilstücken gebildete Dreieck maximale Fläche hat?

21. Aus einem rechteckigen Stück Karton mit Seitenlängen 8 cm und 5 cm werden an den Ecken kongruente Quadrate herausgeschnitten. Biegt man die Randstücke hoch, erhält man eine quaderförmige, oben offene Schachtel. Wie lang muss man die Quadratseite wählen, damit der Inhalt der Dose möglichst groß wird.

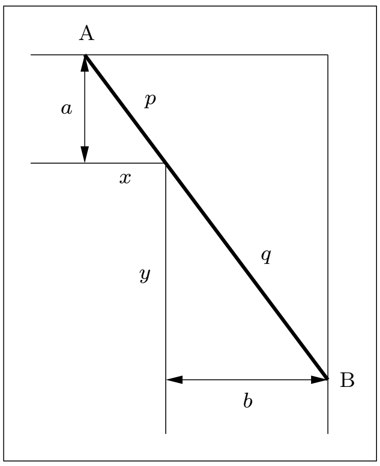
22. In welchem Rechteck mit gegebenem Flächeninhalt A hat die Diagonale minimale Länge?

23. Welcher Punkt des Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{2}x^2}$ hat vom Punkt P(0|3) minimalen Abstand?

24. Beweisen Sie, dass von allen Rechtecken mit gegebener Fläche A das Quadrat den kleinsten Umfang hat.

25. Wie muss ein kegelförmiges Sektglas gestaltet werden, damit bei gegebenem Volumen V möglichst wenig Material benötigt wird?

26. Zwei Kanäle mit den Breiten a und b stoßen rechtwinklig zusammen. Wir suchen die maximale Länge L, die ein Baumstamm haben kann, damit er gerade noch *um die Ecke* gebracht werden kann. Wir rechnen mit einem idealisierten Stamm der Dicke null.

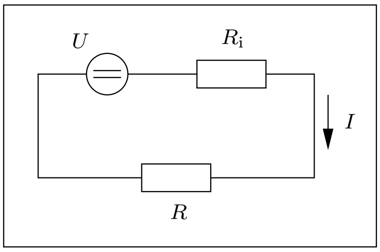


    (a) Drücken Sie $r = \overline{\text{AB}} = p + q$ durch x aus und berechnen Sie L.

    (b) Berechnen Sie L speziell für die Fälle $a = b$, $a \ll b$ und $b = 2a$.

    (c) Zeichnen Sie $r(x)$ für $a = 1$ und $b = 2$. Beweisen Sie für diesen Fall, dass $g(x) = x + 2$ eine Asymptote von $r(x)$ ist.

27. An eine Stromquelle mit dem Innenwiderstand R_i wird ein Verbraucher mit dem Widerstand R angeschlossen. P sei die im Verbraucher umgesetzte Leistung.



   (a) Für welche Wahl des Widerstandes R ist P maximal? Wie groß ist das maximale P?

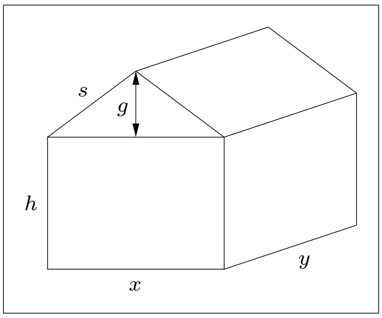
   (b) Zeichnen Sie $P(R)$ für $U = 1\,\mathrm{V}$ und $R_\mathrm{i} = 1\,\Omega$.

28. In einer Gemeinde gilt aus gestalterischen und wärmetechnischen Gründen für die Maße eines Hauses folgende **Verordnung** (siehe Abbildung):

V sei das Volumen des Hauses (umbauter Raum ohne Keller) und A die gesamte Oberfläche einschließlich Dach aber *ohne* die Grundfläche. Die Breite x, die Wandhöhe h, die Giebelhöhe g und die Länge y müssen so gewählt werden, dass

$$g = \frac{3}{8} \cdot x \quad ; \quad h = \frac{5}{8} \cdot x$$

und A bei gegebenem V minimal ist.



   (a) Drücken Sie V durch x und y aus und lösen Sie das Ergebnis nach V auf. Drücken Sie s durch x aus und beweisen Sie dann mit einer detaillierten Rechnung folgende Beziehung:

$$A(x) = \frac{13}{8} \cdot x^2 + \frac{40\,V}{13\,x}$$

   (b) Für welches x, ausgedrückt durch V, ist die Bauordnung erfüllt? Nachweis der Art des Extremums nicht vergessen! Berechnen Sie auch das Verhältnis $k = \dfrac{y}{x}$ für ein Haus, das den Forderungen der Bauordnung genügt.

   (c) Berechnen Sie x, y, h und g für ein der Bauordnung genügendes Haus mit dem Volumen $V = 540{,}8\,\mathrm{m}^3$ und zeichnen Sie die Vorderfront des Hauses im Maßstab 1 : 200.

29. Wir betrachten alle möglichen Quader mit den Kantenlängen x, y und z und dem konstanten Volumen V. Gesucht ist der Quader mit der kleinsten Oberfläche.

   (a) Drücken Sie die Oberfläche A eines Quaders durch x, y und V aus.

(b) A kann als Funktion von x mit dem Parameter y aufgefasst werden, d.h. $A = A_y(x)$. Für welches $x = x_y$ ist $A_y(x)$ minimal?

(c) Die Funktion $F(y)$ ist definiert durch $F(y) = A_y(x_y)$. $F(y)$ ist also die Oberfläche des Quaders mit der Kante y, dessen Oberfläche minimal ist. Den Quader mit der insgesamt kleinsten Oberfläche bei gegebenem Volumen V findet man durch Minimieren von F. Um welchen Quader handelt es sich dabei?

30. Zerlegen Sie die positive Zahl a so in eine Summe, dass das Produkt der beiden Summanden maximal wird.

31. **Warum Lastwagenfahrer so rasen**

Die Kosten für eine Lastwagenfahrt setzen sich aus den Treibstoffkosten und dem Fahrerlohn zusammen. Der Dieselverbrauch pro km ist die Summe aus einem konstanten Term a (Rollreibung) und einem zum Geschwindigkeitsquadrat proportionalen Term bv^2 (Luftwiderstand). Der Fahrerlohn F ist natürlich zur Fahrzeit t proportional, d.h. $F = ct$.

(a) Drücken Sie die Gesamtkosten G für eine Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit v über die Strecke s durch a, b, c, s, v und den Dieselpreis B pro Liter aus.

(b) Für welche Geschwindigkeit v_0 sind die Gesamtkosten minimal?

(c) Als konkretes Beispiel betrachten wir eine Fahrt über $s = 100\,\mathrm{km}$ mit den Daten

$$a = 0{,}04\,\frac{\text{Liter}}{\text{km}}, \quad b = 1{,}2\cdot 10^{-5}\,\frac{\text{Liter}\,\text{h}^2}{\text{km}^3}, \quad c = 80\,\frac{€}{\text{h}} \quad \text{und} \quad B = 2\,\frac{€}{\text{Liter}}.$$

Berechnen Sie v_0 und den minimalen Gesamtpreis G_0. Zeichnen Sie $G(v)$ im Intervall zwischen 0 und $300\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

32. Skizzieren Sie den ungefähren Verlauf der Funktion $f(x) = a - |x|^n$ mit $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Eine Parallele zur x-Achse im Abstand d mit $0 \leqq d \leqq a$ schneidet G_f in A und B (A links von B). Für welches $d = d_0$ ist die Fläche F des Dreiecks AOB maximal, wobei O den Ursprung des Koordinatensystems bezeichnet?

Hinweis: Drücken Sie F durch die x-Koordinate von B aus!

33. Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x) = x^2 - 2ax$ mit $a > 0$. Die Gerade $g:\ g(x) = c$ mit $c \geqq -a^2$ schneidet G_f in A und B (A links von B). Für welche c ist die Fläche F des Dreiecks AOB (O = Ursprung des Koordinatensystems) extremal?

Hinweis: Drücken Sie F durch c aus und skizzieren Sie den ungefähren Verlauf von $F(c)$!

6. Funktionen anpassen

Teil IV.

Geometrie

7. Punkte und Körper im dreidimensionalen Koordinatensytem

1. Gegeben sind die Punkte A$(4|-1|4)$, B$(-8|3|1)$ und C$(0|3|-5)$.
   (a) Zeichne das Schrägbild des Dreiecks ABC.
   (b) Berechne die Seitenlängen a, b und c.
   (c) Berechne die Innenwinkel α, β und γ und die Fläche A des Dreiecks.

8. Vektoren

1. Zeichne die Punkte A(1|2), B(4|4), C(2|1), D(−1| − 1),E(0|2), F(2|5), G(6|4) und H(3|2) in ein Koordinatensystem. Zeichne die Vektoren (natürlich ist gemeint, jeweils einen Repräsentanten) $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$, $\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{FE}}$ und $\vec{e} = \overrightarrow{\mathrm{GH}}$ ein. Welche dieser Vektoren sind gleich, welche haben den gleichen Betrag? Welche Vektoren sind gleich zu $-\vec{e}$?

2. Zeichne die Punkte A(2|2), B(6|1), C(5|5) und D(9|2) in ein Koordinatensystem. Zeichne die (Repräsentanten der) Vektoren $\vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{BD}}$ und $\vec{y} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ mit den jeweiligen Anfangspunkten A, B und C ein. Die Endpunkte der Repräsentanten von $\vec{x}$ seien A′, B′, und C′, die Endpunkte der Repräsentanten von $\vec{y}$ dagegen A″, B″, und C″. Vergleiche die Dreiecke A′B′C′ und A″B″C″ mit dem Dreieck ABC. Welche geometrische Abbildung wird also durch die Vorgabe eines Vektors beschrieben?

3. Wie viele Pfeile kann man in einen Würfel zeichnen, die jeweils zwei Ecken miteinander verbinden? Wie viele Vektoren werden dadurch festgelegt?

4. Die Komponenten der Geschwindigkeit $\vec{v}$ eines Flugzeugs sind $40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ nach Norden, $30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ nach Westen und $20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ nach oben. Berechne den Betrag v der Geschwindigkeit und den Steigungswinkel φ.

5. Der allseits bekannte Abenteurer Happysearch ist auf der Jagd nach dem sagenhaften Schatz des Piraten Blackmath. Blackmaths Beschreibung zur Auffindung des Schatzes, die Happysearch auf wunderbare Weise in die Hände fiel, lautet folgendermaßen:

   „Vom Totenkopf aus sind n Schritte in die richtige Richtung zurückzulegen, drehe dich um den richtigen Winkel und lege dann m Schritte zurück. Die folgenden vier Wege ergeben sich jeweils aus der vektoriellen Differenz des letzten und des vorletzten Weges.“

   Happysearch steht breitbeinig und ziemlich ratlos über dem gewissen Totenkopf und sieht seine Felle schon davonschwimmen, da er weder n, m, die Richtung noch den Drehwinkel kennt. Da kritzelt sein Schiffsjunge, ein gescheiterter Gymnasiast, der wenigstens die Vektorrechnung noch einigermaßen im Kopf hat, mit einem ausgebleichten Knochen geheimnisvolle Zeichen in den Sand. Nach einer kleinen Weile grinst er Happysearch ins Gesicht, handelt sich eine saftige Beteiligung am zu erwartenden Gewinn heraus und findet in kurzer Zeit den Schatz. Da sage noch einer, dass die Mathematik eine brotlose Kunst sei!

6. Der Betrag der von der Masse M auf die Masse m ausgeübten Kraft ist

$$F = \frac{GMm}{r^2} \qquad \text{(Gravitationsgesetz)},$$

wobei r die Entfernung der beiden Massen ist.

   (a) Formuliere das Gravitationsgesetz vektoriell, wobei sich M am Ort P und m am Ort Q befindet. Verwende die Bezeichnungen $\vec{r}_1 = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ und $\vec{r}_2 = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$.

   (b) $M = 2{,}0 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ ist die Masse der Sonne am Ort $\mathrm{P}(-3{,}0 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}|6{,}0 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}|0)$, $m = 80\,\mathrm{kg}$ die Masse eines Satelliten am Ort $\mathrm{Q}(9{,}0 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}|-3{,}0 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}|0)$.

   $\vec{F}$ ist die Kraft von der Sonne auf den Satelliten. Berechne $\vec{F}$ und $F = |\vec{F}|$ mit $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}}$ (Gravitationskonstante).

7. Gegeben sind die Punkte $\mathrm{A}(5|-2|-1)$, $\mathrm{B}(1|0|1)$ und $\mathrm{C}(-6|4|5)$.

   (a) Zeige, dass die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen ($\mathrm{C} \notin \mathrm{AB}$).

   (b) Welche Punkte können ABC zu einem Parallelogramm ergänzen?

8. Der Ort eines Körpers wird durch $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ beschrieben. Die Geschwindigkeit des Körpers ist definiert durch

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

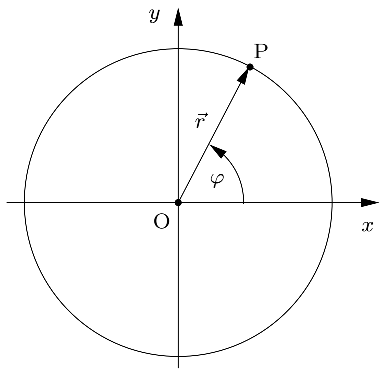
Analog definiert man $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t)$.

   (a) Beweise: $\quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$ und $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \\ \dot{v}_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}$

   (b) Ein Punkt P bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r. Zur Zeit $t_0 = 0$ befindet sich P am Ort $(r|0)$. Der Winkel zwischen $\vec{r}$ und der x-Achse ist (siehe Abb.) $\varphi(t) = \omega t$. Drücke

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

   durch r und ω aus und berechne dann $\vec{v}(t)$, $v = |\vec{v}(t)|$, $\vec{a}(t)$ und $a = |\vec{a}(t)|$.



9. Beweise: Die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen Vierecks bilden ein Parallelogramm.

10. (a) Beweise, dass für $\vec{a} \neq \vec{o}$, $\vec{b} \neq \vec{o}$ und $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ gilt:

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{o} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \mu = 0$$

   (b) Beweise: Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Dieser Punkt (Schwerpunkt des Dreiecks) teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1.

   (c) Im $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte A und B durch die Ortsvektoren $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ gegeben, M ist der Mittelpunkt von [AB]. Drücke $\vec{m} = \overrightarrow{OM}$ durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus.

   (d) Im $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte A, B und C durch die Ortsvektoren $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ gegeben, S ist der Schwerpunkt von $\triangle$ABC.

   Drücke $\vec{s} = \overrightarrow{OS}$ durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

11. Der Quader ABCDEFGH ist gegeben durch A (5|6|3) und die Vektoren

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Wie lauten die Koordinaten aller Ecken des Quaders?

   (b) Durch Spiegelung an der x_1x_2-Ebene geht der Quader ABCDEFGH in den Quader $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ über. Wie lauten die Koordinaten aller Ecken des neuen Quaders?

   (c) Formuliere eine Regel, wie man die Koordinaten des Bildpunktes P′ von P $(p_1|p_2|p_3)$ bei der Spiegelung an einer der Koordinatenebenen erhält.

   (d) Durch Spiegelung an der x_2-Achse geht der Quader ABCDEFGH in den Quader $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2$ über. Wie lauten die Koordinaten aller Ecken des neuen Quaders?

   (e) Formuliere eine Regel, wie man die Koordinaten des Bildpunktes P′ von P $(p_1|p_2|p_3)$ bei der Spiegelung an einer der Koordinatenachsen erhält.

   (f) Durch Spiegelung am Ursprung geht der Quader ABCDEFGH in den Quader $A_3B_3C_3D_3E_3F_3G_3H_3$ über. Wie lauten die Koordinaten aller Ecken des neuen Quaders?

   (g) Formuliere eine Regel, wie man die Koordinaten des Bildpunktes P′ von P $(p_1|p_2|p_3)$ bei der Spiegelung am Koordinatenursprung erhält.

   (h) Durch Spiegelung am Punkt S (6|6|2) geht der Quader ABCDEFGH in den Quader $A_4B_4C_4D_4E_4F_4G_4H_4$ über. Wie lauten die Koordinaten aller Ecken des neuen Quaders?

(i) Formuliere eine Regel, wie man die Koordinaten des Bildpunktes P' von $\mathrm{P}\,(p_1|p_2|p_3)$ bei der Spielung am Punkt $\mathrm{S}\,(s_1|s_2|s_3)$ erhält.

(j) Zeichne die fünf Quader in ein Schrägbild.

(k) Zeichne die Projektionen der fünf Quader in die drei Koordinatenebenen (drei Zeichnungen, kein Schrägbild).

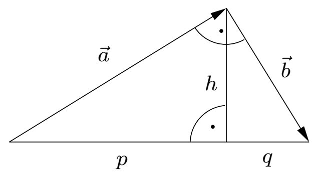
9. Skalar- und Vektorprodukt

1. Gegeben ist der Punkt T und die Vektoren $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$. Wo liegen die Punkte X für die gilt $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{X} - \overrightarrow{T}) = 0$. Begründen Sie ihre Antwort.

2. Die Punkte $A(-1|3|-2)$, $B(-1|-3|4)$ und $D(7|-5|2)$ bilden ein Dreieck.
   (a) Zeige, dass das Dreieck $\triangle ABD$ gleichschenklig ist. Berechne den Winkel $< BAD$ und den Flächeninhalt des Dreiecks.
   (b) Um den Mittelpunkt M der Strecke $[AD]$ liegt eine Kugel mit Radius $\overline{MD}$. Welche Lage haben die Punkte B und $E(1|7|2)$ bezüglich der Kugel?

3. (a) Beweise: Für $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \vec{o}$ gilt: $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ stehen senkrecht auf $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
   (b) Welche Einheitsvektoren sind zu $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ orthogonal?
   (c) $\begin{pmatrix} x \\ -2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix}$. Bestimme fünf geeignete Wertepaare (x, y) und zeichne die dazu gehörenden Vektoren.

4. Beweise mit Hilfe nebenstehender Abbildung den Höhensatz.



5. Gegeben sind die Punkte A (7|5|1), B (1|8|7) und C (5|1|5).
   (a) Zeichne das Dreieck ABC in ein Schrägbild.
   (b) Berechne den Winkel $\alpha = \sphericalangle$BAC und den Inhalt A der Dreiecksfläche. Versuche, A exakt zu berechnen (Wurzeln).
   (c) Der Punkt D hat die Koordinaten D $(0|d|0)$. Bestimme d so, dass $\overrightarrow{AD}$ auf $\overrightarrow{AC}$ senkrecht steht.

6. Bestimme y so, dass $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} \\ y \end{pmatrix}$ einen 30°-Winkel miteinander einschließen.

7. Berechne die Innenwinkel und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit A $(1|5|-3)$, B $(7|0|1)$ und C $(-4|-2|2)$.

8. (a) Beweise: Dreht man den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel φ, dann erhält man den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \cos\varphi - a_2 \sin\varphi \\ a_1 \sin\varphi + a_2 \cos\varphi \end{pmatrix}$.

   (b) Drehe den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel $\varphi = 60°$.

9. Wird ein Körper K unter dem Einfluss der Kraft $\vec{F}$ um $\vec{x}$ verschoben, dann wird an K die Arbeit $W = \vec{F} \cdot \vec{x}$ verrichtet (Definition der Arbeit).

   (a) Ein Körper K bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf einer Kreisbahn. Welche Arbeit W wird während eines Umlaufs von der Zentripetalkraft an K verrichtet?

   (b) Ein Fußball bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$. Auf ihn wirkt die Gewichtskraft $\vec{G}$ und eine der Geschwindigkeit entgegengesetzte Reibungskraft mit dem Betrag $R = kv^2$ $(v = |\vec{v}|)$. Leite eine möglichst einfache Formel für die Leistung $P = \frac{W}{t}$ her, die am Ball verrichtet wird. Berechne P dann für

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ -5 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{N}, \quad k = 5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

   Was bedeutet das Vorzeichen von P? Wie ändert sich dieses Vorzeichen während des Ballflugs?

10. Beweise die Lagrangesche Identität:

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

11. Ein rechteckiges Solarpaneel ist durch die Eckpunkte A, B, C und D mit A$(3|2|4)$, B$(6|8|4)$ und D$(1|3|6{,}5)$ gegeben. Alle Zahlenangaben verstehen sich in Metern, wir rechnen aber, wenn nicht anders angegeben, ohne Einheiten. Die x_1-Achse zeigt nach Süden.

   (a) Berechne die Koordinaten von C und zeige, dass es sich bei dem Parallelogramm ABCD tatsächlich um ein Rechteck handelt. M sei der Diagonalenschnittpunkt des Rechtecks; berechne die Koordinaten von M.

(b) Zeichne ein Schrägbild des Rechtecks ABCD (Einheit: 1 cm). Zeichne auch die senkrechte Projektion des Rechtecks in die x_1x_2-Ebene ein.

(c) E ist die Ebene, die A, B, C und D enthält. $\vec{n}$ ist ein Normalenvektor von E mit dem Betrag $n = |\vec{n}| = 6$, der nach oben und Süden zeigt. Berechne die Koordinaten von $\vec{n}$ und die Koordinaten des Punktes N mit $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \vec{n}$. Zeichne $\vec{n}$ mit dem Anfangspunkt M in das schon vorhandene Koordinatensystem.

(d) Der Vektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ zeigt von M in Richtung Sonne. Zeichne $\vec{s}$ in das Schrägbild ein und berechne den Winkel σ zwischen $\vec{s}$ und $\vec{n}$.

(e) Die elektrische Leistung unseres Solarpaneels bei unbedecktem Himmel ist

$$P = kA_\mathrm{s} \cdot \vec{n}_0 \cdot \vec{s}_0 \quad \text{mit} \quad k = 0{,}11\,\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m}^2}$$

Dabei sind $\vec{n}_0$ und $\vec{s}_0$ die Einheitsvektoren von $\vec{n}$ und $\vec{s}$ und A_s ist die Fläche des Solarpaneels. Berechne P (jetzt mit Einheiten rechnen).

12. Ein parallelogrammförmiges Hanggrundstück ist durch die Eckpunkte A, B, C und D mit A(60|50|20), B(70|110|7,5) und D(0|10|55) gegeben. Alle Zahlenangaben verstehen sich in Metern, wir rechnen aber, wenn nicht anders angegeben, ohne Einheiten. Die x_1-Achse zeigt nach Süden.

(a) Berechne die Koordinaten von C und zeige, dass es sich bei dem Parallelogramm ABCD nicht um ein Rechteck handelt. M sei der Diagonalenschnittpunkt des Parallelogramms; berechne die Koordinaten von M.

(b) Zeichne ein Schrägbild des Parallelogramms ABCD (Einheit: 0,1 cm). Zeichne auch die senkrechte Projektion des Rechtecks in die x_1x_2-Ebene ein.

(c) E ist die Ebene, die A, B, C und D enthält. $\vec{n}$ ist ein Normalenvektor von E mit dem Betrag $n = |\vec{n}| = 90$, der nach oben und Süden zeigt. Berechne die Koordinaten von $\vec{n}$ und die Koordinaten des Punktes N mit $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \vec{n}$. Zeichne $\vec{n}$ mit dem Anfangspunkt M in das schon vorhandene Koordinatensystem.

(d) Welchen Neigungswinkel φ hat E gegen die x_1x_2-Ebene?

(e) Berechne den Flächeninhalt F des Grundstücks.

(f) Das Grundstück soll in ein flächengleiches, quadratisches Grundstück umgewandelt werden (AB′C′D′), wobei die linke untere Ecke A erhalten bleiben soll und die untere Seite [AB′] horizontal verläuft, also parallel zur x_1x_2-Ebene ist. Berechne zuerst die Vektoren $\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{AB'}}$ und $\vec{s} = \overrightarrow{\mathrm{AD'}}$ und dann die Koordinaten von B′, C′ und D′. Zeichne das neue Grundstück in das Schrägbild ein.

13. Für eine Weltausstellung wird ein gigantischer Globus aufgebaut. Die folgenden Zahlenangaben verstehen sich in Metern, rechne aber ohne Einheiten. Der kugelförmige Globus hat den Mittelpunkt M$(-12|10|9)$ und den Radius $r = 17$, mit k bezeichnen wir die Menge aller Punkte der Kugeloberfläche. Der Boden liegt in der x_1x_2-Ebene.

    (a) Stelle die Gleichung für k in der Koordinatenform auf und berechne die Koordinaten der Schnittpunkte A und B von k mit der x_2-Achse (A liegt näher am Ursprung O als B).

    [Zur Kontrolle: A$(0|2|0)$, B$(0|18|0)$]

    (b) Der Äquator der Kugel verläuft durch die Punkte A und B, Der Nordpol N liegt oben (also nicht unter dem Boden). Verwende die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{MA}}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{MB}}$, um die Koordinaten von N zu berechnen.

    (c) Wie lang ist der kürzeste Weg auf der Kugel, der von A nach B führt?

    (d) Die Platzmiete für den Globus richtet sich nach seiner Standfläche. Berechne diese Schnittfläche der Kugel mit der x_1x_2-Ebene.

    (e) Der Standort des Globusses auf der Erde ist als Punkt C auf dem Globus markiert. C liegt auf dem Meridian von N nach B und hat die nördliche Breite $\beta = 60°$. Berechne die Koordinaten von C.

    Hinweis: Stelle die vor, dein Blatt Papier liegt in der durch B, N und C gegebenen Ebene. Zeichne die Vektoren $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{MB}}$, $\vec{n} = \overrightarrow{\mathrm{MN}}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{MC}}$ ein (wähle für diese Überlegungsfigur $r \mathrel{\widehat{=}} 5\,\mathrm{cm}$) und stelle $\vec{c}$ durch $\vec{b}$ und $\vec{n}$ dar.

    (f) Stelle alle gegebenen und berechneten Punkte und Vektoren in einem Schrägbild mit der Einheit 0,5 cm dar.

14. k ist die Menge aller Punkte der Kugelfläche um M$(-9|6|6)$ mit dem Radius $r = 11$. Die Schnittpunkte von k mit der x_1-Achse sind A_1 und A_2, mit der x_2-Achse B_1 und B_2 und mit der x_3-Achse C_1 und C_2, wobei die Punkte mit dem Index 1 jeweils näher am Ursprung O liegen.

    (a) Berechne die Koordinaten von A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 und C_2.

    (b) Die Ebene E ist durch die Punkte A_2, B_2 und M festgelegt (Äquatorebene der Kugel). N (Nordpol) und S (Südpol) sind die Punkte auf der Kugel, die von E den größten Abstand haben. Berechne die Koordinaten von N und S.

    (c) Stelle M, die Kugelschnittpunkte mit den Achsen und N in einem Schrägbild dar (Einheit: 1 cm). Platzbedarf: $\begin{array}{ccc} & 13 & \\ -2 & \mathrm{O} & 12 \\ & -1 & \end{array}$

    (d) Berechne den Flächeninhalt des Schnittkreises k_{12} der Kugel mit der x_1x_2-Ebene und gib die Gleichung von k_{12} an.

(e) Berechne die Länge des kürzesten Weges auf der Kugelfläche von C_1 nach B_2.

(f) Für welche x_3 gilt $P(-7|-3|x_3) \in k$?

(g) Liegt Q(1|6|1) innerhalb der Kugel k?

15. Ein Gewächshaus besteht aus einer durchsichtigen Halbkugel aus Kunststoff mit dem Radius $r = 5$. Der Ursprung des Koordinatensystems ist der Mittelpunkt der Halbkugel, der Boden ist die x_1x_2-Ebene. Aus Gründen des Vogelschutzes sind Umrissbilder von Vögeln auf die Kuppel geklebt worden. Eines befindet sich bei $A(4{,}8|0|a_3)$, ein anderes bei $B(0|b_2|4)$. Alle Koordinaten verstehen sich in Metern. Rechne aber, außer in Teilaufgabe (b), ohne Einheiten.

    (a) Stelle die Gleichung der Halbkugel k auf und berechne die fehlenden Koordinaten von A und B. Ein weiteres Umrissbild befindet sich am Ort C, wobei $\vec{C}$ auf $\vec{A}$ und auf $\vec{B}$ senkrecht steht. Berechne die Koordinaten von $\vec{C}$.

    (b) Eine Schnecke kriecht auf der Kuppel auf dem kürzesten Weg von A nach B. Wie lange braucht sie dazu, wenn sie in einer Minute 15 cm zurücklegt?

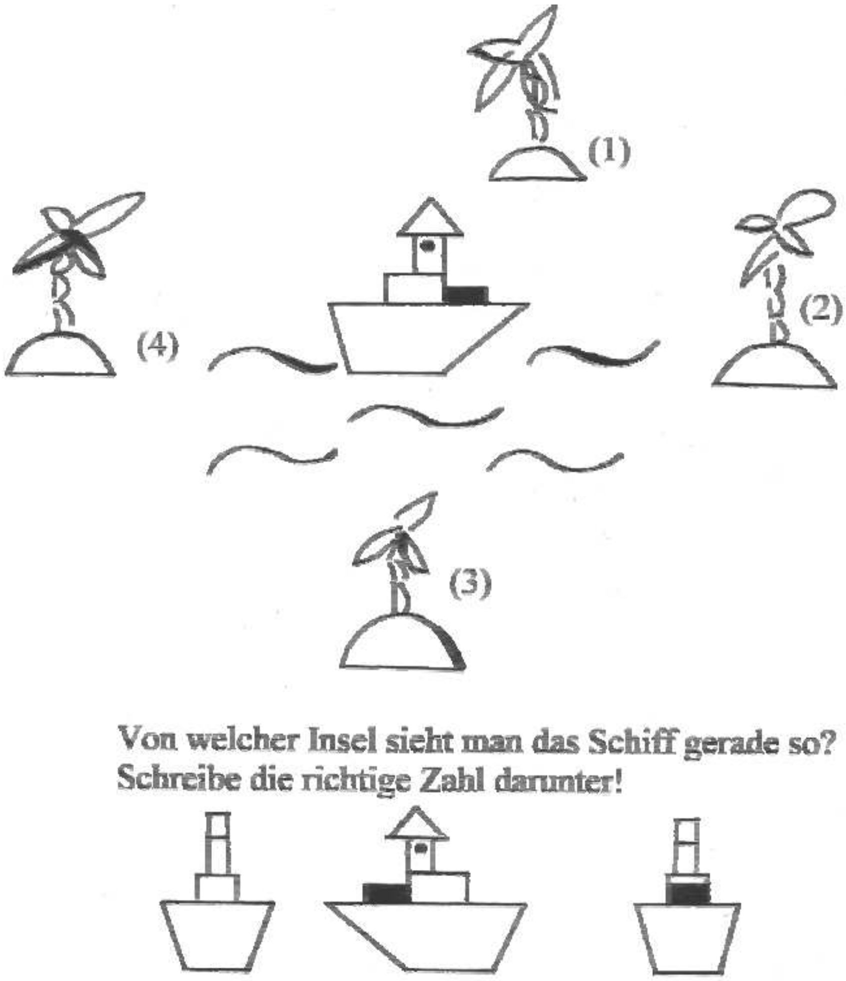
    (c) Die Richtung der parallel einfallenden Sonnenstrahlen ist durch den Vektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$ gegeben. Berechne die Koordinaten des Schattens von Punkt B auf dem Boden.

    (d) Ein kugelförmiger Ballon mit dem Radius $r' = 4$ berührt die Gewächshauskuppel im Punkt $D(-1{,}8|4|d_3)$. Mit k' bezeichnen wir die Menge aller Punkte der Ballonhülle. Stelle die Gleichung für k' auf.

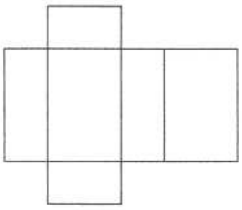
    (e) Zeichne alle gegebenen und berechneten Punkte und Vektoren in ein Schrägbild.

10. Berechnungen an Körpern, u. a. Flächeninhalte und Volumina

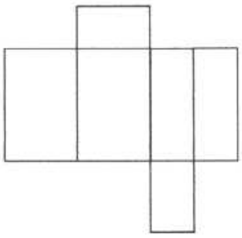
11. Raumvorstellung

1. 

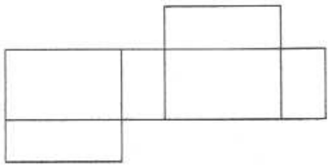
2. Handelt es sich jeweils um einen richtigen Bastelbogen?
   (a) .



Ja ○ Nein ○

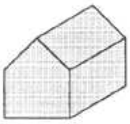


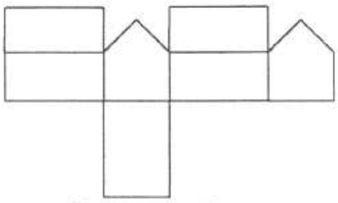
Ja ○ Nein ○



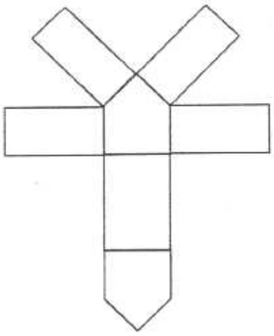
Ja ○ Nein ○

(b) .

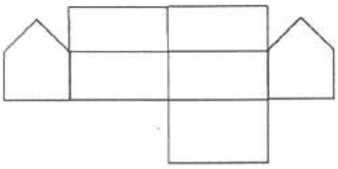




Ja ○ Nein ○

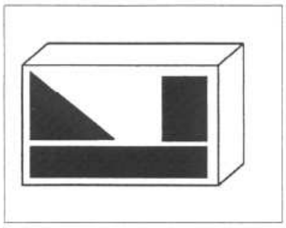


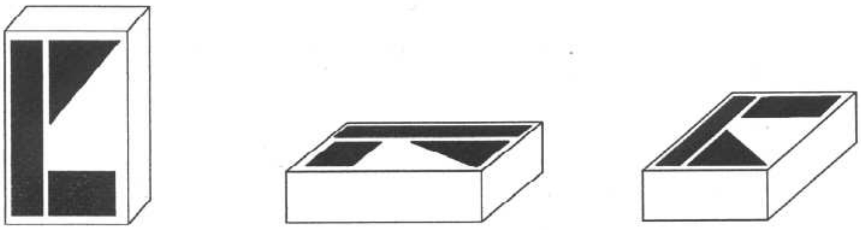
Ja ○ Nein ○



Ja ○ Nein ○

Ist oben dieselbe Schachtel wie unten abgebildet?





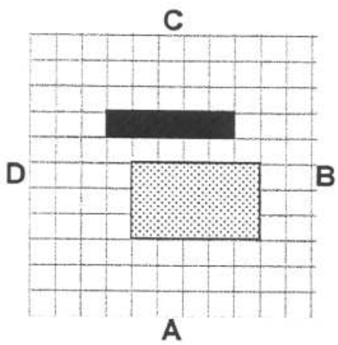
Ja ◯ Nein ◯ Ja ◯ Nein ◯ Ja ◯ Nein ◯

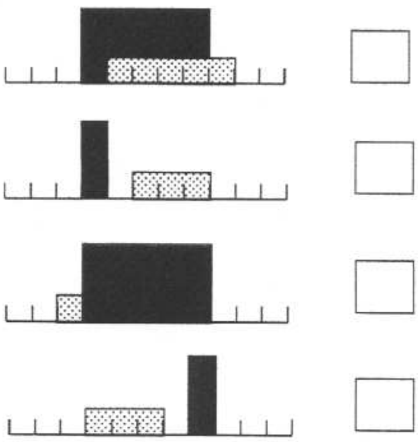
3.

Hier siehst du gleich große Schachteln von oben!

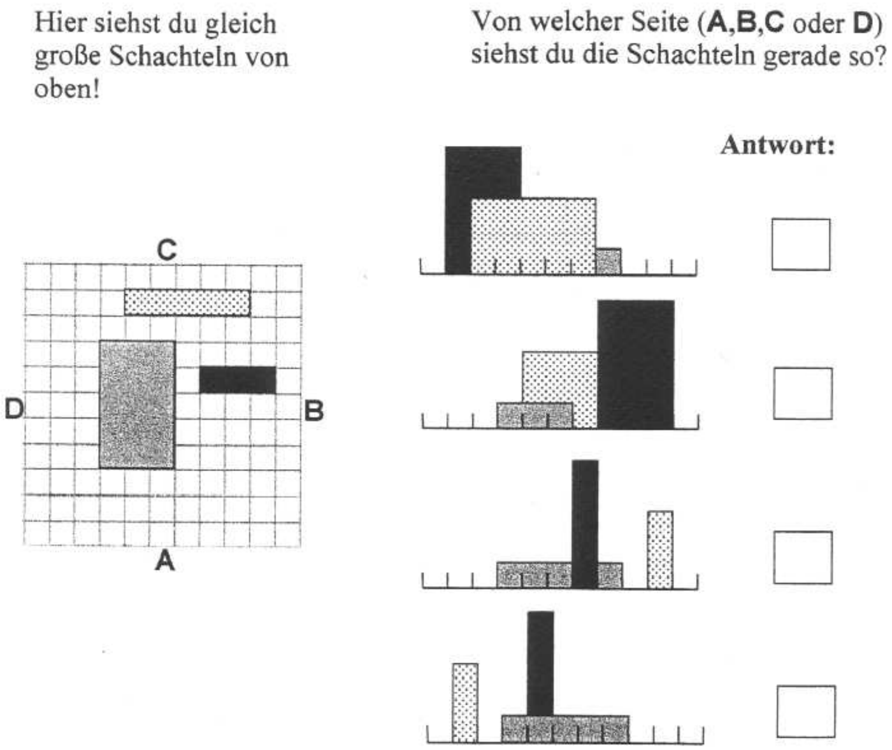
Von welcher Seite (**A**,**B**,**C** oder **D**) siehst du die Schachteln gerade so?

Antwort:





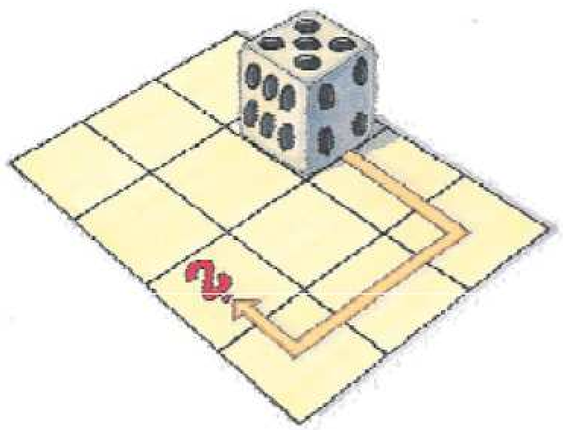
4.



5.

6. Würfel kippen

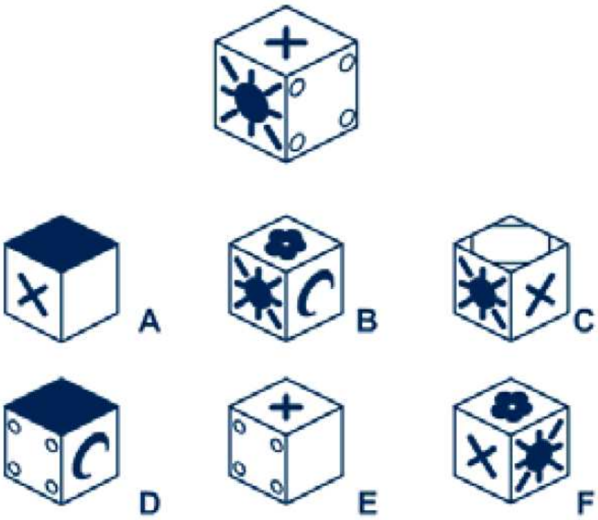
   Bei jedem Spielwüfel haben die gegenüberliegenden Flächen die Augensumme 7. Welche Zahl liegt oben, wenn du den Spielwürfel auf diesem Plan nach dieser vorschrift kippst?

   Quelle: Studeny, G., Brenninger A., Kartei zur Kopfgeometrie, Westermann

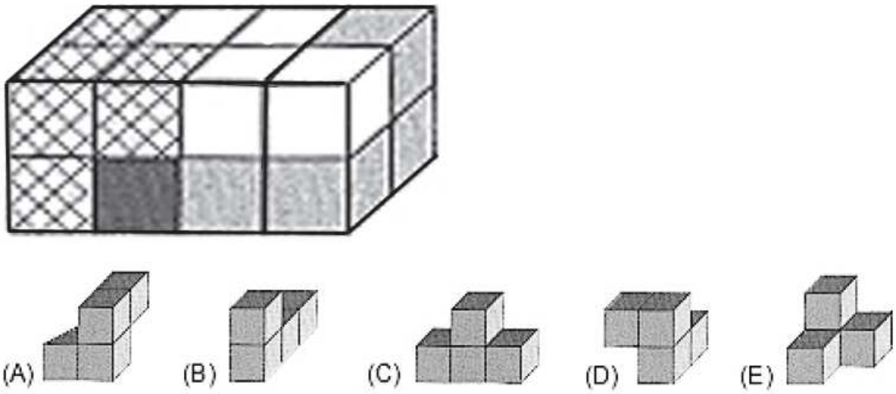
7. Welcher Würfel kann nicht der gleiche sein, wie der oben dargestellte?

   (auf keinem Würfel tragen zwei Seiten identische Symbole)



Quelle: Klaus-Jürgen Gebert, Berlin

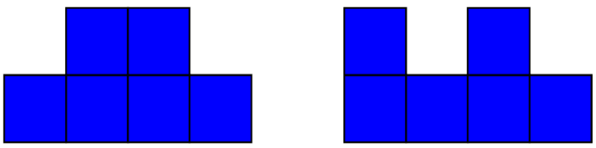
8. Der Quader wurde aus vier Bausteinen, von denen jeder aus vier Würfeln besteht, gebaut. Welcher der abgebildeten Bausteine ist der schwarze?



Quelle: Vortrag von Christoph Hammer (Didaktik der Mathematik, LMU München), 22.11.2007

9. **Würfelgebäude**

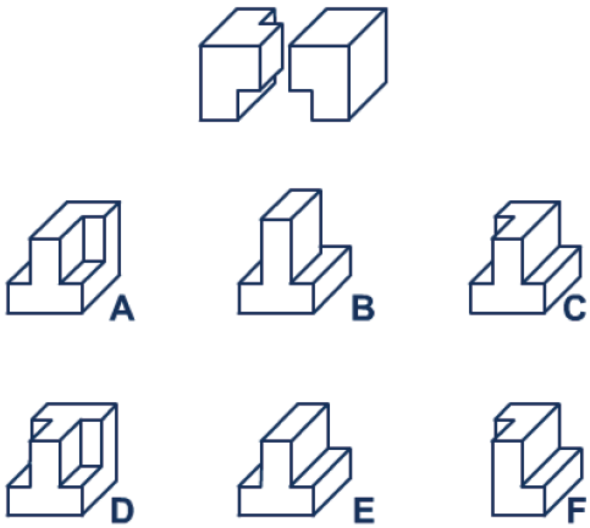
   Aus einzelnen Würfeln wird ein Würfelgebäude aufgebaut. Ein Gebäude ist in der Abbildung von vorne und von der Seite abgebildet.



Wie viele Würfel sind für das Gebäude minimal und maximal verwendet worden?

Quelle: nach de Lange, J., Utrecht in: SINUS Bayern, Beiträge zur Weiterentwicklung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts, Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus (StMUK) und Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB), 2007

10. Welches der Bruchstücke ergänzt die Figur am besten?



Quelle: Klaus-Jürgen Gebert, Berlin

Teil V.

Stochastik - Wahrscheinlichkeitsbegriff

12. axiomatische Definition von Wahrscheinlichkeit

1. (a) Berechnen Sie das kartesische Produkt der Mengen $A = \{1\,,\,2\,,\,3\}$ und $B = \{3\,,\,4\,,\,5\,,\,6\}$.

   (b) $C = \{1\,,\,2\}$, $D = \{3\,,\,4\}$, $E = \{5\,,\,6\}$. Berechnen Sie $C \times (D \times E)$.

   (c) $F = \{\,x \,|\, x \in \mathbb{N}$ und $1 \leqq x \leqq 80\}$, $G = \{\,x \,|\, x \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leqq x \leqq 180\}$. Wie viele Elemente besitzten die Mengen $H = F \times (G \times F)$ und $K = G \times (G \times F)$?

2. Ein grüner und ein roter Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wir betrachten die Ereignisse

   $A =$ „Augensumme gerade“ und $B =$ „grüner Würfel zeigt ungerade Zahl“.

   (a) Welcher Ergebnisraum Ω ist sinnvoll?

   (b) Schreibe die Elemente von A und B hin.

   (c) Gib eine umgangssprachliche Beschreibung der Ereignisse $C = A \cap B$ und $D = A \cup B$. Wie groß ist die Mächtigkeit von C, D und $\mathcal{P}(\Omega)$?

   (d) Gib die Mengenschreibweise folgender Ereignisse an und zeichne jeweils ein Mengendiagramm:

   $E =$ „Weder A noch B treten ein“
   $F =$ „A oder B treten ein (oder beide)“
   $G =$ „Nur A oder nur B tritt ein (nicht beide)“
   $H =$ „Genau eines der beiden Ereignisse A oder B tritt ein“
   $K =$ „Höchstens eines der beiden Ereignisse A oder B tritt ein“
   $L =$ „Mindestens eines der beiden Ereignisse A oder B tritt ein“

3. A und B seien Mengen mit $|A| = a$ und $|B| = b$.

   (a) Wie viele Funktionen f von A in B gibt es ($D_f = A$, $W_f \subseteqq B$)?

   (b) Wie viele umkehrbare Funktionen von A in B gibt es? Welcher Bedingung müssen a und b in diesem Fall genügen?

   (c) $B = \{1, 2\}, \quad C \subseteqq A, \quad f_C : A \longrightarrow B \; : \; f_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in C \\ 0 & \text{für } x \notin C \end{cases}$

Verwende das Ergebnis von (a), um die Mächtigkeit der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ zu berechnen ($\mathcal{P}(A)$ ist die Menge aller Teilmengen von A).

13. verknüpfte Ereignisse und ihr Wahrscheinlichkeiten

1. Ein kleines Gebirgsdorf am Rande der Alpen bewirbt sich für Olympia. Im Dorf leben 4000 Einheimische (E) und es gibt auch Zugereiste ($\overline{E}$). Das Dorf spaltet sich in Olympiabefürworter (B) und Olympiagegner ($\overline{B}$). $63\frac{1}{3}\%$ der Befürworter sind Einheimische, 38% der Einheimischen sind Befürworter. Weiter gibt es 120 zugereiste Gegner.
   (a) Berechne die fehlenden absoluten Häufigkeiten und trage sie in eine Vierfeldertafel ein.
   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Zugereister ein Gegner?
   (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Gegner ein Zugereister?
   (d) Ein Dorfbewohner wird zufällig ausgewählt. Untersuche die Ereignisse E: „Der Ausgewählte ist Einheimischer“ und B: „Der Ausgewählte ist Befürworter“ auf stochastische Unabhängigkeit.

2. In dieser Aufgabe bedeutet das Wort *Schüler* Buben *und* Mädchen.
   Die Befragung der Schüler eines Kurses erbrachte folgendes Ergebnis:
   - 14 Schüler sind zwar vom Sport, nicht aber von der Mathematik begeistert
   - Ein Mädchen liebt Mathe und Sport
   - Drei Buben lieben Mathe und Sport
   - Sechs Mädchen sind sportbegeistert
   - Zwei Mädchen hassen Mathe und Sport
   - 18 Schüler mögen keine Mathematik
   - Vier Buben mögen keinen Sport
   - Sieben Schüler mögen Mathe

   Verwende folgende Mengensymbole:

   B: Buben M: Mathematiker S: Sportler

   (a) Wie viele Buben und Mädchen sind in dem Kurs?
   (b) Beschreibe folgende Mengen in Worten und berechne ihre Mächtigkeit:

i. $B \cap \overline{M} \cap \overline{S}$

ii. $(B \cap M \cap \overline{S}) \cup (\overline{B} \cap M \cap \overline{S})$

(c) Beschreibe folgende Ereignisse mit Mengensymbolen und berechne ihre Mächtigkeit:

i. Alle sportlichen Buben, die Mathe nicht mögen.

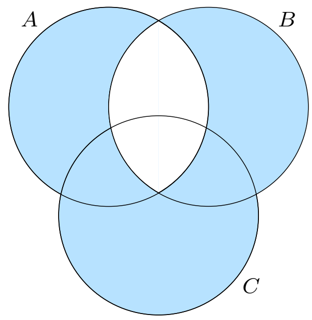
ii. Alle Mädchen, die nur eins mögen, entweder Mathe oder Sport.

iii. Alle Schüler die Mathe mögen oder alle Schüler, die den Sport lieben.

3. In einem Dorf gibt es zwei Vereine, den Trachtenverein (T) und den Sportverein (S). Für die Wahrscheinlichkeiten der Vereinszugehörigkeit eines beliebig ausgesuchten Dorfbewohners gilt: $P(T) = 40\,\%$, $P(S) = 32\,\%$, $P(T \cap S) = 8\,\%$. 180 Dorfbewohner gehören zu keinem Verein. Wie viele Dorfbewohner gibt es?

4. (a) A und B sind Teilmengen eines Ergebnisraumes Ω mit nichtleerem Durchschnitt ($A \cap B \neq \emptyset$). Stelle $M = (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$ in einem Mengendiagramm dar. Gib noch mindestens zwei andere Schreibweisen von M an.

(b) Drücke die getönt dargestellte Menge D durch A, B und C aus.



5. Eine Urne enthält n Kugeln, z davon sind weiß, der Rest ist schwarz. Es werden hintereinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Wir betrachten die Ereignisse $A :=$ „Die erste gezogene Kugel ist weiß“ und $B :=$ „Die zweite gezogene Kugel ist weiß“. Untersuche A und B auf stochastische Unabhängigkeit.

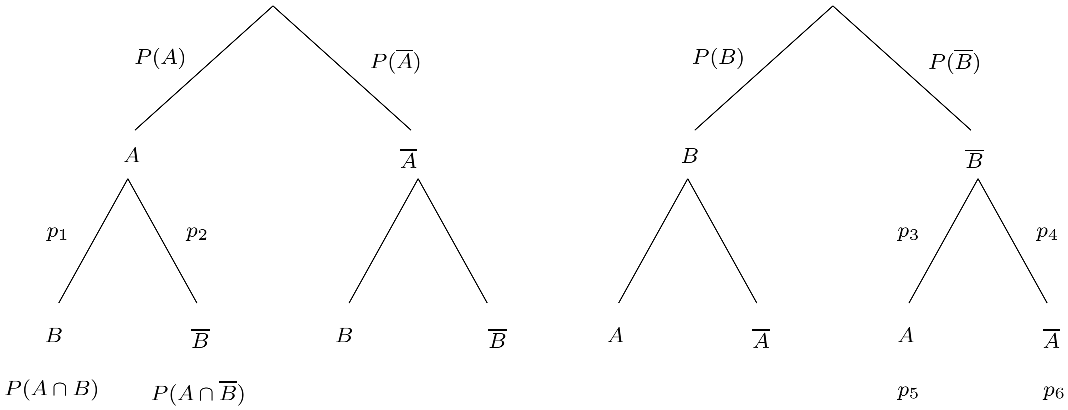
6. Von einer Bergstation führen zwei Abfahrten ins Tal, eine einfache „blaue“ und eine anspruchsvolle „schwarze“. Im Auftrag der ortsansässigen Skischule wird untersucht, ob die Wahl der Abfahrt geschlechtsabhängig ist. Eine über mehrere Wochen erstellte Statistik über die von der Bergstation abfahrenden Personen zeigt, dass 45 % unter ihnen weiblich sind; 22 % unter ihnen sind männlich und entscheiden sich für die schwarze Abfahrt, 27 % unter ihnen sind weiblich und wählen die blaue Abfahrt.

(a) Eine in der Statistik erfasste Person wird zufällig ausgewählt. Untersuche die beiden Ereignisse $M =$ „Die ausgewählte Person ist männlich“ und $B =$ „Die ausgewählte Person entscheidet sich für die blaue Abfahrt“ auf stochastische Unabhängigkeit. [Grundkursabitur Bayern, 2010]

(b) Unter den von der Statistik erfassten Männern wird einer beliebig ausgewählt; mit welcher Wahrscheinlichkeit war er auf der schwarzen Abfahrt unterwegs?

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine beliebige auf der blauen Abfahrt befragte Person weiblich?

7. Die Ereignisse A und B eines Zufallsexperiments sind stochastisch unabhängig. Verwende die Bezeichnungen der beiden Baumdiagramme und untersuche $\overline{A}$ und $\overline{B}$ auf stochastische Unabhängigkeit. Jeder Schritt ist stichwortartig zu begründen.



8. Für das Folgende darf der Satz

Für paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (d.h. $A_i \cap A_k = \emptyset$ für $i \neq k$) gilt

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| \qquad (1)$$

als bekannt vorausgesetzt werden. Zeige zunächst

$$\boxed{|X \setminus Y| = |X| - |X \cap Y|} \quad (2)$$

und beweise dann den auch für $A \cap B \neq \emptyset$ gültigen Satz

$$\boxed{|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|} \quad (3)$$

Veranschauliche dir zunächst die Aussagen von (2) und (3) in Mengendiagrammen. Gilt die neue Formel (3) auch für $A \cap B = \emptyset$?

9. **Aufgaben zur Anwendung**

Beim Roulette ist in den vergangenen zehn Spielen jedesmal eine rote Zahl gezogen worden. Auf welche Farbe würdest du im elften Spiel setzen? Begründe!