SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Jahrgangsstufe 10 (Gymnasium)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth[*]

19. April 2014

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Kreiszahl pi, Kreis, Kugel

1. Kreismessung

1.1. Kreis - Umfang und Fläche - Approximationsverfahren

1.

2.

3. Ja!

4. Variationen:
    (a) Andere Gegenstände: Teedose, Fahrradreifen,...
    (b) Alternative Aufgabe: Wir denken uns eine Schnur um die Erde gelegt und verlängern diese um 1 m. Nun wird die ganze Schnur an einer einzigen Stelle straff von der Erde abgezogen. Wie weit ist die abziehende Hand von der Erde entfernt?

   der alternativen Aufgabe: 121 m. Aus: Walsch, W.: Die aufgehängte Erdkugel; in: Mathematische Unte

5.

6.

7.

8.

9. Anmerkung: Es empfiehlt sich die Verwendung eines aktuellen Pizza-Prospekts mit Euro-Preisen.

   Der Preisvorteil bei der Jumbo-Pizza ist sehr gering. Die Werbung ist natürlich echt: Vielleicht sollten wir mal ein paar Schüler bei Dinos vorbeischicken …

10. (a) 67%
    (b) Die große Pizza
    (c) Man kann 9 Euro sparen.

11.

12.

13. Umfang proportional zum Radius. Also z.B. durch einen Kreis ersetzen.

14. Quelle: HNA vom 7.7.2001

    Durchmesser ca. $2,6\,\mathrm{m}$. Flächeninhalt ca. $5,3\,\mathrm{m}^2$.
    Durchmesser in Wirklichkeit ca. $1\,\mathrm{cm} = 0,01\,\mathrm{m}$. Nehmen wir an, die Frau ist in Wirklichkeit $1,7\,\mathrm{m}$ groß, dann wäre sie $221\,\mathrm{m}$ groß.

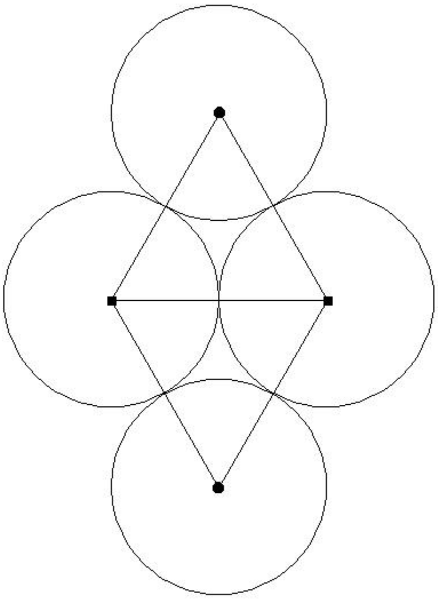
15. Quelle: Fich, O.: Mathelogik (2001)
    (a) $64\,\mathrm{cm}$ (Radius $= \sqrt{2^{x-1}}$ wobei x die Nummer des Kreises ist)
    (b) ca. $210\,\mathrm{m}^2$ (wie (a): Durchmesser Kreis $20 \approx 14,48\,\mathrm{m}$)

16. Quelle: Fich, O.: Mathelogik (2001)

    $\approx 21,5\,\mathrm{cm}^2$ (Quadrat mit FI $4r^2$ durch Verbinden der Mittelpunkte; Dieses Quadrat umfasst genau ein Viertel jedes Kreises und außerdem das von den Kreisen eingeschlossene Areal.

17. Quelle: Herget/Scholz: Die etwas andere Aufgabe (1998)

    Gewicht: Ein Pfennigstück wiegt ca. $2\,\mathrm{g}$. Also Gewicht von 1800.000 Pfennigen: $3,6\,\mathrm{t}$



Fläche: 2 unterschiedliche Methoden.
1. Für 15 Münzen benötigt man ca. $38,6\,\mathrm{cm}^2$ (mit Rechteck annähern). Also für 1,8 Mill.: ca. $460\,\mathrm{m}^2$.
2. Mit jeder Münze kommen gerade auch zwei „Zwickel“ von je dem Inhalt $r \cdot r\sqrt{3} - \frac{\pi r^2}{2}$ hinzu. Der Flächenbedarf pro Münze beträgt also $2\sqrt{3} \cdot r^2$, und bei einem Radius von $0,84\,\mathrm{cm}$ erhält man als Gesamtfläche ca. $440\,\mathrm{m}^2$. Es lohnt sich also, genauer hinzuschauen.

18.

19. (a) $u_6 = 6r\,;\ U_6 = 4\sqrt{3} \cdot r$ (b) $u_{12} = 6{,}2117\,r\,;\ U_{12} = 6{,}4308\,r$
(c) $-1{,}14$ % bzw. $+2{,}35$ % ; $m = 3{,}1606$

20. Dies ist der Ausgangspunkt für die π-Berechnung nach Archimedes
a) $t_6 = \frac{2}{\sqrt{3}} s_6$ b) $U_6 = \frac{2}{\sqrt{3}} u_6$ c) $u_6 = 6{,}0000$, $U_6 = 6{,}9282$

21. a) Strahlensatz b) $U_n = 2nt_n$, $u_n = 2ns_n$ c) Division $\frac{U_n}{u_n}$

22. (a): $\overline{MA_2} = \sqrt{1 + t_n^2}$
(c): $t_8 = \sqrt{2} - 1$; $\pi < 8\sqrt{2} - 8$
(d): Der Nenner strebt bei laufender Verdoppelung von n gegen Null!

23. (a): 144°
(b): $\varrho_{10} = \frac{r}{4} \cdot \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$
(c): $r = (\sqrt{5} + 1)\,\mathrm{cm}$

24. Der geschilderte Lösungsweg führt iteriert zur π-Berechnung nach dem Verfahren von Archimedes. Die Aufgabe ist sehr umfangreich und kann den Umfang einer halben Schulaufgabe ausmachen. $a_{12} = 0.96593$, $s_{12} = 0.25882$, $t_{12} = 0{,}26795$, $U_{12} = 6{,}4308$ und $u_{12} = 6{,}2117$.

25. (a) Die Einträge sind programmabhängig, z.B. könnte in C3 stehen: (C2/B3), bzw. in B3: (@SQRT((B2+1)/2)) (Sharewareprogramm aseasyas).
(b) $U_{24} = 6{,}319320$, $u_{24} = 6{,}265257$

26. $1{,}2 \cdot 10^{10}$ km

1.2. Kreissektoren - Bogenlänge und Sektorfläche

1.

r	ϕ	b	A_s
3	30°	1,6	2,4
5	57°	5,0	12,5
4,4	130°	10	22
10	115°	20	100
7,6	200°	26	100
20	86°	30	300

2. (a)

Winkel im Gradmaß	30°	225°	135°	210°	330°	240°	225°	315°
Winkel im Bogenmaß	$\frac{1}{6}\pi$	$1\frac{1}{4}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$1\frac{1}{6}\pi$	$1\frac{5}{6}\pi$	$1\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$1\frac{3}{4}\pi$

(b)

Winkel im Gradmaß	$20°$	$200°$	$57°$	$115°$	$-100°$	$573°$	$172°$	$150°$
Winkel im Bogenmaß	$0,35$	$3,5$	1	2	$1,75$	10	-3	$2,6$

3. Quelle: Fich, O.: Mathelogik (2001)
   - (a) $\frac{1}{3}$ (gleichseitiges Dreieck: Einen Schnittpunkt und die Mittelpunkte betrachten)
   - (b) $86,6\,\text{cm}$ (rechtwinkliges Dreieck: Ein Schnittpunkt, ein Mittelpunkt und Mittelpunkt der Strecke, die Kreismittelpunkte verbindet)
   - (c) $24,3\%$ (Zu den Dreiecken aus (b) fehlen 4 Bogenstücke über den Dreiecksseiten. Diese als Differenz von Kreissektor ($60°$) und Dreieck berechenbar)

4. Quelle: Fich, O.: Mathelogik (2001)

   Der Kreis ist größer (rechtwinkliges Dreieck: Mittelpunkt, Mittelpunkt einer Quadratseite und angrenzender Schnittpunkt von Kreis und Quadrat).
   Beispiel: Quadratflächeninhalt = 1, dann Kreisflächeninhalt $\approx 1,068$.

5. (a) $24d + \pi d$
   - (b) Man zerlege in ein reguläres Sechseck mit Radius $4d$, 6 Rechtecke mit der Breite $\frac{d}{2}$ und der Länge $4d$ und 6 Kreissektoren mit Radius $\frac{d}{2}$: $A = 24\sqrt{3}d^2 + 12d^2 + \frac{1}{4}\pi d^2$.
   - (c) 88%

6. 114,6°

7. $\varphi = \dfrac{180°}{\pi}$; $A = \dfrac{r^2}{2}$

8. $\alpha \approx 245{,}41^o$

9. $\dfrac{720°}{\pi}$

10. Umfang: $20\,cm$; Inhalt: $31{,}8\,cm^2$

11. 1. Möglichkeit: $r = 3\,cm$; $\varphi = \frac{4}{3}$ 2. Möglichkeit: $r = 2\,cm$; $\varphi = 3$

12. 18^0

1.3. Kreisteile

1.3.1. Kreisteile - einfache Figuren

1. Quelle: mathematik lehren (1986), H. 14, S. 22-25

	A	U
1	$\frac{1}{2}\pi r^2$	$2\pi r$
2	$4r^2 - \pi r^2$	$2\pi r$
3	$2r^2$	$2\pi r$
4	$\frac{1}{2}\pi r^2$	$3\pi r$
5	$2r^2$	$2\pi r$
6	$\frac{1}{16}\pi r^2$	$\frac{5}{4}\pi r + r$
7	$\frac{1}{4}\pi r^2$	$2\pi r$
8	$\frac{3}{8}\pi r^2$	$2\pi r$
9	$\frac{9}{16}\pi r^2$	$2\pi r$
10	$\frac{1}{3}\pi r^2$	$2\pi r$
11	$\frac{1}{3}\pi r^2$	$2\pi r$
12	$\sqrt{2}\pi r^2 - \pi r^2 - r^2$	$3\pi r - \sqrt{2}\pi r$
13	r^2	$\pi r + \frac{1}{2}\pi\sqrt{2}r$
14	$\frac{19}{12}\pi r^2 - \sqrt{3}r^2$	$\frac{7}{3}\pi r$
15	$\frac{9}{2}r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2$	$\frac{5}{2}\pi r + \sqrt{2}r$
16	$\frac{5}{2}\pi r^2 - r^2$	$3\pi r$
17	$\frac{5}{8}\pi r^2$	$3\pi r$
18	$\frac{3}{8}\pi r^2$	$3\pi r$

2. $\mu = 360^0 : \pi = 114{,}6^0$

3. (a) $r^2 = \frac{1}{2}R^2$;
   (b) $r = 4{,}2\,\text{cm}$; Konstruktion eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks mit R als Hypotenuse

4. (a) $r = \sqrt{b^2 - a^2} \approx 4{,}7$ cm (b) Thaleskreis, Satz des Pythagoras

5. (a) $\varrho = \sqrt{\frac{1}{12}}\,a = \frac{1}{6}\sqrt{3}\,a$ (b) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}6046$

6.

1.3.2. Kreisteile - nur Sektoren

1. $U = r \cdot \pi, \quad A = \frac{1}{2}r^2 \cdot (2\sqrt{3} - \pi)$

2. $U = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi; \; A = a^2 \cdot (1 - \pi + \frac{\pi}{2}\sqrt{2})$

3. $U = 2\pi a$, $A = \frac{1}{2}\pi a^2$, beide Teilflächen gleich groß.

4. (a) $2 \cdot (1 - \frac{\pi}{4}) = 0{,}429$
   (b) $\frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$

5. $A = 2a^2(1 - \frac{\pi}{4})$

6. Man betrachtet ein gleichseitiges Dreieck, gebildet von den Mittelpunkten dreier benachbarter Löcher. Ergebnis: 51%

7. Man betrachtet ein Quadrat, gebildet von den Mittelpunkten von vier benachbarten Löchern. Ergebnis: 44%

8. 51%

1.3.3. Kreisteile - auch Segmente

1. $A \approx 0{,}181\,cm^2$

2. $\varphi = 120^\circ$; $A = 2 \cdot (A_{Sektor} - A_{Dreieck}) = 2\,a^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx 12300\,km^2$

3. Es ist $B = \frac{1}{2}a^2(\frac{1}{2}\pi - 1)$. C hat die vierfache Fläche vermindert um die von B, ist also dreimal so groß. A und B sind gleich groß, weil der Halbkreis um M und der Viertelkreis um Q denselben Flächeinhalt haben.

4. (a): $A_{A_1} = A_{A_2} = \frac{a^2}{16} \cdot (\pi + 2)$
   (b): $U_{A_1} = \frac{a}{4} \cdot (4 + \pi + 2\sqrt{2})$
   $U_{A_2} = \frac{a}{2} \cdot (4 + \pi - \sqrt{2})$

5. $U = 5\pi a + \sqrt{2}a$, $A = 3{,}25a^2\pi - 0{,}5a^2$

6. (a) $\overline{BD} = 2r$ und $\overline{CD} = (2 - \sqrt{2})r$
   (b)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\pi r^2 + \left(2 \cdot \frac{1}{8}\pi(2r)^2 - r^2\right) \\ + \quad & \frac{1}{4}\pi \left[(2 - \sqrt{2})r\right]^2 \\ = \quad & [(3 - \sqrt{2})\pi - 1]r^2 \approx 3{,}98r^2 \end{aligned}$$

7. $U = \frac{7}{3}\pi a$, $A = (\frac{19}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2})a^2$
8. $A = \frac{1}{2}a^2$
9. $A = a^2; U = a(\frac{1}{2}\sqrt{2}\pi + 2 + \pi)$
10. $A = \frac{17}{24}r^2\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3}r^2; U = \frac{13}{6}r\pi$
11. $A = \frac{1}{2}s^2; U = \frac{1}{2}s\pi(1 + \sqrt{2})$
12. $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}s$; $A = s^2(2 - \frac{1}{2}\pi)$; $U = \sqrt{2}s\pi$
13. $a = 12$; $A = a^2(-\frac{1}{24}\pi + \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{4})$
14. $a = 9{,}4\text{cm}$
15. $\frac{16\pi - 12\sqrt{3}}{29\pi + 12\sqrt{3}} = 0{,}26$; Gleichseitiges Dreieck beachten!
16. (a) $U = 2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}a$, $A = \frac{\pi}{3}a^2$
    (b) $A_{Monde} = \frac{3}{8}\pi a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\pi}{3}a^2$
17. (a) Umfangswinkelsatz oder direkte Rechnung.
    (b) $A_{ABD} = 0.5 \cdot (2r)^2 \cdot \alpha$, $A_{AMC} = 0.5 \cdot r^2 \cdot 2\alpha$. Daraus ergibt sich $A_1 + A_2 + A_3 = 2A_2$.
    (c) Im Fall $\alpha = 90^0$ bedeutet dies: Der Viertelkreis um B hat die doppelte Fläche des Halbkreises um M.
    (d) Es ist $A_4 = \frac{\pi}{2}r^2 - A_2 - A_3$. Aus $A_1 = A_4$ ergibt sich $\pi r^2 = 2A_2$.
18. $\frac{1}{12}r^2 \cdot (7\pi + 6 + 3\sqrt{3})$

2. Kugel

2.1. Kugel - Volumen und Oberfläche

1. (a) Wegen (siehe Abbildung) $\varphi' = 90^\circ - \varepsilon = \varphi$ folgt (ähnliche Dreiecke)

$$\frac{z}{r} = \frac{\Delta y}{x} \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{r\Delta y}{x}$$

In sehr guter Näherung gilt also (Radius z nicht ganz konstant)

$$\Delta A \approx 2z\pi \cdot x = 2 \cdot \frac{r\Delta y}{x}\pi x = 2r\pi\Delta y \qquad (2)$$

(b) ΔA ist *nicht* von der Spurbreite x, sondern nur von der Dicke Δy in Richtung der Kugelachse abhängig! Verwendet man immer dünnere und dafür immer mehr Scheiben, wird aus dem $\approx$-Zeichen in (2) das Gleichheitszeichen (Grenzwert):

$$A_h = n \cdot \Delta A = \underbrace{n\Delta y}_{h} 2r\pi = 2r\pi h$$

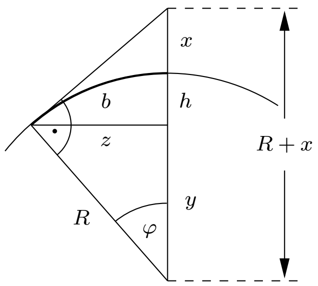
(c) Die Kugelhaube ist nichts anderes als eine Kugelscheibe, deren „oberer Radius“ null ist, d.h. auch für die Kugelhaube gilt

$$A_h = 2r\pi h.$$

Für $h = 2r$ erhält man die gesamte Oberfläche der Kugel

$$A = 4\pi r^2$$

(d) Kathetensatz: $R^2 = y(R + x) \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{R^2}{R + x}$



$$h = R - y = R - \frac{R^2}{R + x} = \frac{Rx}{R + x}$$

$$A(x) = 2R\pi h = 2R^2\pi \cdot \frac{x}{R + x}$$

$A_{\max} = 2R^2\pi$ ist die Fläche der Halbkugel, bei der Höhe $x = x_{\max} = \infty \quad \Longrightarrow$

$$v(x) = \frac{A(x)}{2R^2\pi} = \frac{x}{R + x}$$

(e) Berechnung der Sichtweite: $\cos\varphi = \dfrac{y}{R} = \dfrac{R}{R+x} \quad\Longrightarrow\quad \varphi \quad\Longrightarrow\quad b = R\varphi$

Beispiel: $x = 10\,\mathrm{m}: \quad \cos\varphi = \dfrac{6380}{6380{,}01} = 0{,}9999984326$

$\Longrightarrow \quad \varphi = 0{,}1014^\circ = 1{,}77\cdot 10^{-3} \quad\Longrightarrow\quad b = R\varphi = 11{,}3\,\mathrm{km}$

x in m	10	100	1000	10 000
$A(x)$ im km^2	401	$4{,}00\cdot 10^3$	$4{,}00\cdot 10^4$	$4{,}00\cdot 10^5$
$b(x)$ in km	11,3	35,7	113	357

(e) $v = \dfrac{x}{R+x} \quad\Longrightarrow\quad x = x_1 = \dfrac{vR}{1-v} = \dfrac{0{,}5\,R}{1-0{,}5} = R$

$$\cos\varphi = \frac{R}{R+x} \quad\Longrightarrow\quad x = R\left(\frac{1}{\cos\varphi} - 1\right) = R\left(\frac{1}{\cos\frac{b}{R}} - 1\right)$$

$b = 10\,\mathrm{km} \quad\Longrightarrow\quad x_2 = 6380\,\mathrm{km}\cdot\left(\frac{1}{\cos\frac{1}{638}} - 1\right) = 7{,}84\,\mathrm{m}$

$b = 1000\,\mathrm{km} \quad\Longrightarrow\quad x_2 = 6380\,\mathrm{km}\cdot\left(\frac{1}{\cos\frac{100}{638}} - 1\right) = 79{,}18\,\mathrm{km}$

2. (a) Mit $r = 1\,\mathrm{AE}$ ist die Fläche einer Kugel um die Sonne durch den Ort der Erde:

$$A = 4\pi r^2 \quad\Longrightarrow\quad L_\odot = S\cdot A = 3{,}84\cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$$

(b) $L = E\cdot 4\pi r^2 \quad\Longrightarrow\quad r = \sqrt{\dfrac{L}{4\pi E}} = \sqrt{\dfrac{4{,}06\cdot 10^4\cdot 3{,}84\cdot 10^{26}\,\mathrm{W}}{4\pi\cdot 2{,}2\cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}}} = 7{,}5\cdot 10^{18}\,\mathrm{m}$

$1\,\mathrm{LJ} = 365{,}25\cdot 24\cdot 3600\,\mathrm{s}\cdot 299792458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 9{,}46\cdot 10^{15}\,\mathrm{m} \quad\Longrightarrow\quad r = 7{,}9\cdot 10^2\,\mathrm{LJ}$

3. (a) $V_{\mathrm{KoK}} = \dfrac{340^\circ}{360^\circ}\cdot\dfrac{4\pi}{3}r^3 = \dfrac{34\pi}{27}r^3 = a^3 \quad\Longrightarrow\quad a = \dfrac{r}{3}\cdot(34\pi)^{\frac{1}{3}}$

$$A_{\mathrm{KoK}} = \frac{340^\circ}{360^\circ}\cdot 4\pi r^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\pi r^2 = \left(\frac{34}{9} + 1\right)\pi r^2 = \frac{43}{9}\pi r^2$$

$$A_{\mathrm{Würfel}} = 6a^2 = 6\cdot\frac{r^2}{9}\cdot(34\pi)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}r^2\cdot(34\pi)^{\frac{2}{3}}$$

$$v = \frac{A_{\mathrm{Würfel}}}{A_{\mathrm{KoK}}} = \frac{\frac{2}{3}r^2\cdot(34\pi)^{\frac{2}{3}}}{\frac{43}{9}\pi r^2} = \frac{2\cdot 9\cdot(34\pi)^{\frac{2}{3}}}{3\cdot 43\cdot\pi} = \frac{6\cdot 34^{\frac{2}{3}}}{43\cdot\pi^{\frac{1}{3}}} = 0{,}99989 \approx 1{,}000$$

(b) $V'_{\mathrm{KoK}} = \dfrac{34\pi}{27}(1{,}1r)^3 = 1{,}1^3 V_{\mathrm{KoK}} = 1{,}331 V_{\mathrm{KoK}} \quad\Longrightarrow\quad$ um 33,1%

4. Quelle: Herget, W. et al.: Produktive Aufgaben

Je mehr man mathematisch vorgebildet ist, umso mehr mathematisches Instrumentarium wird man bei dieser Aufgabe wie selbstverständlich einsetzen - und zwar ohne darüber nachzudenken, ob diese hoch genauen Instrumente wirklich genauere Ergebnisse liefern. So könnte man hier den Heißluftballon sehr genau modellieren, etwa durch eine obere Halbkugel und einen zylindrischen Kegel. In der Analysis bietet sich die Interpretation als Rotationskörper an, wobei der Fantasie für die zugrunde gelegte Kurve (fast) keine Grenzen gesetzt sind - hoffentlich ist das Integral dann elementar lösbar; und wenn nicht, könnte man es schließlich noch numerisch lösen. Aber es geht (auch) hier einfacher: In jedem Fall ist man darauf angewiesen, die Maße des Ballons aus dem Foto zu entnehmen und in die Wirklichkeit hochzurechnen (Proportionen/Verhältnis/Dreisatz). Einziger Bezugspunkt dafür ist wohl der Mann auf der Spitze des Ballons. Daraus ergibt sich für die Höhe des Ballons (ohne Gondel) und ebenso für seine Breite etwa $20 - 25\,\text{m}$. Bei dieser unvermeidbaren Unschärfe sind solch feinsinnige Modellierungen wie die oben aufgeführten schlichtweg „oversized“.

Ein ganz einfaches Modell leistet schon das Gewünschte: Etwa ein Würfel, den wir uns „nach Augenmaß“ so vorstellen, dass er an den Ecken über den Ballon herausragt, seine Seitenfläche aber teilweise in den Ballon „hineintauchen“ - oder eine entsprechend dimensionierte Kugel als geeignete „Ersatz-Form“ für den Ballon.

Auf diese Weise kann man als gute Näherung einen Würfel mit einer Kantenlänge von 16m wählen oder eine Kugel mit einem Durchmesser von etwa 20 m. Das Volumen des Würfels ist besonders einfach: $V = 4096\,\text{m}^3$ und für die Kugel erhalten wir
$V = \frac{4\pi}{3} \cdot 10 \approx 4180\,\text{m}^3$.

Beide Modelle liefern für das Volumen also rund $4000\,\text{m}^3$, das sind 4 Millionen Liter, und für die Oberfläche ungefähr $1500\,\text{m}^2$ - mit wenig Rechnung, aber geschickten, der Situation angepassten Überlegungen!

5. (a)
   (b)
   (c) $\approx 50\,\text{m}^2$
   (d) $\approx 2\,\text{m}$
   (e) $\approx 2500\%$

6. (a) Kern: 54% / Ummantelung: 33% / Schale: 13%
   (b) $0,5\,\frac{g}{cm^3}$

7. (a) 1 kg
   (b) $572\,\text{m}^2$

8. $27482\,\text{m}^3$ Gesamtvolumen / $9160\,\text{m}^2$

9. 1518 kg

10. Annahmen: Blattoberfläche proportional zum Volumen der Krone, Baumkrone kugelförmig
    $\Rightarrow V_{alt} = \frac{4}{3}(6\mathrm{m})^3\pi \approx 905\mathrm{m}^3$; $V_{neu} = \frac{4}{3}(0,75\mathrm{m})^3\pi \approx 1,8\mathrm{m}^3$
    Also müssten ca. 500 neue Bäume geplanzt werden
11. 10,7 cm
12. $V = 16{,}8\,\mathrm{cm}^3; \mathrm{O} = 62{,}8\,\mathrm{cm}^2$
13. $r = R \cdot \sqrt[3]{2}\ ;\ A_{HK} = 3\,r^2\,\pi\ ;\ \dfrac{A_{HK}}{A_K} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{16}} \approx 1{,}19$
14. $\dfrac{n}{n_0} = \dfrac{A}{4\,\pi\,r^2} \quad\Longrightarrow\quad r = 6{,}31 \cdot 10^{18}\,\mathrm{m} = 667\,\mathrm{LJ}$
15. 39,6%; Umkugelradius = halbe Raumdiagonale des Würfels

16. $2{,}3\,\frac{g}{cm^3}$ (Auftriebsgesetz von Archimedes verwenden!)
17. (a) $V_1 = V_2 = \dfrac{\pi}{6}\,r^3$
    (b) $A_1 = \dfrac{3}{2}\,r^2\,\pi\,,\ A_2 = \dfrac{5}{4}\,r^2\,\pi\,,\ \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{6}{5}$

18. (b) $H = \dfrac{2R}{n-2}$
19. (b) $S \approx 4r^2\pi - 4r\pi d + \frac{4}{3}\pi d^2$ (c) $S = 4r^2\pi$
20. 39,6%

2.2. Zylinder, Kegel und Kugel - Volumen und Oberfläche

1. (a) $\dfrac{4\pi}{3}\,r^3 = \dfrac{1}{3}\,R^2\pi h = \dfrac{\pi}{3}\,h^3\tan^2\varphi \quad\Longrightarrow\quad h = r\sqrt[3]{\dfrac{4}{\tan^2\varphi}}$
   (b) $h = 2r \quad\Longrightarrow\quad \sqrt[3]{\dfrac{4}{\tan^2\varphi}} = 2 \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{4}{\tan^2\varphi} = 8 \quad\Longrightarrow\quad \tan\varphi = \dfrac{a}{H} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   $$H = a\sqrt{2}$$

2.

3. Quelle: Herget, W. et al.: Produktive Aufgaben

   Je mehr man mathematisch vorgebildet ist, umso mehr mathematisches Instrumentarium wird man bei dieser Aufgabe wie selbstverständlich einsetzen - und zwar ohne darüber nachzudenken, ob diese hoch genauen Instrumente wirklich genauere Ergebnisse liefern. So könnte man hier den Heißluftballon sehr genau modellieren, etwa durch eine obere Halbkugel und einen zylindrischen Kegel. In der Analysis bietet sich die Interpretation als Rotationskörper an, wobei der Fantasie für die zugrunde gelegte Kurve (fast) keine Grenzen gesetzt sind - hoffentlich ist das Integral dann elementar lösbar; und wenn nicht, könnte man es schließlich noch numerisch lösen. Aber es geht (auch) hier einfacher: In jedem Fall ist man darauf angewiesen, die Maße des Ballons aus dem Foto zu entnehmen und in die Wirklichkeit hochzurechnen (Proportionen/Verhältnis/Dreisatz). Einziger Bezugspunkt dafür ist wohl der Mann auf der Spitze des Ballons. Daraus ergibt sich für die Höhe des Ballons (ohne Gondel) und ebenso für seine Breite etwa $20 - 25\,\mathrm{m}$. Bei dieser unvermeidbaren Unschärfe sind solch feinsinnige Modellierungen wie die oben aufgeführten schlichtweg „oversized“.
   Ein ganz einfaches Modell leistet schon das Gewünschte: Etwa ein Würfel, den wir uns „nach Augenmaß“ so vorstellen, dass er an den Ecken über den Ballon herausragt, seine Seitenfläche aber teilweise in den Ballon „hineintauchen“ - oder eine entsprechend dimensionierte Kugel als geeignete „Ersatz-Form“ für den Ballon.
   Auf diese Weise kann man als gute Näherung einen Würfel mit einer Kantenlänge von 16m wählen oder eine Kugel mit einem Durchmesser von etwa 20 m. Das Volumen des Würfels ist besonders einfach: $V = 4096\,\mathrm{m}^3$ und für die Kugel erhalten wir
   $V = \frac{4\pi}{3} \cdot 10 \approx 4180\,\mathrm{m}^3$.
   Beide Modelle liefern für das Volumen also rund $4000\,\mathrm{m}^3$, das sind 4 Millionen Liter, und für die Oberfläche ungefähr $1500\,\mathrm{m}^2$ - mit wenig Rechnung, aber geschickten, der Situation angepassten Überlegungen!

4.

5.

6.

7.

8.

9. $V_{Zylinder} = 1,5^2 \cdot \pi \cdot 7\mathrm{mm}^3 \approx 50\mathrm{mm}^3$

   $O_{Seifenblase} = 4 \cdot \pi \cdot 40^2\mathrm{mm}^2 \approx 20000\mathrm{mm}^2$

   $d_{Seifenblasenhaut} = V_{Zylinder} : O_{Seifenblase} = 0,0025\mathrm{mm}$

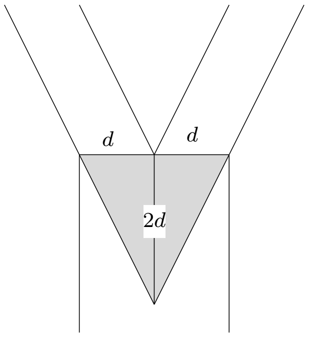
10. $\frac{2\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi r^3} = 33\%$
    $\frac{4\pi}{3} r_0^3 \approx 4\pi R^2 d$ ergibt $d \approx 0{,}3\,\mathrm{mm}$; eine exakte Rechnung liefert dasselbe Ergebnis.

11. 12,2 cm

12. $O = a^2\pi(20 + 2\sqrt{13})$
13. 33%
14. $V_Z : V_K = 63 : 128$
15. Strahlensatz!
    $V_{Rot} = \frac{1}{81}a^3\pi \cdot \left(21\sqrt{3} + 2\right)$
16. $A = \sqrt{2}\pi d^2$ und $V = \frac{2}{3}\pi d^3$
17. Anteil $\frac{1}{3}$, Volumen $359cm^3$
18. a) $d_K = 3{,}2\,\mathrm{cm}$; b) $d_K = 5{,}4\,\mathrm{cm}$
19. 53,0%
20. (b) $R_u = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$ (c) $V_u : V_{Ke} : V_e = 32 : 9 : 4$
21. vorher: $r\sqrt[3]{15}$; nachher: $3r$
22. $O_{Ke} : O_{Ku} = 9 : 4$
23. (a) $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$
    (b) $\varrho = \sqrt{8}\sin\frac{\alpha}{2}$
    (c) $3 : 2$
24.

2.3. Rotationskörper

2.3.1. Rotationskörper ohne Kegelstümpfe



1. $V_1 = V_{\text{Kegel mit Radius } r+d \text{ und Höhe } 2r+2d} = \frac{2\pi}{3}(r+d)^3$

   $V_2 = V_{\text{Kegel mit Radius } r \text{ und Höhe } 2r} = \frac{2\pi}{3}r^3$

   $V_3 = V_{\text{Kegel mit Radius } d \text{ und Höhe } 2d} = \frac{2\pi}{3}d^3$

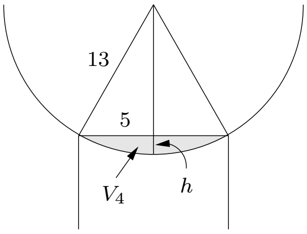
   $V_4 = V_{\text{Zylinder mit Radius } d \text{ und Höhe } \frac{3}{2}r} = \frac{3\pi}{2}rd^2$

   $V_5 = V_{\text{Zylinder mit Radius } r \text{ und Höhe } d} = \pi r^2 d$

   $V = V_1 - V_2 - V_3 + V_4 + V_5$

$$\begin{aligned} V &= \frac{2\pi}{3}(r+d)^3 - \frac{2\pi}{3}r^3 - \frac{2\pi}{3}d^3 + \frac{3\pi}{2}rd^2 + \pi r^2 d = \\ &= \frac{2\pi}{3}(r^3 + 3r^2d + 3rd^2 + d^3 - r^3 - d^3) + \frac{3\pi}{2}rd^2 + \pi r^2 d = \\ &= 3\pi r^2 d + \frac{7\pi}{2}rd^2 = \frac{\pi r d}{2}(6r + 7d) \end{aligned}$$

$$r = 10d \quad \Longrightarrow \quad V = 335\pi d^3$$



2. $V_1 = V_{\text{Halbkugel mit Radius } 13\,\text{cm}} = \frac{2\pi}{3} \cdot 13^3\,\text{cm}^3$

   $V_2 = V_{\text{Halbkugel mit Radius } 8\,\text{cm}} = \frac{2\pi}{3} \cdot 8^3\,\text{cm}^3$

   $V_3 = V_{\text{Zylinder mit Radius } 5\,\text{cm und Höhe } 13\,\text{cm}} = \pi \cdot 5^2 \cdot 13\,\text{cm}^3$

   $h = 13\,\text{cm} - \sqrt{13^2 - 5^2}\,\text{cm} = 1\,\text{cm}$

   $V_4 = V_{\text{Kugelhaube mit Radius } 13\,\text{cm und Höhe } h}$

   $V_4 = \frac{\pi}{3}h^3(3 \cdot 13\,\text{cm} - h) = \frac{38\pi}{3}\,\text{cm}^3$

   $V = V_1 - V_2 + V_3 - V_4 = \left(\frac{4394\pi}{3} - \frac{1024\pi}{3} + 325\pi - \frac{38\pi}{3}\right)\,\text{cm}^3 = \frac{4307\pi}{3}\,\text{cm}^3 \approx 4510\,\text{cm}^3$

   Fuß als Zylinder: $V' = V_1 - V_2 + V_3 = V + V_4 \quad \Longrightarrow \quad \delta_{\text{rel}} = \dfrac{V' - V}{V} = \dfrac{V_4}{V} = \dfrac{38}{4307} = 0{,}88\%$

3. $A = \sqrt{2}\pi d^2$ und $V = \frac{2}{3}\pi d^3$

4. Strahlensatz!
   $V_{Rot} = \frac{1}{81}a^3\pi \cdot \left(21\sqrt{3} + 2\right)$

5. $V = 7a^3\pi;\ O = 10\sqrt{3}a^2\pi$

6. $O = a^2\pi(20 + 2\sqrt{13})$
7. (a) $V_{Zy} = \frac{1}{4}\pi a^3; V_{KU} = \frac{1}{6}\pi a^3; V_{Ke} = \frac{1}{12}\pi a^3; O_{Ke} = \frac{1}{4}\pi a^2(\sqrt{5} + 1)$
   (b) $\sqrt[3]{\frac{1}{16}a^3}$
   (c) $A_{Ke} = (\frac{a-h}{2})^2\pi; A_{Ku} = (ah - h^2)\pi$

8. $O = (75 + 3\sqrt{10}) \cdot \pi$
9. (a) $V = \frac{1}{3}(2l)^2\pi \cdot 1{,}5l + (1{,}5l)^2\pi \cdot 1{,}5l - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi l^3 = \frac{113}{24}\pi l^3$
   (b) Länge der Mantellinie: $m = 2{,}5l$.
   Oberfläche:
   $O = \frac{1}{2}m \cdot 2\pi \cdot 2l + 1{,}5l \cdot 2\pi \cdot 1{,}5l + (\pi(2l)^2 - \pi l^2 + \frac{1}{2}4\pi l^2 = 14{,}5\pi l^2$

2.3.2. Rotationskörper mit Kegelstümpfen

1.
2.
3. $V = 160{,}0\,\mathrm{cm}^3, \mathrm{O} = 216{,}8\,\mathrm{cm}^2$

4. $V = 54{,}6\,\pi\,\mathrm{cm}^3$
   $A = 56\,\pi\,\mathrm{cm}^2$

2.3.3. Einbeschreibungen

1. 33%
2. $V_Z : V_K = 63 : 128$
3. 39,6%; Umkugelradius = halbe Raumdiagonale des Würfels

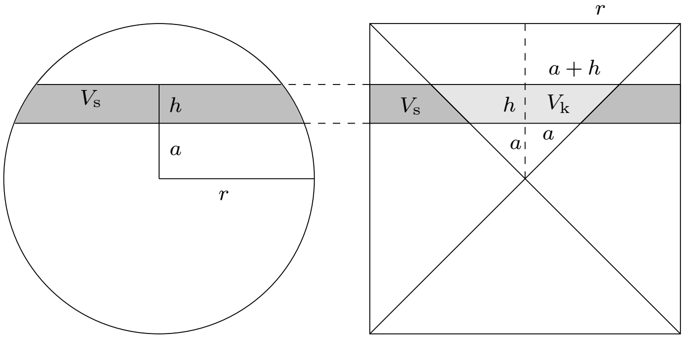
4. $\frac{2\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi r^3} = 33\%$
   $\frac{4\pi}{3}r_0^3 \approx 4\pi R^2 d$ ergibt $d \approx 0{,}3\,\mathrm{mm}$; eine exakte Rechnung liefert dasselbe Ergebnis.
5. $V_{Ke} : V_{Zy} = (2r + h)^3 : 6rh^2$
6. $\varrho = \frac{r}{2}$
7. (b) $R_u = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$ (c) $V_u : V_{Ke} : V_e = 32 : 9 : 4$
8. vorher: $r\sqrt[3]{15}$; nachher: $3r$
9. $O_{Ke} : O_{Ku} = 9 : 4$

2.3.4. Anwendungen in der Physik

1. 10,7 cm
2. (a) $m = \pi \varrho l d(2r - d)$ (b) $m = 3103{,}6g \approx 3{,}1kg$
3. $r = \sqrt{\frac{\varrho_W - \varrho_K}{(\varrho_{Al} - \varrho_K)\cdot\pi}} \cdot a = 9{,}6\,cm$; Auftriebsgesetz von Archimedes verwenden!

2.3.5. Das Prinzip von Cavalieri

1. (a) Als Vergleichskörper wählen wir einen Zylinder, aus dem ein Doppelkegel gebohrt wurde (wie bei der Herleitung des Volumens der ganzen Kugel).
   V_z ist das Volumen eines Zylinders mit Radius r und Höhe h.



   V_k ist das Volumen eines Kegelstumpfes, das sich aus der Differenz der Volumina zweier Kegel (Radius $a + h$ und Höhe $a + h$ bzw. Radius a und Höhe a) berechnet:

$$\begin{aligned} V_\text{s} = V_\text{z} - V_\text{k} &= r^2\pi h - \left(\frac{\pi}{3}(a+h)^3 - \frac{\pi}{3}a^3\right) = \\ &= r^2\pi h - \frac{\pi}{3}\left(3a^2h + 3ah^2 + h^3\right) = \\ &= \frac{\pi}{3}h\left(3r^2 - 3a^2 - 3ah - h^2\right) \end{aligned}$$

   (b) Mit $a = r - h$ folgt aus der Formel für V_s:

$$\begin{aligned} V_\text{h} &= \frac{\pi}{3}h\left(3r^2 - 3(r-h)^2 - 3(r-h)h - h^2\right) = \\ &= \frac{\pi}{3}h\left(3rh - h^2\right) = \frac{\pi}{3}h^2(3r - h) \end{aligned}$$

2.
3.

Teil II.

Trigonometrie

3. Winkel im Bogenmaß

1. $\frac{1}{9}\pi$; $\frac{13}{9}\pi$; 140^o; $292{,}5^o$

2. (a) $135°$; $164°$ (b) $\frac{2}{3}\pi \approx 2{,}09$; $\frac{2}{5}\pi \approx 1{,}26$

3. (a) $30° = \dfrac{\pi}{6}$ (b) $\dfrac{\pi^2}{36} = 5\,\pi \cdot 1°$ (c) $5\,\pi = 900°$

   (d) $\dfrac{\pi^2}{1080} = \dfrac{\pi}{6} \cdot 1°$ (e) $\dfrac{5400}{\pi^2} \cdot \pi = \dfrac{972000}{\pi^2} \cdot 1°$ (f) $\dfrac{6}{\pi^2} \cdot \pi = \dfrac{1080}{\pi^2} \cdot 1°$

4. Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

4.1. Exakte Berechnung für bestimmte Winkel

1. $\cos 18^\circ = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\,;\qquad \sin 36^\circ = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

2. Quelle: Fich, O.: Mathelogik (2001)

   Klar: Das verbliebene Wasser steht bis zu einer unbekannten Höhe h. Kippt man das Glas, ist der Flüssigkeitspegel an dieser Stelle höher als h, sagen wir $h+x$. Auf der anderen Seite des Glases ist dann der Pegel natürlich gerade $h-x$.
   Also müssen wir den Abstand bis zum oberen Rand ($2x$) bestimmen, wenn es auf der gegenüberliegenden Seite gerade am Rand ist.
   Dazu denken wir uns ein rechtwinkliges Dreieck in das Glas gelegt, bei dem eine Kathete der (obere) Durchmesser des Glases ist, die Hypotenuse auf der Wasseroberfläche entlangläuft und die andere Kathete gleich der gesuchten Länge $y = 2x$ ist.
   In diesem Dreieck gilt für die gesuchte Länge offenbar:$y = tan(20^\circ) \cdot 8\,\mathrm{cm}$
   Also ist das verschüttete Volumen:
   $V = \frac{1}{2} \cdot (4\,\mathrm{cm})^2 \cdot \pi \cdot 8\,\mathrm{cm} \cdot tan(20^\circ) \approx 73\,\mathrm{cm}^3$ und dies sind ca. 12% des ursprünglichen Inhalts.

5. Übergang zum allgemeinen Dreieck

5.1. Berechnungen am allgemeinen Dreieck

1. (a) $\beta_2 = 40°$ (b) keine Lösung
   (c) $\alpha_1 = 34°$; $\alpha_2 = 146°$ (d) es muss $a > e$ sein

2. $38°$

3. $AT = 1{,}433$, $A(ATC) = 1{,}338$, $\beta = 40{,}97^0$

4. (a) $\overline{AB} = 2335\text{m}$, Winkel $339{,}6^0$
   (b) $\overline{AP} = 804\text{m}$ mit Hilfe des Sinussatzes, Winkel von $[AP$ gegen die x-Achse: $74{,}7^0$, Koordinaten $P(213|775)$.

5. $\gamma = 32{,}68°$, $\alpha = 73{,}66°$, $c = 3{,}38\,\text{cm}$

6. Kosinussatz, verschenkt: ca. 9cm.

7. $b = 5{,}1\,\text{cm}$; $a = 4{,}3\,\text{cm}$; $\beta = 66{,}4^o$; $\gamma = 63{,}6^o$

8. $\varrho \approx 3{,}42\,cm$

9. $x \approx 2{,}61\,cm$

10. (b): $\overline{AD} \approx 11{,}5\,cm$

11. $s_a \approx 8{,}1\,\text{cm}$

12. (b): $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = 4\,m$; $\overline{SC} = \overline{SB} = 2\sqrt{13}\,m$; $\overline{SA} = 6\,m$
    (c): 60^o

13. (a) Sekans: $k \cdot 180°$ $(k \in \mathbb{Z})$, Kosekans: $(2k+1) \cdot 90°$ $(k \in \mathbb{Z})$

14. $86\,cm$

15. $|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_1}| = 265\,\text{N}$, Winkel $19{,}1^0$ und $40{,}9^0$.

5.2. Vermessungsaufgaben

1. 2352 m

2. 510 m; Diagonale einzeichnen!

3. $h = \dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \tan\delta \cdot \overline{AB} = 55$ m
   $\overline{PF} = \sqrt{\overline{PS}^2 - h^2} = 325$ m,
   $\overline{AP} = \sqrt{\overline{AF}^2 + \overline{PF}^2 - 2\overline{AF}\cdot\overline{PF}\cos(180^o - \alpha - \beta)} = 411$ m

4. 38°

5. (a) $\overline{AB} = 2335$m, Winkel $339{,}6^0$
   (b) $\overline{AP} = 804$m mit Hilfe des Sinussatzes, Winkel von $[AP$ gegen die x-Achse: $74{,}7^0$, Koordinaten $P(213|775)$.

6. (a) Nach dem Umfangswinkelsatz: $\sphericalangle QAB = \beta$, $\sphericalangle ABQ = \alpha$.
   (b) $\overline{AB} = 2335{,}3$m, Winkel $339{,}6^0$
   (c) Mit dem Sinussatz $\overline{AQ} = 1707$m, der Winkel von $[AQ$ gegen die x-Achse ist $339{,}6^0 - \beta = 315{,}2^0 = -44{,}8^0$. Dies ergibt die Koordinaten $Q(1210| - 1204)$.
   (d) Mit den Polarwinkeln der Vektoren $\overrightarrow{QB}$ und $\overrightarrow{QC}$ oder mit dem Cosinussatz erhält man $\varepsilon = 95{,}0^0$ und mit der Winkelsumme im Dreieck ABC ergibt sich $\delta = 18{,}5^0$. Die letzte Behauptung folgt wieder aus dem Umfangswinkelsatz
   (e) Man berechnet $\overline{AP} = 806{,}5$m mit dem Sinussatz, der Winkel von $[AP$ gegen die x-Achse ist $\varepsilon - 20{,}45^0$. daraus können die Koordinaten von P bestimmt werden.

   Bemerkung: Dieses Verfahren, die Koordinaten eines Punkts durch Rückwärtseinschneiden zu bestimmen, heißt "Collinssche Lösung". Dazu werden in zwei Schritten, jeweils von der Basisstrecke $[AB]$ aus, Punkte durch "Vorwärtseinschneiden" festgelegt (erst Q, dann P).

6. Rechnen mit Winkelfunktionen

6.1. Reduktionsformeln für Winkelfunktionen

1. (a) $\sin 8595° = \sin(8595° - 23 \cdot 360°) = \sin 315° = -\sin 45° = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   (b) $\cos 399\,959° = \cos(399\,959° - 1110 \cdot 360°) = \cos 359° = \cos 1° = 0{,}9998477$
   (c) $\cos 31\,520° = \cos(31\,520° - 87 \cdot 360°) = \cos 200° = -\cos 20° = -0{,}9397$
   (d) $\sin 1000° = \sin(1000° - 2 \cdot 360°) = \sin 280° = -\sin 80° = -0{,}9848$

2. $-2{,}4$

3. 135^o und 315^o

4.

5. $L = \{\varphi |\, 0° \leqq \varphi \leqq 30°$ oder $150° \leqq \varphi \leqq 210°$ oder $330° \leqq \varphi < 360°\}$

6. $L = \{45°; 105°; 165°; 225°; 285°; 345°\}$

7. (a) $\sin 10000° = \sin(25 \cdot 360° + 1000°) = \sin 1000°$
   $\sin 100000° = \sin(11 \cdot 25 \cdot 360° + 1000°) = \sin 1000°$
   (b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $n \geqq 4$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(10^n)° &= \sin(99...9000° + 1000°) = \\ &= \sin(11...1 \cdot 25 \cdot 360° + 1000°) = \sin 1000° \end{aligned}$$

8. $112{,}1^o$; $247{,}9^o$; $2{,}0$; $4{,}3$

9. $\delta = 4 \cdot 10^n - 4 \cdot 10^{n-1} = 360 \cdot 10^{n-2}$ ist für $n \geqq 2$ ein ganzzahliges Vielfaches von 360.
   $\sin(4 \cdot 10^{13})° = \sin 40° \quad ; \quad \varphi_1 = 40° \quad ; \quad \varphi_2 = 140°$

10. (a) Division von φ durch 360° mit Rest
    (b) Periodizität des Sinus
    (c) $\psi \in [90°; 180°[:\quad \sin\psi = \sin\omega, \quad \omega = 180° - \psi$
    $\psi \in [180°; 270°[:\quad \sin\psi = -\sin\omega, \quad \omega = \psi - 180°$
    $\psi \in [270°; 360°[:\quad \sin\psi = -\sin\omega, \quad \omega = 360° - \psi$

11. (a) Division von φ durch 360° mit Rest
    (b) Periodizität des Kosinus
    (c) $\psi \in [90°;180°[:\quad \cos\psi = -\cos\omega, \quad \omega = 180° - \psi$
    $\psi \in [180°;270°[:\quad \cos\psi = -\cos\omega, \quad \omega = \psi - 180°$
    $\psi \in [270°;360°[:\quad \cos\psi = \cos\omega, \quad \omega = 360° - \psi$

12. (a) Division von φ durch 180° mit Rest; $\varphi = 90° \cdot (2l+1), \quad l \in \mathbb{Z}$
    (b) Periodizität des Tangens
    (c) $\tan\psi = -\tan\omega$ mit $\omega = 180° - \psi$

13. zu (c): $\sin\varphi = -\sin(\varphi + 180^o) = -\sin(360^o - \varphi)$ für $0^o < \varphi < 90^o$

14.

15.

16.

17.

6.2. Gleichungen, die exakt lösbar sind

1. 135^o und 315^o

2. $L = \left\{\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{3\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}; \frac{11\pi}{8}; \frac{13\pi}{8}\right\}$

3. $-1 \leqq k \leqq 1$

4. $L = \{\varphi |\, 0° \leqq \varphi \leqq 30° \text{ oder } 150° \leqq \varphi \leqq 210° \text{ oder } 330° \leqq \varphi < 360°\}$

5.

6. $L = \{45°;105°;165°;225°;285°;345°\}$

7. $L = \{2; \pm\frac{\pi}{2}; \pm\frac{3\pi}{2}\}$

8. $L = \{0;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{5}{6}\pi;\ \pi\}$

9. $L = \{\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{7}{6}\pi;\ \frac{4}{3}\pi;\ \frac{3}{2}\pi\}$

10. $L = \{60°;120°;240°;300°\}$

11.

12. (a) für $x \in \{0;\pi\}$; (b) $L = \{\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\}$

13. $L = \{60^o;180^o;300^o\}$

14. $L = \{135^o;315^o\}$

6.3. Gleichungen zur Verwendung des Taschenrechners

1. $L = \{\frac{1}{2}\pi;\ \frac{3}{2}\pi;\ 0{,}927;\ 5{,}36\}$
2. $0°;\ 60{,}00°;\ 120{,}0°;\ 180{,}0°;\ 240{,}0°;\ 300{,}0°;\ 109{,}5°;\ 250{,}5°$
3. $112{,}1^o$; $247{,}9^o$; 2,0; 4,3

7. Die Graphen der Winkelfunktionen

1. (a) $T(x+k\cdot 365) = a\cdot\cos(2\pi\cdot\frac{x+k\cdot 365-172}{365}) + c = a\cdot\cos(2\pi\cdot\frac{x-172}{365} + 2k\cdot\pi) + c = T(x)$; Maximum wenn $\cos(2\pi\cdot\frac{x-172}{365}) = 1$, dies gilt für $x = 172$
   (b) $a = 2$ und $c = 12$.
   (c) Polarnacht/Polarsommer

2. (a) 112°, (b) 131°, (c) 20, (d) 4

3. (a) 55° (b) 0 (c) 119° (d)10

4. (a) 75° (b) 8 (c) 816° (d) 1

5. (a) 17° (b) 2 (c) 20 (d) 385° (e) 351°

6. (a) 120° (b) 10 (c) 2 (d) 1

7. (a) 35° (b) 150 (c) 41° (d) 108

8. (a) 1 (b) 5 (c) 813° (d) 12

9. (a) 101° (b) 25 (c) 3

10.

11.

12.

13.

14. (a): $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\cdot\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$; f_1 ist ungerade.
    (b): Dehnung des Graphen von f_0 um den Faktor 2 in x-Richtung liefert den Graphen von f_1. Eine anschließende Verschiebung um 2 in y-Richtung nach oben ergibt den Graphen von f_2.

15. (a): Nullstellen bei $x = \frac{\pi}{4}\cdot(3+4k), \qquad k \in \mathbb{Z}$

16. $D_{f,max} = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi\}; k \in \mathbb{Z}$;
    Nullstellen bei $x = \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$
    Der Graph von f ist symmetrisch zur y-Achse

17. $D_f = D_g = \mathbb{R}\,;\quad D_h = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} \cdot (1 + 2k)\}\,,\ k \in \mathbb{Z}$
f und h sind gerade Funktionen, der Graph von g ist punktsymmetrisch zum Punkt $(-1|0)$ eines Koordinatensystems.

8. Die allgemeine Sinusfunktion

1. (a) $T(x + k \cdot 365) = a \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{x+k\cdot 365-172}{365}) + c = a \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{x-172}{365} + 2k \cdot \pi) + c = T(x)$; Maximum wenn $\cos(2\pi \cdot \frac{x-172}{365}) = 1$, dies gilt für $x = 172$

   (b) $a = 2$ und $c = 12$.

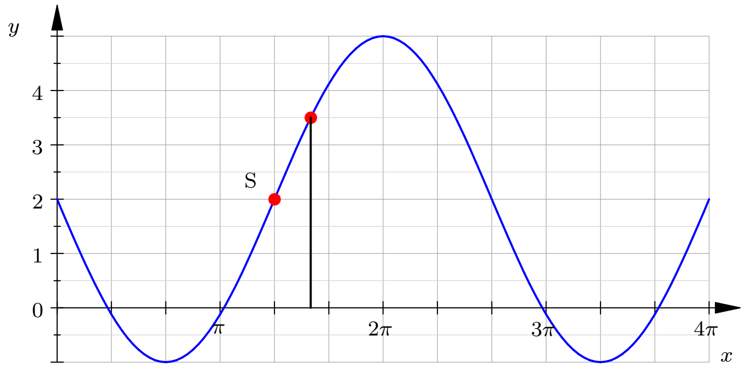
   (c) Polarnacht/Polarsommer

2. Quelle: Elemente der Mathematik 11 (2000)

   (a) Modellierung durch Sinuskurve $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$:
   Periodenlänge beträgt ca. 365 Tage. Damit klar: $b = \frac{2\pi}{365}$
   Maximum wird am 21.6. (172. Tag) und. Minimum am 21.12. (355. Tag) angenommen. Folglich muss die Amplitude a als $\frac{16{,}5-8}{2} = 4,25$ festgesetzt werden. Der Mittelwert von $12,25$ wird dabei ungefähr am 21.3. (dem 80. Tag) und 21.9. angenommen. Damit sind auch c und d klar. Insgesamt erhalten wir: $f(x) = 4,25 \sin(\frac{2\pi}{365} \cdot (x - 80)) + 12,25$.

   (b) Der 10. Juli ist der 191 Kalendertag. Demnach $f(191) = 4,25 \sin(\frac{2\pi}{365} \cdot (191 - 80)) + 12,25 = 16,26 \approx 16$

3. (a) $f(x) = 3 \cdot \sin\left[\frac{3}{4}\left(x - \frac{4\pi}{3}\right)\right] + 2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8\pi}{3}$ und $\mathrm{S}\left(\frac{4\pi}{3}\middle|2\right)$.



   (b) $3 \cdot \sin\left(\frac{3}{4}x - \pi\right) + 2 = 3{,}5 \quad \Longrightarrow \quad \sin\left(\frac{3}{4}x - \pi\right) = 0{,}5$

x liegt also $\dfrac{1}{3}$ von einem Viertel der Periodenlänge rechts vom Startpunkt, d.h.

$$x = \frac{4\pi}{3} + \frac{1}{12} \cdot \frac{8\pi}{3} = \frac{14\pi}{9}$$

4. Schnittstellen bei $-\frac{1}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi$

5. (a) $x_n = \dfrac{\lg(n\,\pi)}{\lg 2}$; (b)

n	1	2	3	4	5
x_n	1,65	2,65	3,24	3,65	3,97

(c) $325\,NS$

6. (a) $x_n = 2^{n\,\pi}$; (b)

n	−2	−1	0	1	2	3
x_n	0,0128	0,113	1	8,82	77,9	687

(c) $106\,NS$

7. $f(x) = A\sin(kx + a) + v_y = A\sin[k(x - v_x)] + v_y$

Amplitude: $A = \dfrac{2 - 0{,}5}{2} = \dfrac{3}{4}$, Verschiebung in y-Richtung: $v_y = 0{,}5 + A = \dfrac{5}{4}$

Periodenlänge: $p = 2 \cdot \left(\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{4\pi}{3} \quad\Longrightarrow\quad k = \dfrac{2\pi}{p} = \dfrac{3}{2}$

Verschiebung in x-Richtung: $v_x = \dfrac{5\pi}{12} \quad\Longrightarrow\quad a = -kv_x = -\dfrac{5\,\pi}{8}$

$f(x) = \dfrac{3}{4} \cdot \sin\left(\dfrac{3}{2}\,x - \dfrac{5\,\pi}{8}\right) + \dfrac{5}{4}$

8. $f(x) = \dfrac{3}{5} \cdot \sin\left(\dfrac{6}{5}\,x - \dfrac{7\,\pi}{10}\right) + \dfrac{4}{5}$

9. $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2\,x$; Nullstellen: $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$;

10. (a) $2 \cdot \sin\varphi_1 = \varphi_1$; $\varphi_1 = 1{,}8955 = 108{,}6°$

(b) $2 \cdot \sin\dfrac{\varphi_2}{2} = \dfrac{\varphi_2}{2}$; $\varphi_2 = 2\,\varphi_1 = 3{,}7910 = 217{,}2°$

11. (a): Nullstellen bei $x = \frac{1}{b} \cdot (k \cdot \pi - c) \quad k \in \mathbb{Z}$; gegenseitiger Abstand: $\frac{\pi}{b}$

(b): (α): doppelte Amplitude, Nullstellen bei $x = \frac{1}{2b} \cdot (k \cdot \pi - c)$, Nullstellenabstand wird halbiert

(β): halbe Amplitude, Nullstellen bei $x = \frac{1}{b} \cdot (k \cdot \pi - \frac{c}{2})$, Nullstellenabstand bleibt konstant

(γ): Amplitude bleibt konstant, Nullstellen bei $x = \frac{1}{b} \cdot (2k \cdot \pi - c)$, Nullstellenabstand wird verdoppelt

(c): Stauchung in der Situation (α), Dehnung in der Situation (γ)

12. (a): $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1) \cdot \pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$; f_1 ist ungerade.
    (b): Dehnung des Graphen von f_0 um den Faktor 2 in x-Richtung liefert den Graphen von f_1. Eine anschließende Verschiebung um 2 in y-Richtung nach oben ergibt den Graphen von f_2.

13.

14. $W_f = [0; 2]$; Periode: 4π

15. Periode π; $W = [-1{,}5; 1{,}5]$; Nullstellen bei $x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; Hochpunkte bei $x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

16. i) $x = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi - 2$; $k \in \mathbb{Z}$
    ii) $x = 3\pi + k \cdot 4\pi - 2$; $k \in \mathbb{Z}$
    iii)$x = \pi + k \cdot 2\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

17. Nullstellen $k\pi$ und $k\pi + \frac{\pi}{2}$ für $k \in \{16{,}17{,}18{,}19\}$.

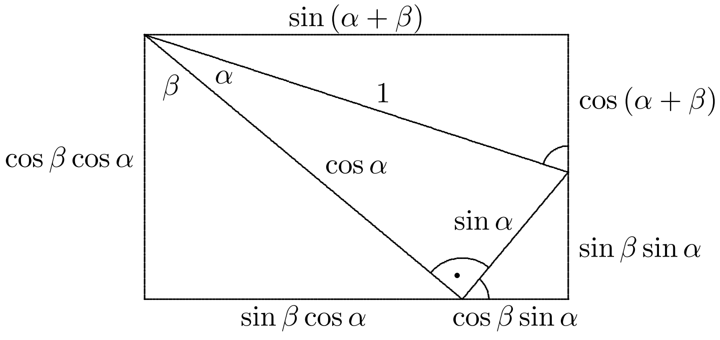
18. $D_f = D_g = \mathbb{R}\,;\quad D_h = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} \cdot (1 + 2k)\}\,,\ k \in \mathbb{Z}$
    f und h sind gerade Funktionen, der Graph von g ist punktsymmetrisch zum Punkt $(-1|0)$ eines Koordinatensystems.

9. Additionstheoreme

1. $\cos x$
2. $\frac{1}{4}\sqrt{2}(1-\sqrt{3})$
3.
4.
5. $L = \{0°, 120°, 240°, 360°\}$
6. (a) 0,5; (b) 0
7. $\sin 3x = 3\sin x - 4(\sin x)^3$
8. $\cos 3x = 4(\cos x)^3 - 3\cos x$
9. $\sin 36^o = \frac{1}{4}(\sqrt{10-2\sqrt{5}})$
   $\tan 36^o = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$
   $\cos 72^o = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$

10. $\sin 18^o = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1);$
    $\sin 36^o = \frac{1}{4}(\sqrt{10-2\sqrt{5}});$
    $\cos 36^o = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1);$

11. (a) Man kann z.B. über der Kathete des ersten Dreiecks ein zweites rechtwinkliges Dreiecks mit dem Winkel β konstruieren. Das Rechteck ergibt sich daraus mit Hilfe von Parallelen.
    (b) unten β, rechts oben $\alpha + \beta$
    (c)



12. $-\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$

13. $\cos 18^\circ = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{10+2\sqrt{5}}\,;$ $\qquad \sin 36^\circ = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{10-2\sqrt{5}}$

10. Vermischtes

1. (a) $2 \cdot \sin \varphi_1 = \varphi_1 \quad ; \quad \varphi_1 = 1{,}8955 = 108{,}6^\circ$

   (b) $2 \cdot \sin \dfrac{\varphi_2}{2} = \dfrac{\varphi_2}{2} \quad ; \quad \varphi_2 = 2\,\varphi_1 = 3{,}7910 = 217{,}2^\circ$

2. (a) ca $7{,}2 \cdot 10^{-4}$ Grad

   (b) ca 1,25mm

3. $T(7{,}0|3{,}5)$; $\overline{OT} \approx 7{,}8$

Teil III.

Algebra

11. Rechnen mit Potenzen

11.1. Potenzgleichungen

11.1.1. Potenzgleichungen

Einfache Gleichungen - Lösen durch Potenzieren oder Basisvergleich

1. $L = \{-\frac{4}{3};\ 2\}$
2. $L = \{6\}$
3. $L = \{\}$
4. $L = \{\frac{243}{32}\}$
5. $L = \{2\}$
6. $L = \{9\}$
7. $L = \{\sqrt[6]{2}\}$
8. $L = \{60\}$
9. $L = \{7\}$
10. (a) $|x^4| = |a| \quad\Longrightarrow\quad x^4 = |a| \quad\Longrightarrow\quad L = \{\pm|a|^{\frac{1}{4}}\}$
    (b) $|x^3| = |a| \quad\Longrightarrow\quad x^3 = \pm|a| \quad\Longrightarrow\quad L = \{\pm|a|^{\frac{1}{3}}\}$
    (c) $(x^4)^3 = a^3 \quad\Longrightarrow\quad x^4 = a \quad\Longrightarrow\quad L = \begin{cases} \{\pm a^{\frac{1}{4}}\} & \text{für} \quad a \geqq 0 \\ \{\ \} & \text{für} \quad a < 0 \end{cases}$
11. (a) $L = \begin{cases} \{\ \} & \text{für} \quad a > 0\ ,\ \text{da } 2n \text{ gerade} \\ \left\{\pm \sqrt[2n]{|a|}\right\} & \text{für} \quad a \leqq 0 \end{cases}$
    (b) $L = \left\{-\sqrt[7]{\frac{1}{|a|}}\right\} = \left\{-\frac{1}{\sqrt[7]{-a}}\right\}$
    (c) $L = \begin{cases} \left\{\pm\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right\} & \text{für} \quad \text{n gerade} \\ \left\{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right\} & \text{für} \quad \text{n ungerade} \end{cases}$

Lösen durch mehrfaches Potenzieren

1. $x = 8$
2. Potenzieren führt auf $x = \frac{9}{4}$. Die rechte Seite der Gleichung ist für diesen Wert nicht definiert.
3. $L = \{\frac{1}{4}\}$
4. $L = \{\frac{1}{4}\}$
5. $L = \{81\}$
6. $L = \{-\frac{1}{27};\ \frac{1}{27}\}$
7. $D = \mathbb{R}_0^+$; $L = \{\frac{81}{625}\}$
8. $L = \{256\}$
9. $x = \pm 3$
10. $D = [81; \infty[$; $L = \{625\}$
11. $D = \mathbb{R}_0^+$; $L = \{729\}$
12. $L = \{27\}$

Ausklammern und Faktorisieren

1. $L = \{0; 4\}$
2. $L = \{0; -\sqrt[4]{8}; \sqrt[4]{8}\}$

Lösen durch kombinierte Verfahren

1. $L = \{1; \frac{1}{16}\}$
2. $L = \{\frac{27}{64}\}$
3. $L = \{9\}$
4. $L = \{1\ ;\ 6^{\frac{4}{3}} \approx 10{,}9027\}$
5. $L = \{8; 216\}$
6. $L = \{1; \frac{1}{243}\}$

7. $L = \{16\}$
8. $L = \{1; (1 + \sqrt{3})^{12}\}$

9. $L = \{53\}$
10. $L = \{1; 2^{18}; 0{,}5^{18}\}$
11. $L = \{27; \frac{64}{9}\sqrt{3}\}$
12. $L = \{81\}$
13. $L = \{1; \frac{27}{8}\}$
14. $L = \{125\}$

Gleichungen ohne gängige Schemata

1. $D = \mathbb{R}^- = \{\, x \,|\, x < 0 \,\}$;
   $-\,x^{15} = |x^3| \cdot \sqrt{-x} \wedge x < 0 \quad \Longrightarrow \quad x^{12} = \sqrt{-x} \quad \Longrightarrow \quad L = \{-1\}$
2. $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}; \quad -x^3 = |x^3| \quad \Longrightarrow \quad L = \mathbb{R}^- = \{\, x \,|\, x < 0 \,\}$
3. $\sqrt[4]{(-4)^6} = |-4|^{\frac{6}{4}}$!!
   $(-4)^{\frac{6}{4}}$ und die links davon stehenden Terme sind nicht definiert.
4. $L = \{8\}$
5. $L = \{2\}$
6. $L = \{8\}$

Lösung graphisch oder numerisch

11.2. Polynomdivision

11.2.1. Polynomdivision

Linearfaktoren und Nullstellen

1. $5x^2 + 3x + 7$
2. $2x^5 + 6x^3 - 2x^2 + x - 3$
3. $7x^2 + 6x - 2 + \frac{2}{5x-3}$
4. $5x - 9 - \dfrac{5}{8x+5}$
5. $p(x) = (x+2)(x-3)(x+3)(x-5)(x+5)$;
   Nullstellen bei $x = -2; -3; 3; -5; 5$
6. $(4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 4)\,; \quad x = 6$

7. $L = \{-1; -2; 4\}$
8. Die vollständige Zerlegung lautet:$(x+3)^2(x-5)$
9. $2x(x-2)(x+3)(x-1{,}5)$
10. $x \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+7x+15)$
11. (a): $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{1}{27} + \frac{1}{27\cdot(3x-1)}$
    (b): $L = \{0; -2; \pm\sqrt[4]{5}\}$

Division durch Polynome höheren Grades

1. $x^3 + x^2 + x + 1$
2. $12x^3 - 9x^2 + 5$

3. $9x^4 - 6x^2 + 2$
4. $2x^3 - 2x + 7$
5. $\dfrac{1}{3} \cdot (4x^3 + 6x - \dfrac{3}{x})$
6. (a): $x^2 + 3x + 3$
   (b): genau eine Nullstelle bei $x = -1$
   (c): z.B. $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = (x-2)^4$
7. $6x^4 + 5x^3 - \frac{19}{2}x^2 + 5x - 1 \ =$
   $(3x^2 - 2x + \frac{1}{2})(2x^2 + 3x - \frac{3}{2}) + (\frac{1}{2}x - \frac{1}{4})$
8. $6x^4 - 5x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x - 1 \ =$
   $(3x^2 + 2x - \frac{1}{2})(2x^2 - 3x + \frac{3}{2}) + (-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4})$
9. (a) Grad(Q) $= 1$; Grad(R) < 3
   (b) $4x^4 - x^3 + x^2 + 3x + 8 \ =$
   $(x^3 - x^2 + 2)(4x + 3) + (4x^2 - 5x + 2)$

10. (a) Grad(Q) $= 1$; Grad(R) < 3
    (b) $3x^4 + 4x^3 + x^2 + 5x + 4 \ =$
    $(x^3 - x + 2)(3x + 4) + (4x^2 + 3x - 4)$

Polynome mit Formvariablen

1. $x^3 + ax^2 + 2x - 1$
2. $3, -\frac{1}{2}$
3. $p(2) = 0$; $p(x) = (x-2)\cdot(2x^2 + 3kx + 5)$; $k_1 = \frac{2}{3}\sqrt{10}$ und $k_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{10}$

Reihenentwicklung

1. (a) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \mp \ldots.$
   (b) linear: -1%, $-0{,}0025\%$; quadratisch: $0{,}1\%$, $0{,}000125\%$
   (c) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$
   linear: $0{,}0049\%$; quadratisch: $-0{,}000049\%$
   (d) $\dfrac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2$; $\sqrt{1-x} \approx 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$; $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \dfrac{x}{2}$
   (e) $\Delta t \approx \dfrac{s}{v}\cdot\dfrac{\beta^2}{2} = 5\cdot 10^{-11}\,\mathrm{s}$

11.2.2. Anwendungsaufgaben mit fächerübergreifenden Aspekten

1. (a) $a_1 = 12\,m\left(1 + \dfrac{13}{24}\,z\right)$, $a_n = a_1 \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} k^i = 12\,m\left(1 + \dfrac{13}{24}\,z\right)\dfrac{k^n - 1}{k-1}$

   (b) $b_n = m \displaystyle\sum_{i=1}^{12\,n} q^i = m\,q\,\dfrac{q^{12\,n} - 1}{q-1}$

   (c) $c_n = 12\,m \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} k^i = 12\,m\,\dfrac{k^n - 1}{k-1}$

   (d) $a_{10} = 163\,310{,}05$ €, $b_{10} = 164\,698{,}74$ €, $c_{10} = 158\,169{,}54$ €

   (e) $q\,\dfrac{q^{120} - 1}{q-1} = 163{,}31005\,;\; q = 1 + \dfrac{z^*}{12} = 1{,}0048718\,;\; z^* = 5{,}846\%$

2. $a_0 \cdot (1 + z_m)^{12} = a_0 \cdot (1+z)\,;\; z_m = \sqrt[12]{1+z} - 1 = 0{,}4868\%$

3. (a) $x_{n+1} = \dfrac{n\cdot m\cdot x_n + m\cdot\left(x_n + \frac{a}{2}\right)}{(n+1)\,m} = x_n + \dfrac{a}{2\,(n+1)}$ und $x_1 = \dfrac{a}{2}$:

   $x_2 = x_1 + \dfrac{a}{4} = \dfrac{a}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)$, $x_3 = x_2 + \dfrac{a}{6} = \dfrac{a}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right)$ u.s.w.

   (b) $c_k \geq \dfrac{2^k}{2}\cdot\dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1}{2}$, $x_{2^r} \geq \dfrac{a}{2}\left(1 + \dfrac{r}{2}\right) \to \infty$ wenn $n = 2^r \to \infty$

   $x_{2^r} \geq \dfrac{a}{2}\left(1 + \dfrac{r}{2}\right) > 50\,a \implies r > 198 \implies n > 2^{198} = 4{,}017\cdot 10^{59}$

(c) $x_{10} = 1{,}464 \cdot a$, $x_{30} = 1{,}997 \cdot a$, $x_{31} = 2{,}014 \cdot a$; ab $n = 31$

4. (a) $h_{\nu+1} = 0{,}81\, h_\nu$; $h_\nu = h_1 \cdot 0{,}81^{\nu-1}$, $t_\nu = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{h_\nu} = t_1 \cdot 0{,}9^{\nu-1}$

   (b) $s_n = 2 \cdot \sum\limits_{\nu=1}^{n} h_\nu - h_1 = h_1 \cdot \left(2 \cdot \frac{1 - 0{,}81^n}{0{,}19} - 1\right) < \frac{181}{19}\, h_1$

   $\tau_n = 2 \cdot \sum\limits_{\nu=1}^{n} t_\nu - t_1 = t_1 \cdot [20\,(1 - 0{,}9^n) - 1] < 19\, t_1$

   (c)

n	10	20	100	1000	∞
s_n in m	8,247	9,371	9,526	9,526	9,526
τ_n in s	5,430	7,481	8,5787	8,5789	8,5789

5. (a) $b_{\nu+1} = b_\nu \cdot (1+k)$, $a_{\nu+1} = a_\nu \cdot (1+k)$, $A_{\nu+1} = A_\nu \cdot (1+k)^2$

   (b) $F_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} A_\nu = a_1^2 \cdot \frac{(1+k)^{2n} - 1}{(1+k)^2 - 1}$

   $U_n = 2 \cdot (b_{n+1} - b_1) + 2\, a_n = 2\, a_1 \cdot \left(\frac{(1+k)^n - 1}{k} + (1+k)^{n-1}\right)$

   (c) $k = \tan 45^\circ = 1$, $F_{50} = 4{,}23 \cdot 10^{19}\,\mathrm{km}^2 = 8{,}29 \cdot 10^{10} \cdot A_{\text{Erde}}$
   $U_{50} = 3{,}38 \cdot 10^{10}\,\mathrm{km} = 8{,}44 \cdot 10^5 \cdot U_{Erde}$

   (d) $k = \tan 30^\circ = 0{,}577$, $F_{50} = 4{,}17 \cdot 10^9\,\mathrm{km}^2 = 8{,}18 \cdot A_{\text{Erde}}$
   $U_{50} = 3{,}73 \cdot 10^5\,\mathrm{km} = 9{,}32 \cdot U_{Erde}$

6. (a) Einsatz beim k-ten Spiel: $a_k = a_1 \cdot 2^{k-1}$

   $G = a_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1$

   (b) $a_1 \cdot \sum\limits_{k=1}^{8} 2^{k-1} = 25\,500\,€$

   (c) Einsatz beim k-ten Spiel: $a_k = a_1 \cdot 4^{k-1}$

   $G = a_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot \frac{2 \cdot 4^n + 1}{3}$

   $a_1 \cdot \sum\limits_{k=1}^{8} 4^{k-1} = 2\,184\,500\,€$

12. Potenzfunktionen

12.1. Eigenschaften und Klassifikation von Potenzfunktionen

1. $5^{-4{,}1} < 5^{-3{,}1} < 4^{-3{,}1} < 0{,}25^{2{,}8}$

2. (a) $a = 7$; $b \in \mathbb{Z}$, b gerade
   (b) $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{Z}$, $b < 0$ und ungerade
   (c) $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{Z}$, $b < 0$ und gerade
   (d) $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{N}$, b gerade
   (e) $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{N}$, b ungerade
   (f) $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{Z}$, $b < 0$ und ungerade

3. $D = \mathbb{R}_0^+$ falls $b > 0$; $D = \mathbb{R}^+$ falls $b < 0$
   $a = 5$; $b > 0$ bzw. $b < 0$

4. f gerade (ungerade) für ungerades (gerades) n;
   f streng monoton steigend für gerades n;
   f streng monoton fallend in $\mathbb{R}^-$ und streng monoton steigend in $\mathbb{R}^+$ für ungerades n

5. f ist gerade für alle $z \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$
   $z > 0$: streng monoton fallend auf $\mathbb{R}^-$; streng monoton steigend auf $\mathbb{R}^+$
   $z < 0$: streng monoton steigend auf $\mathbb{R}^-$; streng monoton fallend auf $\mathbb{R}^+$

6.

12.2. Funktionsterme, Graphen, Umkehrfunktionen

1. (b) $x < -\sqrt{2}$ oder $\sqrt{2} < x$ (c) $-1 < x < 0$ oder $0 < x < 1$

2. (a) 2,0; 1,9; 1,2; −1,7; −10,5 (c) −0,282

3. (a): Symmetrieeigenschaften; (b): $S\left(-3^{\frac{2}{3}} \mid 3^{\frac{1}{3}}\right)$

4. (a) $c = 0{,}5$; $n = 3$

5. $D_{f_1} = D_{f_2} = D_{f_3} = \mathbb{R}$; $\qquad W_{f_1} = \mathbb{R}$; $W_{f_2} = [-2; \infty[$; $W_{f_3} =]-\infty; \infty]$

6. a) $D = \mathbb{R}^+$ b) $y = (\frac{1}{7}x)^{-\frac{5}{2}}$ c) $S(\sqrt[7]{7^5}|\sqrt[7]{7^5})$

7. a) $D = \mathbb{R}_0^+$ b) kleiner für $x > \sqrt{27}$, größer für $0 < x < \sqrt{27}$ c) $y = \frac{1}{3}x^{\frac{5}{3}}$

8. (a) $D_{f_1} = \mathbb{R}^+$; $W_{f_1} =]-\infty; -1[$ falls $a < 0$; $W_{f_1} =]-1; \infty[$ falls $a > 0$;
   $D_{f_2} = \mathbb{R}^+$; $W_{f_2} =]-5; \infty[$
   (b) $-0{,}67; \ -4{,}77; \ -4{,}88; \ -4{,}93$
   (c) $a = 3$
   (d) $S\left(\frac{1}{8}|11\right)$

9. (c) $W_{f_1} =]-2; \infty[$; $W_{f_2} =]-1; \infty[$
   (d) Substitution, quadratische Gleichung; $S\left(2^{-1{,}5} \mid 0\right)$

10. a) $D = \mathbb{R}^+$
    b) $y_P = 0{,}75 \approx 0{,}8$; $x_Q = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}4$
    c) kleiner für $x > \sqrt[5]{27}$, größer für $0 < x < \sqrt[5]{27}$
    e) $y = (\frac{1}{3}x)^{-\frac{3}{2}}$

11. (a) $a > 0: \ D = \mathbb{R}^+, \ W =]b; \infty[$; $\qquad a < 0: \ D = \mathbb{R}^+, \ W =]-\infty; b[$
    (b) $a = 2$; $b = -3$
    (d) $y = -2x^{-\frac{3}{2}} + 3$

12. $|L| = 2$

12.3. Potenzfunktionen in Anwendungen

1. $L = 12\sqrt[3]{V}$, $\sqrt[3]{2}$

2. (a) $V_W(a) = 8a^3$; (b) $V_K(a) = \frac{4}{3}a^3\pi$; (c) $V_K(a) < V_W(a)$; (d) $a \approx 0{,}62m$

13. Exponential- und Logarithmusfunktionen

13.1. Exponentialfunktionen

13.1.1. Exponentialfunktionen - Eigenschaften und Graphen

1.

2.

3. (a) Vervollständige die nachstehende Tabelle:

Feld–nummer	Körner auf Feld		Körner auf Brett	
	als Zahl	als 2–er Potenz	Zahl	mit einer 2–er Potenz geschrieben
1	1	2^0	1	$2^1 - 1$
2	2	2^1	3	$2^2 - 1$
3	4	2^2	7	$2^3 - 1$
4	8	2^3	15	$2^4 - 1$
5	16	2^4	31	$2^5 - 1$
6	32	2^5	63	$2^6 - 1$
...	...	...	...	...
63		2^{62}		$2^{63} - 1$
64		2^{63}		$2^{64} - 1$

   (b) Es befinden sich $2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$ Reiskörner auf dem Schachbrett.

   Diese haben eine Masse von etwa $m = 922\,337\,203\,685\,477\,\mathrm{kg}$.

   Sie nehmen ein Volumen von $V = \frac{m}{\varrho} = \frac{922\,337\,203\,685\,477\,\mathrm{kg}}{1{,}39 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} \approx 663\,551\,945\,097\,\mathrm{m}^3$

   Dafür brauchen wir $\frac{663\,551\,945\,097\,\mathrm{m}^3}{105\,\mathrm{m}^3} = 6\,319\,542\,334$ Waggons.

   Diese haben eine Länge von $6\,319\,542\,334 \cdot 16{,}52\,\mathrm{m} \approx 104\,398\,839\,\mathrm{km}$.

   In Worten: Etwa 104 Millionen Kilometer!

   (c) Am Bahnübergang muss man $\frac{104\,398\,839\,\mathrm{km}}{100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} \approx 1\,043\,988\,\mathrm{h} \approx 119\,\mathrm{a}$ warten.

   Hinweis: Die Ergebnisse wurden mit einem Computeralgebra–System über alle Maßen genau berechnet. Selbstverständlich können die Ergebnisse auch unter Verwendung von 10–er–Potenzen formuliert werden.

4. Quelle: mathematik lehren (1996), H. 75, S. 55-60

(a) Es lassen sich eine Vielzahl von Eigenschaften angeben, u.a.:

  - Spiegelt man den Graph von a^x an der y-Achse, so erhält man den Graph von $(\frac{1}{a})^x$
  - Für $a > 1$ steigt der Graph
  - Für $0 < a < 1$, fällt der Graph
  - $1^x = 1$; der Graph ist eine Parallele zur x-Achse
  - der Graph schneidet die x-Achse in $(0|1)$ bzw. in $(0|c)$
  - die x-Achse ist Asymptote für Graphen mit $a \neq 1$

(b)

(c) $f(x) = c \cdot 2^x$: $c > 1$ Streckung; $0 < c < 1$ Stauchung; $c < -1$ Streckung und Spiegelung an der x-Achse; $-1 < c < 0$ Stauchung und Spiegelung an der x-Achse

5.

6.

7. (a) $f(x) = 3^x$
   (b) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$
   (c) $f(x) = 2^x - 3$
   (d) $f(x) = (\frac{1}{3})^{x+2}$ oder $f(x) = \frac{1}{9} \cdot (\frac{1}{3})^x$
   (e) $f(x) = 3 \cdot 0{,}8^x$
   (f) $f(x) = 4 \cdot 2^x$

8. $y = (\sqrt{\frac{1}{3}})^{-x}$, präziser Wert: $\frac{-2\lg 6}{\lg 3} \approx -3{,}26$

9.

10. (b) Verschiebung um 2 nach links und 3 nach unten. (c) $x \approx -4{,}71$

11. (a) Es gehört f_3 zu a), f_2 zu c) (beide sind Exponentialfunktionen), f_1 gehört zu b) (Potenzfunktion mit neg. Exponenten) und f_4 zu d).
    (b) $y = x^{\frac{3}{2}}$
    (c) $y = 2^{-x}$

13.1.2. Exponentialgleichungen - Lösung ohne Logarithmen

Exponentialgleichungen - Lösung ohne Logarithmen

1. $L = \{\frac{1}{5}\}$
2. $L = \{\frac{9}{8}\}$
3. $D = \mathbb{R}$, $L = \{3\}$
4. $L = \{1;\ -\frac{1}{4}\}$
5. Durch Exponentenvergleich: $L = \{2; 4\}$
6. $L = \left\{-\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}\right\}$
7. $L = \left\{\frac{3}{4}; -\frac{2}{5}\right\}$
8. $L = \{0; 3\}$
9. $L = \{-\frac{12}{17}\}$
10. $L = \{\frac{1}{8}; 3\}$

1. $L = \{\frac{5}{6}\}$
2. $L = \{\frac{1}{2}\}$
3. $L = \{\frac{14}{19}\}$
4. $L = \{\frac{1}{2}\}$
5. $L = \{-\frac{1}{2}\}$
6. $L = \{\frac{1}{12}\}$
7. $L = \{-1\}$
8. $L = \{\frac{2}{3}\}$

9. $L = \{3\}$
10. $7\,x^2 + 48\,x = 7 \quad \Longrightarrow \quad L = \{\dfrac{1}{7}\,;\ -7\}$
11. $9\,x^2 + 80\,x = 9 \quad \Longrightarrow \quad L = \{\dfrac{1}{9}\,;\ -9\}$

1. $L = \{-0{,}5; -1\}$
2. $L = \{-1; 1\}$

3. $L = \{2\}$
4. $L = \{-3\}$
5. $L = \{2; 3\}$
6. $L = \{-1\}$
7. $L = \{-0{,}25\}$
8. $L = \{2; \log_2 6\}$
9. $L = \{\log_5 2\}$

1. $x = -0{,}64119$
2. $x = 1{,}5596$

Wachstums- und Abklingvorgänge

1. Quelle: Abakus 10 (1995), Schöningh

(a)

3,9	5,3	7,1	9,5	12,8	17,3	23,2	31,3

(b)

56,8	102,9	251,2	825,9

Gründe für die schlechte Passung: Weltkriege und Rezessionen führen zu einem veränderten Fortpflanzungsverhalten

(c) $f(t) = 1.000.000 \cdot 1,03^t$ und $g(t) = 100.000t + 2.000.000$

t	0	1	2	3	4	5	...	75	76	77	78
$f(t)$ in Mio	1	1,03	1,06	1,09	1,13	1,16		9,2	9,5	9,7	10,0
$g(t)$ in Mio	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5		9,5	9,6	9,7	9,8

Tabellarische Darstellung ist auch im Sinne einer systematischen Einschachtelung möglich. Ansatzweise Termumformung: $1.000.000 \cdot 1,03^t = 2.000.000 + 100.000t \Leftrightarrow 1,03^t - 0,1t = 2$. Hier ist der Tippaufwand geringer als oben und die Lösung schneller erreichbar: $76 < t < 77$.

2. Nein, da nur noch $0,06\,\text{g}$ vorhanden sein dürfen.
3. $0,66\,\text{m}$
4. 1500; 33 h
5. Zwischen 36 und 37 h nach Zerfallsbeginn (37 bzw. 38 h nach Einnahme $\approx 37,86$)
6. 23 h; 17 h
7.

8. Quelle: Lambacher Schweizer 10

   Zur Vereinfachung: Ausgangsstrecke 1 LE.
   1. **Schritt:** $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$
   2. **Schritt:** $4 \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{9} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9}$
   3. **Schritt:** $16 \cdot \frac{4}{27} = \frac{64}{27} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{16}{27}$
   4. **Schritt:** $64 \cdot \frac{4}{81} = \frac{256}{81} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{16}{27} + \frac{64}{81}$
   n. **Schritt:** $(\frac{4}{3})^n = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{4^{i-1}}{3^i}$

   Es handelt sich um exponentielles Wachstum mit dem Wachstumsfaktor $\frac{3}{4}$.

n	Länge
4	$3,16049$
40	$99437,3$
400	$9,45317 \cdot 10^{49}$
100.000	$7,47585 \cdot 10^{1249}$

9. Quelle: Mathematik 11 Hessen

10. 0,66 m

11. a) 313; b) 777

12. Nein, da nur noch 0,06 g vorhanden sein dürfen

13. a) $x \longmapsto 0{,}99137^x$ b) $0{,}0055 = 0{,}55\,\%$

14. a) 0,84 b) 16% c) 71%; 59%; 50%; 35%; 25%; 17%; d) nach ca. 9,3 Tagen

15. a) 0,79 b) 21% c) 62%; 49%; 39%; 24%; 15%; 9%; d) nach ca. 6,8 Tagen

16. (a) 7,5% (b) 9850 €

17. 15850,66 €; 7,6%

18. (a) $144; 416; 3460$

19. $x \longmapsto 37\,100 \cdot 1{,}048^x$ (x in Jahren); Zinssatz 4,8 %

20. $ca.$45150 €; 23660 €; $ca.$45000 €; $ca.$24%

21. (a) 201; 5,96%; 1209 (b) 149; 24; 893

22. (a) 6,6 $Mrd.$; 18,0 $Mrd.$ (b) 6,6 $Mrd.$; 12,5 $Mrd.$
    (c) 2%; im Jahre 990 hätte es dann nur ca. 13 Menschen gegeben!

23. (a) 313
    (b) 777

24. ≈ 162 Jahre; ≈ 232 Jahre (etwas länger zum „Übertreffen“)

25. (a) 384 / 3072 / 24576 / 196608
    (b) 6 / 4,25 / 2,125 / 0,75

26. Nach ca. 13 h ist die Konzentration auf ca. 10% abgesunken. $N(t) = N(0) \cdot 0,84^t$; $a^3 = \frac{1,18}{2} \Leftrightarrow a = 0,84$
    Wenn „weitgehend abgebaut“ als Restmenge 10% angesehen wird, sind ca. 13,09 h richtig. Konsequenz: Vom Mittel ist abzuraten, da es zu lange wirkt. Was aber, wenn jemand mit größeren Prozentzahlen operiert? Ein schönes Beispiel für offeneres Herangehen, da die Voraussetzungen zum Lösen individuell variieren können und damit auch die Einschätzungen.

27.

28.

29. Quelle: Mathematik 11 Hessen

30. Quelle: Elemente 11
    (a) Brasilien 0,87%; Deutschland 0,26%; Indien 1,07%; Mexiko 0,86%; USA 0,46%
    (b) Deutschland nein, sogar Abnahme; Brasilien 193530 (ja); Indien 1163610 (?); Mexiko 109373 (?); USA 286737 (?). Tabellenwerte liegen über dem errechneten Wert; das Wachstum wird sich also beschleunigen, aber ob exponentiell, das lässt sich eigentlich nicht beantworten. Prozentualer Zuwachs pro Jahr ab 1999: Indien 1,71%; Mexiko 1,71%; USA 1,98%.

31. Quelle: Mathematik 11 Hessen

32. Quelle: Analysis Grundkurs Gesamtband (2000), Klett
    Gaza: $\approx 15,41$ Jahre; Lettland: $\approx 98,67$ Jahre bzw. $\approx 327,79$ Jahre; BRD: $N_0 \cdot 0,999^t$

33. Wir setzen $t = 0$ als den Zeitpunkt der Kontrolle und gehen davon aus, dass in der Abbauphase kein Alkohol konsumiert wurde.
    (a) $g(t) = -0,2t + 0,8$
    (b) Nach Voraussetzung gilt: $f(t) - f(t+1) = c \cdot f(t)$. Also gilt auch: $f(t+1) = (1-c) \cdot f(t)$ und allgemeiner $f(t) = (1-c)^t \cdot f(0)$. Demnach hier: $f(t) = (\frac{3}{4})^t \cdot 0,8$.

(c) Nach allem was wir über den Abbau von Blutalkohol wissen, ist ein lineares Modell angemessener. Entscheidungskriterium hier in erster Linie Fachkenntnisse.

(d) Vor einer Stunde: Pegel ca. 1 Promille in beiden Modellen.
Vor zwei Stunden: Lineares Modell: Pegel $1,2$.
Exponentielles Modell: Pegel ca. $1,4$.

34. Quelle: Herget/Scholz: Die etwas andere Aufgabe aus der Zeitung

Diese „Faustformel“ liefert in dem „üblichen“ Zinsbereich sehr brauchbare Werte: Die Verdopplungszeit berechnet man mit: $2K_0 = K_0(1+\frac{p}{100})^d$ umgeformt ergibt sich: $\lg 2 = d \cdot \lg(1+\frac{p}{100})$, d.h. $d \approx \frac{0{,}3}{\lg(1+\frac{p}{100})}$.
Hintergrund-Info für Lehrer: Es gilt: $\ln 2 = d \cdot \ln(1+\frac{p}{100})$, wegen $\ln(1+x) \approx x$ (für kleine $|x|$) folgt: $d \cdot \frac{p}{100} \approx \ln 2 \approx 0,6931 \approx 0,7$, d.h. $d \cdot p \approx 70$.
Für sehr kleine p wäre also eigentlich 69 noch besser als 70 - aber 70 lässt sich natürlich leichter merken, und für die „üblichen“ Zinssätze liefert die 70 tatsächlich bessere Werte.

p%	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15
t exakt	$17,7$	$14,2$	$11,9$	$10,2$	$9,0$	$8,0$	$7,3$	$6,6$	$6,1$	$5,7$	$5,0$
t Artikel	$17,5$	14	$11,7$	10	$8,75$	$7,8$	7	$6,4$	$5,8$	$5,4$	$4,7$

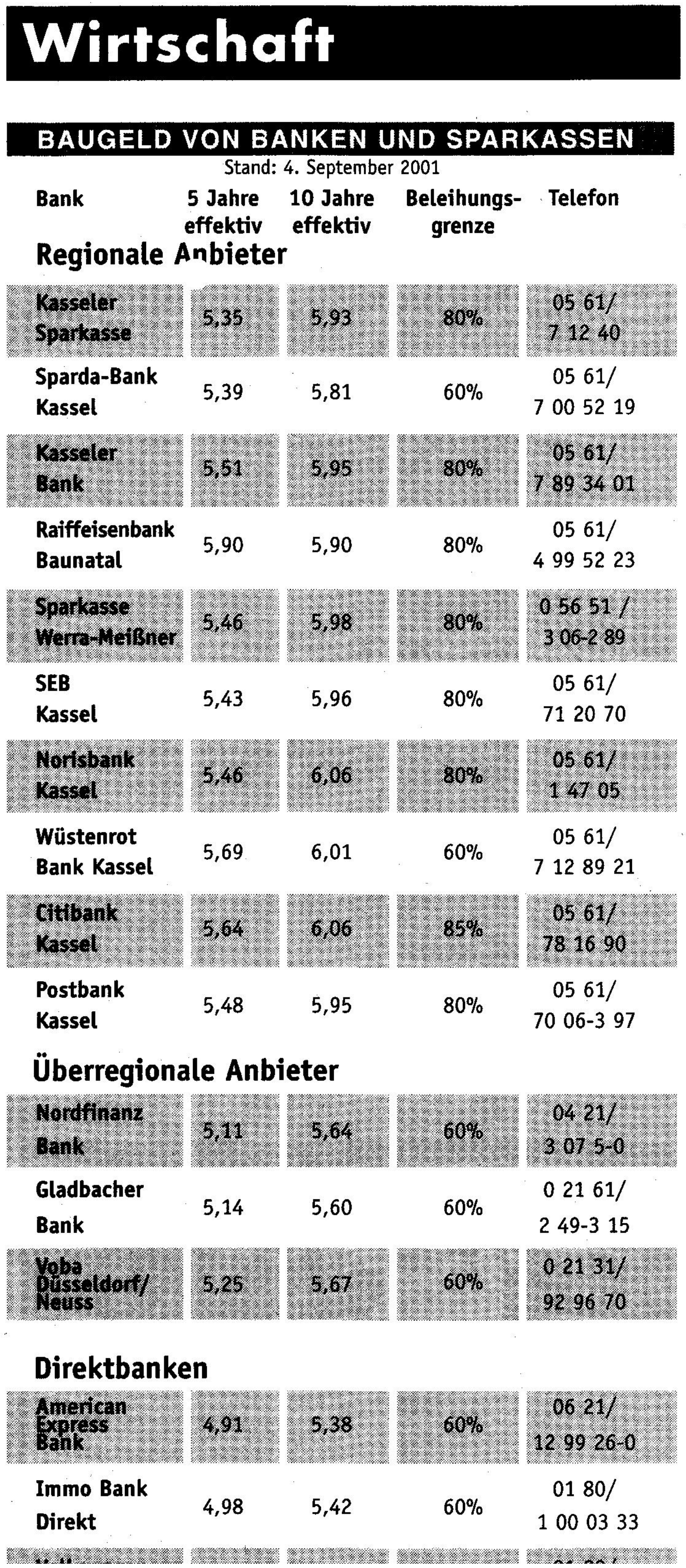
35. **Plan A:** $K_{10} = 10000 \cdot (1+\frac{8}{100})^{10} = 21589,25$
Plan B: Man erkennt, dass zunächst fast nur Zinsen und kaum Tilgung geleistet werden. Es müssen nur 10000 € + $5855,07$ € = $15855,07$ € gezahlt werden.

Jahre	Abtrag	Restschuld
1	1000	$9700,00$
2	1000	$9379,00$
3	1000	$9035,53$
4	1000	$8668,02$
5	1000	$8274,78$
6	1000	$7854,01$
7	1000	$7403,79$
8	1000	$6922,06$
9	1000	$6406,60$
10	1000	$5855,07$

Jahre	Einzahlung	Kapital 4%	Kapital 5%
1	0	$0,00$	0
2	1000	$1040,00$	$1050,00$
3	1000	$2121,60$	$2152,50$
4	1000	$3246,46$	$3310,13$
5	1000	$4416,32$	$4525,63$
6	1000	$5632,98$	$5801,91$
7	1000	$6898,29$	$7142,01$
8	1000	$8214,23$	$8549,11$
9	1000	$9582,80$	$10026,56$
10	1000	$11006,11$	$11577,89$

Zusatz: Was passiert, wenn man die 1000 Euro jährlich spart, die man bei **Plan A** zunächst nicht zu zahlen hat?
In den 10 Jahren könnte Herr Huber nur ca. 1500 Euro an Zinsen erwirtschaften. **Plan A** bleibt trotzdem teurer.

36. Es handelt sich nicht um eine exponentielle Abnahme, sondern um eine Überlagerung eines exponentiellen Prozesses mit einem linearen Anteil.



Wirtschaft

BAUGELD VON BANKEN UND SPARKASSEN

Stand: 4. September 2001

Bank	5 Jahre effektiv	10 Jahre effektiv	Beleihungsgrenze	Telefon
Regionale Anbieter				
Kasseler Sparkasse	5,35	5,93	80%	05 61/ 7 12 40
Sparda-Bank Kassel	5,39	5,81	60%	05 61/ 7 00 52 19
Kasseler Bank	5,51	5,95	80%	05 61/ 7 89 34 01
Raiffeisenbank Baunatal	5,90	5,90	80%	05 61/ 4 99 52 23
Sparkasse Werra-Meißner	5,46	5,98	80%	0 56 51 / 3 06-2 89
SEB Kassel	5,43	5,96	80%	05 61/ 71 20 70
Norisbank Kassel	5,46	6,06	80%	05 61/ 1 47 05
Wüstenrot Bank Kassel	5,69	6,01	60%	05 61/ 7 12 89 21
Citibank Kassel	5,64	6,06	85%	05 61/ 78 16 90
Postbank Kassel	5,48	5,95	80%	05 61/ 70 06-3 97
Überregionale Anbieter				
Nordfinanz Bank	5,11	5,64	60%	04 21/ 3 07 5-0
Gladbacher Bank	5,14	5,60	60%	0 21 61/ 2 49-3 15
Voba Düsseldorf/ Neuss	5,25	5,67	60%	0 21 31/ 92 96 70
Direktbanken				
American Express Bank	4,91	5,38	60%	06 21/ 12 99 26-0
Immo Bank Direkt	4,98	5,42	60%	01 80/ 1 00 03 33

37.

38. (a)
    1. i. 60,8 mg
    2. ii. 8 Tage

    (b) 11,4 Tage

    (c) 8,3 Tage

Geometrische Folgen und Reihen

1.

2. arithmetische Folge: $4, 7, 10, 13$ geometrische Folge: $5, 15, 45, 135$

3. $a_1 = 125$; $a_5 = 51{,}2$

4. Anfangswert $a = 1{,}5$; Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder $q = 4$; $s_7 = 8191{,}5$

5. Es ist $a_1 = aq^0 = 81$, $q = \frac{2}{3}$ und $s_{10} = \sum_{i=0}^{9} aq^i = a\frac{q^{10}-1}{q-1} = \frac{58025}{243}$

6. -2049

7. 16, $\frac{1}{32}$

8. (a): 2 Lösungen: $a_1 = 9$, $q = 4$ bzw. $a_1 = 36$, $q = \frac{1}{4}$
   (b): $49\,149$ bzw. $47\frac{1021}{1024}$

9. 0,25; 0,5; 1; 2; 4 *bzw.* 4; 2; 1; 0,5; 0,25

10. (a): $2^{64} - 1 \approx 1{,}84 \cdot 10^{19}$ (b): $9{,}22 \cdot 10^{11}\,t$ (c): ca. $120\,m$

11. $\sqrt[12]{2}$

12. 1,06; 441 Hz

13. $A_n = a^2 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}$; $U_n = 4a \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}$; $S_{10} \approx 198.5\,\mathrm{cm}$

14. $A_n = a^2 \cdot (\frac{1}{4})^{n-1}$; $S_8 \approx 133\,\mathrm{cm}^2$

Logarithmen

1. (a) $f(x) = 3^x$
   (b) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$
   (c) $f(x) = 2^x - 3$
   (d) $f(x) = (\frac{1}{3})^{x+2}$ oder $f(x) = \frac{1}{9} \cdot (\frac{1}{3})^x$
   (e) $f(x) = 3 \cdot 0,8^x$
   (f) $f(x) = 4 \cdot 2^x$

2. Quelle: mathematik lehren (2001), H. 106, S. 55-57
   (a) Beim absoluten Zuwachs wird die Differenz gebildet, beim relativen Zuwachs der Quotient.
   (b) Der Wachstumsfaktor q ist größer als 1; für den Zerfallsfaktor gilt: $0 < q < 1$
   (c) In Prozent.
   (d) Die Halbwertszeit gibt an, in welchem Zeitraum sich bei einem Zerfallsprozess die Substanz jeweils um die Hälfte verringert.
   (e) Äquidistant bedeutet den gleichen Abstand habend.
   (f) Der Logarithmus a einer Grundzahl b ist die Hochzahl k, mit der man b potenzieren muss, um a zu erhalten.
   (g) Hochzahl oder Exponent
   (h) Numerus
   (i) Grundzahl = Basis; Hochzahl = Exponent
   (j) $\lg x$
   (k) $\log_2 16 = x$
   (l) $r = q - 1 = \frac{W_{i+1}}{W_i} - 1 = \frac{W_{i+1} - W_i}{W_i}$
   (m) $x = 6$
   (n) $x = 4$
   (o) $x = 4$

3. (a): $N_0 = 5000;\ a = 1{,}44$
   (b): $\Delta x = 0{,}79$

4. (b): $u \approx 0{,}3;\ v \approx 1{,}6$

5. (a): $D_f = \mathbb{R};\ W_f =]-1; \infty[$
   (b): $(0|1)$ bzw. $(-\lg 0{,}5|0)$
   (c): $y = \lg \dfrac{x+1}{2}$
   (d): $(0|-\lg 0{,}5)$ bzw. $(1|0)$

6. (a) Für f:einfach-logarithmisch, für g:doppelt-logarithmisch
   (b) bei f: $m = \lg 3$, $t = \lg 5$, bei g: $m = 3$, $t = \lg 2$

7. (a) Er ändert sich um den Faktor $\frac{1}{3}$
   (b) $y = -\dfrac{2}{\lg 3}\lg x$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$

1. a) $x = -\frac{1}{3}$ b) $x = 2^{\frac{5}{2}}$ c) $x = \frac{3}{2}$

2. a) 5, b) $-\frac{6}{5}$, c) $\frac{2}{7}$

3. a) -3; b) $\frac{3}{2}$; c) 32

4. $x^x = 256$; $x = 4$

5. $x^x = 3125$; $x = 5$

6. 2

7. (a) $\log_7 2401 = x$; $x = 4$
   (b) $\log_x \frac{243}{32} = 5$; $x = \frac{3}{2}$
   (c) $\log_{\frac{4}{5}} x = 3$; $x = \frac{64}{125}$

1. Quelle: mathematik lehren (1998), H. 92, S. 60

   Lösungen der Aufgaben: 3; 9; 7; 1; 5; 0; 6; 8; 4; 12; 10; 2
   Lösungssatz: MEIN NAME IST HASE; ICH WEISS VON NICHTS

2. Quelle: mathematik lehren (1998), H. 92, S. 60

   Lösungen der Aufgaben: 3; 9; 7; 1; 5; 0; 6; 8; 4; 12; 10; 2
   Lösungssatz: MEIN NAME IST HASE; ICH WEISS VON NICHTS

3. (a) 111 (b) 6 (c) 51 (d) 57 (e) 361

4. (a) 43 (b) 108 (c) 81 (d) 12

5. (a) 5 (b) 11 (c) 169 (d) 147 (e) 2

6. (a) 40 (b) 697 (c) 621 (d) 22 (e) 1

7. a) -3, b) -4, c) $\frac{9}{4}$

8. $-\frac{3}{7}$

9. $\lg 0{,}3$

10. (a) $\log_7 2401 = x;\ x = 4$
    (b) $\log_x \frac{243}{32} = 5;\ x = \frac{3}{2}$
    (c) $\log_{\frac{4}{5}} x = 3;\ x = \frac{64}{125}$
11. $\frac{43}{30}$
12. 3
13. $\log\, u^{\frac{7}{6}}$
14. $\log_a \sqrt{\frac{ab}{c^3}}$
15. 3
16. (b): $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = 4\,m;\ \ \overline{SC} = \overline{SB} = 2\sqrt{13}\,m;\ \ \overline{SA} = 6\,m$
    (c): 60^o
17. $-\log_a z$
18. $3\log_a 2x$
19. 2
20. $\frac{3}{5}$
21. $v > 0;\ b > 0$ und $b \neq 1;\ w$ beliebig
22. $x > 0;\ y > 0;\ b > 0$ und $b \neq 1$
23.
24. (a): $x + y > 0\ \wedge\ x - y > 0$ (b): $1{,}5 - \log_3(x - y)$
25. z.B. $x = 2^{25}$ (Monotonie des Logarithmus verwenden!)

1. (a) $L = \{\}$ (b) $x = 7{,}38$
2. $x \approx -1{,}807355$
3. $x = \frac{\lg 2}{\lg \frac{5}{3}}$
4. $1 + \frac{1}{\lg 1{,}5} = 6.67887$
5. $L = \{\,\frac{\lg 27}{\lg 5}\,\} = \{\,2{,}048\,\}$
6. $L = \{-1; \frac{\lg 2}{\lg 3}\}$
7. $L = \left\{\,2\,;\ \dfrac{\lg 2}{\lg 5}\,\right\}$

8. $L = \{ \frac{\lg 27}{\lg 5} \} = \{ 2{,}048 \}$

9. Substitution und Lösung einer quadratischen Gleichung: $x = \frac{\lg 3}{\lg 5}$

10. $L = \{-1; \frac{\lg 3}{\lg 5}\}$

11. $D = \mathbb{R}^+$, $L = \left\{ \dfrac{1}{16} \right\}$

12. $x_1 = -1 + \log_5 3$; $x_2 = -1$

1. (a) Zeichnung mit Hilfe ganzzahliger Werte von $y = 2^x$. Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.
   (b) Spiegelung an der x-Achse
   (c) 2,32

2. $g(x) = 3^x$; $y_A = 2$; $x_B = \sqrt{3} \approx 1{,}73$; $y_C = \log_3 5 \approx 1{,}46$; $x > 243$

3. $D = \mathbb{R}$; $W = \mathbb{R}_0^+$; $a = 2$

4. $\log_{\frac{1}{a}} x = \frac{\log_a x}{\log_a \frac{1}{a}} = -\log_a x$

5. (a) Symmetrie zur x-Achse
   (b) $\log_b x$ und $\log_{\frac{1}{b}} x$

6. (a) $a = 2$; $\quad b = 3^{\frac{1}{8}} \approx 1{,}1472$
   (b) y = $\log_2 x$; y = $(\sqrt[8]{3})^x$; $\quad Q(8|3)$
   (c) Jedem x-Wert darf höchstens ein x-Wert zugeordnet sein.

7. (a) $A = \dfrac{A}{\lg B}$, $b = \dfrac{D}{C}$, $c = \dfrac{A \lg C}{\lg B} + E$
   (b) $f(x) = 3\ \lg(x+5)+1$. Verschiebung um 5 nach links und 1 nach oben. $x_0 = 10^{-\frac{1}{3}} - 5 \approx -4{,}54$
   (c) $\lg \dfrac{b+7}{b-2{,}9} = 2 \cdot \lg \dfrac{b+7}{b-2} \Longrightarrow \dfrac{b+7}{b-2{,}9} = \left(\dfrac{b+7}{b-2}\right)^2 \Longrightarrow b = 3$
   $f(x) = 4\ \lg(x+3) - 2$, $D_f =]-3; +\infty[$, $x_0 = -3 + \sqrt{10} \approx 0{,}16$

8. (a) Für f:einfach-logarithmisch, für g:doppelt-logarithmisch
   (b) bei f: $m = \lg 3$, $t = \lg 5$, bei g: $m = 3$, $t = \lg 2$

13.1 Exponentialfunktionen

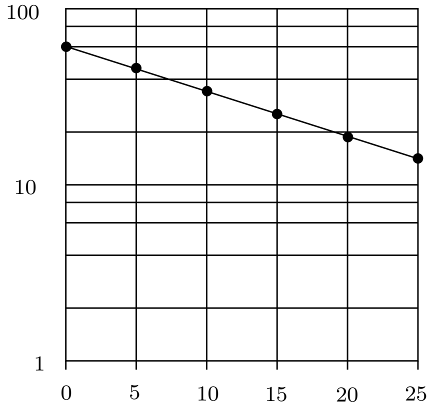
1. 34,6 Tage

2. Bei einer Dicke von 0,2 mm erhält man ca. $n = 41$ Faltungen.

3. $n \approx 63{,}79\,a \Longrightarrow$ im Jahre 2023 ; $n \approx -21{,}72\,a \Longrightarrow$ im Jahre 1938

4. $n \approx 42{,}82\,d \Longrightarrow$ am 12.02.1992 ; $n \approx -11{,}74\,d \Longrightarrow$ am 20.12.1991

5. Ein geradliniger Verlauf in halblogarithmischer Darstellung entspricht einer Exponentialfunktion. Der Ansatz $\Delta\vartheta = 60^0 \cdot 10^{-\beta t}$ liefert logarithmiert $\log\frac{\Delta\vartheta}{60^0} = -\beta t$. Substitution $y = \log\frac{\Delta\vartheta}{1^0}$ ergibt die Geradengleichung $y = \log 60 - \beta t$ und $-\beta = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\log 14 - \log 60}{25\ \text{min}}$ bzw. $\beta = \frac{1}{25\ \text{min}} \cdot \log\frac{30}{7}$



6. (a) $-2{,}5$
   (b) 10^{12}

7. (a) $I = \dfrac{P}{4\,\pi\,r^2}$, $L_2 = L_1 - 30$

P in W	$7 \cdot 10^{-6}$	0,001	0,2	0,3	5	10	100	3000
I in $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$	$3{,}5 \cdot 10^{-8}$	$5{,}0 \cdot 10^{-6}$	$9{,}9 \cdot 10^{-4}$	0,0015	0,025	0,050	0,50	15
L_1 in phon	45	67	90	92	104	107	117	132
L_2 in phon	15	37	60	62	74	77	87	102

(b) Verschieben um 30 nach unten.
$L_1 = 35\,\text{phon} \Longrightarrow I = 3{,}2 \cdot 10^{-9}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ $L_2 = 85\,\text{phon} \Longrightarrow I = 0{,}32\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
Die beiden anderen Werte sind nicht ablesbar.
(c) $L_1(x) = 10\,x + 120$, $L_2(x) = 10\,x + 90$

I in $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$7{,}9 \cdot 10^{-12}$	0,1
L_1 in phon	66	9	110
L_2 in phon	36	-21	80

8. Die Zahl der Planeten sollte bedarfsgerecht verringert werden. Die Quotienten der Logarithmen variieren zwischen 1.499 und 1.508, mit dem Mittelwert 1,500. Dies ergibt $\log U = \log a'^{1,5}$ bzw. $U = a'^{1,5}$

9. In der k-ten Stufe zerfallen $a_k = 3^{k-1}$ Neutronen.

   Nach n Stufen sind $N = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \frac{3^n - 1}{2}$ Kerne zerfallen.

   $\Delta t = n\,\tau = \frac{\lg(2\,N+1)}{\lg 3} \cdot \tau = 5{,}7 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}$

10. (b) $x = \frac{\lg 2}{\lambda} = 0{,}75\,\mathrm{cm}$

    (c) $x = g(N) = \frac{\lg N_0 - \lg N}{\lambda}$; $D_g =]\,0\,;\,N_0\,]$

    Spiegelung an der N-Achse und Verschiebung um $\frac{\lg N_0}{\lambda}$ nach oben.

11. (a) Für f:einfach-logarithmisch, für g:doppelt-logarithmisch

    (b) bei f: $m = \lg 3$, $t = \lg 5$, bei g: $m = 3$, $t = \lg 2$

1. $x = 5^{3125} = 10^y \quad \Longrightarrow \quad y = 3125 \cdot \lg 5 = 2184{,}28126$

   $x = 10^{2184{,}28126} = 10^{0{,}28126} \cdot 10^{2184} = 1{,}911 \cdot 10^{2184}$

2. $x = 4{,}88 \cdot 10^{5544} \quad \Longrightarrow \quad$ 5545 Ziffern $\widehat{=}$ 27,725 m

3. $x = 1{,}14 \cdot 10^{3699} \quad \Longrightarrow \quad$ 3700 Ziffern $\widehat{=}$ 18,5 m

4. (a) Wegen der Monotonie gilt $10^l \leqq z < 10^{l+1}$, z hat also $l+1$ Stellen falls $a < 10^{l+1}$.

   (b) Die Stellenzahl von $z = 2^{859433}$ ist $l = [\log_{10} 2 \cdot 859433] + 1 = 258716$ (Gauss'sche Klammer).

   (c) Es kann nicht $z = 10^l$ sein (warum?), also haben z und p gleiche Stellenzahl.

   (d) 81 Seiten.

Teil IV.

Stochastik: Zusammengesetzte Zufallsexperimente

14. Stochastik: Zusammengesetzte Zufallsexperimente

14.1. Pfadregeln

1. Er hat nicht recht, da die Entscheidung durch Losverfahren ($p = \frac{1}{3}$) getroffen wird.

   Auf $p = \frac{1}{2}$ käme man, wenn unter der Bedingung „Ottokar wird hingerichtet" das Los zwischen Kunibald und Georgius entscheiden würde.

2. Quelle: Lambacher Schweitzer 8, S. 172 (leicht verändert)

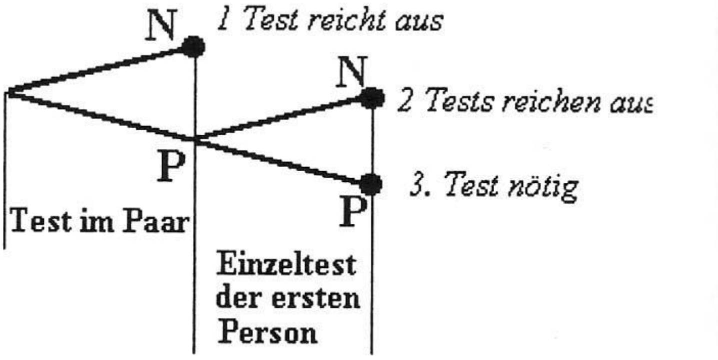
   Variationen:

   Variation der Produkte, der Kostprobenzahl, der Produktanzahl

3. Quelle: MatheNetz 9 (2001)

   Sei A: Die gezogene Frage wird bejaht
   B: Es wurde Frage 1 gezogen
   C: Es wurde Frage 2 gezogen
   p: Anteil der Bürger, die schon einmal einen Ladendiebstahl begangen haben
   Also: $P(B) = 0,4$; $P(C) = 0,6$ sowie $P(A|B) = p$; $P(A|C) = 1 - p$
   Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit (oder elementar hergeleitet) folgt daher:
   $P(A) = 0,4 \cdot p + 0,6 \cdot (1 - p) = 0,6 - 0,2 \cdot p \Leftrightarrow p = 3 - 5 \cdot P(A)$
   Setzt man nun für $P(A)$ die relative Häufigkeit $h(A)$ der Ja-Antworten aus der Umfrage ein, kann man also den entsprechenden Anteil p schätzen.

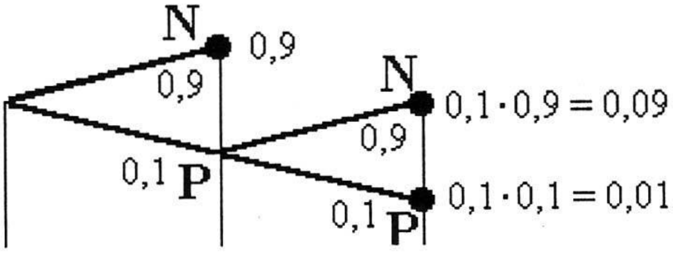
4. Quelle: ISTRON 6, S. 124/125

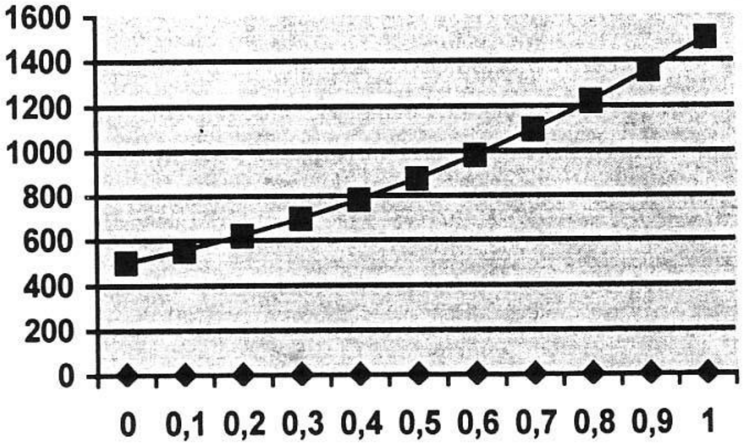


Entweder ist nur ein Test pro Paar erforderlich (wenn kein Doping nachgewiesen)
oder zwei Tests (wenn Doping nachgewiesen und erster Nachtest negativ)
oder drei Tests (wenn Doping nachgewiesen und erster Nachtest positiv)
Also:
Bei Einzeltests sind bei n Teilnehmern n Tests erforderlich, bei „Doppeltests“ dagegen abhängig von Dopingquote: min. $\frac{n}{2}$ Tests und max. $1,5 \cdot n$ Tests.

5. Insgesamt $80 + 30 + 10 = 120$ Testpaare, also 240 Sportler
   Statt 240 Einzeltests hier nur $80 + 30 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 150$ Tests
   Abschätzung der Dopingfälle: min. $30 + 10 = 40$, max. $30 + 20 = 50$ Dopingfälle

6. Zur Wahrscheinlichkeit von 10% Baumdiagramm aus Aufgabe 1!!! mit Pfadwahrscheinlichkeiten:





Man hat also für die 1000 Personen in 500 Testpaaren $(0,9 \cdot 1 + 0,09 \cdot 2 + 0,01 \cdot 3) \cdot 500 = 555$ Tests zu erwarten, im Vergleich zu Einzeltests also eine deutliche Ersparnis
Verallgemeinerung (für 20%, 30%, ...) :
Berechnung liefert das neben stehende Ergebnis. Die Vermutung eines quadratischen Zusammenhangs lässt sich bestätigen:
Zu erwarten sind $[(1-p) \cdot 1 + p \cdot (1-p) \cdot 2 + p^2 \cdot 3] \cdot 500 = (p^2 + p + 1) \cdot 500$ Tests
(im Vergleich zu 1000 Einzeltests)

14.2. bedingte Wahrscheinlichkeit

1. (a) $p(l) = 0,1 \cdot \frac{2}{3} = 7\%$, $p(r) = 0,9 \cdot 1 + 0,1 \cdot \frac{1}{3} = 93\%$

   (b) $p_r(l_v) = \frac{p(r \cap l_v)}{p(r)} = 4\%$

2. (a) $p(W \cap R) = p(W) \cdot p_W(R) = 0,4 \cdot 0,15 = 6,0\%$

   (b) i. $p_R(W) = \frac{p(W \cap R)}{p(R)} = \frac{0{,}06}{0{,}1} = 60\%$

   ii. $p_R(M) = 1 - p_R(W) = 40\%$

   iii. $p_M(R) = \frac{p(M \cap R)}{p(M)} = \frac{0{,}04}{0{,}6} = 6,7\%$

3. T: Tonstörung, B: Bildstörung

   (a) $p_T(\overline{B}) = \frac{p(T \cap \overline{B})}{p(T)} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}05}{0{,}9 \cdot 0{,}05 + 0{,}1 \cdot 0{,}7} = 0,39$

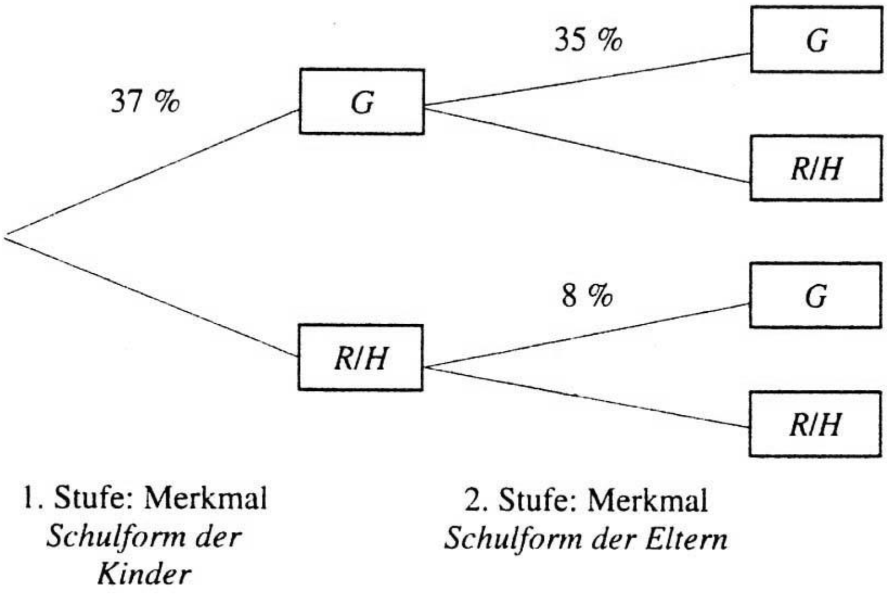
   (b) $p(T) = 0,9 \cdot 0,05 + 0,1 \cdot 0,7 = 0,115$,

   $p(\overline{B}) = 0,9$; $p(T) \cdot p(\overline{B}) = 0,115 \cdot 0,9 = 0,1035 \neq 0,39$

   $\Rightarrow$ stochastisch abhängig

4. Quelle: PM 2/41 (1999)

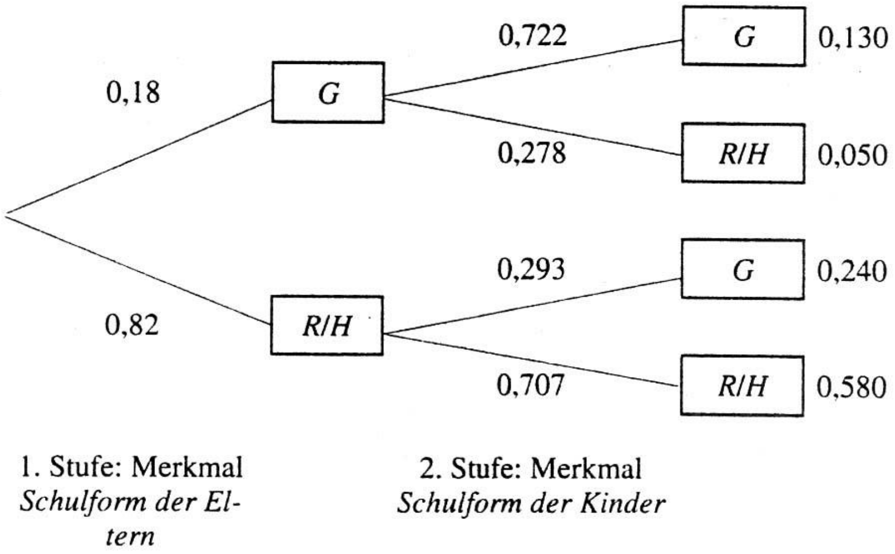
   (a) Aus dem Text entnehmen wir unmittelbar folgende Informationen über die Merkmale *Schulform, die die Kinder besuchen bzw. Schulform, die die Eltern besuchten:*



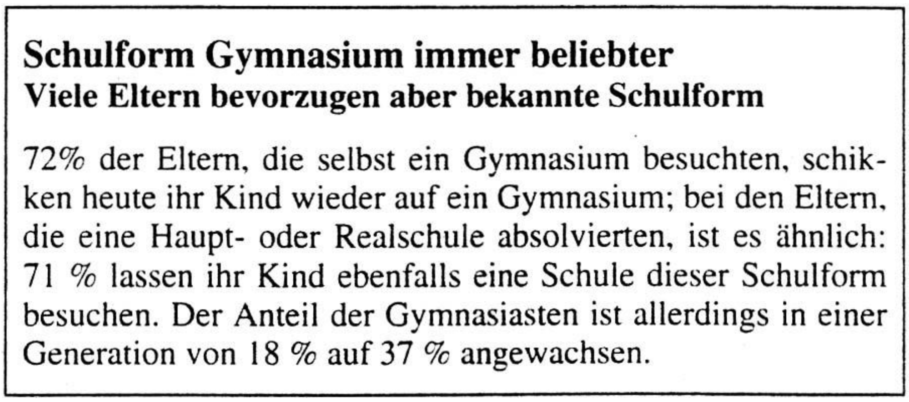
   (b) Die zugehörige Vierfeldertafel sieht dann so aus:

Eltern Kinder	Gymnasium	Real- / Hauptschule	gesamt
Gymnasium	13,0%	24,0%	37,0%
Real- / Hauptschule	5,0%	58,0%	63,0%
gesamt	18,0%	82,0%	100%

(c)



(d) Die im Baumdiagramm enthaltenen Informationen können z.B. wie folgt als Zeitungsnotiz erscheinen:



Schulform Gymnasium immer beliebter
Viele Eltern bevorzugen aber bekannte Schulform

72% der Eltern, die selbst ein Gymnasium besuchten, schikken heute ihr Kind wieder auf ein Gymnasium; bei den Eltern, die eine Haupt- oder Realschule absolvierten, ist es ähnlich: 71 % lassen ihr Kind ebenfalls eine Schule dieser Schulform besuchen. Der Anteil der Gymnasiasten ist allerdings in einer Generation von 18 % auf 37 % angewachsen.

5. Quelle: PM 6/42 (2000)

   (a) $p(\text{krank}) = 0,82\%$, $p(\text{Befund auffällig}) = 3,37\%$, usw.
   $p(\text{krank} \cap \text{Befund auffällig}) = 0,75\%$, $p(\text{nicht krank} \cup \text{Befund auffällig}) = 2,62\%$

   $p_{\text{Befund auffällig}}(\text{krank}) = \frac{0{,}75\%}{3{,}37\%} = 22,2\%$,
   d. h. bei einem auffälligem Befund ist nur etwa jeder fünfte Untersuchte krank.

   $p_{\text{krank}}(\text{Befund auffällig}) = \frac{0{,}75\%}{0{,}82\%} = 91,5\%$

(b) Z. B.:

Da die Untersuchungen immer mit Fehlern behaftet sind, müssen Ergebnisse sachlich gedeutet werden. Bei der Entwicklung von Untersuchungsmethoden ist es primär wichtig von den kranken Personen einen sehr hohen Anteil zu erkennen, hier $p_{\text{krank}}(\text{Befund auffällig}) = 91,5\%$. Oft, insbesondere bei seltenen Erkrankungen, muss man damit in Kauf nehmen, dass viele gesunde ebenfalls das Ergebnis Befund auffällig erhalten. Dieses muss dann in weiteren Untersuchungen geklärt werden.

6. Quelle: MatheNetz 9 (2001)

   Sei A: Die gezogene Frage wird bejaht
   B: Es wurde Frage 1 gezogen
   C: Es wurde Frage 2 gezogen
   p: Anteil der Bürger, die schon einmal einen Ladendiebstahl begangen haben
   Also: $P(B) = 0,4$; $P(C) = 0,6$ sowie $P(A|B) = p$; $P(A|C) = 1 - p$
   Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit (oder elementar hergeleitet) folgt daher:
   $P(A) = 0,4 \cdot p + 0,6 \cdot (1 - p) = 0,6 - 0,2 \cdot p \Leftrightarrow p = 3 - 5 \cdot P(A)$
   Setzt man nun für $P(A)$ die relative Häufigkeit $h(A)$ der Ja-Antworten aus der Umfrage ein, kann man also den entsprechenden Anteil p schätzen.

7.

8.

9. Quelle: mathematik lehren (2001), H. 104, S. 62-66

10. Quelle: MatheNetz 9 (2001)

11. $p_{\text{Alarm}}(\text{ungeplante Bodernnäherung}) =$
    $= \frac{5\cdot 10^{-7}\cdot 0,999}{5\cdot 10^{-7}\cdot 0,999+(1-5\cdot 10^{-7})\cdot 0,00002} = 0,0244 = 2,44\%$
    Bei Alarm ist die Wahrscheinlichkeit für eine ungeplante Bodernnäherung zwar nur $2,44\%$; der Alarm muss trotzdem sehr ernst genommen werden!

Teil V.

Ausbau der Funktionenlehre

15. Graphen ganzrationaler Funktionen

15.1. Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

15.1.1. Lineare Funktionen

1. $f_1(x) = \sqrt{3} \cdot x + 6 - 4\sqrt{3} \quad , \quad x_{01} = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0{,}536$

   $f_2(x) = -\sqrt{3} \cdot x + 6 + 4\sqrt{3} \quad , \quad x_{02} = 4 + 2\sqrt{3} \approx 7{,}464$

2.

3. $f(x) = -\frac{3}{4}\,x + \frac{13}{4} \quad , \quad g(x) = \frac{4}{3}\,x - \frac{4}{3} \quad , \quad \mathrm{S}\,(2{,}2|1{,}6)$

   $f\left(\frac{13}{3}\right) = 0 \quad , \quad g(1) = 0$

4. (a)

   (b) $y(x) = -0{,}0242\,\frac{\mathrm{min}}{\mathrm{a}}\,(x - 1955\,\mathrm{a}) + 13{,}677\,\mathrm{min}$

5. (a) $b(c-1) = d(a-1)$

   (b) Beispiele: $g_1(x) = x + 2$, $g_2(x) = x + 3$, $g_3(x) = x + 4$, $g_4(x) = x - 2$, $g_4(x) = x - 3$
   Diese Funktionen sind alle parallel zu f.
   Begrüngung:
   Aus $b(c-1) = d(a-1)$ folgt für diesen Fall $c = 1 \Rightarrow$
   $g(x) = x + d$, d beliebig. Diese Funktionen haben alle die gleiche Steigung wie f und sind daher alle parallel zu f.

   (c) Beispiele: $g_1(x) = 3x + 2$, $g_2(x) = 4x + 3$, $g_3(x) = 5x + 4$, $g_4(x) = -x - 2$, $g_4(x) = -2x - 3$
   Diese Funktionen gehen alle (wie auch f) durch den Punkt $(-1|-1)$.
   Begrüngung:
   Aus $b(c-1) = d(a-1)$ folgt für diesen Fall $c - 1 = d \Rightarrow$
   $g(x) = cx + c - 1 = c(x+1) - 1$. Diese Funktionen gehen alle durch $(-1|-1)$, da $g(-1) = -1$ unabhängig von c.

   (d) Der Graph von $f(x)$ schneidet die Winkelahlbierende des 1. und 3. Quadranten im Punkt $\mathrm{S}(-\frac{b}{a-1}|-\frac{b}{a-1})$.
   Aus $b(c-1) = d(a-1)$ folgt $d = \frac{b(c-1)}{a-1} \Rightarrow$
   $g(x) = cx + \frac{b(c-1)}{a-1} = c(x + \frac{b}{a-1}) - \frac{bc}{a-1}$.
   $g(x)$ geht offensichtlich für jedes c durch S.

6. $g \circ f(x) = c(ax+b)+d = acx+bc+d$ und
   $f \circ g(x) = a(cx+d)+b = acx+ad+b$
   $\Rightarrow bc+d = ad+b \Rightarrow b(c-1) = d(a-1)$

   1. Fall: $a = c = 1$:
   f und g kommutieren für alle b und d.
   D. h. alle Geraden, die parallel zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten sind, kommutieren miteinander.

   2. Fall: $a = 1$, $b = 0 \Rightarrow f(x) = x$ und g beliebig
   3. Fall: $c = 1$, $d = 0 \Rightarrow g(x) = x$ und f beliebig
   D. h. alle Geraden kommutieren mit der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten.

   4. Fall $b = d = 0 \Rightarrow f(x) = ax$ und $g(x) = cx$
   D. h. alle Ursprungsgeraden kommutieren miteinander.

   5. Fall: $a, c \neq 1$ und $b, d \neq 0$:
   Aus obiger Bedingung folgt: $d = \frac{b(c-1)}{a-1} \Rightarrow g(x) = cx + \frac{b(c-1)}{a-1} \Rightarrow$
   Geraden, die mit f kommutieren schneiden den Graphen von f im Punkt $(\frac{b}{1-a}|\frac{b}{1-a})$.

7. $f(x) = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}$, $g(x) = -\dfrac{5}{4}x + \dfrac{53}{20}$, $\mathrm{K}\left(1\middle|\dfrac{7}{5}\right)$

15.1.2. Quadratische Funktionen

1. (a) $\mathrm{S}\,(4|-3)$, $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{6}$ (b) $\mathrm{S}\,(-1|5)$, $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\frac{10}{3}}$

   (c) $\mathrm{S}\left(2\middle|-\frac{1}{2}\right)$, keine NS. 1

2. (a) $N_1(0|0)$, $N_2(-\frac{b}{a}|0)$
   (b) $x_{\mathrm{S}} = -\frac{b}{2a}$, $y_{\mathrm{S}} = -\frac{b^2}{4a}$
   (c) Die Scheitel liegen auf einer Gerade.
   (d) $y_{\mathrm{S}} = -\frac{b^2}{4a} = \frac{b}{2}(-\frac{b}{2a}) = \frac{b}{2} \cdot x_{\mathrm{S}}$
   (e) Die Scheitel liegen auf einer Parabel.
   (f) $y_{\mathrm{S}} = -\frac{b^2}{4a} = -a \cdot (-\frac{b}{2a})^2 = -a \cdot x_{\mathrm{S}}^2$

   2

3. $f(x) = x^2 + 6\,x + 7$ $g(x) = -x^2 - 2\,x + 4$

   $h(x) = -x^2 + 6\,x - 6$ $k(x) = x^2 - 8\,x + 20$

   3

4. $f(x)=-\frac{1}{2}\,x^2-2\,x+2 \quad g(x)=4\,x^2+8\,x$
   $h(x)=2\,x^2-12\,x+16$
   4

5. $f\circ g(x)$ und $g\circ f(x)$ berechnen.
   Aus Koeffizientenvergleich bei x^4 folgt: $a=d$
   Aus Koeffizientenvergleich bei x^3 folgt mit $a=d$: $e=b$
   Aus Koeffizientenvergleich bei x^2 folgt mit $a=d$ und $e=b$: $f=c$
   Also: Die Funktionene f und g kommutieren nur, wenn sie identisch sind. 5

6. (a) Die Punkte liegen auf einer Parabel.
   (b) $y=\sqrt{x^2+(y-1)^2}\Rightarrow y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$
   (c) $y=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\Rightarrow y=\frac{1}{2b}\,x^2-\frac{a}{b}\,x+\frac{a^2+b^2}{2b}$
   6

7. (a) Berührpunkte: (0|0), (1|1)
   (b) Berührpunkte: (0|0), $\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{4}\right)$, falls $a=-4$
   (c) Berührpunkte: (0|0), $\left(\frac{2}{b}\middle|\frac{4}{b^2}\right)$, falls $a=-\frac{b^2}{4}$
   (d) Bedingung für Berührpunkte $(x_B|x_B^2)$ verschieden von (0|0):
   $b=\frac{2}{x_B}$, $a=-\frac{1}{x_B^2}$, also $a=-\frac{1}{4}b^2\Rightarrow$
   $\mathrm{P}_1: a=-\frac{1}{9}, b=-\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}_2: a=-\frac{1}{16}, b=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}_3: a=-\frac{1}{36}, b=\frac{1}{3}$
   7

15.2. ganzrationale Funktionen

15.2.1. Nullstellen

1. (a) $x_1=1$, $x_2=-1-\sqrt{3}$, $x_3=-1+\sqrt{3}$
   (b) $x_1=-2$, $x_2=-2-\sqrt{5}$, $x_3=-2+\sqrt{5}$
   (c) $x_1=2$, $x_2=-5-\sqrt{5}$, $x_3=-5+\sqrt{5}$
   (d) $x_1=-1$, $x_2=5+\sqrt{3}$, $x_3=5-\sqrt{3}$
   (e) $x_1=-3$, $x_2=6+\sqrt{2}$, $x_3=6-\sqrt{2}$
   (f) $x_1=3$, $x_2=7+\sqrt{7}$, $x_3=7-\sqrt{7}$
   (g) $x_1=4$, $x_2=-8-\sqrt{11}$, $x_3=-8+\sqrt{11}$
   (h) $x_1=-4$, $x_2=12+\sqrt{13}$, $x_3=12-\sqrt{13}$

15.3. Vertiefen der Funktionenlehre

15.3.1. Eigenschaften von Funktionsgraphen

Symmetrie

1. (a) ungerade (b) keine Symmetrie (c) gerade

   (d) ungerade (e) keine Symmetrie (f) ungerade

   (g) gerade (h) ungerade (i) gerade

2. (a) g ist gerade, u ungerade
   (b) $f(x) = g(x) + u(x)$
   (c) $f(x) = g(x) + u(x)$ mit
      i. $g(x) = -1 - \frac{3}{x^2}$ und $u(x) = 2\,x - \frac{1}{x}$
      ii. $g(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$ und $u(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$
      iii. $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ und $u(x) = \frac{\cos x}{x}$

3. (a) $f_1(x) = -f_1(-x)$
   (b) $f_2(x) = -f_2(-x)$
   (c) $f_3(x) = f_3(-x)$
   (d) $f_4(x) = f_4(-x)$

4. (a)
   (b) $b(x) = x^2 + 4x + 5$
   (c) $c(x) = (x-2)^2 - 4(x-2) + 5 = x^2 - 8x + 17$
   (d) $d(x) = -h(x) = -x^2 + 4x - 5$
   (e) $e(x) = 6 - h(x) = -x^2 + 4x + 1$
   (f) $f(x) = -h(-x) = -x^2 + 4x - 5$

5.

6. (a) $f_1(2+x) = x^3 + 2x = -f_1(2-x)$
   (b) $f_2(-1+x) = x^3 + x = -f_2(-1-x)$
   (c) $f_3(-2+x) = x^4 + x^2 + 1 = f_3(-2-x)$

(d) $f_4(1+x) = x^4 + x^2 = f_3(1-x)$

7.

8. (a) $g(x) = |x|x$ ist punktsymmetrisch zu $(0|0)$. $f(x)$ erhält man aus $g(x)$ durch Verschiebung um 1 nach rechts ($x \to x-1$) und um 5 nach oben (Addition von 5!)$\Rightarrow$ Beh.

   (b) $g(x) = |x|x^2$ ist achsensymmetrisch zu $x = 0$. $f(x)$ erhält man aus $g(x)$ durch Verschiebung um 3 nach rechts ($x \to x-3$) und um 2 nach oben (Addition von 2!)$\Rightarrow$ Beh.

   (c) $g(x) = -|x|x$ ist punktsymmetrisch zu $(0|0)$. $f(x)$ erhält man aus $g(x)$ durch Verschiebung um 2 nach rechts ($x \to x-2$) und um 1 nach unten (Subtraktion von 1!)$\Rightarrow$ Beh.

   (d) $g(x) = -|x|x^2$ ist achsenymmetrisch zu $x = 0$. $f(x)$ erhält man aus $g(x)$ durch Verschiebung um 4 nach rechts ($x \to x-4$) und um 7 nach oben (Addition von 7!)$\Rightarrow$ Beh.

   (e) $f(\pi + \Delta x) = (\pi + \Delta x - \pi)\cos(\pi + \Delta x) = \Delta x \cos(\pi + \Delta x)$
   $f(\pi - \Delta x) = (\pi - \Delta x - \pi)\cos(\pi - \Delta x) = -\Delta x \cos(\pi + \Delta x) = -f(\pi + \Delta x) \Rightarrow$ Beh.

   (f) $f(\pi + \Delta x) = (\pi + \Delta x - \pi)\sin(\pi + \Delta x) = -\Delta x \sin(\Delta x)$
   $f(\pi - \Delta x) = (\pi - \Delta x - \pi)\sin(\pi - \Delta x) = -\Delta x \sin(\Delta x) = f(\pi + \Delta x) \Rightarrow$ Beh.

   (g) Zu zeigen: $f(x) = \cos(x+2)\sin(x+2)$ ist punktsymmetrisch zu $(-2|0)$.
   $f(-2 + \Delta x) = \cos(-2 + \Delta x + 2)\sin(-2 + \Delta x + 2) + 2 = \cos(\Delta x)\sin(\Delta x) + 2$
   $f(-2 - \Delta x) = \cos(-2 - \Delta x + 2)\sin(-2 - \Delta x + 2) + 2 = \cos(-\Delta x)\sin(-\Delta x) + 2 = -\cos(\Delta x)\sin(\Delta x) + 2 \Rightarrow$ Beh.

   (h) $f(x+2) - 5 = x^3 \Rightarrow$ Beh.

   (i) $f(x-1) - 1 = -x^3 \Rightarrow$ Beh.

9. $f(x)$ punktsymmetrisch zu $(a|0) \Leftrightarrow f(a+x) = -f(a-x) \Rightarrow$
   $g(a+x) = f(a+x)^2 = [-f(a-x)]^2 = f(a-x)^2 = g(a-x)$
   $\Rightarrow g(x)$ ist achsensymmetrisch zu $x = a$.

Manipulation am Funktionsgrahen

1.

2.

3.

4.

$$\begin{array}{lcrcl}
f \text{ an der } y\text{-Achse spiegeln} & : & g_1(x) & = & -\dfrac{x^3}{4} - x^2 \\[2ex]
g_1 \text{ zentrisch strecken} & : & g_2(x) & = & 2 \cdot g_1\left(\dfrac{x}{2}\right) = -\dfrac{x^3}{16} - \dfrac{x^2}{2} \\[2ex]
g_2 \text{ verschieben} & : & g(x) & = & -\dfrac{(x+2)^3}{16} - \dfrac{(x+2)^2}{2} + 2 \\[2ex]
f \text{ verschieben} & : & h_1(x) & = & \dfrac{(x+2)^3}{4} - (x+2)^2 + 2 \\[2ex]
h_1 \text{ an der } y\text{-Achse spiegeln} & : & h_2(x) & = & \dfrac{(-x+2)^3}{4} - (-x+2)^2 + 2 \\[2ex]
h_2 \text{ zentrisch strecken} & : & h(x) & = & 2 \cdot h_2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \\[2ex]
 & & & = & \dfrac{(-\frac{x}{2}+2)^3}{2} - 2\left(-\dfrac{x}{2}+2\right)^2 + 4 = \\[2ex]
 & & & = & -\dfrac{(x-4)^3}{16} - \dfrac{(x-4)^2}{2} + 4
\end{array}$$

$$g(x-6) + 2 = h(x)$$

5. $f(x) = x^2 + 6\,x + 7 \quad g(x) = -x^2 - 2\,x + 4$
   $h(x) = -x^2 + 6\,x - 6 \quad k(x) = x^2 - 8\,x + 20$

6. $f(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 - 2\,x + 2 \quad g(x) = 4\,x^2 + 8\,x$
   $h(x) = 2\,x^2 - 12\,x + 16$

7. $f(x) = 2\,\sin\left(\dfrac{2}{3}\,x - \pi\right) + 2 \qquad g(x) = 3\,\sin\left(\dfrac{1}{2}\,x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1$
   $h(x) = \dfrac{3}{2}\,\sin\left(2\,x - \dfrac{\pi}{2}\right) - \dfrac{7}{2}$

8.

9.

10. (a) $p(x) = -2(x+3)^2 + 5$

(b)
   i. $p(x) = -2(x+3)^2 + 7$
   ii. $p(x) = -2(x+3)^2$
   iii. $p(x) = -2(x+2)^2 + 5$
   iv. $p(x) = -2(x+6)^2 + 5$

(c)
   i. $p(x) = -2(x-3)^2 + 14$
   ii. $p(x) = -2(x+5)^2 + 10$

11. f spiegeln an der x-Achse → $f_1(x) = -f(x)$

    f_1 strecken mit Zentrum (0|0) in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$ und in y-Richtung mit Faktor $\frac{3}{4}$ →

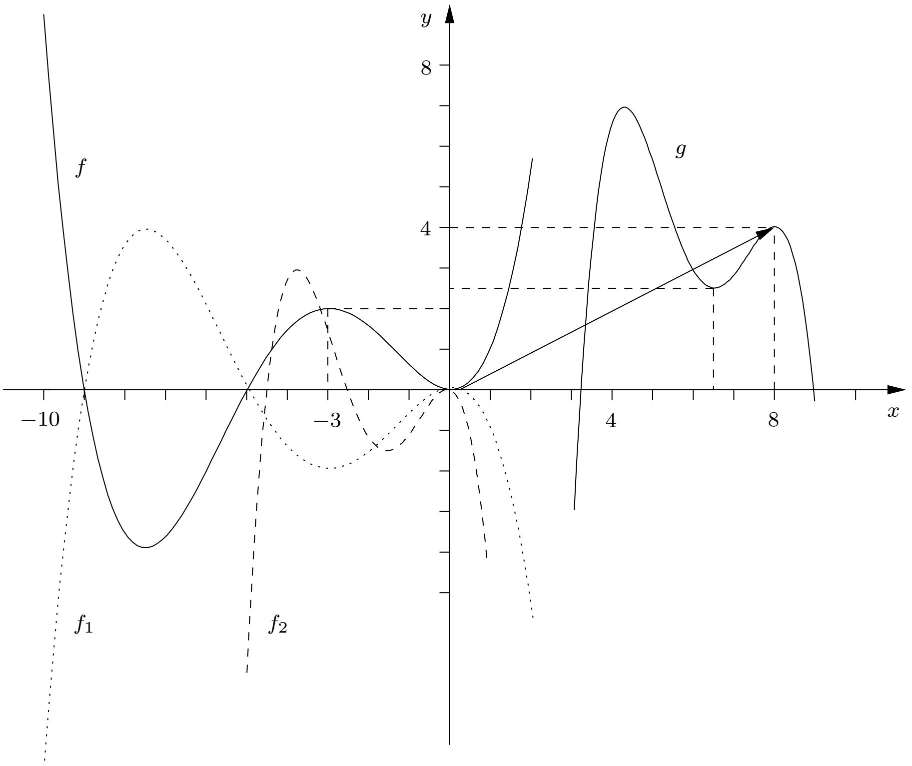
$$f_2(x) = -\frac{3}{4} f\,(2x) = -\frac{1}{18} x^2 (2x+5)(2x+9)$$

    f_2 verschieben um 8 nach rechts und um 4 nach oben →

$$g(x) = f_2(x-8) + 4 = -\frac{1}{18}(x-8)^2(2(x-8)+5)(2(x-8)+9)$$

$$g(x) = -\frac{1}{18}(x-8)^2(2x-11)(2x-7) + 4$$

    $g(3{,}5) = 4, \quad g(6{,}5) = 2{,}5, \quad g(8) = 4$



12. $f(x) = 2 \cdot \sin\left[\frac{3}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] + 3$

    Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{4}{3}$ – Verschiebung um $\frac{\pi}{3}$ nach rechts – Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2 – Verschiebung um 3 nach oben.

    Oder:

    Verschiebung um $\frac{\pi}{4}$ nach rechts – Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{4}{3}$ – Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2 – Verschiebung um 3 nach oben.

13. $g(x) = \sin\left[\frac{1}{k}(x + a)\right] = \sin\left[\frac{3}{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \sin\left[\frac{3}{2}x + \frac{3\pi}{8}\right]$

    $h(x) = \sin\left[\frac{1}{k}x + a\right] = \sin\left[\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4}\right] = \sin\left[\frac{3}{2}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]$

    $h(x) = \sin\left[\frac{3}{2}\left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right)\right] = g\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \implies$ Verschiebung um $\frac{\pi}{12}$ nach rechts.

15.3.2. Grenzwerte

Grenzwerte mit x -¿ Unendlich

1. (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2 - x}{1 + x} = -1$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1 + \sin(x)}{x} = 0$

   (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 1}} = 2$

   (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x + 2\sqrt{x}}{3x - \sqrt{x}} = \frac{1}{3}$

2. (2) ist falsch, da diese Zerlegung in das Produkt der Grenzwerte nur richtig ist, wenn beide Grenzwerte existieren.
   (3) ist falsch, da der zweite Faktor unendlich ist.

3. (a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) -8 (d) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{1}{3}$
   (f) $\frac{1}{4}$ (g) $\frac{1}{5}$ (h) 0 (i) $\frac{1}{2}$

4. (a) $\frac{1}{2}$, ∞

   (b) 0, $-\frac{1}{2}$, $-\infty$

5. (a) $\sin\left(\frac{\pi}{x_{1,m}}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{x_{2,m}}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{x_{5,m}}\right)=0$, für $m\in\{1,2,3,4,5,...\}$

$\sin\left(\frac{\pi}{x_{4,m}}\right)=0$, für $m\in\{2,3,4,5,...\}$

$\sin\left(\frac{\pi}{x_{8,m}}\right)=0$, für $m\in\{3,4,5,...\}$

$\sin\left(\frac{\pi}{x_{3,m}}\right)=\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{x_{6,m}}\right)=\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ und

$\sin\left(\frac{\pi}{x_{9,m}}\right)=\sin\left(\frac{10}{9}\pi\right)=-0{,}3420201...$, für $m\in\{2,3,4,5,...\}$

Für $\sin\left(\frac{\pi}{x_{7,m}}\right)$ existiert kein Grenzwert.

(b) $\sin\left(\frac{\pi}{x_{1,m}}\right)=\sin(10^m\cdot\pi)=0$

$\sin\left(\frac{\pi}{x_{2,m}}\right)=\sin(5\cdot 10^{m-1}\cdot\pi)=0$

$\sin\left(\frac{\pi}{x_{3,m}}\right)=\sin\left(\frac{10^m-4+4}{3}\cdot\pi\right)=\sin\left(2k\pi+\frac{4}{3}\cdot\pi\right)=\sin\left(\frac{4}{3}\cdot\pi\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{x_{4,m}}\right)=\sin(5^2\cdot 10^{m-2}\cdot\pi)=0$, für $m\in\{2,3,4,5,...\}$

$\sin\left(\frac{\pi}{x_{5,m}}\right)=\sin(2\cdot 10^{m-1}\cdot\pi)=0$

$\sin\left(\frac{\pi}{x_{6,m}}\right)=\sin\left(\frac{10^m-4+4}{6}\cdot\pi\right)=\sin\left(2k\pi+\frac{4}{6}\cdot\pi\right)=\sin\left(\frac{2}{3}\cdot\pi\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{x_{8,m}}\right)=\sin(5^3\cdot 10^{m-3}\cdot\pi)=0$, für $m\in\{3,4,5,...\}$

$\sin\left(\frac{\pi}{x_{9,m}}\right)=\sin\left(\frac{10^m-10+10}{9}\cdot\pi\right)=\sin\left(2k\pi+\frac{10}{9}\cdot\pi\right)=\sin\left(\frac{10}{9}\cdot\pi\right)$, für $m\in\{2,3,4,5,...\}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{x_{7,m}}\right)=\begin{cases}-\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) & \text{falls} \quad m=1+6k\\ \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) & \text{falls} \quad m=2+6k\\ \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right) & \text{falls} \quad m=3+6k\\ \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) & \text{falls} \quad m=4+6k\\ -\sin\left(\frac{5\pi}{7}\right) & \text{falls} \quad m=5+6k\\ -\sin\left(\frac{1\pi}{7}\right) & \text{falls} \quad m=6+6k\end{cases}$$

6. (a) $\pm\infty$ (b) $-\infty$ (c) 0^+ (d) $0^\pm$ (e) $\mp\infty$ (f) 0^+

7. (a) $\left(-\frac{1}{3}\right)^+$ (b) 1^- (c) 0^+ (d) $+\infty$ (e) 1^+ (f) 3^-

8. $+\infty$ für gerades n, $\pm\infty$ für ungerades n

9. (a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x$ (b) $f(x) = x$, $g(x) = x$ (c) $f(x) = x$, $g(x) = x^2$
(d) $f(x) = x + 5$, $g(x) = x$

10. Lineare Näherung: $x \to +\infty \implies x > 0 \implies$

$$\sqrt{x^2+1} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \approx x\left(1+\frac{1}{2x^2}\right)$$

(a) 0^+ (b) $\left(\frac{1}{2}\right)^-$ (c) $+\infty$ (d) $-\infty$

11. (a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3^x-2}{2\cdot 3^x} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^- \\ -\infty \end{cases}$ (b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{2^x} = \begin{cases} 0 \\ \text{existiert nicht} \end{cases}$

(c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (2^x - x^{100}) = \pm\infty$ (d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (x^3 \cdot 10^{-x}) = \begin{cases} 0 \\ -\infty \end{cases}$

(e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (x^{20} - 1{,}001^x) = \mp\infty$ (f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (3^x - 2^x) = \begin{cases} +\infty \\ 0^- \end{cases}$

15.3.3. Funktionen mit Parameter