SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Jahrgangsstufe 10 (Gymnasium)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

19. April 2014

Inhaltsverzeichnis

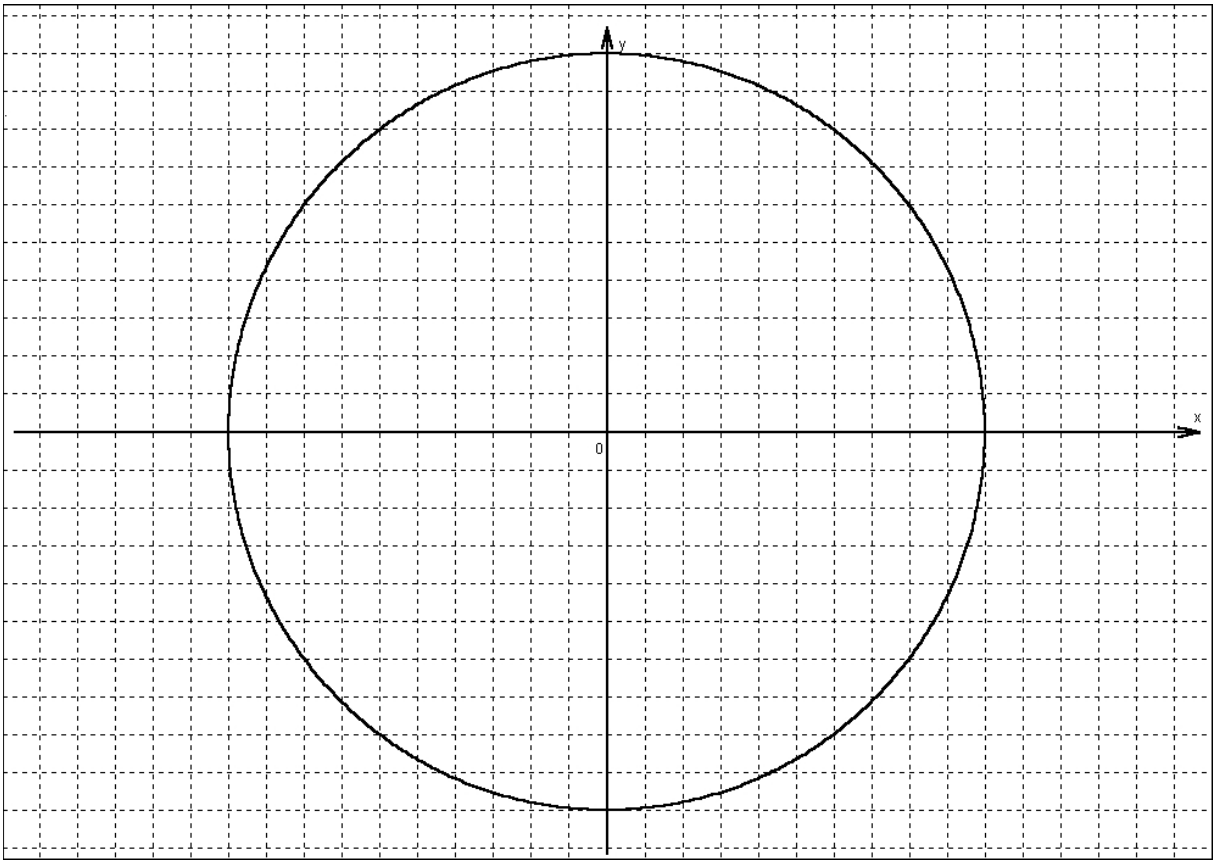
Teil I.

Kreiszahl pi, Kreis, Kugel

1. Kreismessung

1.1. Kreis - Umfang und Fläche - Approximationsverfahren

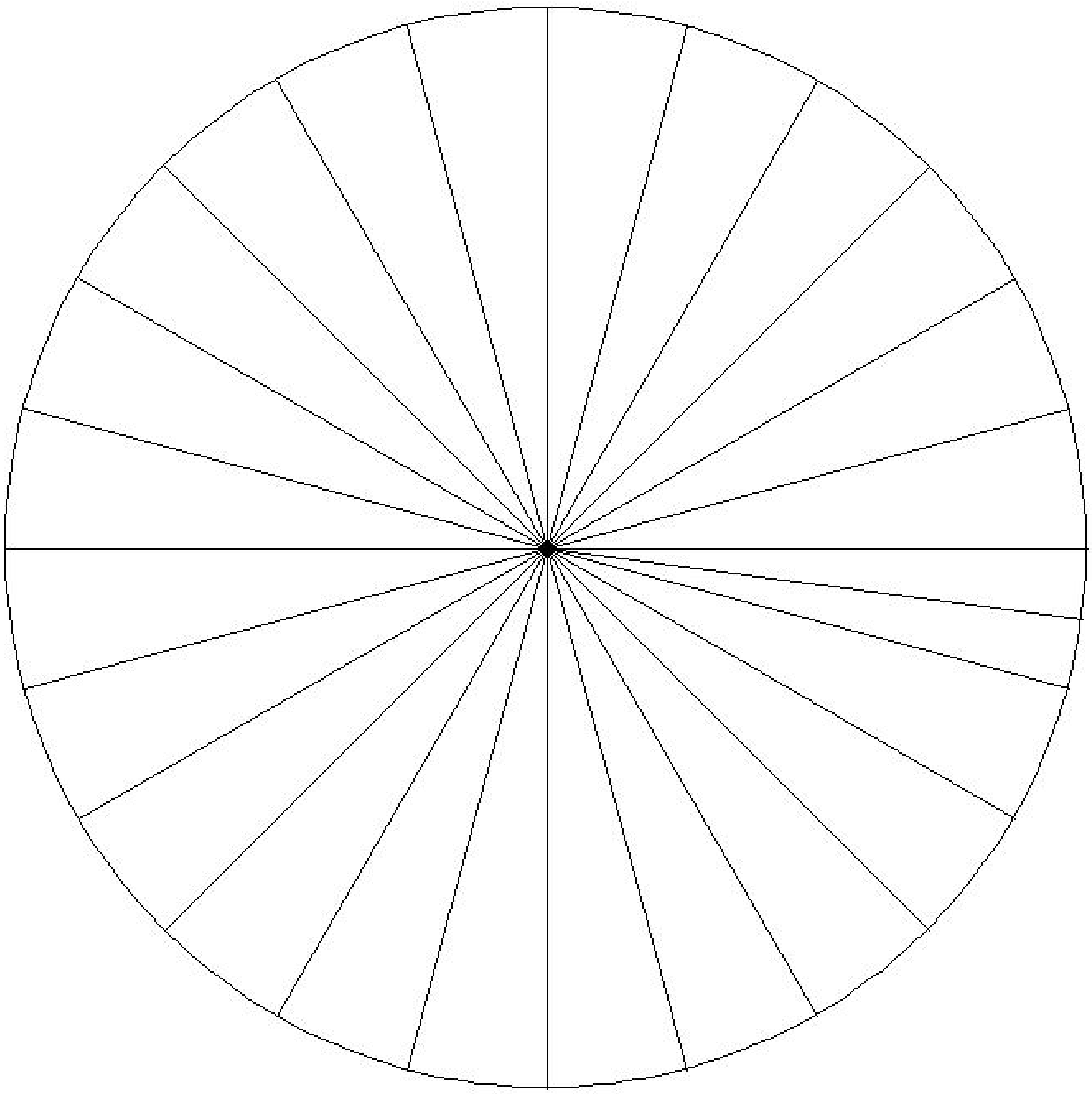
1. **Kästchen zählen**



Bestimme den Flächeninhalt des Kreises möglichst genau!

Lösung:

2. **Vom Umfang zum Flächeninhalt**



Kannst du entdecken, wie Umfang und Flächeninhalt eines Kreises zusammenhängen? Vielleicht hilft es dir, wenn du die ausgeschnittenen Teile geeignet aneinander legst. Was passiert, wenn die Kreisteile immer dünner werden?

Lösung:

3. **Aufgaben rund um den Kreis**

   Die beiden Formeln $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} g \cdot h$ und $A_{Sektor} = \frac{1}{2} b \cdot r$ würden ähnliches Aussehen haben und daher gut zu behalten sein. Stimmt die zweite Formel denn überhaupt?

Lösung: Ja!

4. **Band um den Äquator**

   Um den Äquator denke man sich straff ein Seil gespannt. Dieses wird nun an einer beliebigen Stelle aufgeschnitten und um exakt einen Meter verlängert. Dann wird es zusammengebunden und wieder um den Äquator gelegt. Es steht nun wegen der durchgeführten Verlängerung etwas vom Äquator ab. Passt unter dem Seil eine Maus durch?

Untersucht die zugeteilten Gegenstände oder sucht euch selbst geeignete. Ermittelt zunächst den Umfang und den Radius des Gegenstandes.
Dann verlängert ihr den Umfang um 1 m und legt ein Band mit dieser Länge so um den Gegenstand, dass der Abstand des Gegenstandes zum Band überall gleich ist. Wie groß ist dieser Abstand?

Nr.	Gegenstand	Radius	Umfang	Abstand des verlängerten Bandes vom Gegenstand
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				
9.				
10.				
11.				
12.				
13.				
14.				
15.				

Was fällt euch auf?

Variationen:

(a) Andere Gegenstände: Teedose, Fahrradreifen,...

(b) Alternative Aufgabe: Wir denken uns eine Schnur um die Erde gelegt und verlängern diese um 1 m. Nun wird die ganze Schnur an einer einzigen Stelle straff von der Erde abgezogen. Wie weit ist die abziehende Hand von der Erde entfernt?

Lösung: der alternativen Aufgabe: 121 m. Aus: Walsch, W.: Die aufgehängte Erdkugel; in: Mathematische Unte

5. **Rund ums Fahrrad**

Der Kilometerzähler eines Autos ist abgestimmt auf einen Reifendurchmesser von 50 cm. Mit der Zeit fahren sich die Reifen natürlich ab. Wird der Kilometerzähler dadurch ungenau?

Lösung:

6. **Rund ums Fahrrad**

Bei einem Fahrrad beträgt der Durchmesser des Hinterrades 70 cm, das vordere Kettenrad hat 46 Zähne, das hintere 16 Zähne. Wie oft muss ein Radfahrer die Pedale durchtreten, um 120 km zurückzulegen?

Lösung:

7. **Rund ums Fahrrad**

Einige Maße von Fahrrädern:

Fahrradtyp	**Durchmesser**			**Radumfang**	**Anzahl der Zähne**	
	der Felge		**des Rades**		Kettenrad	Zahnkramz (am Hinterrad)
	in Zoll	in Meter	in Meter	in Meter		
Kinderrad	20				36	18
Jugendrad	24				40	18
Tourenrad	26				46	18
	28				46	18
Klapprad	20				46	16

Lösung:

8. **Rund ums Fahrrad**

   Ein neuer Autoreifen hat 9 mm Profil. Berechne den Gummiverlust bei einem abgefahrenen Reifen wenn die Profiltiefe nur noch 3 mm beträgt.

Lösung:

9. **Pizza**

PIZZE - PIZZA

		Mini Ø 20cm	Maxi Ø 30cm	Super Maxi Ø 40cm
1.	**Salami** Tomaten, Käse, Salami	3,50	6,50	14,50
2.	**Roma** Tomaten, Käse, Schinken*, Pilze	4,10	8,10	15,50
3.	**Diavolo** (scharf) Tomaten, Käse, Salami, Peperoni, Oliven	5,50	9,80	16,50
4.	**Rustika** Tomaten, Käse, Champignons, Salami, Paprika	5,50	8,50	19,50
5.	**Pomodori** Tomaten, Käse, Schinken*, frische Tomaten, Mozarella	6,50	9,10	18,20
6.	**Quattro Stagioni** Tomaten, Käse, Schinken*, Champignons, Artischocken	6,10	10,80	18,20
7.	**Bolognese** Bolognese, Käse, Champignons	6,50	9,50	19,20
8.	**Lombarde** Tomaten, Käse, Schinken*, Zwiebeln, Champignons	5,10	8,50	18,80
9.	**Hawaii** Tomaten, Käse, Schinken*,Ananas	5,10	8,50	17,90
10.	**Tonno** Tomaten, Käse, Thunfisch, Zwiebeln	6,50	10,50	18,10
11.	**Conladin** Tomaten, Käse, Shrimps, Oliven, Thunfisch, Peperoni, Knoblauch	8,50	11,50	19,20
12.	**Pizza Speziale** NEU Käse, Sauerrahm, Kartoffelscheiben, Spinat, Knoblauch, Mozarella	7,50	10,50	18,50

⌀ ca. 40cm JUMBO-PIZZA

FÜR IHRE PARTY ODER BEI SUPERHUNGER! ALLE PIZZAS AUS UNSEREM ANGEBOT: CA. 2,5-FACHE GRÖSSE - NUR DOPPELTER PREIS.

Beurteile die Preise in der neben stehenden Speisekarte der Firma Tornado.
Dinos Pizza Taxi bietet normalerweise runde Pizzas mit einem Durchmesser von 28 cm an. Würdest du eine Jumbo-Pizza bestellen?

Anmerkung: Es empfiehlt sich die Verwendung eines aktuellen Pizza-Prospekts mit Euro-Preisen.

Lösung: Der Preisvorteil bei der Jumbo-Pizza ist sehr gering. Die Werbung ist natürlich echt: Vielleicht sollten wir mal ein paar Schüler bei Dinos vorbeischicken ...

10. **Pizza**

Boris und Ingo haben zwei Pizzas geholt. Die Pizzas werden jeweils in 8 gleich große Stücke geschnitten. Boris isst seine eigene Pizza und außerdem 2 Stücke von Ingos Pizza, deren Rest Ingo selbst isst.

(a) Wie viel mehr Pizza isst Boris im Vergleich zu Ingo?

Die Pizzas, die kreisrund sind, sind in den Größen klein, mittel und groß erhältlich. Eine kleine Pizza hat einen Durchmesser von 30 cm, eine mittlere hat einen Durchmesser von 40 cm und eine große einen Durchmesser von 50 cm. Alle sind gleich dick. Eine kleine Pizza kostet 6 Euro, eine mittlere 9 Euro und die große 14 Euro.

(b) Welche Pizza muss man kaufen, wenn man möglichst viel Pizza pro Euro bekommen möchte?

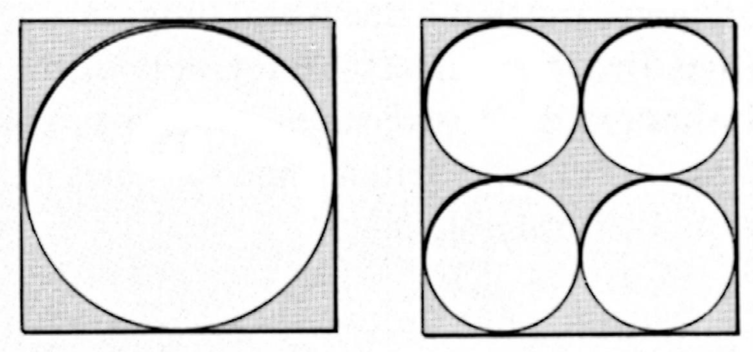
Boris und Ingo erwarten Gäste und benötigen insgesamt 10 kleine Pizzas. Sie überlegen, an Stelle der 10 kleinen Pizzas eine Kombination aus kleinen mittleren und / oder großen Pizzas zu kaufen, mit denen sie die gleiche Menge Pizza für weniger Geld bekommen würden.

Lösung: (a) 67%

(b) Die große Pizza

(c) Man kann 9 Euro sparen.

11. **Aufgaben rund um den Kreis**



Aus einem Blech sollen 4 kreisförmige Bleche oder aber ein großer Kreis herausgestanzt werden. Das Restblech wird entsorgt.

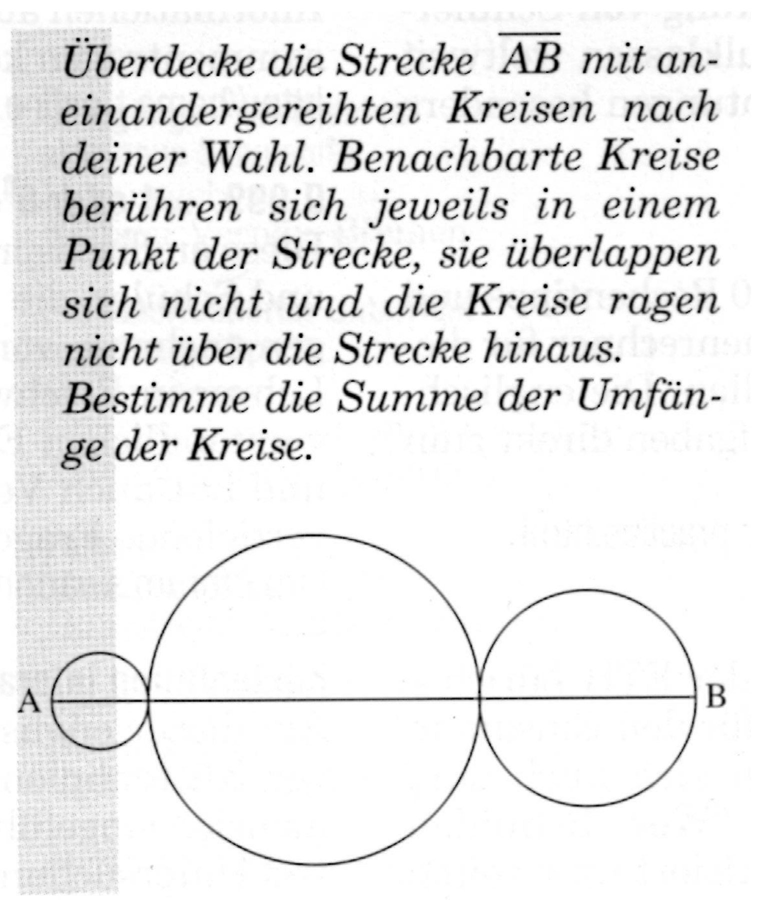
Lösung:

12. **Aufgaben rund um den Kreis**

Der Wurfkreis beim Diskuswerfen hat einen Durchmesser von $2,5\,\text{m}$ und wird von einem $6\,\text{mm}$ dicken und $76\,\text{mm}$ hohen Stahlband begrenzt. Diese Stahlband muss ausgewechselt werden. Kannst du es allein tragen? Schätze zunächst.

Lösung:

13. **Aufgaben rund um den Kreis**



Überdecke die Strecke $\overline{AB}$ mit aneinandergereihten Kreisen nach deiner Wahl. Benachbarte Kreise berühren sich jeweils in einem Punkt der Strecke, sie überlappen sich nicht und die Kreise ragen nicht über die Strecke hinaus. Bestimme die Summe der Umfänge der Kreise.

Lösung: Umfang proportional zum Radius. Also z.B. durch einen Kreis ersetzen.

14. **Aug' in Aug'**

Aug' in Aug'

Einen Sehtest der besonderen Art machten am Mittwoch diese beiden Mitarbeiter einer Werbefirma in Düsseldorf. Sie überprüften ein Werbeplakat, das vor eine Hauswand gespannt ist, auf Löcher und Risse. (Foto: AP)

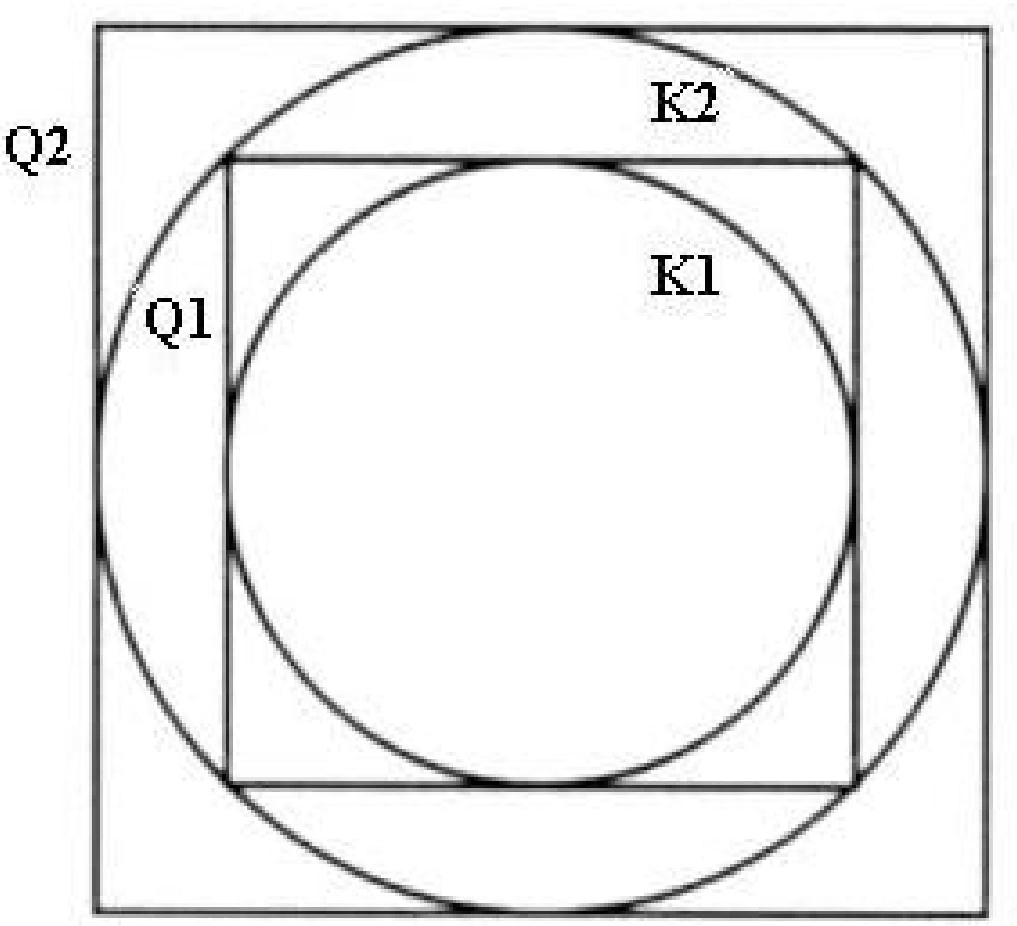
Welchen Flächeninhalt hätte das Auge einer Frau, die wirklich so groß ist wie auf dem Plakat?
Wie groß wäre die Frau?

Quelle: HNA vom 7.7.2001

Lösung: Durchmesser ca. $2,6\,\mathrm{m}$. Flächeninhalt ca. $5,3\,\mathrm{m}^2$.
Durchmesser in Wirklichkeit ca. $1\,\mathrm{cm} = 0,01\,\mathrm{m}$. Nehmen wir an, die Frau ist in Wirklichkeit $1,7\,\mathrm{m}$ groß, dann wäre sie $221\,\mathrm{m}$ groß.

15. **Kreise und Quadrate**

Zuerst wird ein ganz gewöhnlicher Kreis mit dem Radius von 1 cm gezeichnet. Diesen nennen wir $K1$.
Um diesen Kreis wird dann ein Quadrat gezeichnet, in das der Kreis ganz genau hineinpasst und es an vier Stellen berührt. Dieses Quadrat nennen wir $Q1$.
Anschließend wird um das Quadrat ein Kreis gezeichnet, in den das Quadrat ganz genau hineinpasst. Diesen Kreis nennen wir $K2$. Dies kann man unendlich oft wiederholen.



(a) Wie groß ist der Durchmesser von $K11$?

(b) Wie groß ist die Fläche von $Q20$?

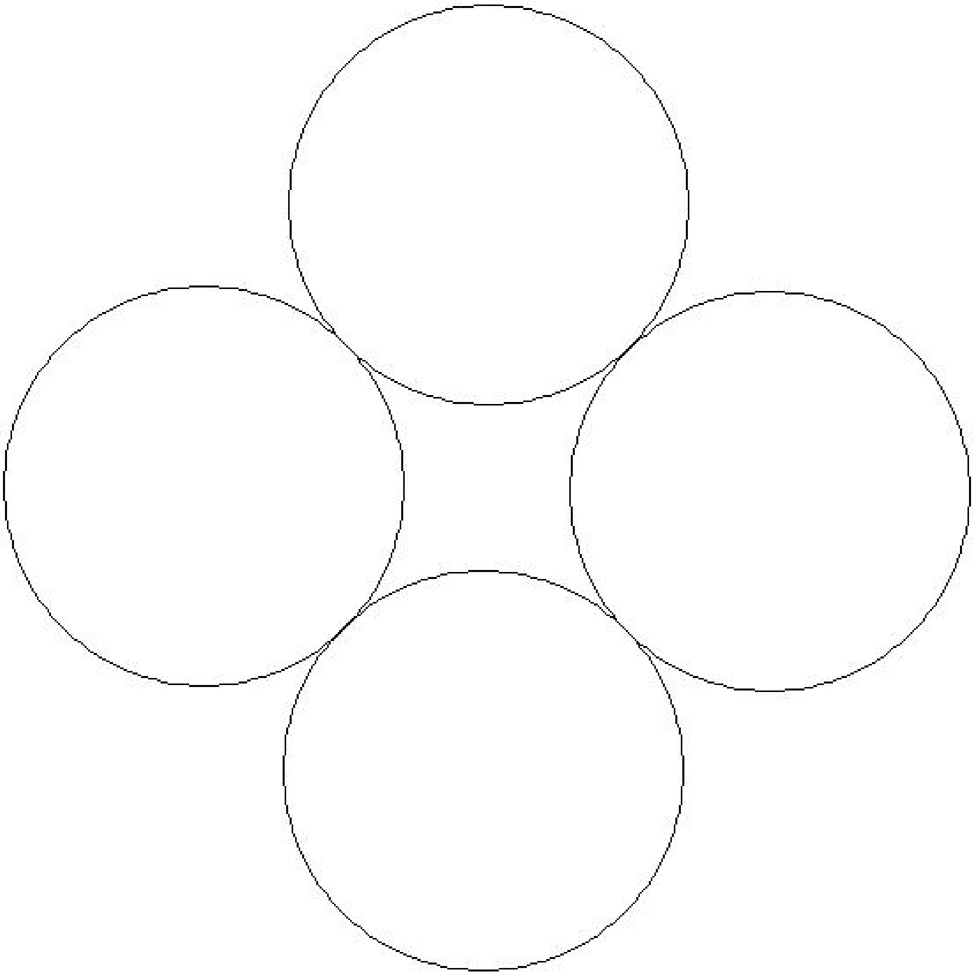
Quelle: Fich, O.: Mathelogik (2001)

Lösung: (a) 64 cm (Radius $= \sqrt{2^{x-1}}$ wobei x die Nummer des Kreises ist)

(b) ca. 210 m^2 (wie (a): Durchmesser Kreis $20 \approx 14,48\,\mathrm{m}$)

16. **Vier Kreise**

Vier kongruente Kreise sind symmetrisch angeordnet, so dass sie sich gerade berühren und eine Fläche einschließen.

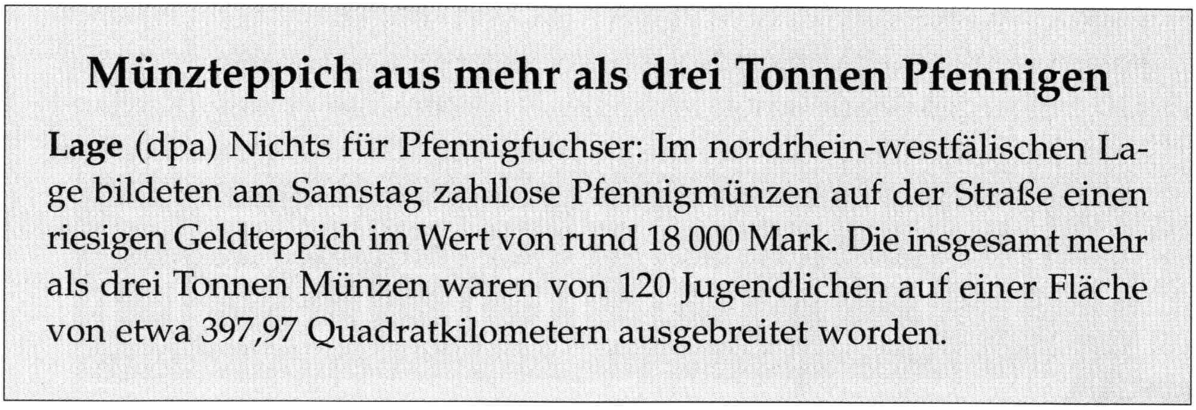


Wir nehmen an, die Kreise haben einen Durchmesser von 10 cm.
Wie groß ist die eingeschlossene Fläche?

Quelle: Fich, O.: Mathelogik (2001)

Lösung: $\approx 21,5\,\mathrm{cm}^2$ (Quadrat mit FI $4r^2$ durch Verbinden der Mittelpunkte; Dieses Quadrat umfasst genau ein Viertel jedes Kreises und außerdem das von den Kreisen eingeschlossene Areal.

17. Münzteppich aus Pfennigen

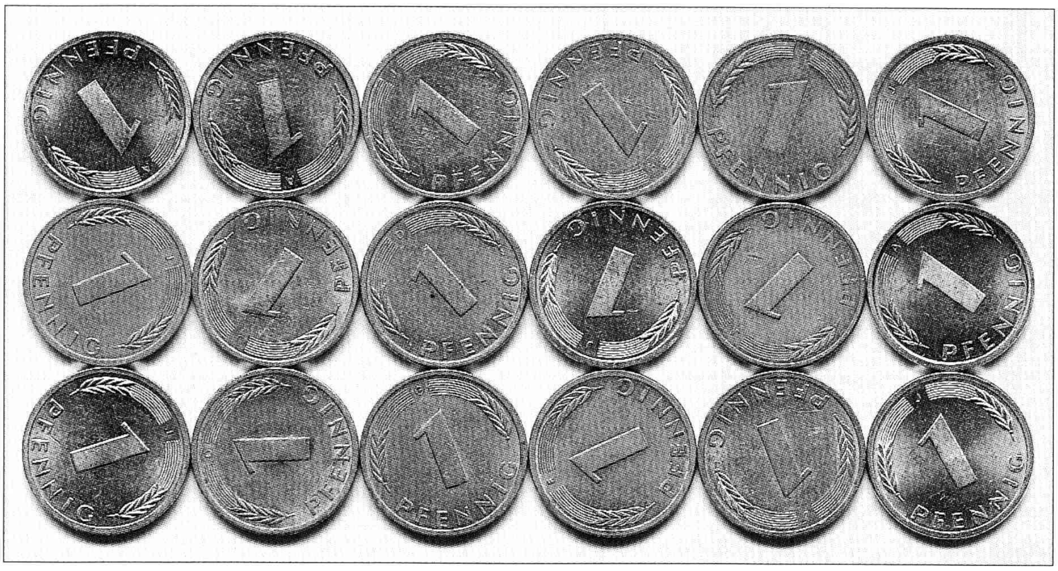


Münzteppich aus mehr als drei Tonnen Pfennigen

Lage (dpa) Nichts für Pfennigfuchser: Im nordrhein-westfälischen Lage bildeten am Samstag zahllose Pfennigmünzen auf der Straße einen riesigen Geldteppich im Wert von rund 18 000 Mark. Die insgesamt mehr als drei Tonnen Münzen waren von 120 Jugendlichen auf einer Fläche von etwa 397,97 Quadratkilometern ausgebreitet worden.

Leipziger Volkszeitung vom 2.12.1996 (IP)

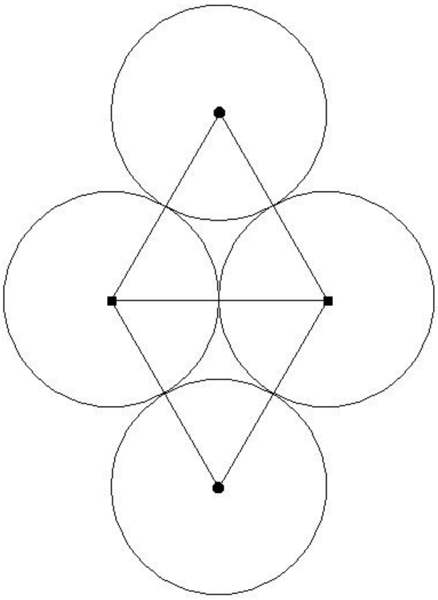
Prüfe die Gewichtsangabe und die Flächenangabe in der Zeitungsmeldung. Nimm dabei an, dass die Münzen wie in der Abbildung auf die Straße gelegt wurden.



Kannst du eine platzsparendere Legeweise finden? Berechne dann die benötigte Fläche.

Quelle: Herget/Scholz: Die etwas andere Aufgabe (1998)

Lösung: Gewicht: Ein Pfennigstück wiegt ca. 2 g. Also Gewicht von 1800.000 Pfennigen: $3,6\,\mathrm{t}$



Fläche: 2 unterschiedliche Methoden.
1. Für 15 Münzen benötigt man ca. $38,6\,\mathrm{cm}^2$ (mit Rechteck annähern). Also für 1,8 Mill.: ca. $460\,\mathrm{m}^2$.
2. Mit jeder Münze kommen gerade auch zwei „Zwickel“ von je dem Inhalt $r \cdot r\sqrt{3} - \frac{\pi r^2}{2}$ hinzu. Der Flächenbedarf pro Münze beträgt also $2\sqrt{3} \cdot r^2$, und bei einem Radius von $0,84\,\mathrm{cm}$ erhält man als Gesamtfläche ca. $440\,\mathrm{m}^2$. Es lohnt sich also, genauer hinzuschauen.

18. Nebenstehende Skizze zeigt einen Ausschnitt zweier regulärer n-Ecke mit den Seitenlängen $\overline{B_1B_2} = s_n$ und $\overline{A_1A_2} = t_n$, welche einem gegebenen Kreis $k(M; r)$ ein- bzw. umbeschrieben sind.

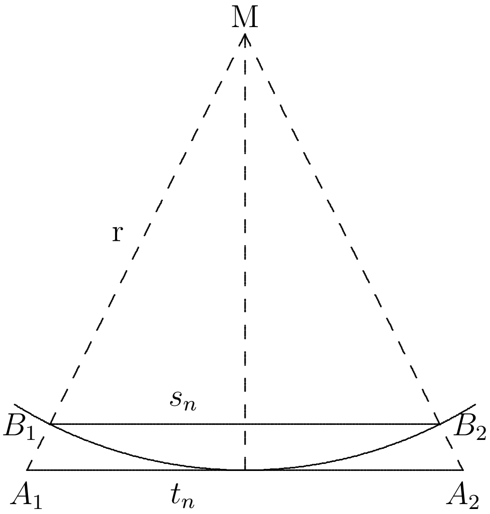
    (a) Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt F_n des <u>um</u>beschriebenen n-Ecks die Formel

    $F_n = \frac{1}{2} \cdot r \cdot U_n$

    gilt, wobei U_n den Umfang dieses n-Ecks bezeichnet.

    (b) Beweisen Sie unter Verwendung des Strahlensatzes die Formel

    $$t_n = \frac{s_n}{\sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2r}\right)^2}}$$



Lösung:

19. Im Unterricht wurden die folgenden zwei Formeln besprochen:

$$U_{2n} = \frac{2u_nU_n}{u_n + U_n}; \quad u_{2n} = \sqrt{u_nU_{2n}}$$

Dabei ist u_n der Umfang des einem Kreis mit dem Radius r einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks, U_n der Umfang des demselben Kreis umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks.

(a) Geben Sie den Umfang des einem Kreis mit dem Radius r einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks an. Bestimmen Sie auch den Umfang des demselben Kreis umbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks.

(b) Bestimmen Sie mit den oben angegebenen Formeln die Umfänge der demselben Kreis umbeschriebenen und einbeschriebenen regelmäßigen Zwölfecke. Vereinfachen Sie die erhaltenen Ausdrücke <u>vor</u> Anwendung des TR soweit wie möglich.

(c) Welche Abschätzung ergibt sich aus den in (b) berechneten Werten für π? Geben Sie auch an, um wieviel sich die beiden Werte prozentual von π unterscheiden. Berechnen Sie schließlich das arithmetische Mittel der beiden Werte.

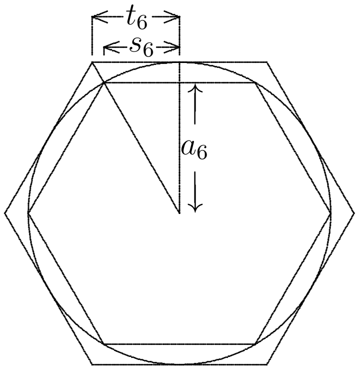
Lösung: (a) $u_6 = 6r$; $U_6 = 4\sqrt{3} \cdot r$ (b) $u_{12} = 6{,}2117\,r$; $U_{12} = 6{,}4308\,r$
(c) $-1{,}14$ % bzw. $+2{,}35$ % ; $m = 3{,}1606$

20. Ein Kreis vom Radius $r = 1$ ist von einem einbeschriebenen und einem umbeschriebenen regelmäßigen Sechseck eingeschlossen (vgl. Abb.).

(a) Schreiben Sie die Länge des Tangentenstücks t_6 als Vielfaches der halben Sehne s_6.

(b) Der Umfang des umbeschriebenen Sechsecks wird mit U_6, der des einbeschriebenen Sechsecks mit u_6 bezeichnet. Schreiben Sie U_6 als Vielfaches von u_6.

(c) Berechnen Sie Zahlenwerte für beide Umfänge.



Lösung: Dies ist der Ausgangspunkt für die π-Berechnung nach Archimedes
a) $t_6 = \frac{2}{\sqrt{3}}s_6$ b) $U_6 = \frac{2}{\sqrt{3}}u_6$ c) $u_6 = 6{,}0000$, $U_6 = 6{,}9282$

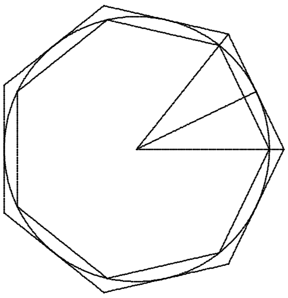
21. Ein Kreis vom Radius $r = 1$ wird wie in der Abbildung von einem einbeschriebenen und einem umbeschriebenen regelmäßigen n-Eck eingeschlossen (Umfänge u_n bzw. U_n). Beide Vielecke können in kongruente, gleichschenklige Dreiecke zerlegt werden,

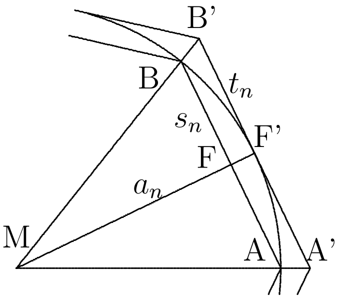
für die folgende Bezeichnungen gewählt werden: $a_n = \overline{MF}$ für die Höhe des Dreiecks ABM, $s_n = \overline{FB}$ für die Hälfte der Sehne, $t_n = \overline{F'B'}$ für das entsprechende Tangentenstück.

(a) Zeige: $t_n = \frac{s_n}{a_n}$

(b) Welche Gleichungen bestehen zwischen U_n und t_n bzw. u_n und s_n?

(c) Begründen Sie $U_n = \frac{u_n}{a_n}$.





Lösung: a) Strahlensatz b) $U_n = 2nt_n$, $u_n = 2ns_n$ c) Division $\frac{U_n}{u_n}$

22. Untenstehende Abbildung zeigt ausschnittsweise das dem Einheitskreis ($r = 1$) umbeschriebene regelmäßige n-Eck $A_1A_2A_3...A_n$.
Die **halbe** Seitenlänge dieses n-Ecks werde mit t_n bezeichnet.
Die Strecke $[B_1B_2]$ ist die Seite des umbeschriebenen 2n-Ecks mit der Länge $2\,t_{2n}$.

(a) Geben Sie eine Formel für die Streckenlänge $\overline{MA_2}$ in Abhängigkeit von t_n an!

(b) Beweisen Sie: $t_{2n} = \dfrac{\sqrt{1+t_n^2}-1}{t_n}$.

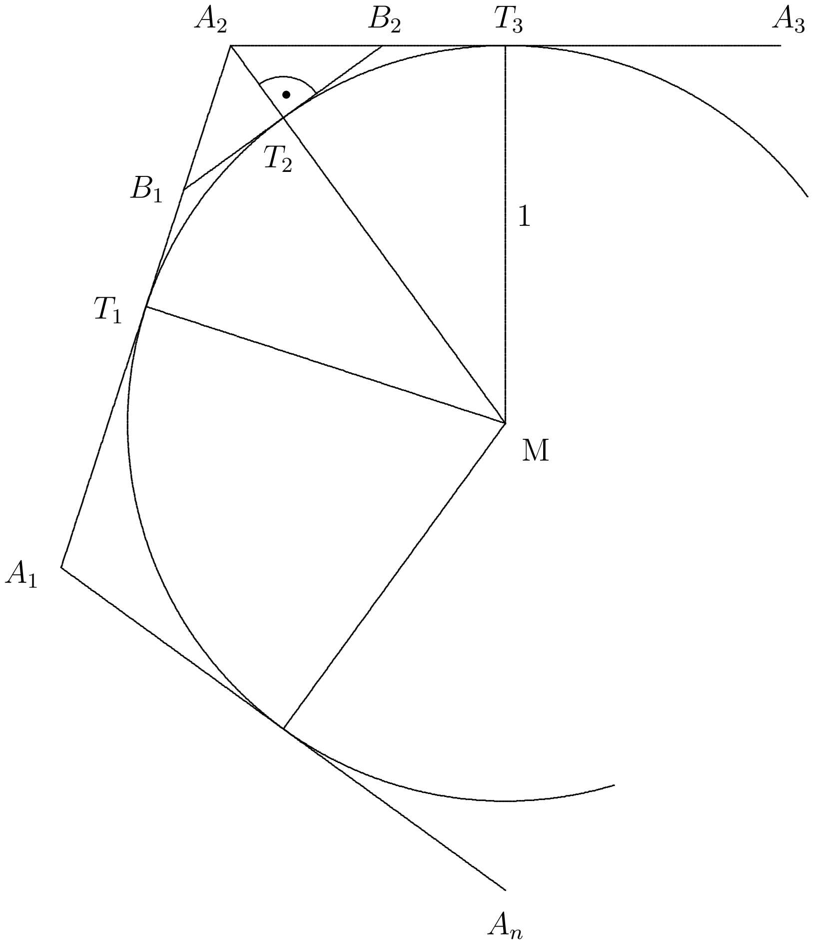
(Anleitung: Es ist $\overline{B_2T_2} = \overline{B_2T_3} = t_{2n}$.)

(c) Berechnen Sie mit der Formel aus b) den Wert t_8 und schätzen Sie damit die Kreiszahl π nach oben ab!

(d) Begründen Sie kurz, dass die in b) hergeleitete Formel numerisch instabil ist und leiten Sie dann die numerisch stabile Formel

$$t_{2n} = \frac{t_n}{\sqrt{1+t_n^2}+1}$$

her!



Lösung: (a): $\overline{MA_2} = \sqrt{1+t_n^2}$
(c): $t_8 = \sqrt{2}-1$; $\pi < 8\sqrt{2}-8$
(d): Der Nenner strebt bei laufender Verdoppelung von n gegen Null!

23. Einem Kreis $k(M;r)$ ist ein reguläres 10-Eck <u>ein</u>beschrieben.

(a) Berechnen Sie ausführlich die Größe eines Innenwinkels dieses Zehnecks!

Für die Seitenlänge s_{10} des Zehnecks gilt die Beziehung
$s_{10} = \frac{r}{2} \cdot (\sqrt{5}-1)$.

(b) Berechnen Sie den Inkreisradius ϱ_{10} des Zehnecks in Abhängigkeit vom Radius r des Kreises $k(M;r)$! Eine Skizze ist hilfreich!

(c) Wie groß muss der Radius r gewählt werden, damit $s_{10} = 2\,\mathrm{cm}$ gilt? Exaktes Ergebnis ohne Wurzel im Nenner!

Lösung: (a): 144°
(b): $\varrho_{10} = \frac{r}{4} \cdot \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$
(c): $r = (\sqrt{5} + 1)\,\mathrm{cm}$

24. Einem Kreis vom Radius $r = 1$ ist ein regelmäßiges Sechseck einbeschrieben. Dieses wird zu einem regelmäßigen Zwölfeck verfeinert (linkes Bild). Eines der 12 kongruenten Teildreiecke des Zwölfecks ist ABM. Die Höhe des Dreiecks ABM durch M (rechtes Bild) wird mit a_{12} bezeichnet, s_{12} sei die halbe Länge der Sehne $[AB]$.

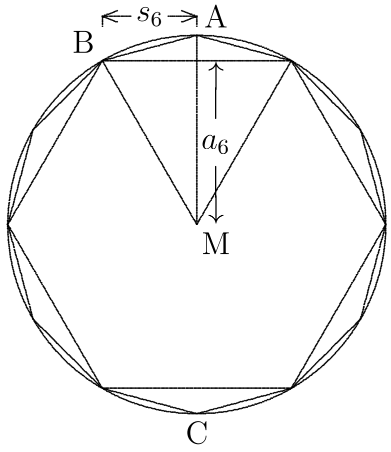
(a) Begründen Sie, dass ABC rechtwinklig ist und dass $2 \cdot a_{12} = \overline{BC}$ gilt.

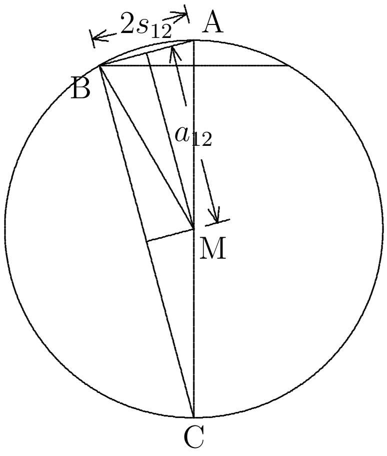
(b) Begründen Sie mit dem Kathetensatz $a_{12} = \sqrt{\frac{1 + a_6}{2}}$

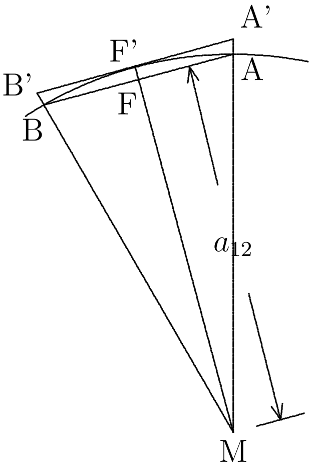
(c) Die Fläche des Dreiecks ABM kann auf zweierlei Weise berechnet werden: Begründen Sie $2s_{12}a_{12} = s_6$. Berechnen Sie mit Hilfe von $s_6 = 0.5$ und $a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ numerische Werte für a_{12} und s_{12}.

(d) Durch zentrische Streckung wird aus dem einbeschriebenen ein umbeschriebenes 12-Eck (vgl. Ausschnitt, rechtes Bild). Es bezeichne $t_{12} = \overline{B'F'}$ die halbe Seitenlänge. Begründen Sie die Gleichung $\frac{t_{12}}{s_{12}} = \frac{1}{a_{12}}$ und berechnen Sie t_{12}.

(e) Berechnen Sie die Umfänge u_{12} bzw. U_{12} des ein- bzw. des umbeschriebenen regelmäßigen Zwölfecks.





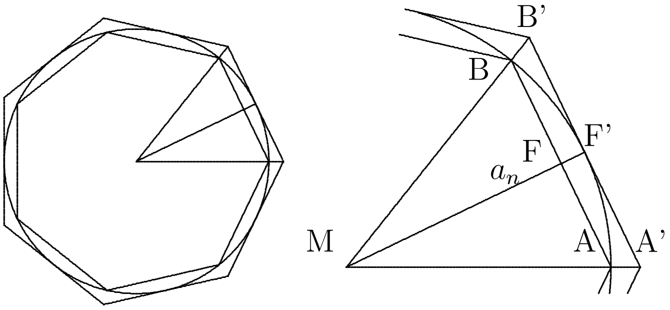


Lösung: Der geschilderte Lösungsweg führt iteriert zur π-Berechnung nach dem Verfahren von Archimedes. Die Aufgabe ist sehr umfangreich und kann den Umfang einer halben Schulaufgabe ausmachen. $a_{12} = 0.96593$, $s_{12} = 0.25882$, $t_{12} = 0{,}26795$, $U_{12} = 6{,}4308$ und $u_{12} = 6{,}2117$.

25. Ein Kreis vom Radius $r = 1$ wird wie in der Abbildung von einem einbeschriebenen (Umfang u_n) und einem umbeschriebenen (Umfang U_n) regelmäßigen n-Eck eingeschlossen. Die Höhe des Dreiecks ABM wird mit $a_n = \overline{MF}$ bezeichnet.

    Ferner gelten folgende Beziehungen:

    - $a_{2n} = \sqrt{\frac{1 + a_n}{2}}$
    - $u_{2n} = \frac{u_n}{a_{2n}}$
    - $U_{2n} = \frac{u_{2n}}{a_{2n}}$



    (a) Die folgende Tabelle stellt einen Blattausschnitt eines Tabellenkalkulationsprogramms dar. Füllen Sie die freien Felder mit den passenden Formeln in der Sprache des Ihnen bekannten Programms, mit dem Ziel den Umfang der beiden 24-Ecke zu bestimmen.

	A	B	C	D
1	n	a_n	u_n	U_n
2	6	0.86602	6.00000	
3	12			
4	24			

    (b) Berechnen Sie mit dem Taschenrechner U_{24} und u_{24} nach diesem Verfahren.

Lösung: (a) Die Einträge sind programmabhängig, z.B. könnte in C3 stehen: (C2/B3), bzw. in B3: (@SQRT((B2+1)/2)) (Sharewareprogramm aseasyas).

(b) $U_{24} = 6{,}319320$, $u_{24} = 6{,}265257$

26. Pluto, der äußerste Planet unseres Sonnensystems, bewegt sich mit einer mittleren Geschwindigkeit von 4,75 km/s in 248 Jahren einmal um die Sonne. Wie groß ist der Durchmesser seiner Bahn und damit der Durchmesser unseres Sonnensystems? (Die Bahn von Pluto kann als Kreis angesehen werden; ein Jahr soll 365 Tage haben.)

Lösung: $1{,}2 \cdot 10^{10}$ km

1.2. Kreissektoren - Bogenlänge und Sektorfläche

1. In folgender Tabelle ist r Radius, b Bogenlänge und ϕ Mittelpunktswinkel eines Kreissektors. A_s ist dessen Flächeninhalt. Berechne die fehlenden Größen:

r	ϕ	b	A_s
3	30°		
5		5	
	130°	10	
10			100
	200°		100
		30	300

Lösung:

r	ϕ	b	A_s
3	30°	$1,6$	$2,4$
5	57°	5,0	$12,5$
$4,4$	130°	10	22
10	115°	20	100
$7,6$	200°	26	100
20	86°	30	300

2. Vervollständige die folgenden Tabellen:

(a)

Winkel im Gradmaß	30°	225°			330°			315°
Winkel im Bogenmaß			$\frac{3}{4}\pi$	$1\frac{1}{6}\pi$		$1\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	

(b)

Winkel im Gradmaß	20°	200°			−100°			150°
Winkel im Bogenmaß			1	2		10	−3	

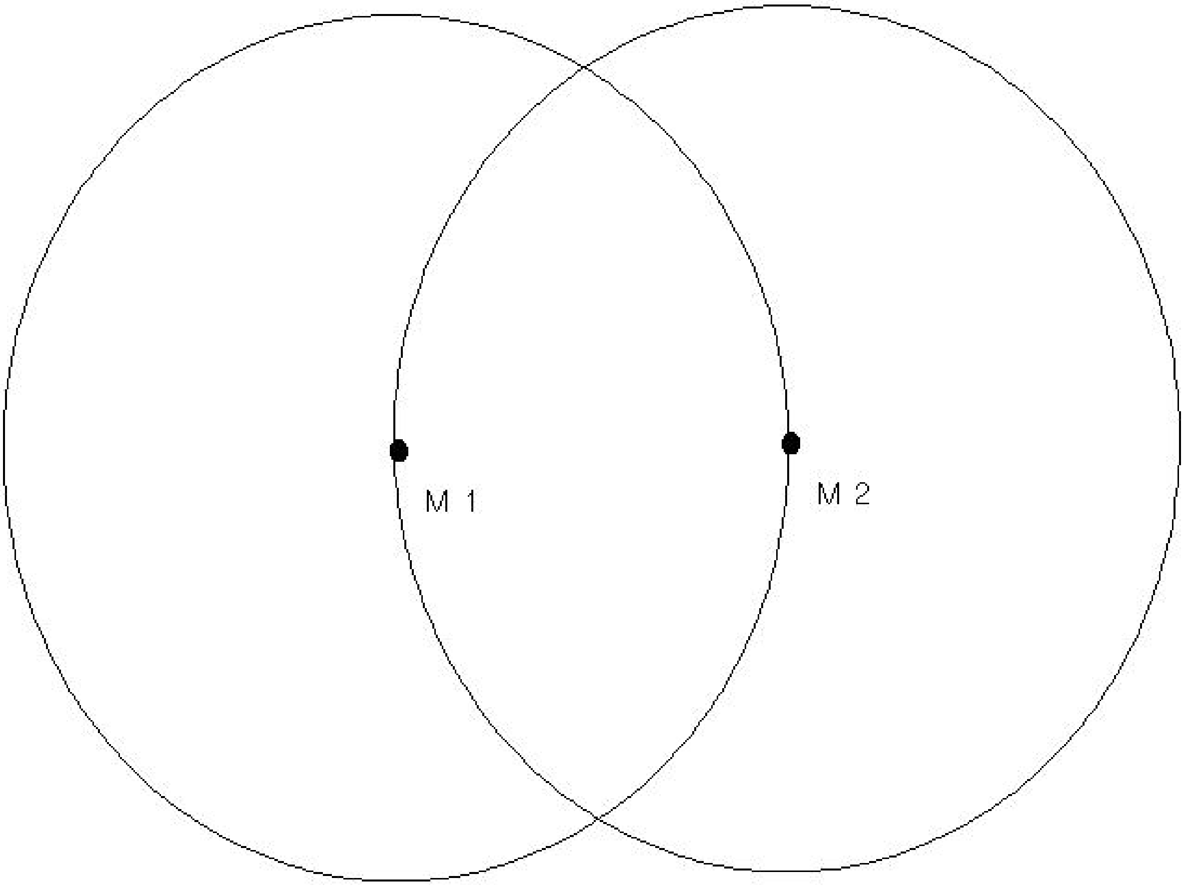
Lösung: (a)

Winkel im Gradmaß	30°	225°	135°	210°	330°	240°	225°	315°
Winkel im Bogenmaß	$\frac{1}{6}\pi$	$1\frac{1}{4}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$1\frac{1}{6}\pi$	$1\frac{5}{6}\pi$	$1\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$1\frac{3}{4}\pi$

(b)

Winkel im Gradmaß	20°	200°	57°	115°	−100°	573°	172°	150°
Winkel im Bogenmaß	$0,35$	$3,5$	1	2	$1,75$	10	−3	$2,6$

3. **Zwei gleiche Kreise**



Die Abbildung oben zeigt zwei völlig identische Kreise. Sie sind so angeordnet, dass die Kreislinie des einen Kreises durch den Mittelpunkt des anderen Kreises verläuft. Und entsprechend schneidet die Kreislinie des zweiten Kreises den Mittelpunkt des ersten Kreises.

(a) Wie groß ist der Anteil der Kreislinie eines der beiden Kreise, der sich im zweiten Kreis befindet?

(b) Die Kreise haben jeweils einen Radius von 100 Zentimetern.
Wie groß ist dann der Abstand eines Schnittpunkts der beiden Kreislinien zur Geraden durch die Mittelpunkte beider Kreise?

(c) Wenn man die beiden Kreise als eine Fläche betrachtet, welchen Anteil dieser Fläche bildet dann die Schnittmenge der beiden Kreise?

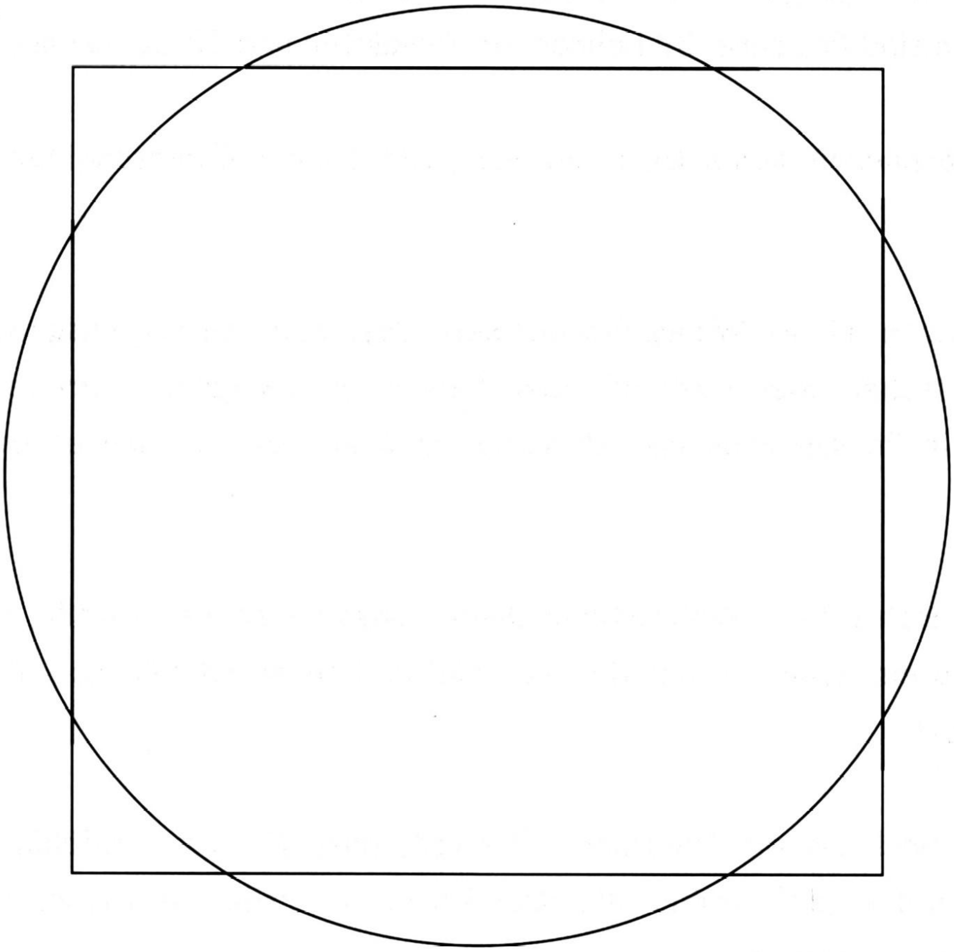
Quelle: Fich, O.: Mathelogik (2001)

Lösung: (a) $\frac{1}{3}$ (gleichseitiges Dreieck: Einen Schnittpunkt und die Mittelpunkte betrachten)

(b) $86,6\,\mathrm{cm}$ (rechtwinkliges Dreieck: Ein Schnittpunkt, ein Mittelpunkt und Mittelpunkt der Strecke, die Kreismittelpunkte verbindet)

(c) $24,3\%$ (Zu den Dreiecken aus (b) fehlen 4 Bogenstücke über den Dreiecksseiten. Diese als Differenz von Kreissektor ($60°$) und Dreieck berechenbar)

4. **Was ist größer - Der Kreis oder das Quadrat?**



Die Abbildung zeigt einen Kreis und ein Quadrat, wobei sich der größte Teil des Kreises innerhalb des Quadrats befindet, während ein kleiner Teil des Kreises außerhalb des Quadrats liegt. Kreis und Quadrat haben den gleichen Mittelpunkt.
Für alle Seiten des Quadrats gilt, dass 60% der Seitenlänge innerhalb des Kreises oder auf der Kreislinie liegen.
Welche der Figuren hat die größere Fläche?

Quelle: Fich, O.: Mathelogik (2001)

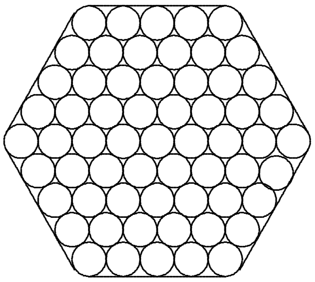
Lösung: Der Kreis ist größer (rechtwinkliges Dreieck: Mittelpunkt, Mittelpunkt einer Quadratseite und angrenzender Schnittpunkt von Kreis und Quadrat).
Beispiel: Quadratflächeninhalt $= 1$, dann Kreisflächeninhalt $\approx 1,068$.

5. Eisenrohre werden in einem Bündel wie in der Abbildung geliefert.

   (a) Berechnen Sie für das abgebildete Bündel die Länge des Stahlbands, welches das Bündel zusammenhält, wenn der Rohrdurchmesser mit d bezeichnet wird.

   (b) Wie groß ist die Fläche, die im Querschnitt von dem Stahlband umfaßt wird? (Teile geschickt auf.)

   (c) Welchen Prozentsatz davon nehmen die 61 Rohre ein?



Lösung: (a) $24d + \pi d$

(b) Man zerlege in ein reguläres Sechseck mit Radius $4d$, 6 Rechtecke mit der Breite $\frac{d}{2}$ und der Länge $4d$ und 6 Kreissektoren mit Radius $\frac{d}{2}$: $A = 24\sqrt{3}d^2 + 12d^2 + \frac{1}{4}\pi d^2$.

(c) 88%

6. Wieviel Grad hat der Mittelpunktswinkel zu einem Kreisbogen, dessen Länge gleich dem Durchmesser des Kreises ist? (Skizze; Berechnung auf 4 geltende Ziffern genau)

Lösung: 114,6°

7. Ein Kreissektor mit dem Radius r hat den Umfang $U = 3\,r$. Berechne den Mittelpunktswinkel φ und drücke die Fläche A des Sektors durch r aus.

Lösung: $\varphi = \dfrac{180^\circ}{\pi} \quad ; \quad A = \dfrac{r^2}{2}$

8. Der Umfang eines Kreises mit Radius r ist gleich dem Umfang eines Kreissektors mit gleichem Radius r und einem noch zu bestimmenden Mittelpunktswinkel α. Berechnen Sie diesen Mittelpunktswinkel α auf zwei Dezimalstellen gerundet!

Lösung: $\alpha \approx 245{,}41^o$

9. Einem Kreis mit Radius r ist ein Quadrat einbeschrieben. Welchen Mittelpunktswinkel muss ein Kreissektor mit gleichem Radius haben, damit er denselben Flächeninhalt hat wie das Quadrat?

Lösung: $\dfrac{720^\circ}{\pi}$

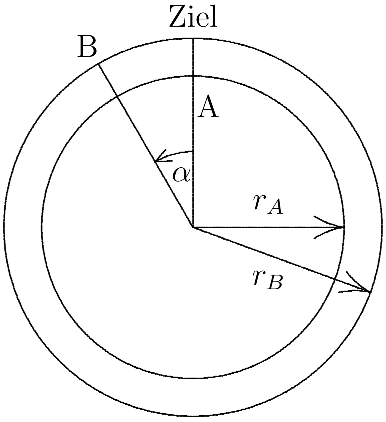
10. Ein Kreisausschnitt zum Mittelpunktswinkel 27° hat eine Bogenlänge von 1,5 cm. Welchen Umfang und welchen Flächeninhalt hat der Kreis?

Lösung: Umfang: $20\,cm$; Inhalt: $31{,}8\,cm^2$

11. Wie groß sind Radius r und Mittelpunktswinkel φ (Bogenmaß!) eines Kreissektors, dessen Umfang $U = 10\,\mathrm{cm}$ und dessen Flächeninhalt $A = 6\,\mathrm{cm}^2$ beträgt?

Lösung: 1. Möglichkeit: $r = 3\,cm$; $\varphi = \frac{4}{3}$ 2. Möglichkeit: $r = 2\,cm$; $\varphi = 3$

12. Die Läufer A(nton) und B(enedikt) starten einen Wettlauf auf einer kreisförmigen Rennbahn. Die Kreisbahn von A hat den Radius $r_A = 19\,\mathrm{m}$, die von B den Radius $r_B = 20\,\mathrm{m}$. A muss eine Runde laufen. Damit beide bis zum Ziel gleich weit laufen, muss der Startpunkt von B um einen bestimmten Winkel vorverlegt werden. Bestimmen Sie diesen Winkel.

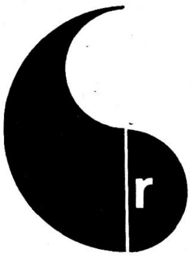


Lösung: 18^0

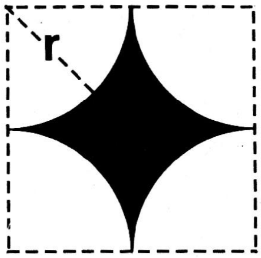
1.3. Kreisteile

1.3.1. Kreisteile - einfache Figuren

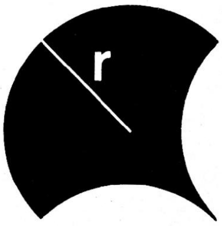
1. **Berechnung von Kreisfiguren**



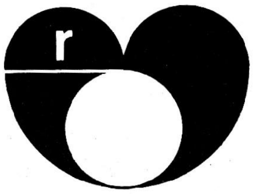
① Horn



② Stern

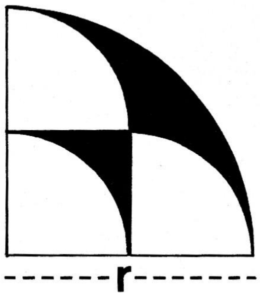


③ Fallschirm

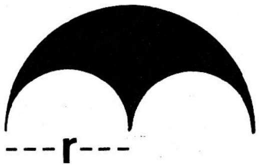


④ Zwappel

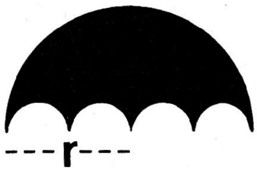
⑤ Beil



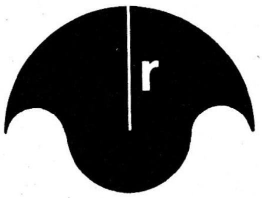
⑥ Schwalbe



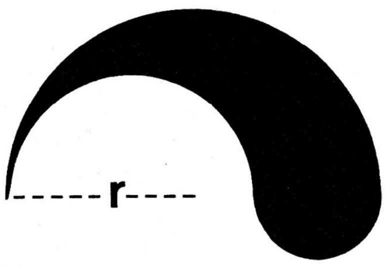
⑦ Doppelsichel



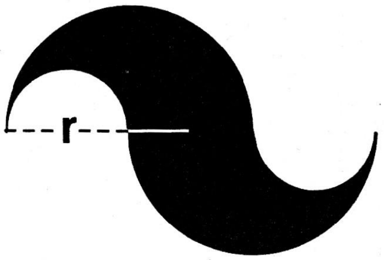
⑧ Gartenschirm



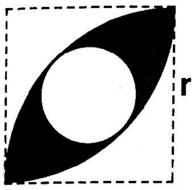
⑨ Qualle



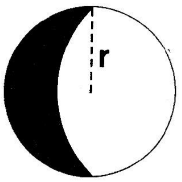
⑩ Delphin



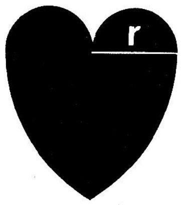
⑪ Wobbel



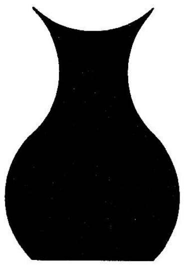
⑫ Faltboot



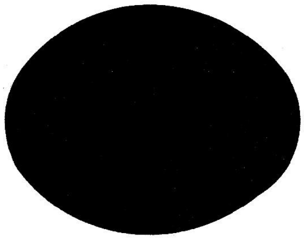
⑬ Sichel



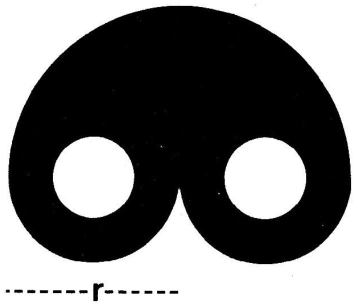
⑭ Herz



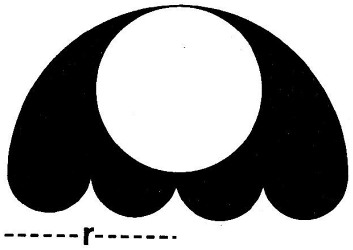
⑮ Krug aus vier Viertelkreisen gleicher Größe, Radius r.



⑯ Oval aus zwei Viertelkreisen mit Radius r und zwei Viertelkreisen mit Radius 2r.



⑰ Brezel



⑱ Mamufant

Quelle: mathematik lehren (1986), H. 14, S. 22-25

Lösung:

	A	U
1	$\frac{1}{2}\pi r^2$	$2\pi r$
2	$4r^2 - \pi r^2$	$2\pi r$
3	$2r^2$	$2\pi r$
4	$\frac{1}{2}\pi r^2$	$3\pi r$
5	$2r^2$	$2\pi r$
6	$\frac{1}{16}\pi r^2$	$\frac{5}{4}\pi r + r$
7	$\frac{1}{4}\pi r^2$	$2\pi r$
8	$\frac{3}{8}\pi r^2$	$2\pi r$
9	$\frac{9}{16}\pi r^2$	$2\pi r$
10	$\frac{1}{3}\pi r^2$	$2\pi r$
11	$\frac{1}{3}\pi r^2$	$2\pi r$
12	$\sqrt{2}\pi r^2 - \pi r^2 - r^2$	$3\pi r - \sqrt{2}\pi r$
13	r^2	$\pi r + \frac{1}{2}\pi\sqrt{2}r$
14	$\frac{19}{12}\pi r^2 - \sqrt{3}r^2$	$\frac{7}{3}\pi r$
15	$\frac{9}{2}r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2$	$\frac{5}{2}\pi r + \sqrt{2}r$
16	$\frac{5}{2}\pi r^2 - r^2$	$3\pi r$
17	$\frac{5}{8}\pi r^2$	$3\pi r$
18	$\frac{3}{8}\pi r^2$	$3\pi r$

2. Ein Kreissektor vom Radius r mit dem Mittelpunktswinkel μ ist flächengleich zu

einem Quadrat mit der Seitenlänge r. Begründen Sie anschaulich $\mu > 90^0$ und berechnen Sie μ im Gradmaß.

Lösung: $\mu = 360^0 : \pi = 114{,}6^0$

3. Ein Kreisring mit den Radien R und r $(r < R)$ hat den gleichen Flächeninhalt wie ein Kreissektor mit dem Radius $2R$ und dem Mittelpunktswinkel $\alpha = 45°$.
   (a) Leiten Sie einen Zusammenhang zwischen r und R her!
   (b) Berechnen und konstruieren Sie r für $R = 6\,\text{cm}$.

Lösung: (a) $r^2 = \frac{1}{2}R^2$;
(b) $r = 4{,}2\,\text{cm}$; Konstruktion eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks mit R als Hypotenuse

4. Gegeben sind zwei konzentrische Kreise mit den Radien a und b, wobei $a < b$.
   (a) Berechnen Sie den Radius r eines Kreises, der denselben Inhalt hat wie der Kreisring zwischen den beiden gegebenen Kreisen. Bestimmen Sie anschließend mit dem TR den Wert von r für $a = 4{,}5\,\text{cm}$ und $b = 6{,}5\,\text{cm}$.
   (b) Konstruieren Sie den Radius r für $a = 4{,}5\,\text{cm}$ und $b = 6{,}5\,\text{cm}$. Erläutern Sie Ihre Konstruktion in einem kurzen Text.

Lösung: (a) $r = \sqrt{b^2 - a^2} \approx 4{,}7$ cm (b) Thaleskreis, Satz des Pythagoras

5. Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a. Bestimmen Sie den Umfang des Inkreises. Bestimmen Sie auch das Verhältnis des Inhalts dieses Kreises zum Inhalt des Dreiecks (Ausdruck mit π und Wurzel soweit wie möglich vereinfacht und anschließend numerische Auswertung mit dem TR).

Lösung: (a) $\varrho = \sqrt{\frac{1}{12}}\,a = \frac{1}{6}\sqrt{3}\,a$ (b) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}6046$

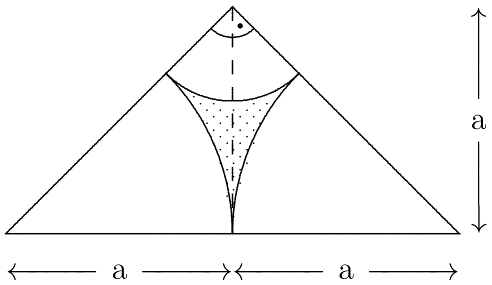
6.

1.3.2. Kreisteile - nur Sektoren

1. Drei sich von außen berührende Kreise vom Radius r schließen miteinander ein Flächenstück ein. Berechnen Sie dessen Umfang und Inhalt!

Lösung: $U = r \cdot \pi, \quad A = \frac{1}{2}r^2 \cdot (2\sqrt{3} - \pi)$

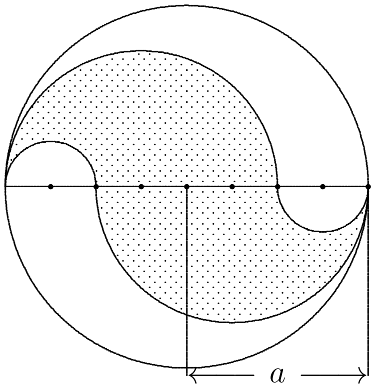
2. Man berechne Umfang und Inhalt der schattierten Fläche!



Lösung: $U = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \pi$; $A = a^2 \cdot (1 - \pi + \frac{\pi}{2}\sqrt{2})$

3. (a) Berechnen Sie Inhalt und Umfang der schraffierten Fläche. (Der Kreisdurchmesser ist in 8 gleiche Abschnitte geteilt. Der Radius soll mit a bezeichnet werden.)

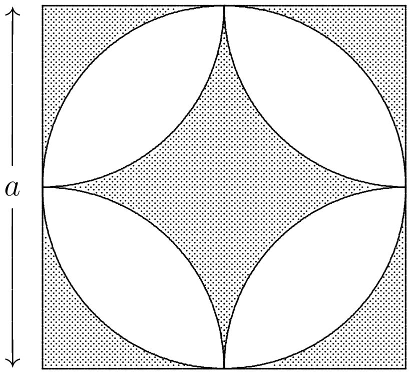
   (b) In welchem Verhältnis stehen die schraffierte und die nicht schraffierte Fläche zueinander? Begründung.



Lösung: $U = 2\pi a$, $A = \frac{1}{2}\pi a^2$, beide Teilflächen gleich groß.

4. (a) Welchen Prozentsatz der Quadratfläche füllt die schraffierte Fläche?

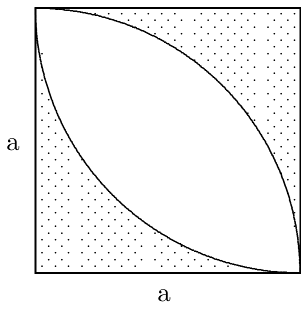
   (b) Die vier Viertelkreise begrenzen ein (krummliniges) Viereck. Berechnen Sie den Radius des größten Kreises, den man diesem einbeschreiben kann.



Lösung: (a) $2 \cdot (1 - \frac{\pi}{4}) = 0{,}429$

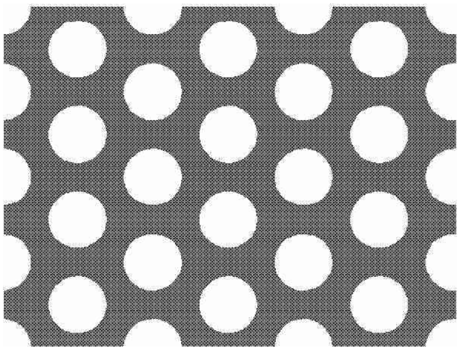
(b) $\frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$

5. Berechnen Sie den Flächeninhalt der punktierten Fläche in Abhängigkeit von a!



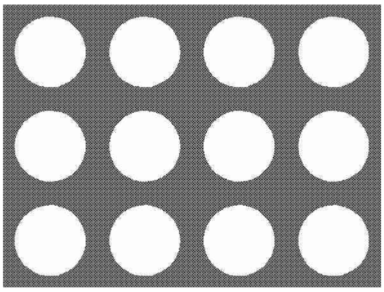
Lösung: $A = 2a^2(1 - \frac{\pi}{4})$

6. Aus einem Blech werden kreisförmige Löcher im abgebildeten "hexagonalen" Muster ausgestanzt (d.h Mittelpunkte benachbarter Kreise bilden gleichseitige Dreiecke). Der Mittenabstand von zwei benachbarten Löchern beträgt $d_1 = 12$mm, der Lochdurchmesser $d_2 = 9$mm. Wieviele Prozent des Gewichts werden eingespart? Hinweis: Es soll vorausgesetzt werden, dass das Blech so groß ist, dass es gleichgültig ist, wie der Rand angeschnitten wird.



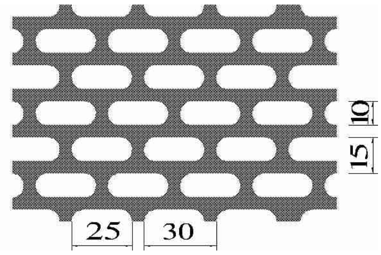
Lösung: Man betrachtet ein gleichseitiges Dreieck, gebildet von den Mittelpunkten dreier benachbarter Löcher. Ergebnis: 51%

7. Aus einem Blech werden kreisförmige Löcher im abgebildeten "quadratischen" Muster ausgestanzt (d.h Mittelpunkte benachbarter Kreise bilden Quadrate). Der Mittenabstand von zwei benachbarten Löchern beträgt $d_1 = 12$mm, der Lochdurchmesser $d_2 = 9$mm. Wieviele Prozent des Gewichts werden eingespart? Hinweis: Es soll vorausgesetzt werden, dass das Blech so groß ist, dass es gleichgültig ist, wie der Rand angeschnitten wird.



Lösung: Man betrachtet ein Quadrat, gebildet von den Mittelpunkten von vier benachbarten Löchern. Ergebnis: 44%

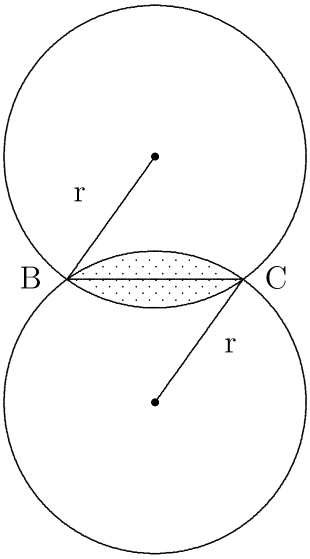
8. Aus einem Blech werden wie in der Abbildung ovale Löcher aus zwei Halbkreisen und einem Rechteck ausgestanzt (Maße in mm). Wieviele Prozent des Gewichts werden eingespart? Hinweis: Es soll vorausgesetzt werden, dass das Blech so groß ist, dass es gleichgültig ist, wie der Rand angeschnitten wird.



Lösung: 51%

1.3.3. Kreisteile - auch Segmente

1. Die schattierte Fläche wird von zwei Kreisen mit gleichem Radius r eingeschlossen. Dabei gilt für die gemeinsame Sehne: $\overline{BC} = r$.
Berechnen Sie für $r = 1{,}00\,\text{cm}$ den Inhalt A der schattierten Fläche!



Lösung: $A \approx 0{,}181\,cm^2$

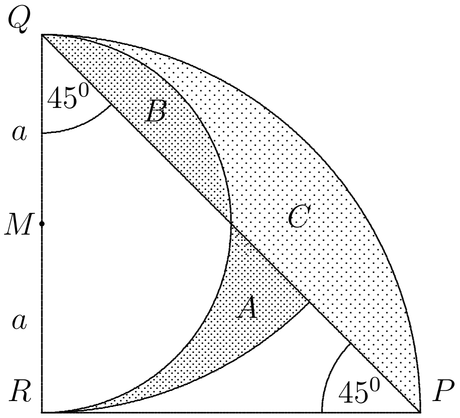
2. An den Orten B und C mit $\overline{BC} = 100\,\text{km}$ ist je ein Radiosender aufgestellt. Beide Sender haben eine Reichweite von $a = 100\,\text{km}$. G ist die Menge aller Punkte, an denen beide Sender gleichzeitig empfangen werden können. Fertigen Sie eine genaue Zeichnung des Sachverhaltes im Maßstab 1 : 2 000 000 an und berechnen Sie den Flächeninhalt A von G. Drücken Sie A zuerst allgemein durch a aus und setzen Sie dann Zahlen ein (drei geltende Ziffern)!

Lösung: $\varphi = 120^\circ$; $A = 2 \cdot (A_{Sektor} - A_{Dreieck}) = 2\,a^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx 12300\,km^2$

3. Die Flächen A, B und C werden von den Seiten des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks PQR sowie von den Kreisbögen um die Ecken Q und R und den Seitenmittelpunkt M begrenzt.

   (a) Berechnen Sie die Flächeninhalte von B und C in Abhängigkeit von $a = \frac{1}{2}\overline{QR}$.

   (b) Zeigen Sie, dass die Fächeninhalte von A und B gleich sind.

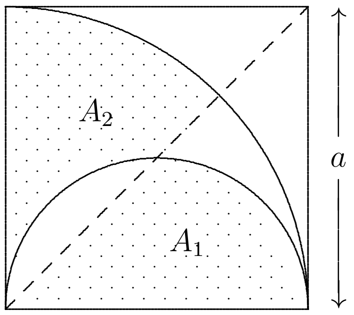


Lösung: Es ist $B = \frac{1}{2}a^2(\frac{1}{2}\pi - 1)$. C hat die vierfache Fläche vermindert um die von B, ist also dreimal so groß. A und B sind gleich groß, weil der Halbkreis um M und der Viertelkreis um Q denselben Flächeinhalt haben.

4. In nebenstehender Figur ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a gegeben.

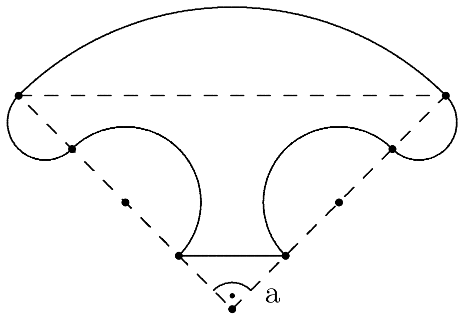
   (a) Zeigen Sie, dass die schattierten Flächen A_1 und A_2 gleichen Inhalt haben!

   (b) Berechnen Sie jeweils den Umfang der schattierten Flächen A_1 und A_2 in Abhängigkeit von a!



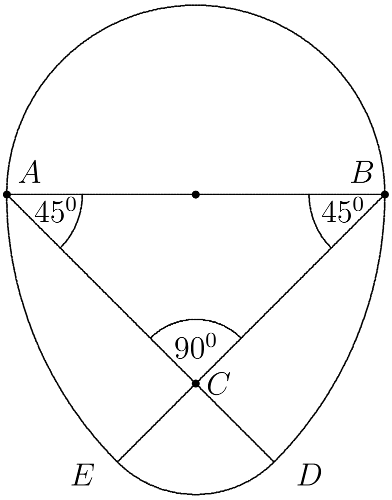
Lösung: (a): $A_{A_1} = A_{A_2} = \frac{a^2}{16} \cdot (\pi + 2)$
(b): $U_{A_1} = \frac{a}{4} \cdot (4 + \pi + 2\sqrt{2})$
$U_{A_2} = \frac{a}{2} \cdot (4 + \pi - \sqrt{2})$

5. Berechnen Sie Fläche und Umfang der Figur in Abhängigkeit von a. (Beide Dreiecke sind gleichschenklig-rechtwinklig, die Katheten werden durch die markierten Punkte gleichmäßig im Abstand a geteilt, die Kreismittelpunkte liegen auf den Katheten.)



Lösung: $U = 5\pi a + \sqrt{2}a$, $A = 3{,}25a^2\pi - 0{,}5a^2$

6. Das abgebildete „Osterei“ besteht aus Kreisbögen, deren Mittelpunkte A, B, C und M und deren Radien durch das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck ABC festgelegt sind.
   (a) Berechnen Sie die Radien $\overline{BD}$ und $\overline{CD}$ der Kreisbögen um B bzw. C in Abhängigkeit von $\overline{AM} = r$.
   (b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des „Ostereies“.

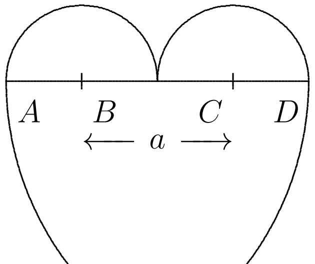


Lösung: (a) $\overline{BD} = 2r$ und $\overline{CD} = (2 - \sqrt{2})r$

(b)

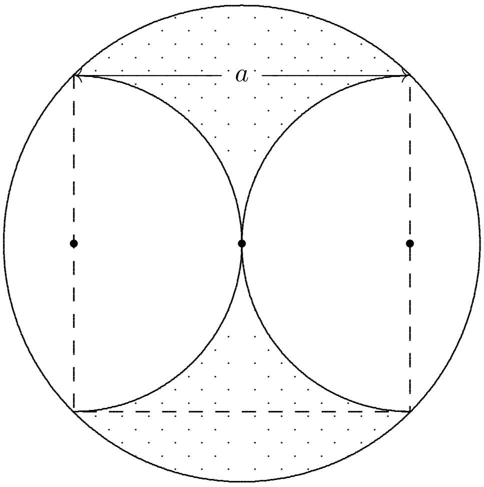
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\pi r^2 + \left(2 \cdot \frac{1}{8}\pi(2r)^2 - r^2\right) \\ + \quad & \frac{1}{4}\pi\left[(2-\sqrt{2})r\right]^2 \\ = \quad & [(3-\sqrt{2})\pi - 1]r^2 \approx 3{,}98r^2 \end{aligned}$$

7. Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Umfang der folgenden Figur in Abhängigkeit von a. (Die Mittelpunkte der Kreisbögen sind die Punkte A, B, C und D.)



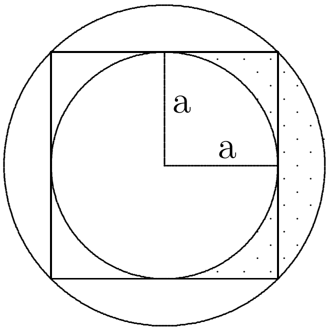
Lösung: $U = \frac{7}{3}\pi a$, $A = (\frac{19}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2})a^2$

8. Gegeben ist die rechts gezeichnete Kreisbogenfigur.
   (a) Übertragen Sie die Figur auf das Arbeitsblatt und bezeichnen Sie alle benötigten Stücke.
   (b) Berechnen Sie den punktierten Flächeninhalt in Abhängigkeit von a.



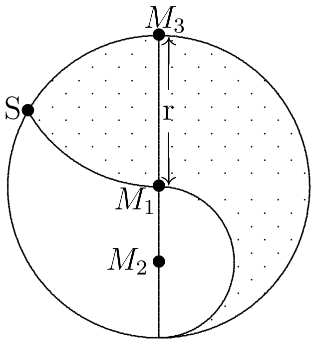
Lösung: $A = \frac{1}{2}a^2$

9. Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Umfang der punktierten Fläche in Abhängigkeit von a und π!



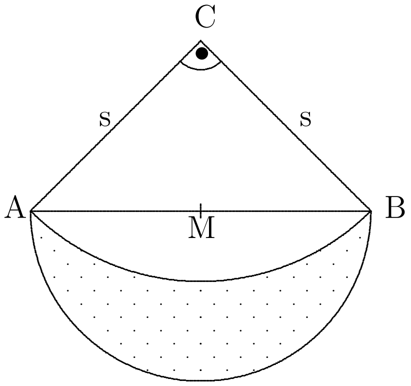
Lösung: $A = a^2; U = a(\frac{1}{2}\sqrt{2}\pi + 2 + \pi)$

10. Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Umfang der punktierten Fläche in Abhängigkeit von r und π!
    Hinweis: Das Dreieck SM_1M_3 ist ein besonderes Dreieck!



Lösung: $A = \frac{17}{24}r^2\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3}r^2; U = \frac{13}{6}r\pi$

11. Das Dreieck ABC ist gleichschenklig und rechtwinklig. Mit s ist die Kathetenlänge bezeichnet. M halbiert die Hypotenuse $[AB]$.
    Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Umfang der punktierten Sichel in Abhängigkeit von s!

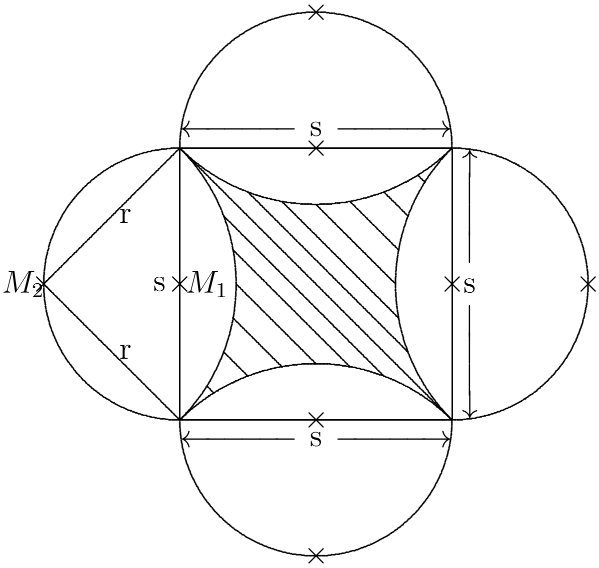


Lösung: $A = \frac{1}{2}s^2; U = \frac{1}{2}s\pi(1 + \sqrt{2})$

12. (a) Berechnen Sie r in Abhängigkeit von s.

    (b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der schraffierten Fläche in Abhängigkeit von s!

    (c) Berechnen Sie den Umfang der schraffierten Fläche in Abhängigkeit von s!

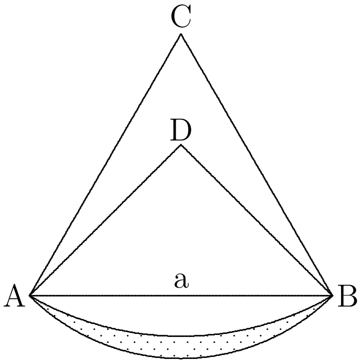


Lösung: $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}s$; $A = s^2(2 - \frac{1}{2}\pi)$; $U = \sqrt{2}s\pi$

13. Das Dreieck ABC ist gleichseitig mit der Seitenlänge a. Das Dreieck ABD ist gleichschenklig und rechtwinklig. C und D sind die Mittelpunkte der gezeichneten Kreisbogenstücke.

    (a) Für welches a hat die punktierte Sichel den Umfang $\pi \cdot (3\sqrt{2} + 4)$?

    (b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Sichel in Abhängigkeit von a!

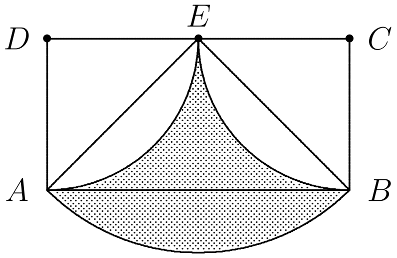


Lösung: $a = 12$; $A = a^2(-\frac{1}{24}\pi + \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{4})$

14. Die Ecken C und D eines Rechtecks $ABCD$ sind Mittelpunkte von zwei Kreisen vom Radius a, die sich im Mittelpunkt E einer Seite berühren und jeweils durch die beiden anderen Ecken gehen.

(a) Zeigen Sie, dass die schraffierte Fläche und das Dreieck ABE inhaltsgleich sind.

(b) Für welchen Wert von a ist der Umfang der schraffierten Fläche um 5cm länger als der Umfang des Dreiecks ABE? Geben Sie das Ergebnis in cm mit zwei gültigen Ziffern an.



Lösung: $a = 9{,}4$cm

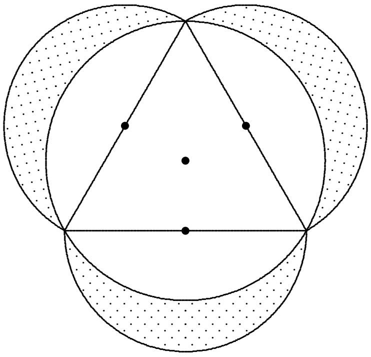
15. Zwei konzentrische Kreise K_1 und K_2 mit den Radien r und $4r$ bilden einen Kreisring. Im Abstand $2r$ vom gemeinsamen Mittelpunkt beider Kreise wird auf einem Radius des größeren Kreises K_2 eine Lotgerade errichtet, welche den Kreisring in zwei Teile teilt. Bestimmen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte zunächst exakt und dann prozentual gerundet!

Lösung: $\frac{16\pi-12\sqrt{3}}{29\pi+12\sqrt{3}} = 0{,}26$; Gleichseitiges Dreieck beachten!

16. Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a. (Die Mittelpunkte der Kreisbögen sind durch Punkte markiert.)

    (a) Berechnen Sie Fläche und Umfang des Umkreises.

    (b) Berechnen Sie die Gesamtfläche der 3 schraffierten Möndchen über den Dreiecksseiten.



Lösung: (a) $U = 2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}a$, $A = \frac{\pi}{3}a^2$

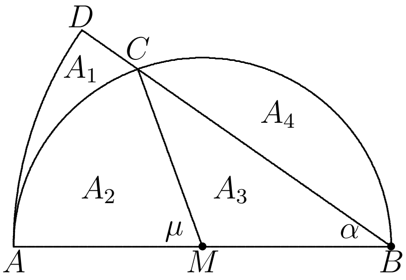
(b) $A_{Monde} = \frac{3}{8}\pi a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\pi}{3}a^2$

17. (a) Begründen Sie mit einem bekannten Satz oder durch Rechnung: $2\alpha = \mu$

    (b) Zeigen Sie: Der Flächeninhalt des Sektors ABD ist doppelt so groß, wie der des Sektors AMC (Verwenden Sie dazu das obige Ergebnis.) und begründen Sie: $A_1 + A_3 = A_2$.

    (c) C gleitet auf dem Kreisumfang von A nach B. Zeichnen Sie die Figur für $\alpha = 45^0$ und im Sonderfall $\alpha = 90^0$. Erklären Sie das Ergebnis aus b) für diesen Fall.

(d) Drücken Sie den Flächeninhalt des Segments A_4 mit Hilfe von A_2, A_3 und r aus (vgl. Abb.) und zeigen Sie, dass $A_1 = A_4$ genau dann gilt, wenn $\alpha = 45^0$ ist.



Lösung: (a) Umfangswinkelsatz oder direkte Rechnung.

(b) $A_{ABD} = 0.5 \cdot (2r)^2 \cdot \alpha$, $A_{AMC} = 0.5 \cdot r^2 \cdot 2\alpha$. Daraus ergibt sich $A_1 + A_2 + A_3 = 2A_2$.

(c) Im Fall $\alpha = 90^0$ bedeutet dies: Der Viertelkreis um B hat die doppelte Fläche des Halbkreises um M.

(d) Es ist $A_4 = \frac{\pi}{2}r^2 - A_2 - A_3$. Aus $A_1 = A_4$ ergibt sich $\pi r^2 = 2A_2$.

18. In einem Kreis mit dem Radius r überspannen zwei parallele Sehnen s_1 bzw. s_2 je einen Bogen zu den Zentriwinkeln 60° bzw. 90° so, dass der Kreismittelpunkt zwischen den beiden Sehnen liegt.
Erstellen Sie eine übersichtliche Skizze und berechnen Sie dann die Größe des zwischen den beiden Sehnen liegenden Teils der Kreisfläche!

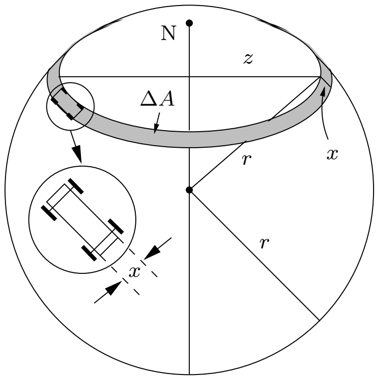
Lösung: $\frac{1}{12}r^2 \cdot (7\pi + 6 + 3\sqrt{3})$

2. Kugel

2.1. Kugel - Volumen und Oberfläche

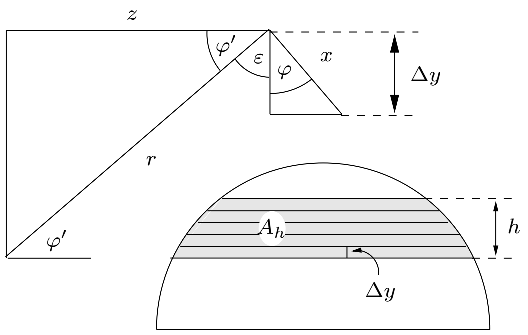
1. **Mantelfläche der Kugelscheibe**

   Zur Berechnung der Kugeloberfläche stellen wir uns einen kugelförmigen Wüstenplaneten mit Radius r vor. Ein Geländefahrzeug (Sandbuggy) mit der Spurbreite x (Abstand der Räder auf einer Achse) umrundet den Nordpol auf einem Breitenkreis. Mit Δy bezeichnen wir die Projektion der Spurbreite auf die Planetenachse.



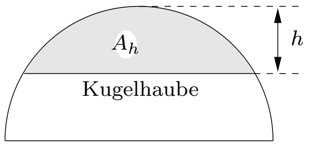
   (a) Drücke die von den Reifenspuren eingeschlossene Fläche ΔA durch Δy und r aus. Die „Wölbung“ der Fläche kann wegen $x \ll r$ praktisch vernachlässigt werden!

   (b) Die Mantelfläche A_h einer Kugelschicht der Dicke h setzen wir aus n dünnen Scheiben der Dicke Δy zusammen ($n\Delta y = h$).



   Beweise: $\boxed{A_h = 2r\pi h}$ (1)

   (c) Leite aus (1) eine Formel für die Mantelfläche der Kugelhaube (Kugelabschnitt) und für die Oberfläche der ganzen Kugel her.



Ein Ballon steigt von einem Schiff mitten im Ozean auf, seine Höhe über dem Meeresspiegel ist x.

   (d) Drücke die vom Ballonfahrer überblickte Meeresfläche A als Funktion von x aus ($R = 6380\,\mathrm{km}$ ist der Erdradius). Berechne auch das Verhältnis $v(x) = \frac{A(x)}{A_{\max}}$, wobei $A_{\max}$ die maximal sichtbare Fläche ist (bei welcher Höhe?).

   (e) Berechne $A(x)$ und die Sichtweite $b(x)$ auf der Erdoberfläche (Bogenlänge) für $x = 10\,\mathrm{m}$, $x = 100\,\mathrm{m}$, $x = 1000\,\mathrm{m}$ und $x = 10\,000\,\mathrm{m}$.

(f) In welcher Höhe x_1 überblickt man 50% der Halbkugel? In welchen Höhen x_2 bzw. x_3 beträgt die Sichtweite 10 km bzw. 1000 km?

Lösung: (a) Wegen (siehe Abbildung) $\varphi' = 90^\circ - \varepsilon = \varphi$ folgt (ähnliche Dreiecke)

$$\frac{z}{r} = \frac{\Delta y}{x} \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{r\Delta y}{x}$$

In sehr guter Näherung gilt also (Radius z nicht ganz konstant)

$$\Delta A \approx 2z\pi \cdot x = 2 \cdot \frac{r\Delta y}{x}\pi x = 2r\pi\Delta y \qquad (2)$$

(b) ΔA ist *nicht* von der Spurbreite x, sondern nur von der Dicke Δy in Richtung der Kugelachse abhängig! Verwendet man immer dünnere und dafür immer mehr Scheiben, wird aus dem $\approx$-Zeichen in (2) das Gleichheitszeichen (Grenzwert):

$$A_h = n \cdot \Delta A = \underbrace{n\Delta y}_{h} 2r\pi = 2r\pi h$$

(c) Die Kugelhaube ist nichts anderes als eine Kugelscheibe, deren „oberer Radius“ null ist, d.h. auch für die Kugelhaube gilt

$$A_h = 2r\pi h.$$

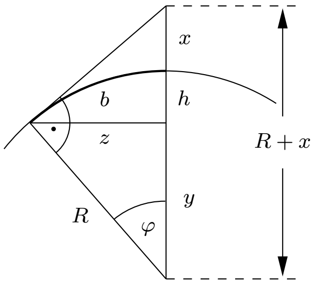
Für $h = 2r$ erhält man die gesamte Oberfläche der Kugel

$$A = 4\pi r^2$$

(d) Kathetensatz: $R^2 = y(R+x) \quad \Longrightarrow \quad y = \dfrac{R^2}{R+x}$

$$h = R - y = R - \frac{R^2}{R+x} = \frac{Rx}{R+x}$$

$$A(x) = 2R\pi h = 2R^2\pi \cdot \frac{x}{R+x}$$



$A_{\max} = 2R^2\pi$ ist die Fläche der Halbkugel, bei der Höhe $x = x_{\max} = \infty \quad \Longrightarrow$

$$v(x) = \frac{A(x)}{2R^2\pi} = \frac{x}{R+x}$$

(e) Berechnung der Sichtweite: $\cos\varphi = \dfrac{y}{R} = \dfrac{R}{R+x} \quad \Longrightarrow \quad \varphi \quad \Longrightarrow \quad b = R\varphi$

Beispiel: $x = 10\,\mathrm{m}: \quad \cos\varphi = \dfrac{6380}{6380{,}01} = 0{,}9999984326$

$\Longrightarrow \quad \varphi = 0{,}1014^\circ = 1{,}77 \cdot 10^{-3} \quad \Longrightarrow \quad b = R\varphi = 11{,}3\,\mathrm{km}$

x in m	10	100	1000	10 000
$A(x)$ im km^2	401	$4{,}00 \cdot 10^3$	$4{,}00 \cdot 10^4$	$4{,}00 \cdot 10^5$
$b(x)$ in km	11,3	35,7	113	357

(e) $v = \dfrac{x}{R+x} \quad\Longrightarrow\quad x = x_1 = \dfrac{vR}{1-v} = \dfrac{0{,}5\,R}{1-0{,}5} = R$

$$\cos\varphi = \frac{R}{R+x} \quad\Longrightarrow\quad x = R\left(\frac{1}{\cos\varphi} - 1\right) = R\left(\frac{1}{\cos\frac{b}{R}} - 1\right)$$

$$b = 10\,\mathrm{km} \quad\Longrightarrow\quad x_2 = 6380\,\mathrm{km}\cdot\left(\tfrac{1}{\cos\frac{1}{638}} - 1\right) = 7{,}84\,\mathrm{m}$$

$$b = 1000\,\mathrm{km} \quad\Longrightarrow\quad x_2 = 6380\,\mathrm{km}\cdot\left(\tfrac{1}{\cos\frac{100}{638}} - 1\right) = 79{,}18\,\mathrm{km}$$

2. Die Strahlungsintensität (Leistung pro Fläche) der Sonne am Ort der Erde ist

$$S = 1367\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \qquad (\textit{Solarkonstante}).$$

   (a) Berechne die Strahlungsleistung $L_\odot$ (*Leuchtkraft*) der Sonne aus S und der Entfernung Erde-Sonne: $1\,\mathrm{AE} = 1{,}496\cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$ (*astronomische Einheit*).

   (b) Rigel, ein Stern im Orion (rechts unten), hat die Leuchtkraft $L = 4{,}06\cdot 10^4\cdot L_\odot$ und seine Strahlungsintensität am Ort der Erde ist $E = 2{,}2\cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$. Wie viele Lichtjahre ist Rigel von der Erde entfernt?

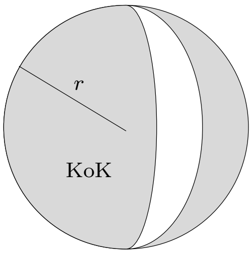
Lösung: (a) Mit $r = 1\,\mathrm{AE}$ ist die Fläche einer Kugel um die Sonne durch den Ort der Erde:

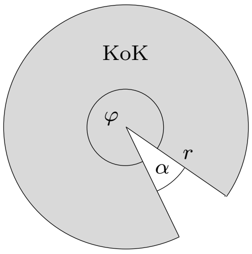
$$A = 4\pi r^2 \quad\Longrightarrow\quad L_\odot = S\cdot A = 3{,}84\cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$$

(b) $L = E\cdot 4\pi r^2 \quad\Longrightarrow\quad r = \sqrt{\dfrac{L}{4\pi E}} = \sqrt{\dfrac{4{,}06\cdot 10^4\cdot 3{,}84\cdot 10^{26}\,\mathrm{W}}{4\pi\cdot 2{,}2\cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}}} = 7{,}5\cdot 10^{18}\,\mathrm{m}$

$$1\,\mathrm{LJ} = 365{,}25\cdot 24\cdot 3600\,\mathrm{s}\cdot 299792458\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 9{,}46\cdot 10^{15}\,\mathrm{m} \quad\Longrightarrow\quad r = 7{,}9\cdot 10^2\,\mathrm{LJ}$$

3. Aus einer Kugel mit Radius r wird ein Keil (wie ein Orangenschnitz) mit dem Öffnungswinkel $\alpha = 20°$ herausgeschnitten. Den Restkörper nennen wir KoK (*Kugel-ohne-Keil*). Unser KoK hat das gleiche Volumen wie ein Würfel mit der Kantenlänge a.





von oben

   (a) Berechne das Verhältnis

$$v = \frac{A_{\text{Würfel}}}{A_{\text{KoK}}}$$

   der Oberflächen der beiden Körper. Vereinfache das Ergebnis und setze erst *dann* den Taschenrechner ein!

(b) Um wieviel Prozent vergrößert sich das Volumen der KoK, wenn sich ihr Radius um zehn Prozent vergrößert?

Lösung: (a) $V_{\text{KoK}} = \frac{340^\circ}{360^\circ} \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{34\pi}{27} r^3 = a^3 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{r}{3} \cdot (34\pi)^{\frac{1}{3}}$

$$A_{\text{KoK}} = \frac{340^\circ}{360^\circ} \cdot 4\pi r^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 = \left(\frac{34}{9} + 1\right)\pi r^2 = \frac{43}{9}\pi r^2$$

$$A_{\text{Würfel}} = 6a^2 = 6 \cdot \frac{r^2}{9} \cdot (34\pi)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} r^2 \cdot (34\pi)^{\frac{2}{3}}$$

$$v = \frac{A_{\text{Würfel}}}{A_{\text{KoK}}} = \frac{\frac{2}{3} r^2 \cdot (34\pi)^{\frac{2}{3}}}{\frac{43}{9}\pi r^2} = \frac{2 \cdot 9 \cdot (34\pi)^{\frac{2}{3}}}{3 \cdot 43 \cdot \pi} = \frac{6 \cdot 34^{\frac{2}{3}}}{43 \cdot \pi^{\frac{1}{3}}} = 0{,}99989 \approx 1{,}000$$

(b) $V'_{\text{KoK}} = \frac{34\pi}{27}(1{,}1r)^3 = 1{,}1^3 V_{\text{KoK}} = 1{,}331 V_{\text{KoK}} \quad \Longrightarrow \quad \text{um } 33{,}1\%$

4. **Heißluftballon**

Viel heiße Luft bringt einen mit Sicherheit nach oben. Niemand weiß das besser als Ian Ashpole. Der 43-Jährige stand in England auf der Spitze eines Heißluftballons. Die Luft-Nummer in 1500 Meter Höhe war noch der ungefährlichste Teil der Aktion. Kritischer war der Start: Nur durch ein Seil gesichert, musste sich Ashpole auf dem sich füllenden Ballon halten. Bei der Landung strömte dann die heiße Luft aus einem Ventil direkt neben seinen Beinen vorbei. Doch außer leichten Verbrennungen trug der Ballonfahrer keine Verletzung davon.

(a) Wie viel Luft sind wohl in diesem Heißluftballon?

(b) Wie viel Stoff benötigte man zur Herstellung dieses Ballons?

Quelle: Herget, W. et al.: Produktive Aufgaben

Lösung: Je mehr man mathematisch vorgebildet ist, umso mehr mathematisches Instrumentarium wird man bei dieser Aufgabe wie selbstverständlich einsetzen - und zwar ohne darüber nachzudenken, ob diese hoch genauen Instrumente wirklich genauere Ergebnisse liefern. So könnte man hier den Heißluftballon sehr genau modellieren, etwa durch eine obere Halbkugel und einen zylindrischen Kegel. In der Analysis bietet sich die Interpretation als Rotationskörper an, wobei der Fantasie für die zugrunde gelegte Kurve (fast) keine Grenzen gesetzt sind - hoffentlich ist das Integral dann elementar lösbar; und wenn nicht, könnte man es schließlich noch numerisch lösen. Aber es geht (auch) hier einfacher: In jedem Fall ist man darauf angewiesen, die Maße des Ballons aus dem Foto zu entnehmen und in die Wirklichkeit hochzurechnen (Proportionen/Verhältnis/Dreisatz). Einziger Bezugspunkt dafür ist wohl der Mann auf der Spitze des Ballons. Daraus ergibt sich für die Höhe des Ballons (ohne Gondel) und ebenso für seine Breite etwa $20-25\,\mathrm{m}$. Bei dieser unvermeidbaren Unschärfe sind solch feinsinnige Modellierungen wie die oben aufgeführten schlichtweg „oversized“.

Ein ganz einfaches Modell leistet schon das Gewünschte: Etwa ein Würfel, den wir uns „nach Augenmaß“ so vorstellen, dass er an den Ecken über den Ballon herausragt, seine Seitenfläche aber teilweise in den Ballon „hineintauchen“ - oder eine entsprechend dimensionierte Kugel als geeignete „Ersatz-Form“ für den Ballon.

Auf diese Weise kann man als gute Näherung einen Würfel mit einer Kantenlänge von 16m wählen oder eine Kugel mit einem Durchmesser von etwa $20\,\mathrm{m}$. Das Volumen des Würfels ist besonders einfach: $V = 4096\,\mathrm{m}^3$ und für die Kugel erhalten wir

$V = \frac{4\pi}{3} \cdot 10 \approx 4180\,\mathrm{m}^3$.

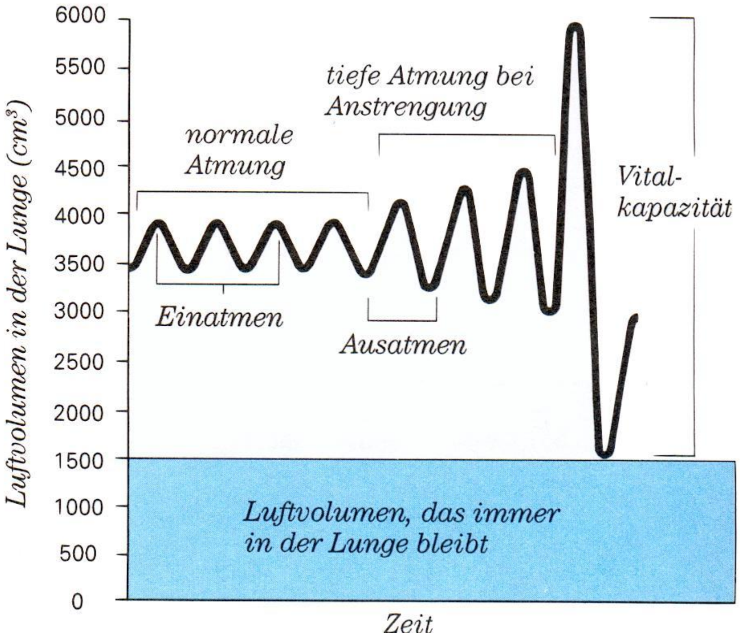
Beide Modelle liefern für das Volumen also rund $4000\,\mathrm{m}^3$, das sind 4 Millionen Liter, und für die Oberfläche ungefähr $1500\,\mathrm{m}^2$ - mit wenig Rechnung, aber geschickten, der Situation angepassten Überlegungen!

5. **Der menschliche Körper**

Bestimme näherungsweise deine „Vitalkapazität“ mit Hilfe des neben stehenden Diagramms: Atme dazu so tief wie möglich ein und dann in einen Luftballon aus.

(a) Wie groß ist das gesamte Luftvolumen deiner Lunge?

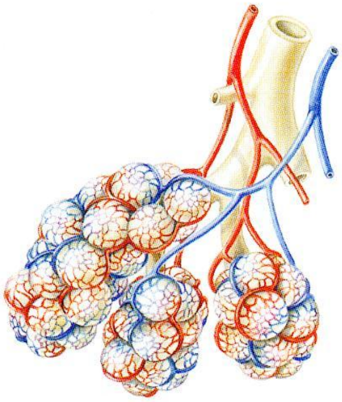
(b) Deine Lunge besteht aus Lungenbläschen, von denen jedes einzelne ein Volumen von ca. $0{,}004\,\mathrm{mm}^3$ hat. Wie viele dieser Lungenbläschen hast du?



In den Lungenbläschen findet der Gasaustausch zwischen Sauerstoff und Kohlendioxid statt. Der Mensch besitzt ca. 400 Mio. Lungenbläschen mit einem Radius von jeweils $0,1\,\text{mm}$.

(c) Berechne den Gesamtoberflächeninhalt aller Lungenbläschen eines Menschen.

(d) Welchen Radius müsste eine einzige Kugel mit dem gleichen Oberflächeninhalt haben?



(e) Um wie viel Prozent ist die Gesamtoberfläche der Lungenbläschen größer als die der Haut?

Lösung: (a)

(b)

(c) $\approx 50\,\text{m}^2$

(d) $\approx 2\,\text{m}$

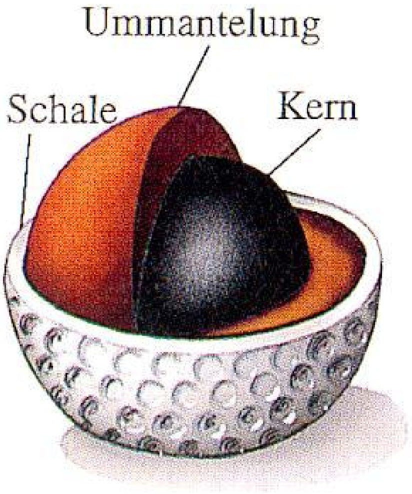
(e) $\approx 2500\%$

6. **Aufgaben zur Anwendung**

   Ein Turniergolfball besteht aus drei Schichten, dem Kern, der Ummantelung und der Schale. Ein Ball hat $42,8\,\text{mm}$ Durchmesser und ein Gewicht von $46,23\,\text{g}$. Die Ummantelung hat eine Schichtdicke von $3,0\,\text{mm}$, der Kern hat einen Durchmesser von $34,8\,\text{mm}$, die Schale hat eine Dicke von $1,0\,\text{mm}$.

   (a) Bestimme den prozentualen Anteil des Volumens der Schale, der Ummantelung und des Kerns am Gesamtvolumen des Balles.

   (b) Die Schale ist aus Lithium, $1\,\text{cm}^3$ Lithium wiegt $0,534\,\text{g}$, die Ummantelung aus Graphit, $1\,\text{cm}^3$ wiegt $2,39\,\text{g}$. Welche Dichte hat das Material des Kerns?



Lösung: (a) Kern: 54% / Ummantelung: 33% / Schale: 13%

(b) $0,5\,\frac{g}{cm^3}$

7. **Aufgaben zur Anwendung**

Viermal am Tag lässt die Aerologische Abteilung des Wetteramts Stuttgart vom Schnarrenberg aus einen Wetterballon in die Atmosphäre aufsteigen, der beim Aufstieg Wetterdaten sammelt und dieser zur Erde funkt. In der dünner werdenden Atmosphäre nimmt das Volumen des Ballons zu bis er schließlich in 30 bis 35 km Höhe zerplatzt. Am Boden besitzt der Wetterballon einen Durchmesser von etwa 1, 70 m.

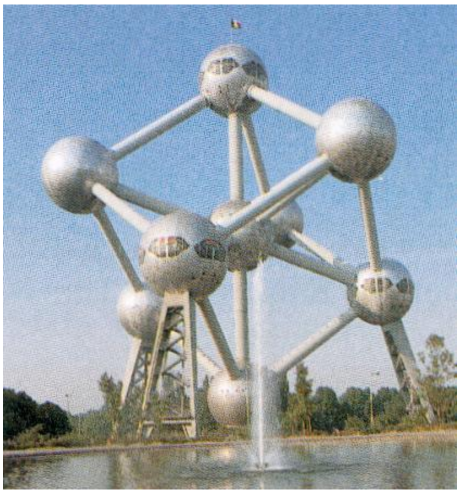
(a) Berechne das Gewicht seiner hochempfindlichen Latexhülle, von der 1 dm^2 etwa 1, 1 g wiegt.

(b) Bis zum Zerplatzen wächst das Volumen auf das 500fache an. Berechne die Oberfläche des Ballonriesen.

Lösung: (a) 1 kg

(b) 572 m^2

8. **Aufgaben zur Anwendung**



Das Wahrzeichen der Weltausstellung 1958 in Brüssel ist das „Atomium“. Es besteht aus 9 Kugeln von je 18 m Durchmesser. Berechne das Gesamtvolumen aller Kugeln. Wie viele m2 muss ein Reinigungsteam putzen (ohne das Gestänge zwischen den Kugeln), wenn das Wahrzeichen so glänzen soll, wie hier auf dem Bild? Vergleiche mit den Quadratmetern an Fensterfläche bei euch zu Hause, die beim Frühjahresputz auf Hochglanz gebracht werden!

Lösung: 27482 m^3 Gesamtvolumen / 9160 m^2

9. **Aufgaben zur Anwendung**

   Bei diesem Brunnen wird eine Granitkugel ($d = 1\,\mathrm{m}$) durch einen Wasserstrahl in der Schwebe gehalten. Berechne das Gewicht der Kugel ($1\,\mathrm{cm}^3$ wiegt $2,9\,\mathrm{g}$).

Lösung: 1518 kg

10. Da Bäume wichtige Sauerstofflieferanten sind, sollen gefällte alte Bäume durch junge Bäume ersetzt werden.

    Laubbäume geben pro Quadratzentimeter Blattfläche ca. 1,8 ml Sauerstoff je Tag ab. Die gesamte Sauerstoffproduktion eines Baumes hängt von der Zahl der Blätter ab.

Für eine grobe Abschätzung nimmt man an, dass ein Baum überall in der Baumkrone dieselbe Blattdichte besitzt.

Schätze ab, wie viele junge Bäume mit einem Kronendurchmesser von je 1,5m gepflanzt werden müssen, wenn ein alter Baum mit einem Kronendurchmesser von 12m gefällt wird.

Lösung: Annahmen: Blattoberfläche proportional zum Volumen der Krone, Baumkrone kugelförmig

$\Rightarrow V_{alt} = \frac{4}{3}(6\text{m})^3\pi \approx 905\text{m}^3$; $V_{neu} = \frac{4}{3}(0,75\text{m})^3\pi \approx 1,8\text{m}^3$

Also müssten ca. 500 neue Bäume geplanzt werden

11. Eine Firma erhält den Auftrag, Eisenkugeln zum Kugelstoßen herzustellen. Welchen Durchmesser müssen die Kugeln mit der Masse $m = 5\,\text{kg}$ haben? (Dichte von Eisen: $\varrho = 7{,}9\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$)

Lösung: 10,7 cm

12. Eine geschälte Orange von 4 cm Radius besteht aus 16 gleichen Schnitzen. Berechnen Sie Volumen und Oberfläche eines Schnitzes!

Lösung: $V = 16{,}8\,\text{cm}^3; \text{O} = 62{,}8\,\text{cm}^2$

13. Eine Kugel mit dem Radius R hat das gleiche Volumen wie eine Halbkugel mit dem Radius r. Berechnen Sie das Verhältnis der Oberflächen von Halbkugel und Kugel.

Lösung: $r = R \cdot \sqrt[3]{2}\ ;\ A_{HK} = 3\,r^2\,\pi\ ;\ \frac{A_{HK}}{A_K} = \frac{3}{\sqrt[3]{16}} \approx 1{,}19$

14. Die Sonne sendet pro Sekunde ungefähr $n_0 = 10^{45}$ Lichtteilchen (Photonen) aus, gleichmäßig auf alle Richtungen verteilt. Die Sonne ist mit dem bloßen Auge noch sichtbar, wenn ca. $n = 100$ Photonen pro Sekunde die Pupille ($A = 0{,}5\,\text{cm}^2$) treffen. In wie vielen Lichtjahren Entfernung ist die Sonne mit freiem Auge gerade noch sichtbar? (Lichtgeschwindigkeit $= c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$)

Lösung: $\frac{n}{n_0} = \frac{A}{4\,\pi\,r^2} \quad \Longrightarrow \quad r = 6{,}31 \cdot 10^{18}\,\text{m} = 667\,\text{LJ}$

15. Um wieviel Prozent muss die Kantenlänge eines Würfels vergrößert werden, damit der vergrößerte Würfel das gleiche Volumen wie die Umkugel des ursprünglichen Würfels hat?

Lösung: 39,6%; Umkugelradius = halbe Raumdiagonale des Würfels

16. Eine hohle Kugel mit 10 cm Außendurchmesser und 4 mm Wanddicke schwimmt in Wasser (Dichte $\varrho_W = 1{,}0\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$) und taucht genau bis zur Hälfte ein. Berechnen Sie die Dichte ϱ_M des Materials, aus dem die Kugel besteht!

Lösung: $2{,}3\,\frac{g}{cm^3}$ (Auftriebsgesetz von Archimedes verwenden!)

17. K_1 ist ein „Achtelschnitz“ einer Kugel mit Radius r (ein Schnitz wie von einer Orange, die aus acht gleichen Schnitzen besteht). K_2 ist ein Viertel einer **Halb**kugel mit Radius r.
    (a) Berechnen Sie die Rauminhalte V_1 und V_2 der beiden Körper.
    (b) Berechnen Sie das Verhältnis der Oberflächen A_1 und A_2 der beiden Körper.

Lösung: (a) $V_1 = V_2 = \frac{\pi}{6} r^3$

(b) $A_1 = \frac{3}{2} r^2 \pi\,,\ A_2 = \frac{5}{4} r^2 \pi\,,\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{6}{5}$

18. Schneidet eine Ebene eine Kugel vom Radius R im Abstand d ($0 \leqq d < R$) vom Kugelmittelpunkt, so wird eine sogenannte **Kugelhaube** der Höhe $h = R - d$ abgeschnitten. Für den Flächeninhalt F der Kugelhaube (ohne Boden) gilt dabei die Formel

$$F = 2\pi \cdot R \cdot h \qquad \text{(kein Nachweis!)}$$

    (a) Folgern Sie mit Hilfe dieser Beziehung die Formel zur Berechnung der Kugeloberfläche!
    (b) In welcher Höhe H über dem Horizont überblickt man den n-ten Teil ($n \geqq 2$) der Erdoberfläche (Erdradius R)? Erstellen Sie eine Überlegungsskizze!

Lösung: (b) $H = \frac{2R}{n-2}$

19. (a) Zeigen Sie, dass für das Materialvolumen einer Hohlkugel mit dem Außendurchmesser $2r$ und der Wanddicke d gilt:

$$V = \frac{4}{3}\pi d(3r^2 - 3rd + d^2)$$

    (b) Betrachten Sie nun diese Hohlkugel als Schicht der Dicke d und der „Grundfläche“ S und leiten Sie daraus einen näherungsweisen Zusammenhang zwischen der Kugeloberfläche S, dem Radius r und der Wanddicke d her.
    (c) Zeigen Sie nun mit Hilfe geeigneter Zahlenwerte:
    Läßt man die Wanddicke d „beliebig dünn“werden, so ergibt sich aus der Formel aus Aufgabe (b) durch geschicktes Vernachlässigen die exakte Formel für die Oberfläche einer Kugel vom Radius r.

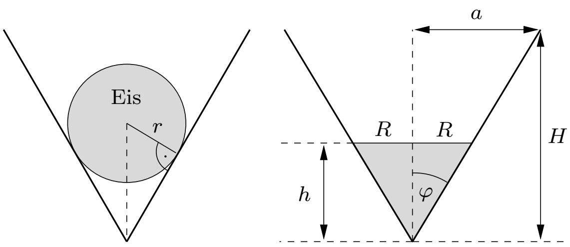
Lösung: (b) $S \approx 4r^2\pi - 4r\pi d + \frac{4}{3}\pi d^2$ (c) $S = 4r^2\pi$

20. Um wieviel Prozent muss die Kantenlänge eines Würfels vergrößert werden, damit der vergrößerte Würfel das gleiche Volumen wie die Umkugel des ursprünglichen Würfels hat?

Lösung: 39,6%

2.2. Zylinder, Kegel und Kugel - Volumen und Oberfläche

1. Eine Kugel Speiseeis (Radius r) liegt in einem kegelförmigen Sektglas der Höhe H und der Weite $2a$ (siehe Abbildung). Das Eis schmilzt in der Sonne ohne Volumenänderung und bildet im Glas einen kleinen See der Tiefe h.



   (a) Drücken Sie h durch r und den Winkel φ (siehe Abb.) aus.

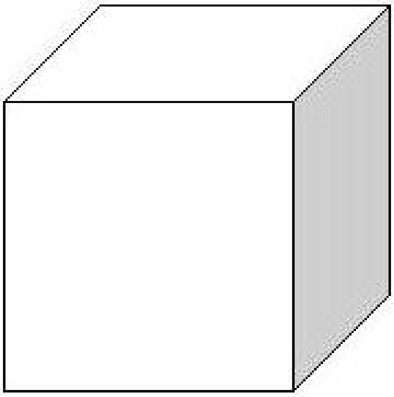
   (b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen a und H, wenn $h = 2r$ gilt?

Lösung: (a) $\frac{4\pi}{3}r^3 = \frac{1}{3}R^2\pi h = \frac{\pi}{3}h^3\tan^2\varphi \quad \Longrightarrow \quad h = r\sqrt[3]{\frac{4}{\tan^2\varphi}}$

(b) $h = 2r \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[3]{\frac{4}{\tan^2\varphi}} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{4}{\tan^2\varphi} = 8 \quad \Longrightarrow \quad \tan\varphi = \frac{a}{H} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$H = a\sqrt{2}$$

2. **Maximales im Würfel**



Setze in den Würfel

(a) eine Kugel,

(b) einen Kegel,

(c) einen Zylinder

(d) eine Pyramide

mit maximalem Volumen. Vergleiche die Volumina und Oberflächeninhalte der Körper mit dem Volumen und dem Oberflächeninhalt des Würfels.

Lösung:

3. **Heißluftballon**

Viel heiße Luft bringt einen mit Sicherheit nach oben. Niemand weiß das besser als Ian Ashpole. Der 43-Jährige stand in England auf der Spitze eines Heißluftballons.

Die Luft-Nummer in 1500 Meter Höhe war noch der ungefährlichste Teil der Aktion. Kritischer war der Start: Nur durch ein Seil gesichert, musste sich Ashpole auf dem sich füllenden Ballon halten. Bei der Landung strömte dann die heiße Luft aus einem Ventil direkt neben seinen Beinen vorbei. Doch außer leichten Verbrennungen trug der Ballonfahrer keine Verletzung davon.

(a) Wie viel Luft sind wohl in diesem Heißluftballon?

(b) Wie viel Stoff benötigte man zur Herstellung dieses Ballons?

Quelle: Herget, W. et al.: Produktive Aufgaben

Lösung: Je mehr man mathematisch vorgebildet ist, umso mehr mathematisches Instrumentarium wird man bei dieser Aufgabe wie selbstverständlich einsetzen - und zwar ohne darüber nachzudenken, ob diese hoch genauen Instrumente wirklich genauere Ergebnisse liefern. So könnte man hier den Heißluftballon sehr genau modellieren, etwa durch eine obere Halbkugel und einen zylindrischen Kegel. In der Analysis bietet sich die Interpretation als Rotationskörper an, wobei der Fantasie für die zugrunde gelegte Kurve (fast) keine Grenzen gesetzt sind - hoffentlich ist das Integral dann elementar lösbar; und wenn nicht, könnte man es schließlich noch numerisch lösen. Aber es geht (auch) hier einfacher: In jedem Fall ist man darauf angewiesen, die Maße des Ballons aus dem Foto zu entnehmen und in die Wirklichkeit hochzurechnen (Proportionen/Verhältnis/Dreisatz). Einziger Bezugspunkt dafür ist wohl der Mann auf der Spitze des Ballons. Daraus ergibt sich für die Höhe des Ballons (ohne Gondel) und ebenso für seine Breite etwa $20 - 25\,\text{m}$. Bei dieser unvermeidbaren Unschärfe sind solch feinsinnige Modellierungen wie die oben aufgeführten schlichtweg „oversized“.
Ein ganz einfaches Modell leistet schon das Gewünschte: Etwa ein Würfel, den wir uns „nach Augenmaß“ so vorstellen, dass er an den Ecken über den Ballon herausragt, seine Seitenfläche aber teilweise in den Ballon „hineintauchen“ - oder eine entsprechend dimensionierte Kugel als geeignete „Ersatz-Form“ für den Ballon.
Auf diese Weise kann man als gute Näherung einen Würfel mit einer Kantenlänge von 16m wählen oder eine Kugel mit einem Durchmesser von etwa 20 m. Das Volumen des Würfels ist besonders einfach: $V = 4096\,\text{m}^3$ und für die Kugel erhalten wir
$V = \frac{4\pi}{3} \cdot 10 \approx 4180\,\text{m}^3$.
Beide Modelle liefern für das Volumen also rund $4000\,\text{m}^3$, das sind 4 Millionen Liter, und für die Oberfläche ungefähr $1500\,\text{m}^2$ - mit wenig Rechnung, aber geschickten, der Situation angepassten Überlegungen!

4. **Rotierende Figuren**

Die äußeren Quadrate in der unten stehenden Abbildung haben jeweils die Seitenlänge a.

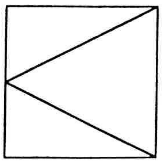
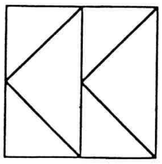
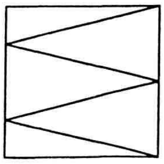
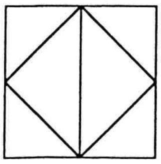
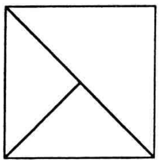
(a) Bestimme die prozentualen Anteile der Teilflächen.

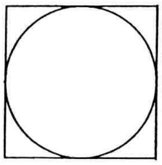
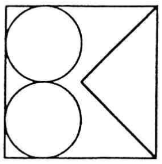
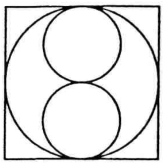
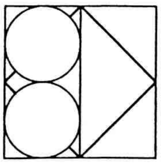
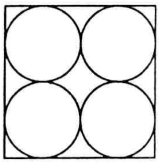
(b) Die Figur rotiert - sofern vorhanden - um eine frei wählbare Symmetrieachse.

   i. Bestimme das Verhältnis der Volumina der entstehenden Körper. Die Bezugsgröße ist der durch das rotierende Quadrat entstehende Körper.

   ii. Bestimme das Verhältnis der Oberflächeninhalte der entstehenden Körper. Wähle als Bezugsgröße:
      A. den Flächeninhalt des Quadrates;
      B. den Oberflächeninhalt des durch das rotierende Quadrat entstehenden Körpers.

(c) Finde selbst weitere geeignete Figuren und untersuche sie.

Lösung:

5. **Aufgaben zur Anwendung**

   Ein Turmdach hat die Form eines Kegels mit dem Grundkreisdurchmesser $d = 4,8\,\text{m}$ und der Höhe $h = 6\,\text{m}$.

   (a) Berechne den umbauten Raum

   (b) Wie teuer ist die Belegung mit Dachplatten, wenn für $1\,\text{m}^2$ Dachbelegung 285 € berechnet werden?

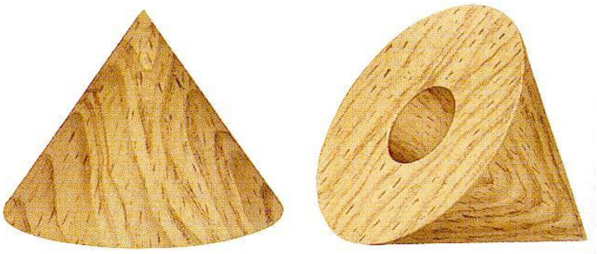
Lösung:

6. **Aufgaben zur Anwendung**

   Ein Holzkegel (Buche: $0,7\frac{g}{cm^3}$) hat ein Gewicht von 665 g und eine Höhe von 7,5 cm.

   (a) Berechne den Radius des Kegels.

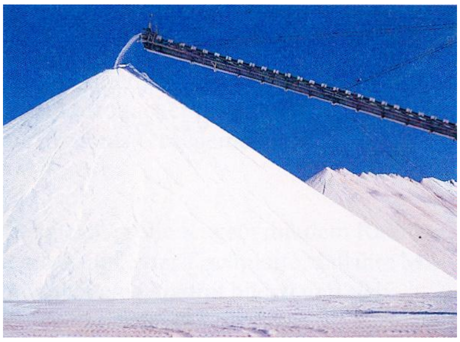
   (b) Welchen Durchmesser muss eine 4 cm tiefe Bohrung haben, damit das Gewicht des Kegels auf 650 g verringert wird?



Lösung:

7. **Aufgaben zur Anwendung**

   Über ein Förderband werden 2 m^3 Sand wie nebenstehend abgebildet aufgeschüttet. Welche Bodenfläche bedeckt der Sandhaufen bei einer Höhe von 0,8 m?



Lösung:

8. **Aufgaben zur Anwendung**

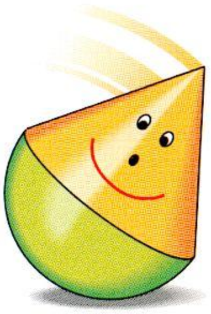
   Ein 11 cm hohes Stehaufmännchen besteht aus einer Halbkugel von 4 cm Radius und einem aufgesetzten Kegel. Beide Teile sind aus dem gleichen Material.

   (a) Wie groß ist der Rauminhalt?

(b) Wie viel Prozent des Rauminhaltes befinden sich in der Ruhelage unterhalb des Kugelmittelpunktes?

(c) Damit ein Stehaufmännchen funktioniert, darf der aufgesetzte Kegel höchstens so schwer sein wie die Halbkugel. Ist das hier der Fall?

(d) Wie hoch darf bei einem Stehaufmännchen der aufgesetzte Kegel höchstens sein, damit das Stehaufmännchen funktioniert?



Lösung:

9. Taucht man einen Strohhalm (Durchmesser 3 mm) in Seifenlauge und zieht ihn wieder heraus, bleibt in ihm auf einer Länge von 7 mm Seifenlauge zurück. Daraus bläst man eine Seifenblase mit einem Durchmesser von 8 cm. Wie dick ist die Haut der Seifenblase?

Lösung: $V_{Zylinder} = 1,5^2 \cdot \pi \cdot 7\text{mm}^3 \approx 50\text{mm}^3$

$O_{Seifenblase} = 4 \cdot \pi \cdot 40^2\text{mm}^2 \approx 20000\text{mm}^2$

$d_{Seifenblasenhaut} = V_{Zylinder} : O_{Seifenblase} = 0,0025\text{mm}$

10. (a) Eine Glaskugel mit 12 cm Durchmesser wird in einen möglichst kleinen zylinderförmigen Karton verpackt. Wieviele Prozent des zur Verfügung stehenden Raumes werden verschenkt?

(b) Der Glasbläser hat die Kugel aus einem 3 cm dicken Tropfen Glas geblasen. Wie dick ist die Glaswand der Kugel?

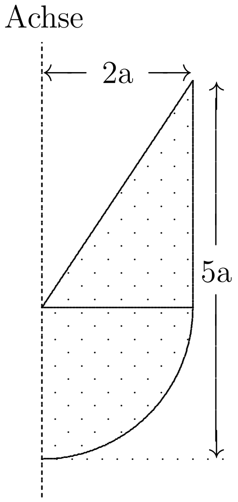
Lösung: $\frac{2\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi r^3} = 33\%$

$\frac{4\pi}{3} r_0^3 \approx 4\pi R^2 d$ ergibt $d \approx 0{,}3$ mm; eine exakte Rechnung liefert dasselbe Ergebnis.

11. In einem Messzylinder mit dem inneren Radius $R = 1{,}2$ cm steht eine Flüssigkeit 3 cm hoch. Diese Flüssigkeit wird in ein Reagenzglas mit dem inneren Radius $r = 0{,}6$ cm gegossen. Wie hoch (in cm) steht die Flüssigkeit im Reagenzglas vom untersten Punkt aus gemessen?
Hinweis: Betrachten Sie das Reagenzglas als Zylinder mit angesetzter Halbkugel!

Lösung: 12,2 cm

12. Berechnen Sie die Gesamtoberfläche des Rotationskörpers in Abhängigkeit von a und π!



Lösung: $O = a^2\pi(20 + 2\sqrt{13})$

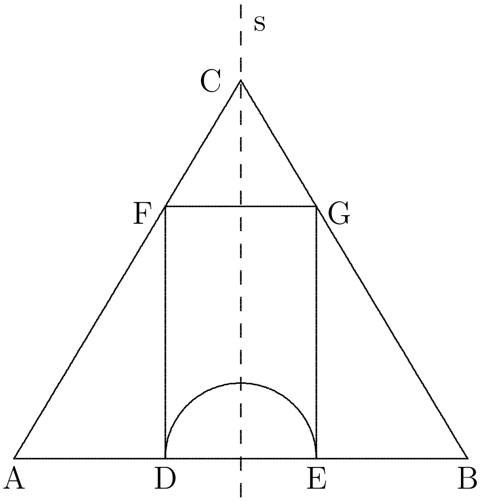
13. Eine Kugel wird in einem möglichst kleinen zylinderförmigen Karton verpackt. Wieviel Prozent des Zylindervolumens bleiben frei?

Lösung: 33%

14. Einer Kugel vom Radius r ist ein Zylinder mit der Höhe $h = 1{,}5r$ einbeschrieben. Wie verhalten sich die Rauminhalte der beiden Körper?

Lösung: $V_Z : V_K = 63 : 128$

15. Aus dem gleichseitigen Dreieck ABC der Seitenlänge $2a$ werde die Figur $DEFG$ mit dem Halbkreisbogen DE herausgestanzt. Das restliche Flächenstück rotiere um die Achse s. Ferner gilt $\overline{CG} = \frac{2}{3}a$.
Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers in Abhängigkeit von a und stellen Sie das Ergebnis in möglichst einfacher Form dar!

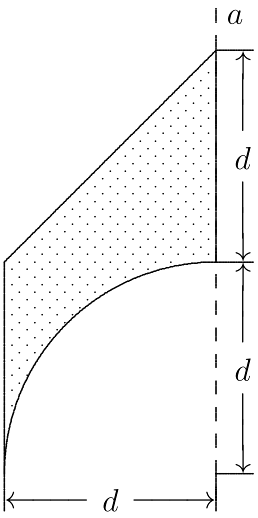


Lösung: Strahlensatz!
$V_{Rot} = \frac{1}{81}a^3\pi \cdot \left(21\sqrt{3} + 2\right)$

16. Durch Rotation der schraffierten Fläche um die Achse a entsteht ein Rotationskörper (runder Turm mit halbkugelförmigem Innenraum).

    (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Dachfläche in Abhängigkeit von d.

    (b) Berechnen Sie den Rauminhalt des Rotationskörpers in Abhängigkeit von d. Das Ergebnis soll möglichst weit vereinfacht werden.



Lösung: $A = \sqrt{2}\pi d^2$ und $V = \frac{2}{3}\pi d^3$

17. Tennisbälle werden in Sportgeschäften häufig in zylindrischen Blechdosen angeboten. dabei werden 4 Bälle übereinander in der Dose gestapelt. Wie groß ist der in der Dose verbleibende Hohlraum, wenn man von einem Balldurchmesser von 7cm ausgeht. Um welchen Anteil des Dosenvolumens handelt es sich dabei?

Lösung: Anteil $\frac{1}{3}$, Volumen $359cm^3$

18. Ein Hohlzylinder (Höhe $h = 10\,\text{cm}$; Außendurchmesser $d = 3\,\text{cm}$; Wanddicke $a = 2\,\text{mm}$) aus Blei wird geschmolzen und
a) in eine Vollkugel
b) in eine Hohlkugel mit gleicher Wanddicke a
umgeformt. Berechne jeweils den Außendurchmesser der Kugel!

Lösung: a) $d_K = 3{,}2\,\text{cm}$; b) $d_K = 5{,}4\,\text{cm}$

19. Einer Kugel vom Radius R ist ein Zylinder einbeschrieben, dessen Mantelfläche sich zur Kugeloberfläche wie $1:2$ verhält. (Schnittsskizze!)
    (a) Zeigen Sie, dass diese Bedingung nur erfüllt ist, wenn der Zylinderradius halb so groß ist wie die Zylinderhöhe!
    (b) Welchen prozentualen Anteil des Kugelvolumens macht das Zylindervolumen aus?

Lösung: 53,0%

20. Einem geraden Kreiskegel vom Grundkreisradius r, dessen Axialschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, lassen sich eine Kugel vom Radius R_e einbeschreiben und eine Kugel vom Radius R_u umbeschreiben.
    (a) Zeichnen Sie einen gemeinsamen Axialschnitt der drei Körper für $r = 3\,\text{cm}$!
    (b) Stellen Sie allgemein die Radien R_e und R_u der beiden Kugeln in Abhängigkeit von r dar!
    (Teilergebnis: $R_e = \frac{r}{3}\sqrt{3}$)
    (c) Wie verhalten sich die Volumina von umbeschriebener Kugel, Kegel und einbeschriebener Kugel?

Lösung: (b) $R_u = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$ (c) $V_u : V_{Ke} : V_e = 32 : 9 : 4$

21. Ein auf der Spitze stehender gleichseitiger Hohlkegel (d.h. ein Axialschnitt des Kegels ergibt ein gleichseitiges Dreieck) ist teilweise mit Wasser gefüllt. Wirft man in den Kegel eine Kugel mit dem Radius r, so wird diese gerade ganz von Wasser bedeckt und der Kegel ganz mit Wasser gefüllt. Berechnen Sie die Tiefe des Wassers vor und nach dem Hineinwerfen der Kugel!

Lösung: vorher: $r\sqrt[3]{15}$; nachher: $3r$

22. In einen auf der Spitze stehenden gleichseitigen Hohlkegel (d.h. ein Axialschnitt des Kegels ergibt ein gleichseitiges Dreieck) wird eine Kugel vom Radius r geworfen. Die Kugel taucht dabei gerade vollständig in den Kegel ein. Wie verhalten sich die Oberflächeninhalte von Kegel und Kugel?

Lösung: $O_{Ke} : O_{Ku} = 9 : 4$

23. Einer Kugel vom Radius r wird ein gerader Kegel der Höhe $4r$ umbeschrieben.
    (a) Berechnen Sie den Öffnungswinkel α des Kegels (Planfigur).
    (b) Wie groß ist der Radius des Berührkreises?
    (c) Welches Verhältnis bilden Mantelfläche und Kugeloberfläche?

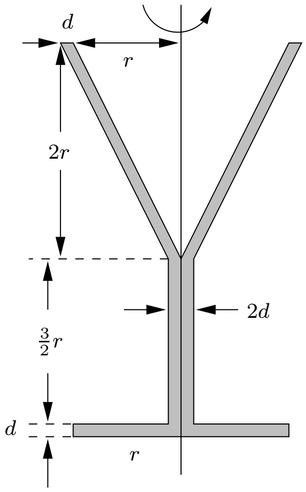
Lösung: (a) $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$
(b) $\varrho = \sqrt{8}\sin\frac{\alpha}{2}$
(c) $3 : 2$

24.

2.3. Rotationskörper

2.3.1. Rotationskörper ohne Kegelstümpfe

1. Drücke das Volumen V des Sektglases (Rotationskörper) durch r und d aus. Vereinfache das Ergebnis für $r = 10d$.



Lösung: $V_1 = V_{\text{Kegel mit Radius } r+d \text{ und Höhe } 2r+2d} = \frac{2\pi}{3}(r+d)^3$

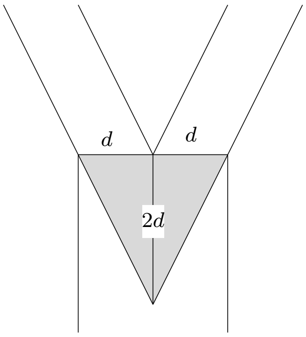
$V_2 = V_{\text{Kegel mit Radius } r \text{ und Höhe } 2r} = \frac{2\pi}{3}r^3$

$V_3 = V_{\text{Kegel mit Radius } d \text{ und Höhe } 2d} = \frac{2\pi}{3}d^3$

$V_4 = V_{\text{Zylinder mit Radius } d \text{ und Höhe } \frac{3}{2}r} = \frac{3\pi}{2}rd^2$

$V_5 = V_{\text{Zylinder mit Radius } r \text{ und Höhe } d} = \pi r^2 d$

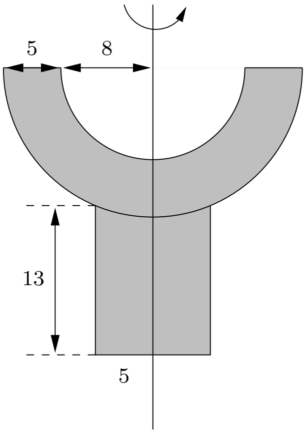
$V = V_1 - V_2 - V_3 + V_4 + V_5$



$$\begin{aligned} V &= \frac{2\pi}{3}(r+d)^3 - \frac{2\pi}{3}r^3 - \frac{2\pi}{3}d^3 + \frac{3\pi}{2}rd^2 + \pi r^2 d = \\ &= \frac{2\pi}{3}(r^3 + 3r^2d + 3rd^2 + d^3 - r^3 - d^3) + \frac{3\pi}{2}rd^2 + \pi r^2 d = \\ &= 3\pi r^2 d + \frac{7\pi}{2}rd^2 = \frac{\pi r d}{2}(6r + 7d) \end{aligned}$$

$$r = 10d \quad \Longrightarrow \quad V = 335\pi d^3$$

2. Berechne das Volumen V des Pokals (Rotationskörper), die Maße verstehen sich in Zentimetern.
   Wie groß ist der relative Fehler, wenn man den „Fuß“ als Zylinder der Höhe 13 cm auffasst?



Lösung: $V_1 = V_{\text{Halbkugel mit Radius 13 cm}} = \frac{2\pi}{3} \cdot 13^3\,\text{cm}^3$

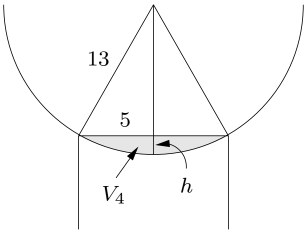
$V_2 = V_{\text{Halbkugel mit Radius 8 cm}} = \frac{2\pi}{3} \cdot 8^3\,\text{cm}^3$

$V_3 = V_{\text{Zylinder mit Radius 5 cm und Höhe 13 cm}} = \pi \cdot 5^2 \cdot 13\,\text{cm}^3$

$h = 13\,\text{cm} - \sqrt{13^2 - 5^2}\,\text{cm} = 1\,\text{cm}$

$V_4 = V_{\text{Kugelhaube mit Radius 13 cm und Höhe } h}$

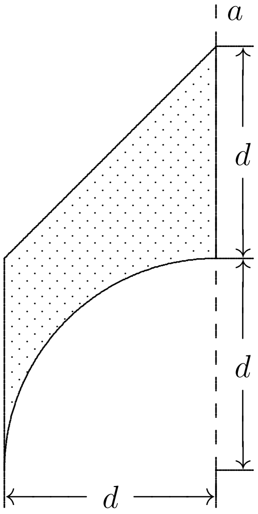
$V_4 = \frac{\pi}{3}h^3(3 \cdot 13\,\text{cm} - h) = \frac{38\pi}{3}\,\text{cm}^3$



$V = V_1 - V_2 + V_3 - V_4 = \left(\frac{4394\pi}{3} - \frac{1024\pi}{3} + 325\pi - \frac{38\pi}{3}\right)\,\text{cm}^3 = \frac{4307\pi}{3}\,\text{cm}^3 \approx 4510\,\text{cm}^3$

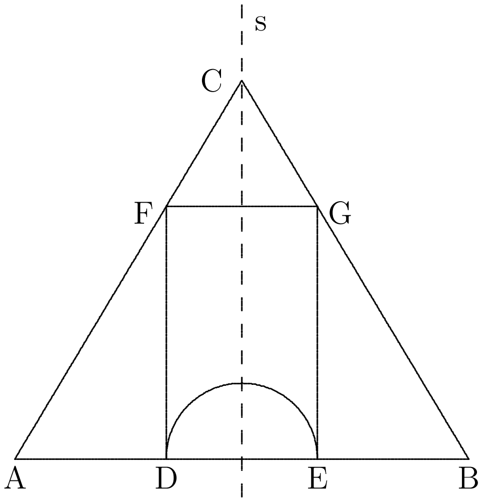
Fuß als Zylinder: $V' = V_1 - V_2 + V_3 = V + V_4 \quad \Longrightarrow \quad \delta_{\text{rel}} = \frac{V' - V}{V} = \frac{V_4}{V} = \frac{38}{4307} = 0{,}88\%$

3. Durch Rotation der schraffierten Fläche um die Achse a entsteht ein Rotationskörper (runder Turm mit halbkugelförmigem Innenraum).
   (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Dachfläche in Abhängigkeit von d.
   (b) Berechnen Sie den Rauminhalt des Rotationskörpers in Abhängigkeit von d. Das Ergebnis soll möglichst weit vereinfacht werden.



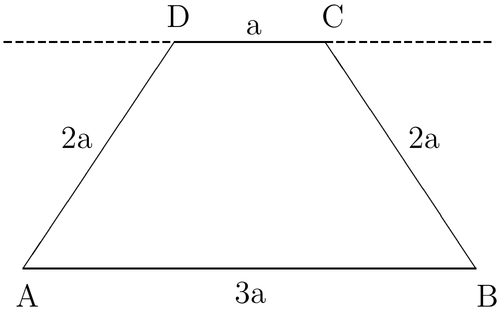
Lösung: $A = \sqrt{2}\pi d^2$ und $V = \frac{2}{3}\pi d^3$

4. Aus dem gleichseitigen Dreieck ABC der Seitenlänge $2a$ werde die Figur $DEFG$ mit dem Halbkreisbogen DE herausgestanzt. Das restliche Flächenstück rotiere um die Achse s. Ferner gilt $\overline{CG} = \frac{2}{3}a$.
   Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers in Abhängigkeit von a und stellen Sie das Ergebnis in möglichst einfacher Form dar!



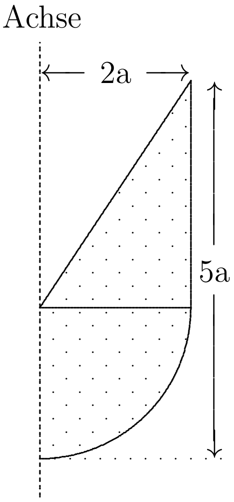
Lösung: Strahlensatz!
$V_{Rot} = \frac{1}{81}a^3\pi \cdot \left(21\sqrt{3} + 2\right)$

5. Das Trapez ABCD in nebenstehender Skizze rotiert um die Achse DC. Berechnen Sie Volumen und Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers!



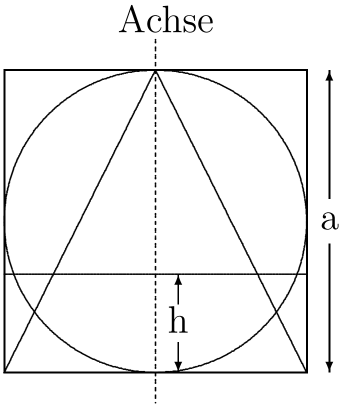
Lösung: $V = 7a^3\pi$; $O = 10\sqrt{3}a^2\pi$

6. Berechnen Sie die Gesamtoberfläche des Rotationskörpers in Abhängigkeit von a und π!



Lösung: $O = a^2\pi(20 + 2\sqrt{13})$

7. Einem Quadrat sind ein Kreis und ein gleichschenkliges Dreieck einbeschrieben. Diese Figur dreht sich um die Symmetrieachse (vgl. Zeichnung).



(a) Berechnen Sie jeweils das Volumen der drei dabei entstehenden Körper sowie den Oberflächeninhalt des Kegels!

(b) Aus dem Zylinder wird die Kugel herausgeschnitten. Wie groß ist der Radius R einer anderen Kugel, die denselben Rauminhalt wie der Restkörper hat?

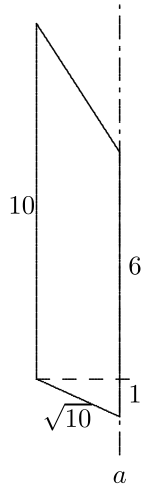
(c) Die drei Körper werden in der Höhe h über der Grundfläche von einer zur Grundfläche parallelen Ebene geschnitten. Wie groß sind die Flächeninhalte von „Kegelkreis “und „Kugelkreis “?

Lösung: (a) $V_{Zy} = \frac{1}{4}\pi a^3; V_{KU} = \frac{1}{6}\pi a^3; V_{Ke} = \frac{1}{12}\pi a^3; O_{Ke} = \frac{1}{4}\pi a^2(\sqrt{5}+1)$

(b) $\sqrt[3]{\frac{1}{16}a^3}$

(c) $A_{Ke} = (\frac{a-h}{2})^2\pi; A_{Ku} = (ah - h^2)\pi$

8. Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Körpers, der entsteht, wenn die Figur um die Achse a rotiert!

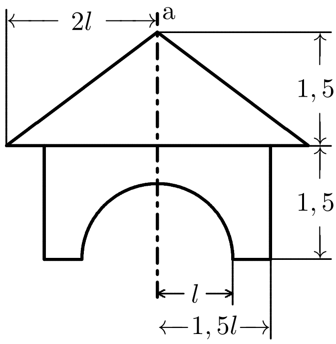


Lösung: $O = (75 + 3\sqrt{10}) \cdot \pi$

9. Die nebenstehende Figur rotiert um die Achse a. Bestimmen Sie für den Rotationskörper

   (a) das Volumen V

   (b) die Oberfläche O



Lösung: (a) $V = \frac{1}{3}(2l)^2\pi \cdot 1{,}5l + (1{,}5l)^2\pi \cdot 1{,}5l - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi l^3 = \frac{113}{24}\pi l^3$

(b) Länge der Mantellinie: $m = 2{,}5l$.

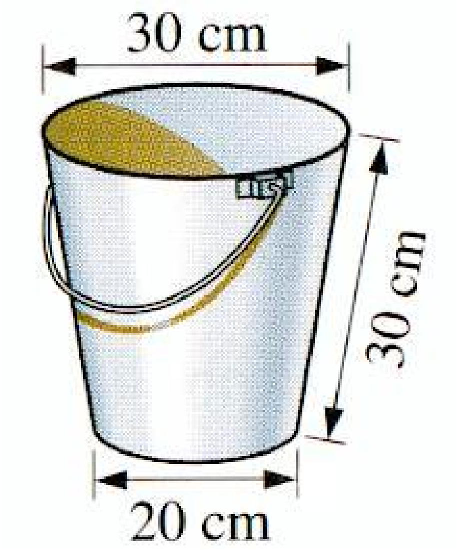
Oberfläche:

$O = \frac{1}{2}m \cdot 2\pi \cdot 2l + 1{,}5l \cdot 2\pi \cdot 1{,}5l + (\pi(2l)^2 - \pi l^2 + \frac{1}{2}4\pi l^2 = 14{,}5\pi l^2$

2.3.2. Rotationskörper mit Kegelstümpfen

1. **Aufgaben zur Anwendung**

   Eine Firma stellt Eimer aus Zinkblech her. Wie viel Quadratmeter Blech werden zur Herstellung von 1000 Eimern gebraucht, wenn mit 14% Verschnitt gerechnet werden muss?



Lösung:

2. **Aufgaben zur Anwendung**

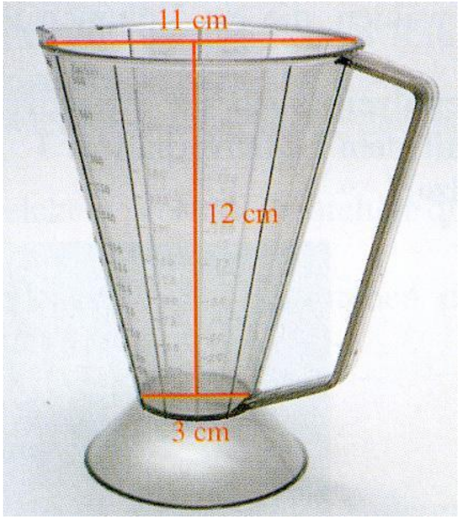
   In jeder Küche ist ein Messbecher notwendig, um die Menge von Flüssigkeiten oder Zucker, Mehl und ähnliches zu bestimmen.

   (a) Wie viel Kubikzentimeter Wasser fasst der nebenstehende Messbecher?

   (b) In welcher Höhe ist auf dem Mantel des Messbechers die Markierung für $\frac{1}{20}$ l ($\frac{1}{10}$ l; $\frac{1}{8}$ l; $\frac{1}{4}$ l und $\frac{1}{2}$ l) anzubringen?

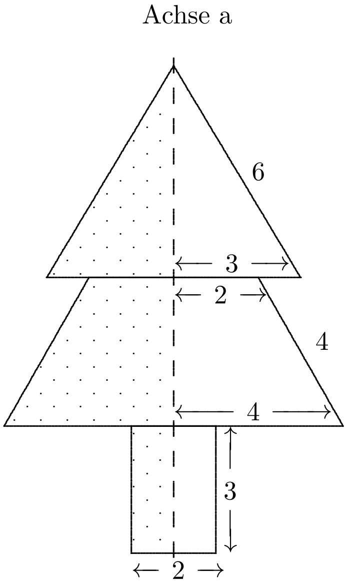
   (c) Der Messbecher fasst 350 g Mehl. In welcher Höhe ist die Markierung für 10 g (20 g; 30 g; 40 g; 50 g; 100 g; 150 g; 200 g und 250 g) Mehl anzubringen?

   Anleitung: Zeichne eine Schnittfigur des Messbechers und verlängere sie so weit, dass ein Kegel entsteht! Wende den zweiten Strahlensatz an!



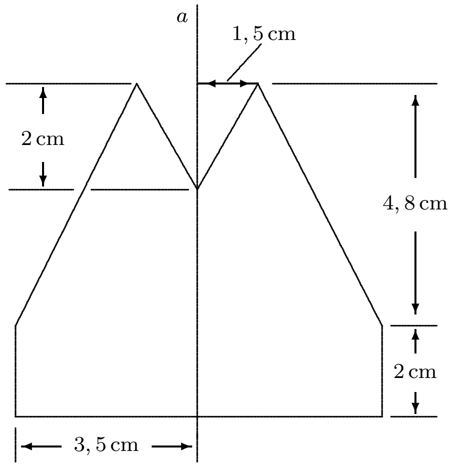
Lösung:

3. Oh Tannenbaum!
   Das punktierte Flächenstück rotiert um die eingezeichnete Achse a. Die Längenangaben sind in cm. Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers!
   Hinweis:
   Für einen Kegelstumpf mit den Radien r_1 und r_2, der Höhe h und der Mantellinie s gilt:
   $V_{KST} = \frac{1}{3}\pi(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)h$
   $M_{KST} = (r_1 + r_2)\pi s$



Lösung: $V = 160{,}0\,\mathrm{cm}^3, \mathrm{O} = 216{,}8\,\mathrm{cm}^2$

4. Die nebenstehend gezeichnete, zur Achse a symmetrische Figur rotiert um die Achse a. Berechne das Volumen V und die Oberfläche A des entstehenden Rotationskörpers!



Lösung: $V = 54{,}6\,\pi\,\text{cm}^3$
$A = 56\,\pi\,\text{cm}^2$

2.3.3. Einbeschreibungen

1. Eine Kugel wird in einem möglichst kleinen zylinderförmigen Karton verpackt. Wieviel Prozent des Zylindervolumens bleiben frei?

Lösung: 33%

2. Einer Kugel vom Radius r ist ein Zylinder mit der Höhe $h = 1{,}5r$ einbeschrieben. Wie verhalten sich die Rauminhalte der beiden Körper?

Lösung: $V_Z : V_K = 63 : 128$

3. Um wieviel Prozent muss die Kantenlänge eines Würfels vergrößert werden, damit der vergrößerte Würfel das gleiche Volumen wie die Umkugel des ursprünglichen Würfels hat?

Lösung: 39,6%; Umkugelradius = halbe Raumdiagonale des Würfels

4. (a) Eine Glaskugel mit 12 cm Durchmesser wird in einen möglichst kleinen zylinderförmigen Karton verpackt. Wieviele Prozent des zur Verfügung stehenden Raumes werden verschenkt?
   (b) Der Glasbläser hat die Kugel aus einem 3 cm dicken Tropfen Glas geblasen. Wie dick ist die Glaswand der Kugel?

Lösung: $\frac{2\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi r^3} = 33\%$
$\frac{4\pi}{3} r_0^3 \approx 4\pi R^2 d$ ergibt $d \approx 0{,}3\,\text{mm}$; eine exakte Rechnung liefert dasselbe Ergebnis.

5. Einem Kegel mit Radius r und Höhe h ist ein Zylinder einbeschrieben, der auf der Grundfläche des Kegels steht und dessen Grundkreisdurchmesser gleich seiner Höhe ist. Wie verhalten sich die Volumina von Kegel und Zylinder zueinander?

Lösung: $V_{Ke} : V_{Zy} = (2r + h)^3 : 6rh^2$

6. Bei einem Kegel mit Grundkreisradius r und Höhe h ist die Mantellinienlänge m doppelt so groß wie h. Dem Kegel ist ein Zylinder einbeschrieben, der auf der Grundfläche des Kegels steht und dessen Mantelfläche ein Viertel der Mantelfläche des Kegels beträgt. Welchen Radius ϱ besitzt der Zylinder?

Lösung: $\varrho = \frac{r}{2}$

7. Einem geraden Kreiskegel vom Grundkreisradius r, dessen Axialschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, lassen sich eine Kugel vom Radius R_e einbeschreiben und eine Kugel vom Radius R_u umbeschreiben.
   (a) Zeichnen Sie einen gemeinsamen Axialschnitt der drei Körper für $r = 3\,\text{cm}$!
   (b) Stellen Sie allgemein die Radien R_e und R_u der beiden Kugeln in Abhängigkeit von r dar!
   (Teilergebnis: $R_e = \frac{r}{3}\sqrt{3}$)
   (c) Wie verhalten sich die Volumina von umbeschriebener Kugel, Kegel und einbeschriebener Kugel?

Lösung: (b) $R_u = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$ (c) $V_u : V_{Ke} : V_e = 32 : 9 : 4$

8. Ein auf der Spitze stehender gleichseitiger Hohlkegel (d.h. ein Axialschnitt des Kegels ergibt ein gleichseitiges Dreieck) ist teilweise mit Wasser gefüllt. Wirft man in den Kegel eine Kugel mit dem Radius r, so wird diese gerade ganz von Wasser bedeckt und der Kegel ganz mit Wasser gefüllt. Berechnen Sie die Tiefe des Wassers vor und nach dem Hineinwerfen der Kugel!

Lösung: vorher: $r\sqrt[3]{15}$; nachher: $3r$

9. In einen auf der Spitze stehenden gleichseitigen Hohlkegel (d.h. ein Axialschnitt des Kegels ergibt ein gleichseitiges Dreieck) wird eine Kugel vom Radius r geworfen. Die Kugel taucht dabei gerade vollständig in den Kegel ein. Wie verhalten sich die Oberflächeninhalte von Kegel und Kugel?

Lösung: $O_{Ke} : O_{Ku} = 9 : 4$

2.3.4. Anwendungen in der Physik

1. Eine Firma erhält den Auftrag, Eisenkugeln zum Kugelstoßen herzustellen. Welchen Durchmesser müssen die Kugeln mit der Masse $m = 5\,\mathrm{kg}$ haben?
   (Dichte von Eisen: $\varrho = 7{,}9\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$)

Lösung: 10,7 cm

2. Bestimmen Sie die Masse m eines Kupferrohrs, das die Länge $l = 1\,\mathrm{m}$, den Außendurchmesser $2r = 4\,\mathrm{cm}$ und die Wandstärke $d = 3\,\mathrm{mm}$ hat. Die Dichte von Kupfer ist $\varrho = 8{,}9\frac{g}{cm^3}$.
   (a) Leiten Sie zunächst einen Ausdruck her, der m durch die Größen l, r, d, ϱ ausdrückt.
   (b) Berechen Sie den Wert dieses Ausdrucks für die angegebenen Werte der Größen l, r, d, ϱ mit dem Taschenrechner.

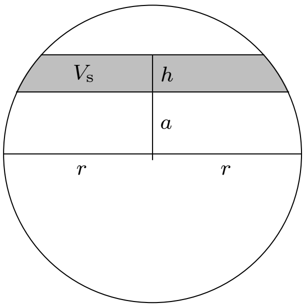
Lösung: (a) $m = \pi\varrho l d(2r - d)$ (b) $m = 3103{,}6g \approx 3{,}1kg$

3. Ein Würfel aus Kork ($\varrho_K = 0{,}2\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$) wird senkrecht zu einer Seitenfläche zylindrisch durchbohrt. In diese Bohrung wird ein Aluminiumzylinder ($\varrho_{Al} = 2{,}7\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$) gleicher Größe gesteckt. Die Kantenlänge a des Würfels beträgt 30 cm.
   Wie groß muss der Radius r der Bohrung sein, damit der Körper im Wasser ($\varrho_W = 1{,}0\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$) schwebt? Berechnen Sie zunächst allgemein den Radius r der Bohrung in Abhängigkeit von der Kantenlänge a des Würfels und setzen Sie erst dann die gegebenen Werte ein!

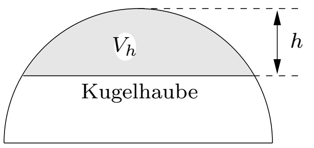
Lösung: $r = \sqrt{\frac{\varrho_W - \varrho_K}{(\varrho_{Al} - \varrho_K) \cdot \pi}} \cdot a = 9{,}6\,cm$; Auftriebsgesetz von Archimedes verwenden!

2.3.5. Das Prinzip von Cavalieri

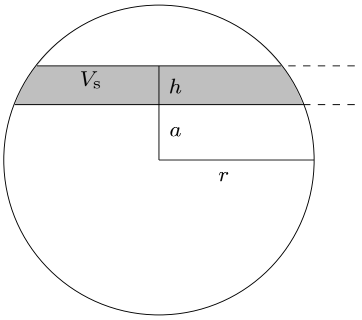
1. (a) Berechne das Volumen V_s einer Kugelschicht (Kugelscheibe) mit Kugelradius r, Abstand a der Schicht vom Mittelpunkt und Dicke h der Schicht in der gezeichneten Lage (der Kugelmittelpunkt liegt außerhalb der Schicht). Verwende einen geeigneten Vergleichskörper.

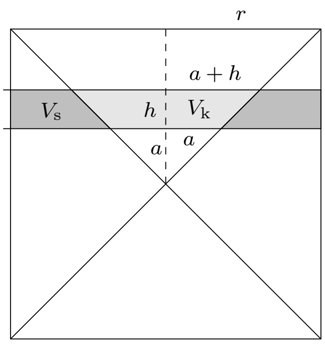


(b) Berechne als Spezialfall der gefundenen Formel das Volumen V_h einer Kugelhaube (Schicht bis zum Rand der Kugel, d.h. $a + h = r$). Drücke das Ergebnis nur durch h und r aus.



Lösung: (a) Als Vergleichskörper wählen wir einen Zylinder, aus dem ein Doppelkegel gebohrt wurde (wie bei der Herleitung des Volumens der ganzen Kugel). V_z ist das Volumen eines Zylinders mit Radius r und Höhe h.





V_k ist das Volumen eines Kegelstumpfes, das sich aus der Differenz der Volumina zweier Kegel (Radius $a + h$ und Höhe $a + h$ bzw. Radius a und Höhe a) berechnet:

$$
\begin{aligned}
V_\text{s} = V_\text{z} - V_\text{k} &= r^2\pi h - \left(\frac{\pi}{3}(a+h)^3 - \frac{\pi}{3}a^3\right) = \\
&= r^2\pi h - \frac{\pi}{3}\left(3a^2h + 3ah^2 + h^3\right) = \\
&= \frac{\pi}{3}h\left(3r^2 - 3a^2 - 3ah - h^2\right)
\end{aligned}
$$

(b) Mit $a = r - h$ folgt aus der Formel für V_s:

$$
\begin{aligned}
V_\text{h} &= \frac{\pi}{3}h\left(3r^2 - 3(r-h)^2 - 3(r-h)h - h^2\right) = \\
&= \frac{\pi}{3}h\left(3rh - h^2\right) = \frac{\pi}{3}h^2(3r - h)
\end{aligned}
$$

2. Bei der Rotation des im linken Bild schraffierten (rechtwinkligen) Dreiecks um die vertikale Achse a entsteht ein Ring.

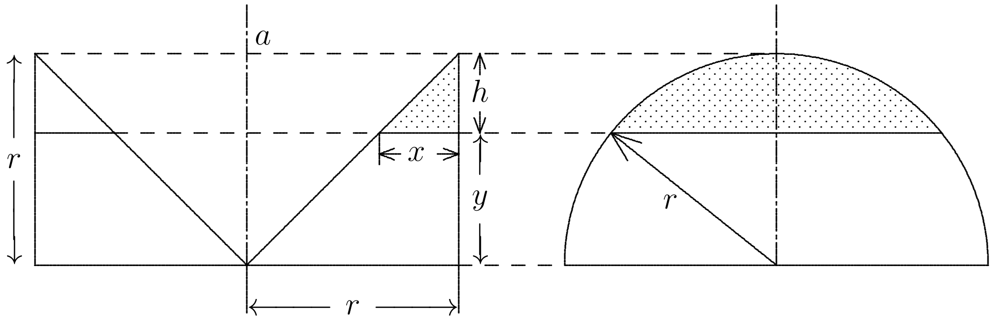
   (a) Begründen Sie $h = x$ und berechnen Sie die Grundfläche des Rings.

   (b) Zeigen Sie, dass für sein Volumen $V = \pi h^2(r - \frac{1}{3}h)$ gilt.

   (c) Die Kugel (Maße vgl. Abb.) und der Ring werden in derselben Höhe $y = r - h$ von einer horizontalen Ebene geschnitten. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Schnittfigur in Abhängigkeit von r und h.

   (d) Begründen Sie ohne weitere Rechnung mit dem Satz von Cavalieri, dass der schraffierte Teil der Kugel (genannt Kugelabschnitt) dasselbe Volumen hat, wie der Ring.

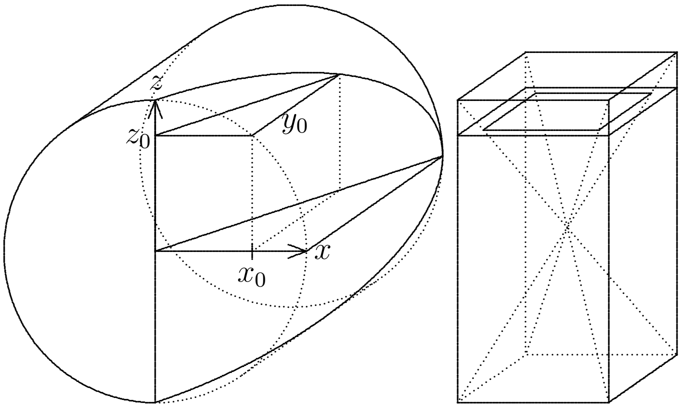
Neben den Formeln für Zylinder und Kegel darf noch die Formel für das Volumen eines Kegelstumpfs verwendet werden: $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + rR + r^2)$



Lösung:

3. Von einem Zylinder (in der linken Abbildung liegend) wird ein keilförmiges Stück durch einen ebenen Schnitt abgetrennt. Der Schnitt verläuft durch einen Durchmesser der vorderen Kreisfläche (im Bild lotrecht) und streift den Umfang der hinteren Kreisfläche. Durchmesser und Höhe des Zylinders stimmen überein und betragen 2 Längeneinheiten. Das Volumen des abgeschnittenen Keils soll berechnet werden.

   Dazu denken wir uns wie in der Zeichnung ein Koordinatensystem am Zylinder fixiert, die nicht eingezeichnete y-Achse ist die Symmetrieachse des Zylinders und zeigt nach hinten.



   (a) Zeichne den Zylinder und die Schnittfläche von oben (Grundriß) und von vorne (Aufriß).

   (b) Eine horizontale Schnittfläche im Keil in der Höhe z_0 hat die Form eines rechtwinkligen Dreiecks (vgl. Abbildung) mit Katheten der Länge x_0 und y_0. Zeichne das Dreieck in beide Risse ein.

   (c) Zeige zunächst $y_0 = 2x_0$, $x_0^2 = 1 - z_0^2$ und begründe, dass die Dreiecksfläche den Inhalt $A = 1 - z_0^2$ hat.

(d) Der abgebildete Quader hat als Grundfläche ein Quadrat der Seitenlänge 1 und die Höhe 2. Aus ihm werden zwei Pyramiden herausgefräst, deren gemeinsame Spitze der Quadermittelpunkt ist und die als Grundfläche jeweils die Grund- bzw. die Deckfläche des Quaders haben. Zeige: Die Inhalte der Schnittflächen in der Höhe z_0 durch den Restkörper bzw. durch den Keil stimmen überein.

(e) Begründe: Das Volumen des Keils beträgt $V = \frac{4}{3}$.

Lösung:

Teil II.

Trigonometrie

3. Winkel im Bogenmaß

1. Füllen Sie folgende Tabelle aus:

Winkel im Gradmaß	20^o	260^o		
Winkel im Bogenmaß			$\frac{7}{9}\pi$	$\frac{13}{8}\pi$

Lösung: $\frac{1}{9}\pi$; $\frac{13}{9}\pi$; 140^o; $292{,}5^o$

2. Gib folgende Winkel
   (a) im Gradmaß auf 3 geltende Ziffern genau an: $\frac{3}{4}\pi$; $2{,}87$
   (b) im Bogenmaß als Vielfache von π und als Dezimalzahl mit 3 geltenden Ziffern an: $120°$; $72°$

Lösung: (a) $135°$; $164°$ (b) $\frac{2}{3}\pi \approx 2{,}09$; $\frac{2}{5}\pi \approx 1{,}26$

3. Der Winkel π im Bogenmaß ist gleich dem Winkel $180°$ im Gradmaß, d.h.

$$\boxed{\pi = 180°}\ .$$

$1°$ ist also nichts anderes als eine Abkürzung für die reelle Zahl $\dfrac{\pi}{180}$.

Jeder der folgenden Ausdrücke ist als Vielfaches von π und als Vielfaches von $1°$ anzugeben:

$$\text{(a)}\quad 30° \qquad \text{(b)}\quad (30°)^2 \qquad \text{(c)}\quad (30^2)°$$

$$\text{(d)}\quad 30\cdot(1°)^2 \qquad \text{(e)}\quad \frac{30}{1°} \qquad \text{(f)}\quad \frac{1}{30°}$$

Lösung:

$$\text{(a)}\quad 30° = \frac{\pi}{6} \qquad \text{(b)}\quad \frac{\pi^2}{36} = 5\,\pi\cdot 1° \qquad \text{(c)}\quad 5\,\pi = 900°$$

$$\text{(d)}\quad \frac{\pi^2}{1080} = \frac{\pi}{6}\cdot 1° \qquad \text{(e)}\quad \frac{5400}{\pi^2}\cdot\pi = \frac{972000}{\pi^2}\cdot 1° \qquad \text{(f)}\quad \frac{6}{\pi^2}\cdot\pi = \frac{1080}{\pi^2}\cdot 1°$$

4. Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

4.1. Exakte Berechnung für bestimmte Winkel

1. Die Seitenlänge eines regulären 10-Ecks mit Umkreisradius 1 beträgt $\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1)$. Berechnen Sie anhand einer übersichtlichen Skizze die exakten Werte von $\cos 18°$ und $\sin 36°$!
Hinweis: Verwenden Sie die allgemeingültige Beziehung $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$!

Lösung: $\cos 18° = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$; $\sin 36° = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

2. **Glas im Flugzeug**

Auf einem runden Tisch in einem Flugzeug steht ein zylindrisches Glas, das bis zum Rand mit Wasser gefüllt ist. Das Glas ist 12 cm hoch und hat einen Durchmesser von 8 cm. Wir nehmen an, dass das Glas so dünn ist, dass wir im Folgenden von der Dicke des Glases absehen können. Außerdem sehen wir von besonderen physikalischen Eigenschaften wie der Oberflächenspannung des Wassers ab.
Wenn sich das Flugzeug beim Hochsteigen um 20 Grad im Verhältnis zur Erdoberfläche neigt, wie viel Wasser läuft aus dem Glas? Wie viel Prozent des ursprünglichen Inhalts sind dies?

Quelle: Fich, O.: Mathelogik (2001)

Lösung: Klar: Das verbliebene Wasser steht bis zu einer unbekannten Höhe h. Kippt man das Glas, ist der Flüssigkeitspegel an dieser Stelle höher als h, sagen wir $h + x$. Auf der anderen Seite des Glases ist dann der Pegel natürlich gerade $h - x$.

Also müssen wir den Abstand bis zum oberen Rand ($2x$) bestimmen, wenn es auf der gegenüberliegenden Seite gerade am Rand ist.
Dazu denken wir uns ein rechtwinkliges Dreieck in das Glas gelegt, bei dem eine Kathete der (obere) Durchmesser des Glases ist, die Hypotenuse auf der Wasseroberfläche entlangläuft und die andere Kathete gleich der gesuchten Länge $y = 2x$ ist.
In diesem Dreieck gilt für die gesuchte Länge offenbar:$y = tan(20°) \cdot 8\,\mathrm{cm}$
Also ist das verschüttete Volumen:
$V = \frac{1}{2} \cdot (4\,\mathrm{cm})^2 \cdot \pi \cdot 8\,\mathrm{cm} \cdot tan(20°) \approx 73\,\mathrm{cm}^3$ und dies sind ca. 12% des ursprünglichen Inhalts.

5. Übergang zum allgemeinen Dreieck

5.1. Berechnungen am allgemeinen Dreieck

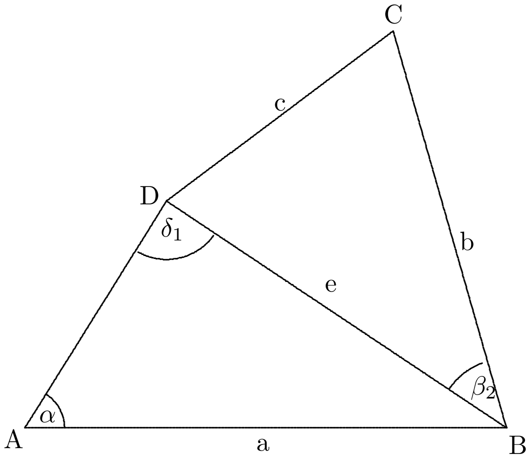
1. Gegeben ist ein Viereck $ABCD$ (siehe nachfolgende Skizze) mit a = 9 m, b = 14 m, c = 11 m, e = 17 m und $\delta_1 = 49°$.

   (a) Berechnen Sie den Winkel β_2.

   (b) Berechnen Sie den Winkel α. Welche Schwierigkeit tritt dabei auf? Wie ist sie erklärbar?

   (c) Berechnen Sie die beiden Möglichkeiten für α, wenn $\delta_1 = 17°$.

   (d) Welche Voraussetzung müsste erfüllt sein, damit es stets genau eine Lösung gibt?

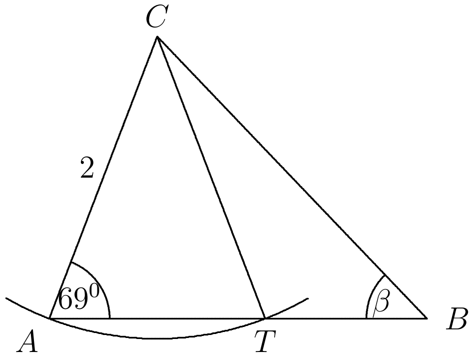


Lösung: (a) $\beta_2 = 40°$ (b) keine Lösung
(c) $\alpha_1 = 34°$; $\alpha_2 = 146°$ (d) es muss $a > e$ sein

2. Von einer geraden Landstraße zweigt in P nach rechts vorne eine gerade Seitenstraße nach A ab. Geht man auf der Landstraße 4 km weiter, so führt ein Fußweg unter einem Winkel von 60° nach rechts vorne ebenfalls nach A. Seitenstraße und Fußweg treffen sich in A unter 45°. Nach B, das 5 km von A entfernt ist, führt von P aus eine 6 km lange Seitenstraße unter einem Winkel φ nach vorne links.
   Erstellen Sie eine saubere Planskizze und berechnen Sie dann den Winkel φ auf Grad genau!

Lösung: 38°

3. (a) Berechnen Sie die Länge der Basis und den Flächeninhalt des Dreiecks ATC aus den in der Zeichnung angegebenen Maßen.
   (b) Wie groß muss β sein, damit CT die Fläche des Dreiecks ABC halbiert?



Lösung: $AT = 1{,}433$, $A(ATC) = 1{,}338$, $\beta = 40{,}97^0$

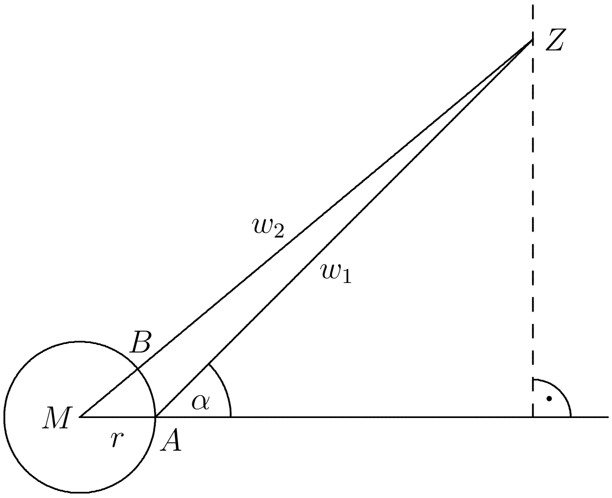
4. Die Lage eines Punktes P auf einer Karte soll durch "Vorwärtseinschneiden" bestimmt werden. Dazu misst man von zwei trigonometrischen Punkten A und B aus die Winkel $\varepsilon = \sphericalangle BAP$ und $\delta = \sphericalangle PBA$. Im folgenden werden Koordinaten relativ zu A benutzt: $A(0|0)$ und $B(2188{,}12|-815{,}88)$ (Einheit 1m). Es sei $\varepsilon = 95{,}1^0$ und $\delta = 18{,}4^0$.
   (a) Berechnen Sie die Entfernung $\overline{AB}$ und den Winkel von $[AB$ gegen die x-Achse.
   (b) Berechnen Sie $\overline{AP}$ und die Koordinaten von P.

Lösung: (a) $\overline{AB} = 2335$m, Winkel $339{,}6^0$
(b) $\overline{AP} = 804$m mit Hilfe des Sinussatzes, Winkel von $[AP$ gegen die x-Achse: $74{,}7^0$, Koordinaten $P(213|775)$.

5. In einem gleichschenkligen Dreieck ABC ist $a = b = 6{,}00\,\text{cm}$ und $h_a = 3{,}24\,\text{cm}$. Berechnen Sie α, γ und c.

Lösung: $\gamma = 32{,}68°$, $\alpha = 73{,}66°$, $c = 3{,}38\,\text{cm}$

6. Beim Diskuswurf wirft der Sportler die Scheibe meist an der Stelle A des Wurfkreises ab, verfehlt aber oft die Zielrichtung (vgl. Skizze). Internationale Sportregeln bestimmen, dass nicht die tatsächliche Wurfweite $w_1 = \overline{AZ}$, sondern $w_2 = \overline{BZ}$ gewertet wird. Z ist der Punkt, an dem der Diskus den Boden beruhrt. Wieviele Zentimeter werden dadurch bei einer tatsächlichen Wurfweite $w_1 = 40$m und einem Winkel $\alpha = 22^0$ "verschenkt"? (Kreisradius $r = 1{,}25$m.)



Lösung: Kosinussatz, verschenkt: ca. 9cm.

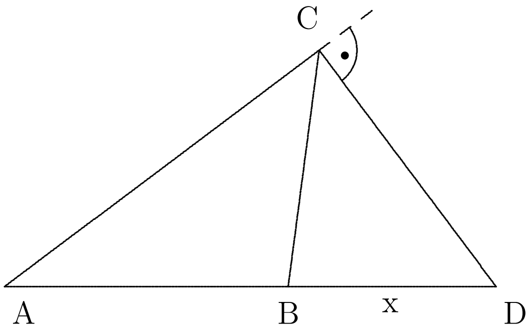
7. Berechnen Sie im Dreieck ABC mit $c = 5{,}0\,\text{cm}$, $s_c = 4{,}0\,\text{cm}$ und $\alpha = 50^o$ die fehlenden Winkel und Seiten auf eine Dezimale genau.

Lösung: $b = 5{,}1\,\text{cm}$; $a = 4{,}3\,\text{cm}$; $\beta = 66{,}4^o$; $\gamma = 63{,}6^o$

8. Gegeben ist das Dreieck ABC durch die Seitenlänge $c = 10\,\text{cm}$ und die Winkel $\alpha = 60°$ und $\beta = 80°$.
   Berechnen Sie den Inkreisradius ϱ dieses Dreiecks!

Lösung: $\varrho \approx 3{,}42\,cm$

9. In der nebenstehenden, nicht maßstabgetreuen Figur sind gegeben:
   $\overline{AB} = 5{,}22\,\text{cm}$;
   $\overline{AC} = 7{,}15\,\text{cm}$;
   $\overline{BC} = 3{,}20\,\text{cm}$.
   Man berechne ohne Verwendung des Satzes von Pythagoras die Länge x der Strecke $[BD]$!

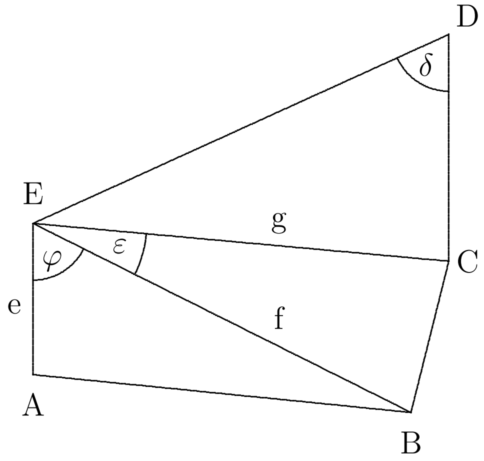


Lösung: $x \approx 2{,}61\,cm$

10. In nebenstehender Figur sind bekannt:
 $e = 5{,}0\,\text{cm}$; $f = 7{,}0\,\text{cm}$; $g = 6{,}0\,\text{cm}$;
 $A_{EBC} = 10{,}5\,\text{cm}^2$; $\delta = 50°$; $\varphi = 45°$
 sowie $[AE] \| [DC]$.

 (a) Berechnen Sie den Winkel ε!
 (Ergebnis: $\varepsilon = 30°$)

 (b) Berechnen Sie die Diagonalenlänge $\overline{AD}$!

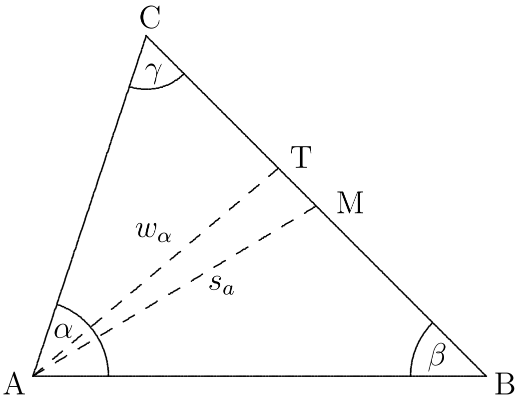


Lösung: (b): $\overline{AD} \approx 11{,}5\,cm$

11. In nebenstehendem Dreieck ABC ist w_α die Winkelhalbierende des Winkels α und s_a die Seitenhalbierende der Seite $[BC]$.

 (a) Beweisen Sie: $\overline{CT} : \overline{BT} = \sin\beta : \sin\gamma$!

 (b) Es sei nun $\gamma = 60°$, $\beta = 45°$, $w_\alpha = 8{,}0\,\text{cm}$ gegeben.
 Berechnen Sie die Länge von s_a!



Lösung: $s_a \approx 8{,}1\,\text{cm}$

12. Das gleichseitige Dreieck ABC ist Grundfläche der Pyramide $ABCS$. Der Fußpunkt der Pyramidenhöhe ist A, die Höhe $6\,\text{m}$, das Volumen $8\sqrt{3}\,\text{m}^3$ groß.

 (a) Erstellen Sie eine saubere und übersichtliche Schrägbildskizze!

 (b) Berechnen Sie die Längen sämtlicher Pyramidenkanten!

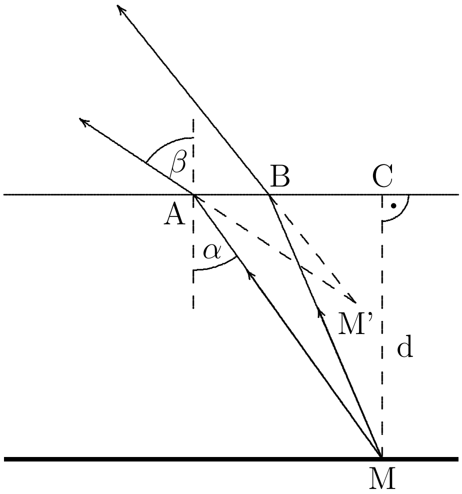
 (c) Welchen Neigungswinkel haben die Ebenen $E(A; B; C)$ und $E(B; C; S)$?

Lösung: (b): $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = 4\,m$; $\overline{SC} = \overline{SB} = 2\sqrt{13}\,m$; $\overline{SA} = 6\,m$
(c): 60^o

13. Unter dem Sekans bzw. Kosekans eines Winkels α versteht man die Kehrwerte von Sinus bzw. Kosinus des Winkels α (sofern diese Kehrwerte überhaupt existieren!). Schreibweise: $\sec\alpha$ bzw. $\csc\alpha$
    (a) Für welche Winkel sind Sekans und Kosekans jeweils nicht definiert?
    (b) Zeigen Sie unter Zuhilfenahme einer übersichtlichen Skizze, dass sich der Umkreisradius r eines beliebigen Dreiecks aus den Seitenlängen a, b und c und den Innenwinkeln α, β und γ wie folgt berechnen läßt:
    $$r = \frac{a}{2} \cdot \sec\alpha = \frac{b}{2} \cdot \sec\beta = \frac{c}{2} \cdot \sec\gamma.$$

Lösung: (a) Sekans: $k \cdot 180°$ $(k \in \mathbb{Z})$, Kosekans: $(2k+1) \cdot 90°$ $(k \in \mathbb{Z})$

14. Ein Gegenstand M befindet sich unter Wasser und soll von einem Beobachter fixiert werden (s. Skizze!).
    Die Lichtstrahlen, die von M ausgehen, werden beim Übergang Wasser/Luft gebrochen. Einfallswinkel α und Brechungswinkel β hängen nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz wie folgt zusammen:
    $$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = n$$
    (n: Brechzahl für den Übergang Luft/Wasser; hier $n = 1{,}3$)



    (a) Wenn man die gebrochenen Strahlen in der Skizze rückwärts verlängert, so schneiden sie sich in einem Punkt M'. Wie deutet dies ein Beobachter, in dessen Auge diese Strahlen treffen?
    (b) Um wieviel erscheint eine Münze, die in der Wassertiefe $d = 3{,}00\,\text{m}$ am Boden eines Schwimmbeckens liegt, angehoben, wenn in der Zeichnung $\overline{CA} = 0{,}82\,\text{m}$ und $\overline{CB} = 0{,}80\,\text{m}$ gilt?

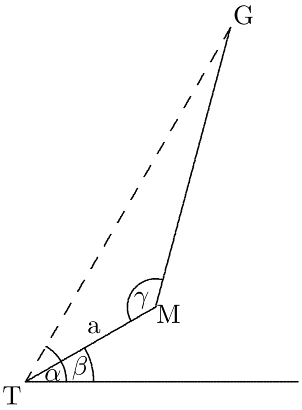
Lösung: 86 *cm*

15. Die Kräfte $\overrightarrow{F_1}$ und $\overrightarrow{F_2}$ bilden einen Winkel von 60^0. Es ist $F_1 = 100\,\text{N}$ und $F_2 = 200\,\text{N}$. Berechnen Sie die Größe der Resultierenden beider Kräfte sowie die Größe der Winkel, die diese mit den beiden Kräften bildet.

Lösung: $|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_1}| = 265\,\text{N}$, Winkel $19{,}1^0$ und $40{,}9^0$.

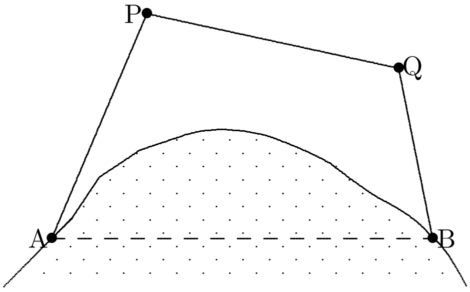
5.2. Vermessungsaufgaben

1. Vom Punkt T der Talstation einer Tragseilbahn aus sieht man den Gipfel G eines Berges unter dem Höhenwinkel $\alpha = 60^o$.
   Die Seilbahn fährt zunächst $a = 994\,\text{m}$ weit unter einem Steigungswinkel von $\beta = 30^o$ zur Mittelstation M. Dort ist der Winkel $\gamma = \sphericalangle GMT = 135^o$, wobei die Punkte T, M und G in einer vertikalen Ebene liegen.
   Wie hoch liegt der Gipfel G im Vergleich zur Talstation T?



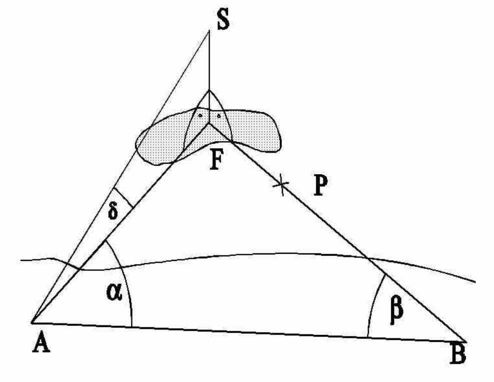
Lösung: 2352 m

2. Über einen Teich soll von A nach B eine Brücke gebaut werden.
   Der Vermessungsingenieur misst:
   $\overline{AP} = 287\,\text{m}$
   $\overline{PQ} = 326\,\text{m}$
   $\overline{QB} = 135\,\text{m}$
   $\sphericalangle APQ = 105^o$
   $\sphericalangle PQB = 127^o$
   Berechnen Sie die Länge der Brücke $\overline{AB}$!



Lösung: 510 m; Diagonale einzeichnen!

3. Auf einer dem Festland vorgelagerten Insel im Meer steht ein Leuchtturm der Höhe $h = \overline{FS}$ (vgl. "räumliche" Abbildung). Um h zu bestimmen steckt man am Strand eine Standlinie $[AB]$ der Länge 420 m ab und misst die Winkel $\alpha = 48{,}7^0$, $\beta = 77{,}2^0$ und den Höhenwinkel $\delta = 6{,}2^0$.



(a) Berechnein Sie die Höhe h des Leuchtturms gerundet auf Meter. (Ergebnis: 55 m)

(b) Eine Fähre, die die Linie $[BF]$ befährt, sendet im Punkt $P \in [BF]$ ein Nebelhornsignal aus, das in S genau 1,0 s nach dem Aussenden empfangen wird (Schallgeschwindigkeit $v = 330\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$). Wie weit war die Fähre von F und bzw. von A entfernt?

Lösung: $h = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \tan\delta \cdot \overline{AB} = 55 \text{ m}$

$\overline{PF} = \sqrt{\overline{PS}^2 - h^2} = 325 \text{ m},$

$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AF}^2 + \overline{PF}^2 - 2\overline{AF} \cdot \overline{PF} \cos(180^o - \alpha - \beta)} = 411 \text{ m}$

4. Von einer geraden Landstraße zweigt in P nach rechts vorne eine gerade Seitenstraße nach A ab. Geht man auf der Landstraße 4 km weiter, so führt ein Fußweg unter einem Winkel von 60° nach rechts vorne ebenfalls nach A. Seitenstraße und Fußweg treffen sich in A unter 45°. Nach B, das 5 km von A entfernt ist, führt von P aus eine 6 km lange Seitenstraße unter einem Winkel φ nach vorne links.
   Erstellen Sie eine saubere Planskizze und berechnen Sie dann den Winkel φ auf Grad genau!

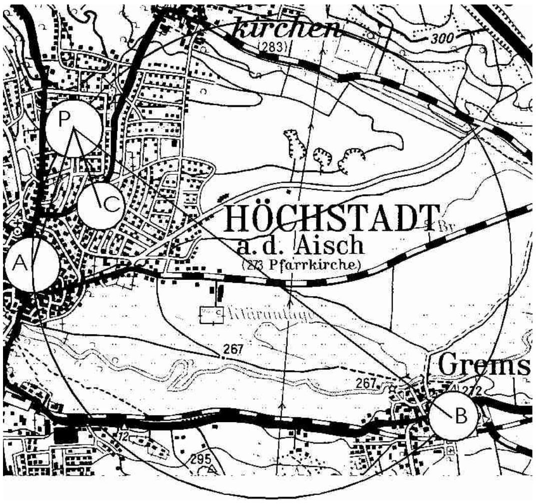
Lösung: 38°

5. Die Lage eines Punktes P auf einer Karte soll durch "Vorwärtseinschneiden" bestimmt werden. Dazu misst man von zwei trigonometrischen Punkten A und B aus die Winkel $\varepsilon = \sphericalangle BAP$ und $\delta = \sphericalangle PBA$. Im folgenden werden Koordinaten relativ zu A benutzt: $A(0|0)$ und $B(2188{,}12|-815{,}88)$ (Einheit 1m). Es sei $\varepsilon = 95{,}1^0$ und $\delta = 18{,}4^0$.
   (a) Berechnen Sie die Entfernung $\overline{AB}$ und den Winkel von $[AB$ gegen die x-Achse.
   (b) Berechnen Sie $\overline{AP}$ und die Koordinaten von P.

Lösung: (a) $\overline{AB} = 2335$m, Winkel $339{,}6^0$

(b) $\overline{AP} = 804$m mit Hilfe des Sinussatzes, Winkel von $[AP$ gegen die x-Achse: $74{,}7^0$, Koordinaten $P(213|775)$.

6. Beim "Rückwärtseinschneiden" werden die Koordinaten des Standorts P durch Winkelpeilung zu drei trigonometrischen Punkten A, B und C bestimmt. Im folgenden wird A als Koordinatenursprung) benutzt (Einheit 1m): $A(0|0)$, $B(2188{,}12|-815{,}88)$, $C(402{,}26|403{,}66)$.
Gemessen werden $\alpha = \sphericalangle APC = 42{,}1^0$ und $\beta = \sphericalangle CPB = 24{,}4^0$.



(a) Die Gerade PC schneidet den Umkreis des Dreiecks ABP im Punkt Q. Fertigen Sie eine Skizze und bestimmen Sie ohne Rechnung die Winkel $\sphericalangle QAB$ und $<$) ABQ.

(b) Berechnen Sie den Winkel zwischen der Halbgeraden $[AB$ und der x-Achse sowie die Entfernung $\overline{AB}$. (*Ergebnis:* $339{,}6^0$, $\overline{AB} = 2335{,}3$m)

(c) Berechnen Sie $\overline{AQ}$ und die Koordinaten von Q. (*Ergebnis:* $Q(1210|-1204)$.)

(d) Berechnen Sie $\varepsilon = \sphericalangle BQC$ und $\delta = \sphericalangle CQA$ und begründen Sie anschließend $\sphericalangle BAP = \varepsilon$ sowie $\sphericalangle PBA = \delta$.

(e) Geben Sie an, wie die Koordinaten von P jetzt mit Hilfe der Winkel ε, δ sowie der Koordinaten von A und B berechnet werden können. Keine Rechnung!

Lösung: (a) Nach dem Umfangswinkelsatz: $\sphericalangle QAB = \beta$, $\sphericalangle ABQ = \alpha$.

(b) $\overline{AB} = 2335{,}3$m, Winkel $339{,}6^0$

(c) Mit dem Sinussatz $\overline{AQ} = 1707$m, der Winkel von $[AQ$ gegen die x-Achse ist $339{,}6^0 - \beta = 315{,}2^0 = -44{,}8^0$. Dies ergibt die Koordinaten $Q(1210|-1204)$.

(d) Mit den Polarwinkeln der Vektoren $\overrightarrow{QB}$ und $\overrightarrow{QC}$ oder mit dem Cosinussatz erhält man $\varepsilon = 95{,}0^0$ und mit der Winkelsumme im Dreieck ABC ergibt sich $\delta = 18{,}5^0$. Die letzte Behauptung folgt wieder aus dem Umfangswinkelsatz

(e) Man berechnet $\overline{AP} = 806{,}5$m mit dem Sinussatz, der Winkel von $[AP$ gegen die x-Achse ist $\varepsilon - 20{,}45^0$. daraus können die Koordinaten von P bestimmt werden.

Bemerkung: Dieses Verfahren, die Koordinaten eines Punkts durch Rückwärtseinschneiden zu bestimmen, heißt "Collinssche Lösung". Dazu werden in zwei Schritten, jeweils von der Basisstrecke $[AB]$ aus, Punkte durch "Vorwärtseinschneiden" festgelegt (erst Q, dann P).

6. Rechnen mit Winkelfunktionen

6.1. Reduktionsformeln für Winkelfunktionen

1. Führe die folgenden Ausdrücke auf Winkel zwischen 0 und 90° zurück:

$$\text{(a) } \sin 8595^\circ \qquad \text{(b) } \cos 399\,959^\circ \qquad \text{(c) } \cos 31\,520^\circ \qquad \text{(d) } \sin 1000$$

Lösung: (a) $\sin 8595^\circ = \sin(8595^\circ - 23 \cdot 360^\circ) = \sin 315^\circ = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

(b) $\cos 399\,959^\circ = \cos(399\,959^\circ - 1110 \cdot 360^\circ) = \cos 359^\circ = \cos 1^\circ = 0{,}9998477$

(c) $\cos 31\,520^\circ = \cos(31\,520^\circ - 87 \cdot 360^\circ) = \cos 200^\circ = -\cos 20^\circ = -0{,}9397$

(d) $\sin 1000^\circ = \sin(1000^\circ - 2 \cdot 360^\circ) = \sin 280^\circ = -\sin 80^\circ = -0{,}9848$

2. Berechnen Sie $\tan\varphi$ ohne Taschenrechner, wenn $|\cos\varphi| = \frac{10}{26}$ und $\varphi \in [90^o; 180^o]$.

Lösung: $-2{,}4$

3. Für welche Winkel φ gilt: $\varphi \in [0^o; 360^o]$ und $\cos\varphi = -\sin\varphi$

Lösung: 135^o und 315^o

4. Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$2\cos 217^\circ + \cos 397^\circ - \sin 307^\circ = 0$$

Anleitung: Führen Sie die auftretenden Winkelfunktionen auf solche mit Argumenten zwischen 0 und 90 Grad zurück. Eine Berechnung mit Näherungswerten (Taschenrechner!) gilt nicht als Beweis.

Lösung:

5. Bestimmen Sie über der Grundmenge $[0^\circ; 360^\circ[$ die Lösungsmenge und stellen Sie sie im Einheitskreis (1 Längeneinheit $\widehat{=}$ 2 cm) graphisch dar: $|\cos\varphi| \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Lösung: $L = \{\varphi |\, 0^\circ \leqq \varphi \leqq 30^\circ \text{ oder } 150^\circ \leqq \varphi \leqq 210^\circ \text{ oder } 330^\circ \leqq \varphi < 360^\circ\}$

6. Bestimmen Sie die Lösungsmenge in der Grundmenge $[0°; 360°[$:

$$(1 + 2 \cdot \sin 2\varphi) \cdot (\tan\varphi - 1) = 0$$

Lösung: $L = \{45°; 105°; 165°; 225°; 285°; 345°\}$

7. (a) Beweisen Sie: $\sin 1000° = \sin 10000° = \sin 100000°$.
   (b) Welches allgemeine Gesetz läßt sich aufgrund von Teilaufgabe (a) vermuten? Beweisen Sie dieses Gesetz!

Lösung: (a) $\sin 10000° = \sin(25 \cdot 360° + 1000°) = \sin 1000°$

$\sin 100000° = \sin(11 \cdot 25 \cdot 360° + 1000°) = \sin 1000°$

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $n \geqq 4$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(10^n)° &= \sin(99...9000° + 1000°) = \\ &= \sin(11...1 \cdot 25 \cdot 360° + 1000°) = \sin 1000° \end{aligned}$$

8. Bestimmen Sie im Intervall $[0^o; 360^o]$ bzw. $[0; 2\pi]$ die Winkel im Grad- und Bogenmaß (auf eine Dezimale genau), für welche gilt: $\cos x = -0{,}3759$

Lösung: $112{,}1^o$; $247{,}9^o$; 2,0; 4,3

9. <u>Beweise</u>: Für $n \in \mathbb{N}$ und $n \geqq 2$ gilt $\sin(4 \cdot 10^n)° = \sin(4 \cdot 10^{n-1})°$!

   Für welche Winkel $\varphi \in [0\,; 360°[$ gilt $\sin\varphi = \sin(4 \cdot 10^{13})°$?

Lösung: $\delta = 4 \cdot 10^n - 4 \cdot 10^{n-1} = 360 \cdot 10^{n-2}$ ist für $n \geqq 2$ ein ganzzahliges Vielfaches von 360.
$\sin(4 \cdot 10^{13})° = \sin 40°$; $\varphi_1 = 40°$; $\varphi_2 = 140°$

10. (a) Zeigen Sie, dass es für einen beliebigen im Gradmaß gemessenen Winkel φ einen Winkel $\psi \in [0°; 360°[$ und ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass gilt:

$$\varphi = 360° \cdot k + \psi$$

   (b) Begründen Sie kurz, warum in der Situation von Teilaufgabe a) gilt:

$$\sin\varphi = \sin\psi$$

(c) Geben Sie in der Situation von Teilaufgabe a) jeweils für $\psi \in [90°; 180°[$, $\psi \in [180°; 270°[$ und $\psi \in [270°; 360°[$ denjenigen spitzen Winkel ω an, dessen Sinus bis auf das Vorzeichen mit $\sin\psi$ übereinstimmt. Welcher Zusammenhang besteht jeweils zwischen $\sin\omega$ und $\sin\psi$?

Lösung: (a) Division von φ durch 360° mit Rest
(b) Periodizität des Sinus
(c) $\psi \in [90°; 180°[$: $\sin\psi = \sin\omega$, $\omega = 180° - \psi$
$\psi \in [180°; 270°[$: $\sin\psi = -\sin\omega$, $\omega = \psi - 180°$
$\psi \in [270°; 360°[$: $\sin\psi = -\sin\omega$, $\omega = 360° - \psi$

11. (a) Zeigen Sie, dass es für einen beliebigen im Gradmaß gemessenen Winkel φ einen Winkel $\psi \in [0°; 360°[$ und ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass gilt:

$$\varphi = 360° \cdot k + \psi$$

(b) Begründen Sie kurz, warum in der Situation von Teilaufgabe a) gilt:

$$\cos\varphi = \cos\psi$$

(c) Geben Sie in der Situation von Teilaufgabe a) jeweils für $\psi \in [90°; 180°[$, $\psi \in [180°; 270°[$ und $\psi \in [270°; 360°[$ denjenigen spitzen Winkel ω an, dessen Kosinus bis auf das Vorzeichen mit $\cos\psi$ übereinstimmt. Welcher Zusammenhang besteht jeweils zwischen $\cos\omega$ und $\cos\psi$?

Lösung: (a) Division von φ durch 360° mit Rest
(b) Periodizität des Kosinus
(c) $\psi \in [90°; 180°[$: $\cos\psi = -\cos\omega$, $\omega = 180° - \psi$
$\psi \in [180°; 270°[$: $\cos\psi = -\cos\omega$, $\omega = \psi - 180°$
$\psi \in [270°; 360°[$: $\cos\psi = \cos\omega$, $\omega = 360° - \psi$

12. (a) Zeigen Sie, dass es für einen beliebigen im Gradmaß gemessenen Winkel φ einen Winkel $\psi \in [0°; 180°[$ und ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass gilt:

$$\varphi = 180° \cdot k + \psi$$

Für welche Winkel φ ist $\tan\varphi$ nicht definiert?

(b) Begründen Sie kurz, warum in der Situation von Teilaufgabe a) gilt:

$$\tan\varphi = \tan\psi$$

(c) Geben Sie in der Situation von Teilaufgabe a) für $\psi \in]90°; 180°[$ denjenigen spitzen Winkel ω an, dessen Tangens bis auf das Vorzeichen mit $\tan\psi$ übereinstimmt. Welcher Zusammenhang besteht jeweils zwischen $\tan\omega$ und $\tan\psi$?

Lösung: (a) Division von φ durch 180° mit Rest; $\varphi = 90° \cdot (2l + 1)$, $l \in \mathbb{Z}$
(b) Periodizität des Tangens
(c) $\tan\psi = -\tan\omega$ mit $\omega = 180° - \psi$

13. Zeichnen Sie einen Kreis mit Radius 5 cm. Dieser Kreis sei der Einheitskreis.
    (a) Bestimmen Sie mit größtmöglicher Genauigkeit $\sin 40^o$ und $\cos 40^o$ und berechnen Sie daraus $\tan 40^o$.
    (b) Bestimmen Sie mit größtmöglicher Genauigkeit den Winkel β im I. Quadranten so, dass $\sin\beta = 0{,}8$.
    (c) Veranschaulichen Sie die Gleichung $\sin 230^o = \sin 310^o$. Welche allgemeine Formel liegt dieser Gleichung zugrunde?

Lösung: zu (c): $\sin\varphi = -\sin(\varphi + 180^o) = -\sin(360^o - \varphi)$ für $0^o < \varphi < 90^o$

14. Begründen Sie anhand einer Zeichnung:

$$\text{Für } 270^o < \alpha < 360^o \text{ gilt: } \sin\alpha = -\sin(360^o - \alpha)$$

Lösung:

15. Begründen Sie anhand einer Zeichnung:

$$\text{Für } 180^o < \alpha < 270^o \text{ gilt: } \cos\alpha = -\cos(\alpha - 180^o)$$

Lösung:

16. Begründen Sie anhand des Einheitskreises:

$$\text{Für } 270^o < \alpha < 360^o \text{ gilt: } \tan\alpha = -\tan(360^o - \alpha)$$

Lösung:

17. Begründen Sie anhand einer Zeichnung:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

Lösung:

6.2. Gleichungen, die exakt lösbar sind

1. Für welche Winkel φ gilt: $\varphi \in [0^o; 360^o]$ und $\cos\varphi = -\sin\varphi$

Lösung: 135^o und 315^o

2. Lösen Sie folgende Gleichung über der Grundmenge $G = [0; 2\pi]$:

$$\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{2}\cdot\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos 2x \;=\; 0$$

Lösung: $L = \left\{\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{3\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}; \frac{11\pi}{8}; \frac{13\pi}{8}\right\}$

3. Für welche $k \in \mathbb{R}$ hat die folgende Gleichung Lösungen? Diese Lösungen sind nicht zu bestimmen!

$$\sin(180° + \varphi) - \cos(90° - \varphi) \;=\; -2k$$

Lösung: $-1 \leqq k \leqq 1$

4. Bestimmen Sie über der Grundmenge $[0°; 360°[$ die Lösungsmenge und stellen Sie sie im Einheitskreis (1 Längeneinheit $\widehat{=}$ 2 cm) graphisch dar: $|\cos\varphi| \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Lösung: $L = \{\varphi |\, 0° \leqq \varphi \leqq 30° \text{ oder } 150° \leqq \varphi \leqq 210° \text{ oder } 330° \leqq \varphi < 360°\}$

5. Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$2\cos 217° + \cos 397° - \sin 307° = 0$$

Anleitung: Führen Sie die auftretenden Winkelfunktionen auf solche mit Argumenten zwischen 0 und 90 Grad zurück. Eine Berechnung mit Näherungswerten (Taschenrechner!) gilt nicht als Beweis.

Lösung:

6. Bestimmen Sie die Lösungsmenge in der Grundmenge $[0°; 360°[$:

$$(1 + 2\cdot\sin 2\varphi)\,\cdot\,(\tan\varphi - 1) \;=\; 0$$

Lösung: $L = \{45°; 105°; 165°; 225°; 285°; 345°\}$

7. Berechnen Sie die Lösungsmenge für die Grundmenge $[-5;5]$:

$$2\cos x - x\cos x = 0$$

Lösung: $L = \{2; \pm\frac{\pi}{2}; \pm\frac{3\pi}{2}\}$

8. Bestimmen Sie die Lösungsmenge in der Grundmenge $[0;2\pi[$:

$$4\sin^2 x - 2\sin x = 0$$

Lösung: $L = \{0;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{5}{6}\pi;\ \pi\}$

9. Bestimmen Sie die Lösungsmenge in der Grundmenge$[0;2\pi[$:

$$\sqrt{3}\cos x - 2\cos x\sin 2x = 0$$

Lösung: $L = \{\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{7}{6}\pi;\ \frac{4}{3}\pi;\ \frac{3}{2}\pi\}$

10. Lösen Sie folgende Gleichung in der Grundmenge $G = [0°;360°]$:

$$9^{\frac{1}{\cos 2\varphi}+2} \;-\; 6\cdot 3^{\frac{1}{\cos 2\varphi}+1} \;+\; 1 \;=\; 0$$

(Zwischenergebnis: $\cos 2\varphi = -0{,}5$)

Lösung: $L = \{60°;120°;240°;300°\}$

11. Zeigen Sie die Gültigkeit der Gleichung $\sin 345° + \cos 285° = 0!$

Anleitung: Führen Sie die auftretenden Winkelfunktionen auf solche mit Argumenten zwischen 0 und 90 Grad zurück. Eine Berechnung mit Näherungswerten (Taschenrechner) gilt nicht als Begründung!

Lösung:

12. Gegeben sei die Gleichung:

$$2\sin(\frac{\pi}{2} - x) - \frac{\sqrt{2}\cos x}{\sin x} = 0$$

(a) Geben Sie (mit Begründung) an, für welche $x \in [0;\pi]$ diese Gleichung nicht definiert ist.

(b) Welche $x \in [0;\pi]$ erfüllen die Gleichung?

Lösung: (a) für $x \in \{0;\pi\}$; (b) $L = \{\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\}$

13. Bestimmen Sie in der Grundmenge $G = [0; 360^o[$ die Lösungsmenge der Gleichung:

$$\cos\alpha \cdot (1 - \cos\alpha) = 3(\sin\alpha)^2 - 2$$

Lösung: $L = \{60^o; 180^o; 300^o\}$

14. Berechnen Sie in der Grundmenge $G = [0^o; 360^o[$ die Lösungen der Gleichung:

$$2(\sin\alpha)^2 + \tan\alpha = 1 - 2(\cos\alpha)^2$$

Lösung: $L = \{135^o; 315^o\}$

6.3. Gleichungen zur Verwendung des Taschenrechners

1. Bestimmen Sie über der Grundmenge $[0; 2\pi[$ die Lösungsmenge der folgenden Gleichung: $(\cos x - 0{,}6) \cdot \cos x \;=\; 0$
   Geben Sie die Ergebnisse soweit möglich als Vielfache von π, ansonsten auf 3 geltende Ziffern genau an.

Lösung: $L = \{\frac{1}{2}\pi;\ \frac{3}{2}\pi;\ 0{,}927;\ 5{,}36\}$

2. Bestimmen Sie über der Grundmenge $G = [0°; 360°[$ die Lösungsmenge der folgenden Gleichung (4 geltende Ziffern): $(1 + 3\cos\varphi) \cdot \sin 3\varphi \;=\; 0$

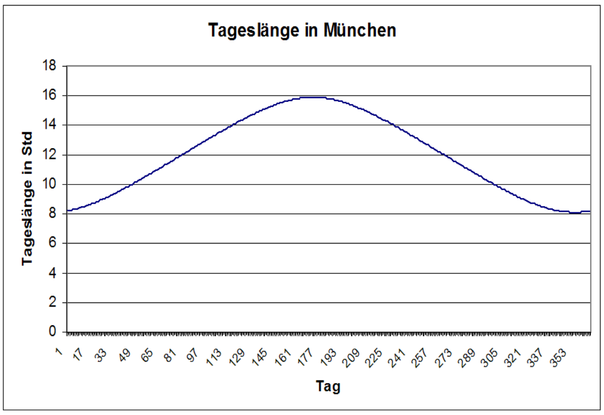
Lösung: $0°;\ 60{,}00°;\ 120{,}0°;\ 180{,}0°;\ 240{,}0°;\ 300{,}0°;\ 109{,}5°;\ 250{,}5°$

3. Bestimmen Sie im Intervall $[0^o; 360^o]$ bzw. $[0; 2\pi]$ die Winkel im Grad- und Bogenmaß (auf eine Dezimale genau), für welche gilt: $\cos x = -0{,}3759$

Lösung: $112{,}1^o$; $247{,}9^o$; 2,0; 4,3

7. Die Graphen der Winkelfunktionen

1. Die Tageslänge (Zeitdauer zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang) an einem festen Ort verändert sich im Lauf eines Jahres. Die Graphik zeigt diese Veränderung für München. Die Tageslänge $T(x)$ in Stunden am x-ten Tag des Jahres in München kann in guter Näherung durch eine trigonometrische Funktion der Form $T(x) = a \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{x-172}{365}) + c$ mit $a > 0$ und $c > 0$ modelliert werden.



   (a) Weisen Sie durch Rechnung nach, dass die Funktion T die Periode 365 hat und dass unabhängig von a und c bei $x = 172$ ein Maximum vorliegt.

   (b) Entnehmen Sie dem Graphen Näherungswerte für die Parameter a und c.

   (c) Geben Sie einen Grund dafür an, dass eine entsprechende Modellierung der Tageslänge am Nordpol nicht mit einer Kosinusfunktion möglich ist.

   Quelle: Handreichung für den Mathematikunterricht am Gymnasium, Das Abitur im Fach Mathematik am achtjährigen Gymnasium, Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung Abteilung Gymnasium, August 2008, www.isb.bayern.de

Lösung: (a) $T(x + k \cdot 365) = a \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{x+k\cdot 365-172}{365}) + c = a \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{x-172}{365} + 2k \cdot \pi) + c = T(x)$; Maximum wenn $\cos(2\pi \cdot \frac{x-172}{365}) = 1$, dies gilt für $x = 172$

(b) $a = 2$ und $c = 12$.

(c) Polarnacht/Polarsommer

2. (a) Gradzahl des stumpfen Winkels β mit $\sin\beta = 0{,}927$

   (b) Gradzahl des stumpfen Winkels β mit $\tan\beta = -1{,}150$

   (c) $40 \cdot \cos 60°$

(d) $\tan 256°$ auf Ganze gerundet

Quelle: Kreuzzahlrätsel von U. Schätz

Lösung: (a) 112°, (b) 131°, (c) 20, (d) 4

3. (a) Gradzahl des spitzen Winkels β mit $\cos(90° - \beta) = 0,819$
   (b) $10 \cos \frac{\pi}{2}$
   (c) Gradzahl des stumpen Winkels β mit $\cos \beta = -0,4848$
   (d) $-10 \cdot \sin \frac{3\pi}{2}$

   Quelle: Kreuzzahlrätsel von U. Schätz

Lösung: (a) 55° (b) 0 (c) 119° (d)10

4. (a) Gradzahl des Winkels β $(45° < \beta < 90°)$ mit $\cos(4\beta) = 0,5$
   (b) $16 \cos(-60°)$
   (c) Gradzahl des Winkels β $(720° < \beta < 900°)$ mit $\cos \beta = -0,1045$
   (d) $\sin 810°$

   Quelle: Kreuzzahlrätsel von U. Schätz

Lösung: (a) 75° (b) 8 (c) 816° (d) 1

5. (a) Gradzahl des spitzen Winkels β mit $\sin(180° - \beta) = 0,2924$
   (b) $2 \cos 2\pi$
   (c) $6,4\pi$ auf Ganze gerundet
   (d) Gradzahl des Winkels β $(360° < \beta < 540°)$ mit $\tan \beta = 0466$
   (e) Gradzahl des Winkels β $(270° < \beta < 360°)$ mit $\tan \beta = -0,1583$

   Quelle: Kreuzzahlrätsel von U. Schätz

Lösung: (a) 17° (b) 2 (c) 20 (d) 385° (e) 351°

6. (a) Gradzahl des stumpfen Winkels β mit $\tan \beta = -\sqrt{3}$
   (b) $10 \tan 225°$
   (c) $2 \tan 405°$
   (d) $\tan 765°$

   Quelle: Kreuzzahlrätsel von U. Schätz

Lösung: (a) 120° (b) 10 (c) 2 (d) 1

7. (a) Gradzahl des spitzen Winkels β mit $\cos(90° - \beta) = 0,5736$
   (b) $300 \cos 300°$
   (c) Gradzahl des spitzen Winkels β mit $\tan(90° - \beta) = 1,150$
   (d) Gradzahl des stumpfen Winkels β mit $\cos\beta = -0,3090$

   Quelle: Kreuzzahlrätsel von U. Schätz

Lösung: (a) 35° (b) 150 (c) 41° (d) 108

8. (a) $\cos 720°$
   (b) $10 \sin 30°$
   (c) Gradzahl des Winkels β $(810° < \beta < 1080°)$ mit $\sin\beta = 0,99863$
   (d) $12 \tan 585°$

   Quelle: Kreuzzahlrätsel von U. Schätz

Lösung: (a) 1 (b) 5 (c) 813° (d) 12

9. (a) Gradzahl des stumpfen Winkels β mit $\cos\beta = -0,1908$
   (b) $20 \tan 45° - 5 \tan 135°$
   (c) $3 \cos 4\pi$

   Quelle: Kreuzzahlrätsel von U. Schätz

Lösung: (a) 101° (b) 25 (c) 3

10. Zeichnen Sie für $x \in [-\pi; \pi]$ mit verschiedenen (nichtroten) Farben der Reihe nach die Graphen der Funktionen

    (a) $y = \sin x$, (b) $y = \sin 3x$, (c) $y = -2 \cdot \cos 3x$.

    (Längeneinheit: 2 cm auf beiden Achsen; $\pi \approx 3$)

Lösung:

11. Stellen Sie in einem kartesischen Koordinatensystem (Längeneinheit: 2 cm auf beiden Achsen; $\pi \approx 3$) folgende Punktmenge M graphisch dar:

    $M = \{(x, y) \,|\, 0 \leqq x < 2\pi \text{ und } |\tan x| \leqq y < |\cos x| + 1\}$

    Eine genaue und saubere Zeichnung ist gefordert!
    Beachten Sie: Gehört der begrenzende Rand zu M, so ist er farbig zu zeichnen. Sind die Endpunkte farbiger Linien keine Elemente von M, so ist dies in der Zeichnung entsprechend zu verdeutlichen!

Lösung:

12. Stellen Sie in einem kartesischen Koordinatensystem (Längeneinheit: 2 cm auf beiden Achsen; $\pi \approx 3$; Querformat!) folgende Punktmenge M graphisch dar:

    $M = \{(x, y) \,|\, -2\pi < x \leqq 2\pi \text{ und } \sin(-x) \leqq y < |\cos x|\}$

    Eine genaue und saubere Zeichnung ist gefordert!
    Beachten Sie: Gehört der begrenzende Rand zu M, so ist er farbig zu zeichnen. Sind die Endpunkte farbiger Linien keine Elemente von M, so ist dies in der Zeichnung entsprechend zu verdeutlichen!

Lösung:

13. Stellen Sie in einem kartesischen Koordinatensystem (Längeneinheit: 2 cm auf beiden Achsen; $\pi \approx 3$) folgende Punktmenge M graphisch dar:

    $M = \{(x|y) \,|\, -1 \leqq x < 5 \text{ und } \cos x < y \leqq 1 + \sin x\}$

    Eine genaue und saubere Zeichnung ist gefordert!
    Beachten Sie: Gehört der begrenzende Rand zu M, so ist er farbig zu zeichnen. Sind die Endpunkte farbiger Linien keine Elemente von M, so ist dies in der Zeichnung entsprechend zu verdeutlichen!

Lösung:

14. Gegeben sind die Funktionsvorschriften

    $$f_0 : x \longmapsto \tan x, \quad f_1 : x \longmapsto \tan\left(\frac{1}{2}x\right), \quad f_2 : x \longmapsto 2 + \tan\left(\frac{1}{2}x\right).$$

    (a) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge von f_1 und untersuchen Sie diese Funktion rechnerisch auf Symmetrie.

    (b) Beschreiben Sie knapp, wie der Graph von f_2 aus dem Graphen von f_0 über den Graphen von f_1 hervorgeht. Skizzieren Sie den Graphen von f_2 im Bereich $x \in [-\pi; \pi]$.

Lösung: (a): $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1) \cdot \pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$; f_1 ist ungerade.
(b): Dehnung des Graphen von f_0 um den Faktor 2 in x-Richtung liefert den Graphen von f_1. Eine anschließende Verschiebung um 2 in y-Richtung nach oben ergibt den Graphen von f_2.

15. Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = \sin x + \cos x \qquad \text{mit } D_f = \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f!

(b) Zeichnen Sie durch Überlagerung der Graphen von Sinus und Kosinus den Graphen G_f in einem kartesischen Koordinatensystem (Längeneinheit 1cm; $\pi \approx 3$) im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$! Verwenden Sie hierzu auch das Ergebnis von Teilaufgabe a)!

Lösung: (a): Nullstellen bei $x = \frac{\pi}{4} \cdot (3+4k), \qquad k \in \mathbb{Z}$

16. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \sin x \cdot \tan x - \cos x$$

(a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge an.

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen.

(c) Untersuchen Sie f auf Symmetrie.

Lösung: $D_{f,max} = \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\}; k \in \mathbb{Z}$;
Nullstellen bei $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$
Der Graph von f ist symmetrisch zur y-Achse

17. Gegeben sind die folgenden drei Funktionsterme

$$f(x) = 4 \cdot \cos(3x)\,, \quad g(x) = 3 \cdot \sin(2x+1)\,, \quad h(x) = \sin(2x) \cdot \tan\, x$$

jeweils mit maximalem Definitionsbereich.

(a) Geben Sie die Definitionsbereiche D_f, D_g und D_h an!

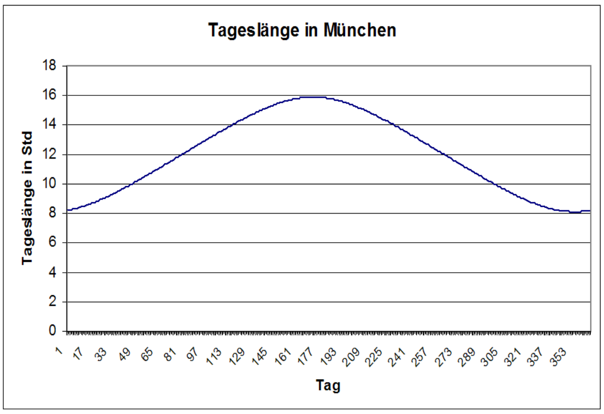
(b) Geben Sie die Nullstellenmengen dieser drei Funktionen an!

(c) Geben Sie das Symmetrieverhalten dieser drei Funktionen an!

Lösung: $D_f = D_g = \mathbb{R}\,; \quad D_h = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} \cdot (1+2k)\}\,,\ k \in \mathbb{Z}$
f und h sind gerade Funktionen, der Graph von g ist punktsymmetrisch zum Punkt $(-1|0)$ eines Koordinatensystems.

8. Die allgemeine Sinusfunktion

1. Die Tageslänge (Zeitdauer zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang) an einem festen Ort verändert sich im Lauf eines Jahres. Die Graphik zeigt diese Veränderung für München. Die Tageslänge $T(x)$ in Stunden am x-ten Tag des Jahres in München kann in guter Näherung durch eine trigonometrische Funktion der Form $T(x) = a \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{x-172}{365}) + c$ mit $a > 0$ und $c > 0$ modelliert werden.



   (a) Weisen Sie durch Rechnung nach, dass die Funktion T die Periode 365 hat und dass unabhängig von a und c bei $x = 172$ ein Maximum vorliegt.

   (b) Entnehmen Sie dem Graphen Näherungswerte für die Parameter a und c.

   (c) Geben Sie einen Grund dafür an, dass eine entsprechende Modellierung der Tageslänge am Nordpol nicht mit einer Kosinusfunktion möglich ist.

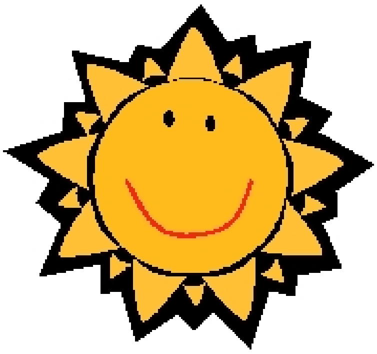
   Quelle: Handreichung für den Mathematikunterricht am Gymnasium, Das Abitur im Fach Mathematik am achtjährigen Gymnasium, Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung Abteilung Gymnasium, August 2008, www.isb.bayern.de

Lösung: (a) $T(x + k \cdot 365) = a \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{x+k\cdot 365-172}{365}) + c = a \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{x-172}{365} + 2k \cdot \pi) + c = T(x)$; Maximum wenn $\cos(2\pi \cdot \frac{x-172}{365}) = 1$, dies gilt für $x = 172$

(b) $a = 2$ und $c = 12$.

(c) Polarnacht/Polarsommer

2. **Tageslänge**



Im Verlauf eines Jahres ändert sich aufgrund der geneigten Erdachse die astronomische Sonnenscheindauer, d.h. die Zeitspanne zwischen Sonnenaufgang und -untergang. In unseren Breiten ist die Sonne am 21.6. mit ca. $16,5$ Stunden am längsten und am 21.12. mit ca. 8 Stunden am kürzesten zu sehen.

(a) Wähle aus den folgenden drei allgemeinen trigonometrischen Funktionen eine aus und stelle mit ihr eine Funktionsgleichung auf, die die Tageslänge im Verlauf eines Jahres angibt (x-Achse: Anzahl der Tage / y-Achse: Tageslänge).

1. $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$
2. $g(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x - c)) + d$
3. $h(x) = a \cdot \tan(b \cdot (x - c)) + d$

(b) Bestimme mithilfe der Gleichung aus Aufgabe (a) die Tageslängen am 10. Juli.

(c) In der folgenden Tabelle siehst du exemplarisch für jeden Monat die astronomische Sonnenscheindauer für jeweils einen Tag angegeben. Überprüfe, in welchen Monaten deine Funktion besonders große bzw. besonders kleine Abweichungen von der tatsächlichen astronomischen Sonnenscheindauer hat, und versuche, deine Funktion zu optimieren.

Datum	21.01	21.02	21.03	21.04	21.05	21.06	21.07	21.09	21.10	21.1
Taglänge $[h]$	$8,65$	$10,40$	$12,24$	$14,24$	$15,86$	$16,60$	$15,71$	$12,27$	$10,35$	$8,6$

(d) Wann ändert sich von einem auf den anderen Tag die Tageslänge am meisten? Versuche herauszufinden, ob sich dies astronomisch erklären lässt!

Quelle: Elemente der Mathematik 11 (2000)

Lösung: (a) Modellierung durch Sinuskurve $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$:
Periodenlänge beträgt ca. 365 Tage. Damit klar: $b = \frac{2\pi}{365}$
Maximum wird am 21.6. (172. Tag) und. Minimum am 21.12. (355. Tag) angenommen. Folglich muss die Amplitude a als $\frac{16,5-8}{2} = 4,25$ festgesetzt werden. Der Mittelwert von $12,25$ wird dabei ungefähr am 21.3. (dem 80. Tag) und 21.9. angenommen. Damit sind auch c und d klar. Insgesamt erhalten wir: $f(x) = 4,25\sin(\frac{2\pi}{365} \cdot (x - 80)) + 12,25$.

(b) Der 10. Juli ist der 191 Kalendertag. Demnach $f(191) = 4,25\sin(\frac{2\pi}{365} \cdot (191 - 80)) + 12,25 = 16,26 \approx 16$

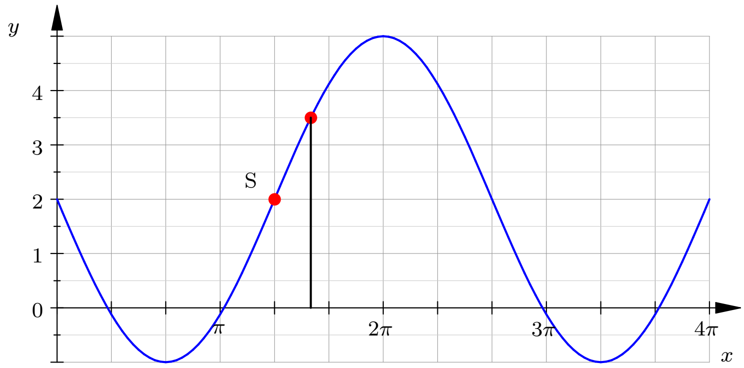
3. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{3}{4}x - \pi\right) + 2$$

   (a) Berechne die Periodenlänge λ und die Koordinaten ihres „Ansatzpunktes“ S. Zeichne den Grafen von f im Intervall $[0; 4\pi]$ ($\pi \mathrel{\widehat{=}} 3\,\text{cm}$).

   (b) Für welches x zwischen π und 2π gilt $f(x) = 3{,}5$?

Lösung: (a) $f(x) = 3 \cdot \sin\left[\frac{3}{4}\left(x - \frac{4\pi}{3}\right)\right] + 2 \quad\Longrightarrow\quad \lambda = \frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8\pi}{3}$ und $\text{S}\left(\frac{4\pi}{3}\middle|2\right)$.



(b) $3 \cdot \sin\left(\frac{3}{4}x - \pi\right) + 2 = 3{,}5 \quad\Longrightarrow\quad \sin\left(\frac{3}{4}x - \pi\right) = 0{,}5$

x liegt also $\frac{1}{3}$ von einem Viertel der Periodenlänge rechts vom Startpunkt, d.h.

$$x = \frac{4\pi}{3} + \frac{1}{12} \cdot \frac{8\pi}{3} = \frac{14\pi}{9}$$

4. Zeichnen Sie eine volle Periode des Graphen der Funktion mit der Gleichung

$$y \;=\; 3 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) \;-\; 1{,}5 \qquad \text{(Längeneinheit: 1 cm)}$$

und berechnen Sie die exakten Werte der Schnittstellen des Graphen mit der x-Achse im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$.

Lösung: Schnittstellen bei $-\frac{1}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi$

5. (a) Leiten Sie eine Formel zur Berechnung der Nullstellen x_n ($n \in \mathbb{Z}$) der Funktion

$$f(x) = \sin\left(2^x\right)$$

her!

(b) Berechnen Sie *alle* Nullstellen im Intervall $[\,1\,;4\,]$ mit einer Genauigkeit von drei geltenden Ziffern!

(c) Wie viele Nullstellen gibt es im Intervall $[\,1\,;10\,]$?

(d) Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $[\,$-4$\,;4\,]$.

Lösung: (a) $x_n = \dfrac{\lg(n\,\pi)}{\lg\,2}$; (b)

n	1	2	3	4	5
x_n	1,65	2,65	3,24	3,65	3,97

(c) 325 NS

6. (a) Leiten Sie eine Formel zur Berechnung der Nullstellen x_n ($n \in \mathbb{Z}$) der Funktion

$$f(x) = \sin(\log_2 x)$$

her!

(b) Berechnen Sie *alle* Nullstellen von f im Intervall $[\,0{,}01\,;1000\,]$ mit einer Genauigkeit von drei geltenden Ziffern!

(c) Wie viele Nullstellen von f gibt es im Intervall $[\,1\,;10^{100}\,]$?

(d) Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $[\,0{,}1\,;10\,]$.

Lösung: (a) $x_n = 2^{n\,\pi}$; (b)

n	-2	-1	0	1	2	3
x_n	0,0128	0,113	1	8,82	77,9	687

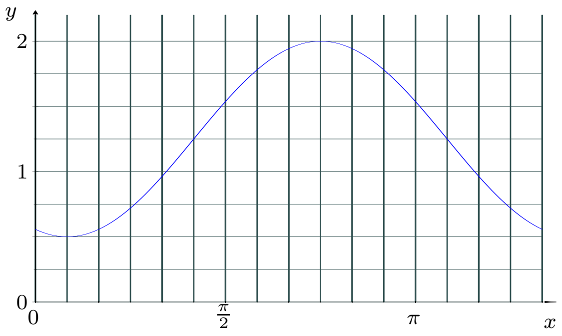
(c) 106 NS

7. Nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen einer *Sinus*-Funktion $f(x)$.

Ermittlen Sie die Gleichung von f.

Übertragen Sie dazu den Graphen auf Ihr Blatt und zeichnen Sie die für die Rechnung wichtigen Größen ein.

Das Ergebnis soll Brüche (keine Dezimalbrüche) enthalten!



Lösung: $f(x) = A\sin(kx + a) + v_y = A\sin[k(x - v_x)] + v_y$

Amplitude: $A = \dfrac{2 - 0{,}5}{2} = \dfrac{3}{4}$, Verschiebung in y-Richtung: $v_y = 0{,}5 + A = \dfrac{5}{4}$

Periodenlänge: $p = 2 \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{4\pi}{3} \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{2\pi}{p} = \frac{3}{2}$

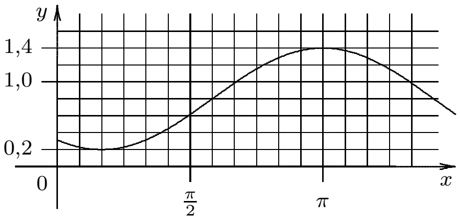
Verschiebung in x-Richtung: $v_x = \frac{5\pi}{12} \quad\Longrightarrow\quad a = -kv_x = -\frac{5\,\pi}{8}$

$$f(x) = \frac{3}{4} \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\,x - \frac{5\,\pi}{8}\right) + \frac{5}{4}$$

8. Nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen einer *Sinus*-Funktion $f(x)$.

   Ermitteln Sie die Gleichung von f.

   Übertragen Sie dazu den Graphen auf Ihr Blatt und zeichnen Sie die für die Rechnung wichtigen Größen ein.



   Das Ergebnis soll Brüche (keine Dezimalbrüche) enthalten!

Lösung: $f(x) = \frac{3}{5} \cdot \sin\left(\frac{6}{5}\,x - \frac{7\,\pi}{10}\right) + \frac{4}{5}$

9. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x$.

   (a) Zerlegen Sie den Funktionsterm von f in Faktoren und vereinfachen Sie ihn! Berechnen Sie die Nullstellen von f und zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[0\,;\,2\,\pi]$ $(x = \pi \mathrel{\widehat{=}} 3\,\text{cm})$!

   (b) Der Graph von f könnte auch der Graph einer Kosinusfunktion $g(x) = A{\cdot}\cos\,k\,x$ sein. Berechne A und k und beweise, dass $f(x) = g(x)$ gilt!

Lösung: $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2\,x$; Nullstellen: $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$;

10. A und B seien die Endpunkte eines Kreisbogens zum Mittelpunktswinkel φ.

   (a) Für welchen Winkel $\varphi = \varphi_1$ halbiert die Sehne $[AB]$ die Sektorfläche A_S? Stellen Sie zunächst eine Gleichung für φ_1 auf und vereinfachen Sie diese soweit wie möglich. Zeichnen Sie dann die Graphen der linken und rechten Gleichungsseite zur Bestimmung einer Näherungslösung für φ_1! Verbessern Sie den graphisch gefundenen Wert durch Probieren mit dem Taschenrechner auf eine Genauigkeit von vier geltenden Ziffern!

   (b) Für welchen Winkel $\varphi = \varphi_2$ ist die Länge des Kreisbogens $\overset{\frown}{AB}$ doppelt so groß wie die Sehnenlänge $\overline{AB}$? Stellen Sie zunächst eine Gleichung für φ_2 auf und vereinfachen Sie diese soweit wie möglich. Drücken Sie φ_2 durch φ_1 aus Teilaufgabe (a) aus!

Lösung: (a) $2 \cdot \sin\varphi_1 = \varphi_1 \quad ; \quad \varphi_1 = 1{,}8955 = 108{,}6^\circ$

(b) $2 \cdot \sin\dfrac{\varphi_2}{2} = \dfrac{\varphi_2}{2} \quad ; \quad \varphi_2 = 2\,\varphi_1 = 3{,}7910 = 217{,}2^\circ$

11. Betrachtet wird die für alle $x \in \mathbb{R}$ erklärte allgemeine Sinusfunktion

$$x \longmapsto y = a \cdot \sin(b \cdot x + c) \qquad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R};\ a \neq 0,\ b \neq 0.$$

(a) Geben Sie die Nullstellen dieser Funktion sowie deren gegenseitigen Abstand an!

(b) Wie ändern sich Amplitude (betragsmäßig größter Funktionswert), Lage und gegenseitiger Abstand der Nullstellen dieser Funktion, falls

(α) die Parameter a und b verdoppelt werden (bei konstantem c),

(β) die Parameter a und c halbiert werden (bei konstantem b),

(γ) die Parameter b und c halbiert werden (bei konstantem a)?

(c) Wann findet in der Situation von Teilaufgabe b) eine Stauchung, wann eine Dehnung des Funktionsgraphen in Richtung der x-Achse statt?

Lösung: (a): Nullstellen bei $x = \frac{1}{b} \cdot (k \cdot \pi - c) \quad k \in \mathbb{Z}$; gegenseitiger Abstand: $\frac{\pi}{b}$

(b): (α): doppelte Amplitude, Nullstellen bei $x = \frac{1}{2b} \cdot (k \cdot \pi - c)$, Nullstellenabstand wird halbiert
(β): halbe Amplitude, Nullstellen bei $x = \frac{1}{b} \cdot (k \cdot \pi - \frac{c}{2})$, Nullstellenabstand bleibt konstant
(γ): Amplitude bleibt konstant, Nullstellen bei $x = \frac{1}{b} \cdot (2k \cdot \pi - c)$, Nullstellenabstand wird verdoppelt

(c): Stauchung in der Situation (α), Dehnung in der Situation (γ)

12. Gegeben sind die Funktionsvorschriften

$$f_0 : x \longmapsto \tan x,\quad f_1 : x \longmapsto \tan\left(\frac{1}{2}x\right),\quad f_2 : x \longmapsto 2 + \tan\left(\frac{1}{2}x\right).$$

(a) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge von f_1 und untersuchen Sie diese Funktion rechnerisch auf Symmetrie.

(b) Beschreiben Sie knapp, wie der Graph von f_2 aus dem Graphen von f_0 über den Graphen von f_1 hervorgeht. Skizzieren Sie den Graphen von f_2 im Bereich $x \in [-\pi; \pi]$.

Lösung: (a): $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1) \cdot \pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$; f_1 ist ungerade.
(b): Dehnung des Graphen von f_0 um den Faktor 2 in x-Richtung liefert den Graphen von f_1. Eine anschließende Verschiebung um 2 in y-Richtung nach oben ergibt den Graphen von f_2.

13. (a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion
    $x \longmapsto \sin(2x)$ für $x \in [-\pi; \pi]$. (Längeneinheit: 2cm)
    (b) Zeigen Sie mit Hilfe der in (a) angefertigten Zeichnung, dass für $x \geq \frac{\pi}{2}$ die folgende Ungleichung gilt:

$$x - \sin(2x) \geq \frac{\pi}{2}$$

Lösung:

14. (a) Welche Wertemenge und welche Periode hat die Funktion
    $f(x) = 1 + \sin(\frac{1}{2}x) \qquad D = \mathbb{R}$?
    (b) Zeichnen Sie den Graphen G_f der Funktion f im Intervall $[0; 4\pi]$! (Längeneinheit 1 cm; π bei 3 cm)

Lösung: $W_f = [0; 2]$; Periode: 4π

15. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 1{,}5 \cdot \sin[(2 \cdot (x - \frac{\pi}{3})]$ mit $x \in \mathbb{R}$.
    (a) Bestimmen Sie die Periodenlänge und die Wertemenge von f.
    (b) Bestimmen Sie *alle* Nullstellen und die x-Werte *aller Hochpunkte* der Funktion.
    (c) Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$ mit Hilfe der Ergebnisse von a) und b) (Längeneinheit: 1 cm, $\pi \approx 3$).

Lösung: Periode π; $W = [-1{,}5; 1{,}5]$; Nullstellen bei $x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; Hochpunkte bei $x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

16. (a) Zeichnen Sie in dasselbe Koordinatensystem mit verschiedenen Farben im Intervall $[0; 4\pi]$ die Graphen der angegebenen Funktionen.
    (Längeneinheit: 1 cm, $\pi \approx 3$)
    i. $y = 2 \cdot \sin(x + 2)$
    ii. $y = 2 \cdot \sin[0{,}5 \cdot (x + 2)]$
    iii. $y = 0{,}5 \cos x$
    (b) Bestimmen Sie die x-Werte *aller Tiefpunkte* der drei Funktionen.

Lösung: i) $x = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi - 2$; $k \in \mathbb{Z}$
ii) $x = 3\pi + k \cdot 4\pi - 2$; $k \in \mathbb{Z}$
iii)$x = \pi + k \cdot 2\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

17. Wieviele Nullstellen besitzt die Funktion $f\,:\,x \longmapsto \sin x \cdot \cos x$ zwischen 50 und 62?

Lösung: Nullstellen $k\pi$ und $k\pi + \frac{\pi}{2}$ für $k \in \{16{,}17{,}18{,}19\}$.

18. Gegeben sind die folgenden drei Funktionsterme

$$f(x) = 4 \cdot \cos(3x)\,, \quad g(x) = 3 \cdot \sin(2x+1)\,, \quad h(x) = \sin(2x) \cdot \tan x$$

jeweils mit maximalem Definitionsbereich.

   (a) Geben Sie die Definitionsbereiche D_f, D_g und D_h an!

   (b) Geben Sie die Nullstellenmengen dieser drei Funktionen an!

   (c) Geben Sie das Symmetrieverhalten dieser drei Funktionen an!

Lösung: $D_f = D_g = \mathbb{R}\,;\quad D_h = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} \cdot (1+2k)\}\,,\ k \in \mathbb{Z}$
f und h sind gerade Funktionen, der Graph von g ist punktsymmetrisch zum Punkt $(-1|0)$ eines Koordinatensystems.

9. Additionstheoreme

1. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\cos^4(\frac{x}{2}) - \sin^4(\frac{x}{2})$$

Lösung: $\cos x$

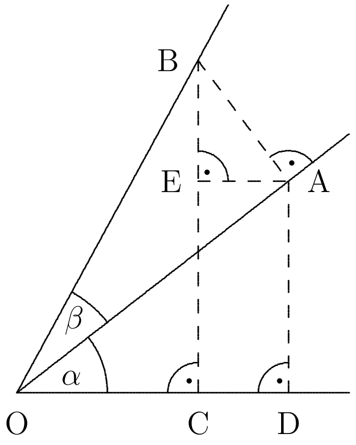
2. Berechnen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme den exakten Wert von $\cos 105^o$!

Lösung: $\frac{1}{4}\sqrt{2}(1-\sqrt{3})$

3. Weisen Sie unter Zuhilfenahme nebenstehender Skizze die Gültigkeit des Additionstheorems

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha$$

nach!
(Hinweis: Zeigen Sie zunächst: $\sphericalangle EBA = \alpha$!)



Lösung:

4. Leiten Sie mit Hilfe der Additionstheoreme $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha$ und $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$
die Gültigkeit der Beziehung

$$\sin 4\alpha = 4\cdot(\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha - \sin^3\alpha\cdot\cos\alpha)$$

her!

Lösung:

5. Leiten Sie mit Hilfe des Additionstheorems $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ die Gültigkeit der Beziehung

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \cos^2 \alpha - 1$$

her! Lösen Sie nun unter Zuhilfenahme dieser Beziehung die Gleichung

$$\cos 2\alpha = \cos\alpha$$

im Bereich $[0° \,;\, 360°]$!

Lösung: $L = \{0°, 120°, 240°, 360°\}$

6. Bestätigen Sie die Additionstheoreme, indem Sie die Aufgaben sowohl „direkt“als auch mit Hilfe der Additionstheoreme lösen:
   (a) $\cos(210^o + 90^o)$
   (b) $\sin(240^o - 60^o)$

Lösung: (a) 0,5; (b) 0

7. (a) Zeigen Sie anhand eines geeigneten Beispiels, dass im allgemeinen gilt:

$$\sin 3x \neq 3 \sin x$$

   (b) Stellen Sie $\sin 3x$ in Abhängigkeit von $\sin x$ dar!

Lösung: $\sin 3x = 3\sin x - 4(\sin x)^3$

8. (a) Zeigen Sie anhand eines geeigneten Beispiels, dass im allgemeinen gilt:

$$\cos 3x \neq 3 \cos x$$

   (b) Stellen Sie $\cos 3x$ in Abhängigkeit von $\cos x$ dar!

Lösung: $\cos 3x = 4(\cos x)^3 - 3\cos x$

9. Berechnen Sie aus

$$\cos 36^o = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

die exakten Werte von

(a) $\sin 36^o$

(b) $\tan 36^o$

(c) $\cos 72^o$

Lösung: $\sin 36^o = \frac{1}{4}(\sqrt{10-2\sqrt{5}})$
$\tan 36^o = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$\cos 72^o = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$

10. Einem Kreis mit Radius 1 wird ein regelmäßiges 10-Eck einbeschrieben. Der Umfang des 10-Ecks beträgt $5(\sqrt{5}-1)$. Berechnen Sie daraus die exakten Werte von

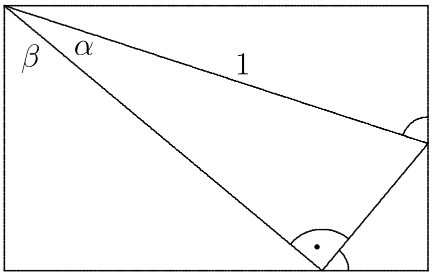
    (a) $\sin 18^o$

    (b) $\sin 36^o$

    (c) $\cos 36^o$

Lösung: $\sin 18^o = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$;
$\sin 36^o = \frac{1}{4}(\sqrt{10-2\sqrt{5}})$;
$\cos 36^o = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$;

11. (a) Das folgende Rechteck kann für beliebige Winkel $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ mit $\alpha + \beta < 90^0$ konstruiert werden. Beschreiben Sie knapp, ausgehend vom rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse der Länge 1 und dem Winkel α, eine Reihe möglicher Konstruktionsschritte.



    (b) Geben Sie die Größe der beiden durch Bögen markierten Winkel mit Hilfe von α und β an.

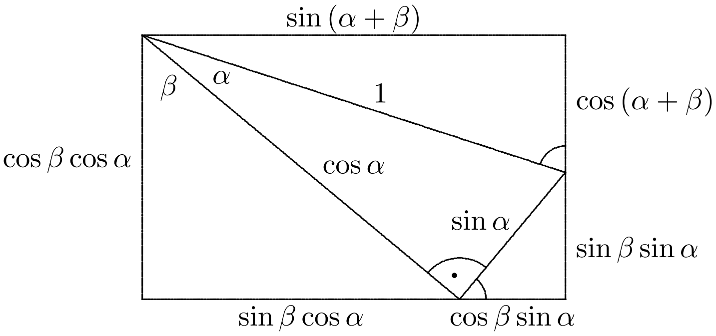
    (c) Berechnen Sie die Längen der Rechteckseiten und ihrer Abschnitte mit Hilfe der Sinus- und Cosinuswerte der Winkel α, β und $\alpha + \beta$.

    (d) Leiten Sie daraus durch Vergleich die Additionstheoreme für $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$ her.

Lösung: (a) Man kann z.B. über der Kathete des ersten Dreiecks ein zweites rechtwinkliges Dreiecks mit dem Winkel β konstruieren. Das Rechteck ergibt sich daraus mit Hilfe von Parallelen.

(b) unten β, rechts oben $\alpha + \beta$

(c)



12. Berechnen Sie exakt: $\sin 555°$

Lösung: $-\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$

13. Die Seitenlänge eines regulären 10-Ecks mit Umkreisradius 1 beträgt $\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{5}-1)$. Berechnen Sie anhand einer übersichtlichen Skizze die exakten Werte von cos 18° und sin 36°!
Hinweis: Verwenden Sie die allgemeingültige Beziehung $\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$!

Lösung: $\cos 18° = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; $\sin 36° = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

10. Vermischtes

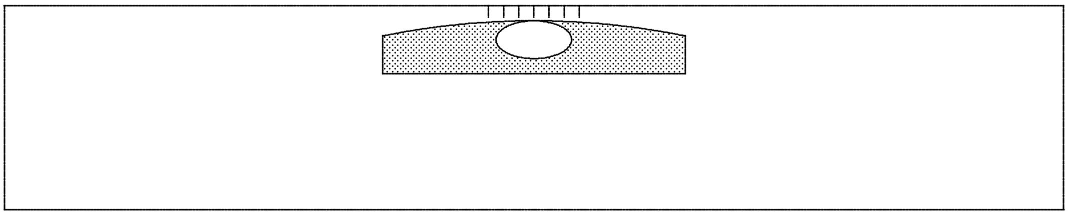
1. A und B seien die Endpunkte eines Kreisbogens zum Mittelpunktswinkel φ.
   (a) Für welchen Winkel $\varphi = \varphi_1$ halbiert die Sehne $[AB]$ die Sektorfläche A_S? Stellen Sie zunächst eine Gleichung für φ_1 auf und vereinfachen Sie diese soweit wie möglich. Zeichnen Sie dann die Graphen der linken und rechten Gleichungsseite zur Bestimmung einer Näherungslösung für φ_1! Verbessern Sie den graphisch gefundenen Wert durch Probieren mit dem Taschenrechner auf eine Genauigkeit von vier geltenden Ziffern!

   (b) Für welchen Winkel $\varphi = \varphi_2$ ist die Länge des Kreisbogens $\overset{\frown}{AB}$ doppelt so groß wie die Sehnenlänge $\overline{AB}$? Stellen Sie zunächst eine Gleichung für φ_2 auf und vereinfachen Sie diese soweit wie möglich. Drücken Sie φ_2 durch φ_1 aus Teilaufgabe (a) aus!

Lösung: (a) $2 \cdot \sin\varphi_1 = \varphi_1 \quad ; \quad \varphi_1 = 1{,}8955 = 108{,}6^\circ$

(b) $2 \cdot \sin\frac{\varphi_2}{2} = \frac{\varphi_2}{2} \quad ; \quad \varphi_2 = 2\,\varphi_1 = 3{,}7910 = 217{,}2^\circ$

2. Die Libelle einer Wasserwaage hat bei einem Präzisionsgerät einen Krümmungsradius von 80m.



   (a) Bei ungenauer Ablesung ist die Waage geneigt. Wir nehmen an, dass sie so gehalten wird, dass sich die Luftblase in der Libelle um einen Millimeter neben der Mitte befindet. Welche Ungenauigkeit in Grad ergibt sich daraus für die Neigung der Wasserwaage?

   (b) Die Wasserwaage wird benutzt um ein optisches Messgerät horizontal zu justieren, mit dem ein Punkt in einer Entfernung von 100m anvisiert wird. Welche Unsicherheit in der Höhe ergibt sich unter den obigen Voraussetzungen für diesen Punkt.

Lösung: (a) ca $7{,}2 \cdot 10^{-4}$ Grad

(b) ca 1,25mm

3. Die Ameise Julia, die in einem kartesischen Koordinatensystem im Ursprung $O(0|0)$ wohnt, will ihre Tante besuchen. Ihre Wegstrecke ist dabei in einem Winkel von 26,5° gegen die positive x-Achse geneigt. Auch die Ameise Romeo aus $R(10|-1)$ will ihren Onkel, der in $P(4|8)$ wohnt, auf kürzestem Weg besuchen. Julia und Romeo richten es nun so ein, dass sie sich begegnen.
   Legen Sie eine Zeichnung an und berechnen Sie die Koordinaten des Treffpunktes T sowie die Entfernung des Punktes T vom Ursprung, ohne den Satz des Pythagoras zu verwenden! (Ergebnisse auf 1 Dezimale runden!)

Lösung: $T(7{,}0|3{,}5)$; $\overline{OT} \approx 7{,}8$

Teil III.

Algebra

11. Rechnen mit Potenzen

11.1. Potenzgleichungen

11.1.1. Potenzgleichungen

Einfache Gleichungen - Lösen durch Potenzieren oder Basisvergleich

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge (keine Dezimalbrüche): $(1-3x)^4 \;=\; 625$

Lösung: $L = \{-\frac{4}{3};\ 2\}$

2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$\sqrt{x}\sqrt[3]{x}\sqrt[6]{x} = 6$$

Lösung: $L = \{6\}$

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$\sqrt{x}\sqrt[3]{x}\sqrt[6]{x} = -6$$

Lösung: $L = \{\}$

4. Bestimmen Sie die Lösungsmenge (keine Dezimalbrüche): $2{,}4x^{\frac{1}{5}} - 3 \;=\; 0{,}4x^{\frac{1}{5}}$

Lösung: $L = \{\frac{243}{32}\}$

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{R}$: $\sqrt[5]{x+2} = (8x)^{\frac{1}{10}}$

Lösung: $L = \{2\}$

6. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung:

$$4\sqrt{x} - \sqrt[6]{64x^3} = 6$$

Lösung: $L = \{9\}$

7. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$\sqrt{x^{12}} + 126 = (2 \cdot \sqrt[5]{x^5})^6$$

Lösung: $L = \{\sqrt[6]{2}\}$

8. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$3(x+4)^{\frac{1}{3}} = 4(x-33)^{\frac{1}{3}}$$

Lösung: $L = \{60\}$

9. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$34 - 7\left(\frac{4x-1}{x-6}\right)^{\frac{1}{3}} = 13$$

Lösung: $L = \{7\}$

10. Formen Sie die linke Gleichungsseite in eine Potenz um, die den gleichen Exponenten hat wie die rechte Seite und berechnen Sie dann die Lösungsmenge! Wenn nötig, sind Fallunterscheidungen vorzunehmen!

$$\text{(a)} \quad x^{24} = a^6 \qquad \text{(b)} \quad x^{24} = a^8 \qquad \text{(c)} \ x^{12} = a^3$$

Lösung:

(a) $|x^4| = |a| \quad \Longrightarrow \quad x^4 = |a| \quad \Longrightarrow \quad L = \{\pm|a|^{\frac{1}{4}}\}$

(b) $|x^3| = |a| \quad \Longrightarrow \quad x^3 = \pm|a| \quad \Longrightarrow \quad L = \{\pm|a|^{\frac{1}{3}}\}$

(c) $(x^4)^3 = a^3 \quad \Longrightarrow \quad x^4 = a \quad \Longrightarrow \quad L = \begin{cases} \{\pm a^{\frac{1}{4}}\} & \text{für} \quad a \geqq 0 \\ \{\ \} & \text{für} \quad a < 0 \end{cases}$

11. Berechnen Sie die Lösungsmenge, gegebenenfalls mit Fallunterscheidung:
    (a) $x^{2n} = -a\ ;\ n \in \mathbb{N}$ (b) $x^{-7} = a\ ;\ a < 0$ (c) $x^{-n} = a\ ;\ a > 0\ ;\ n \in \mathbb{N}$

Lösung: (a) $L = \begin{cases} \{\,\} & \text{für}\quad a > 0\ ,\ \text{da } 2n \text{ gerade} \\ \left\{\pm \sqrt[2n]{|a|}\right\} & \text{für}\quad a \leqq 0 \end{cases}$

(b) $L = \left\{-\sqrt[7]{\frac{1}{|a|}}\right\} = \left\{-\frac{1}{\sqrt[7]{-a}}\right\}$

(c) $L = \begin{cases} \left\{\pm\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right\} & \text{für}\quad \text{n gerade} \\ \left\{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right\} & \text{für}\quad \text{n ungerade} \end{cases}$

Lösen durch mehrfaches Potenzieren

1. Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung ($G = \mathbb{R}$):

$$(28 + x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{5}} = 8$$

Lösung: $x = 8$

2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung:

$$(x^{\frac{1}{2}} - 2)^{\frac{1}{4}} = (1 - x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}$$

Lösung: Potenzieren führt auf $x = \frac{9}{4}$. Die rechte Seite der Gleichung ist für diesen Wert nicht definiert.

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$\left(x^{-\frac{3}{2}} - 4\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Lösung: $L = \{\frac{1}{4}\}$

4. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$\left(x^{-\frac{1}{2}}+79\right)^{\frac{3}{4}}-27=0$$

Lösung: $L=\{\frac{1}{4}\}$

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$\left(6x^{\frac{3}{4}}+181\right)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{49}$$

Lösung: $L=\{81\}$

6. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$(15\cdot\sqrt[3]{x^{-2}}+121)^{\frac{3}{4}}=64$$

Lösung: $L=\{-\frac{1}{27};\ \frac{1}{27}\}$

7. Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge und machen Sie die Probe:

$$(125x^{\frac{3}{4}}+316)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{49}$$

Lösung: $D=\mathbb{R}_0^+$; $L=\{\frac{81}{625}\}$

8. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung:

$$[(81x)^{\frac{1}{4}}-3]^{-\frac{5}{2}}=\frac{1}{243}$$

Lösung: $L=\{256\}$

9. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung:

$$\left(19+2\sqrt[3]{7x^2+1}\right)^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$$

Lösung: $x = \pm 3$

10. Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichung:

$$(\sqrt{x} - 9)^{\frac{1}{4}} = \sqrt{x^{\frac{1}{4}} - 1}$$

Lösung: $D = [81; \infty[$; $L = \{625\}$

11. Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichung:

$$(\sqrt[3]{x} - 8)^3 = (\sqrt[6]{x} - 4)^6$$

Lösung: $D = \mathbb{R}_0^+$; $L = \{729\}$

12. Berechnen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung in $D = [7; \infty[$!

$$\left(x^{\frac{4}{3}} + 27\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \left(14x^{\frac{4}{3}} - 162\right)^{\frac{1}{2}}$$

Lösung: $L = \{27\}$

Ausklammern und Faktorisieren

1. Lösen Sie folgende Gleichung durch Faktorisieren:

$$x^{\frac{7}{2}} - 16x^{\frac{3}{2}} = 0$$

Lösung: $L = \{0; 4\}$

2. Lösen Sie folgende Gleichung durch Faktorisieren:

$$x^{11} - 16x^7 + 64x^3 = 0$$

Lösung: $L = \{0; -\sqrt[4]{8}; \sqrt[4]{8}\}$

Lösen durch kombinierte Verfahren

1. Bestimmen Sie rechnerisch die Lösungsmenge der folgenden Gleichung in $G = \mathbb{R}$:

$$8 \cdot x^{\frac{3}{2}} - 9 \cdot x^{\frac{3}{4}} + 1 = 0$$

Lösung: $L = \{1; \frac{1}{16}\}$

2. Lösen Sie folgende Gleichung:

$$16 \cdot x^{\frac{4}{3}} + 23 \cdot x^{\frac{2}{3}} - 18 = 0$$

Lösung: $L = \left\{\frac{27}{64}\right\}$

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{R}$: $x^{\frac{2}{3}} = 2\,x^{\frac{1}{3}} + 3$

Lösung: $L = \{9\}$

4. Bestimmen Sie die Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{R}$: $x^{1{,}5} = 7\,x^{0{,}75} - 6$

Lösung: $L = \{1\,;\ 6^{\frac{4}{3}} \approx 10{,}9027\}$

5. Bestimmen Sie rechnerisch die Lösungsmenge der folgenden Gleichung in $G = \mathbb{R}$:

$$3x^{\frac{4}{3}} - 120x^{\frac{2}{3}} + 432 = 0$$

Lösung: $L = \{8; 216\}$

6. Bestimmen Sie rechnerisch die Lösungsmenge der folgenden Gleichung in $G = \mathbb{R}$:

$$54x^{\frac{6}{5}} - 56x^{\frac{3}{5}} + 2 = 0$$

Lösung: $L = \{1; \frac{1}{243}\}$

7. Bestimmen Sie rechnerisch die Lösungsmenge der folgenden Gleichung in $G = \mathbb{R}$:

$$3x^{\frac{3}{2}} + 351x^{\frac{3}{4}} - 3000 = 0$$

Lösung: $L = \{16\}$

8. Lösen Sie folgende Gleichung:

$$x^{\frac{1}{4}} - 3 \cdot x^{\frac{1}{6}} + 2 = 0$$

Lösung: $L = \{1; (1+\sqrt{3})^{12}\}$

9. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung:

$$2 - \sqrt[3]{x+11} + \sqrt[6]{x+11} = 0$$

Lösung: $L = \{53\}$

10. Lösen Sie folgende Gleichung:

$$2 \cdot \sqrt[6]{x} - 7 \cdot \sqrt[9]{x} + 7 \cdot \sqrt[18]{x} - 2 = 0$$

Lösung: $L = \{1; 2^{18}; 0{,}5^{18}\}$

11. Lösen Sie folgende Potenzgleichung über $G = \mathbb{R}$:

$$3 \cdot (x^{\frac{2}{3}} - 2)^2 - 31 \cdot (x^{\frac{2}{3}} - 2) = -70$$

Lösung: $L = \{27; \frac{64}{9}\sqrt{3}\}$

12. Lösen Sie folgende Gleichung:

$$x^{\frac{11}{12}} + 2 \cdot x^{\frac{1}{4}} - 3 \cdot x^{\frac{2}{3}} - 6 = 0$$

Lösung: $L = \{81\}$

13. Lösen Sie folgende Gleichung:

$$4x - 16 \cdot x^{\frac{2}{3}} + 21 \cdot x^{\frac{1}{3}} - 9 = 0$$

Lösung: $L = \{1;\ \frac{27}{8}\}$

14. Lösen Sie folgende Gleichung:

$$\left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{1}{3}} + 3\right)^{\frac{1}{3}}$$

Lösung: $L = \{125\}$

Gleichungen ohne gängige Schemata

1. Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge und berechnen Sie dann die Lösungsmenge:

$$(-x)^{5^2} : \left[(-x)^5\right]^2 = \sqrt{-x^7}$$

Lösung: $D = \mathbb{R}^- = \{\, x \mid x < 0 \,\}$;
$-\,x^{15} = |x^3| \cdot \sqrt{-x} \,\wedge\, x < 0 \quad \Longrightarrow \quad x^{12} = \sqrt{-x} \quad \Longrightarrow \quad L = \{-1\}$

2. Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge und berechnen Sie dann die Lösungsmenge:

$$(-x)^{3^2} \cdot \left[(-x)^3\right]^{-2} = \sqrt{x^6}$$

Lösung: $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $\quad -x^3 = |x^3| \quad \Longrightarrow \quad L = \mathbb{R}^- = \{\, x \mid x < 0 \,\}$

3. Was ist falsch in folgender Gleichungskette:

$$\sqrt{-64} = \sqrt{(-4)^3} = (-4)^{\frac{3}{2}} = (-4)^{\frac{6}{4}} = \sqrt[4]{(-4)^6} = \sqrt[4]{2^{12}} = 8$$

Lösung: $\sqrt[4]{(-4)^6} = |-4|^{\frac{6}{4}}$!!
$(-4)^{\frac{6}{4}}$ und die links davon stehenden Terme sind nicht definiert.

4. Lösen Sie folgende Gleichung zunächst graphisch und bestätigen Sie Ihr Ergebnis dann durch Einsetzen:
$$\sqrt[3]{x} = \frac{1}{2}x - 2$$

Lösung: $L = \{8\}$

5. Lösen Sie folgende Gleichung zunächst graphisch und bestätigen Sie Ihr Ergebnis dann durch Einsetzen:
$$x^{-2} = \frac{7}{8}x - \frac{3}{2}$$

Lösung: $L = \{2\}$

6. Lösen Sie folgende Gleichung zunächst graphisch und bestätigen Sie Ihr Ergebnis dann durch Einsetzen:
$$x^{\frac{2}{3}} = (x-5)^2 - 5$$

Lösung: $L = \{8\}$

Lösung graphisch oder numerisch

11.2. Polynomdivision

11.2.1. Polynomdivision

Linearfaktoren und Nullstellen

1. Führen Sie eine Polynomdivision durch:
$$(10x^3 - 24x^2 - 4x - 42) : (2x - 6)$$

Lösung: $5x^2 + 3x + 7$

2. Führen Sie eine Polynomdivision durch:
$$(6x^6 + 8x^5 + 18x^4 + 18x^3 - 5x^2 - 5x - 12) : (3x + 4)$$

Lösung: $2x^5 + 6x^3 - 2x^2 + x - 3$

3. Führen Sie eine Polynomdivision durch:

$$(35x^3 + 9x^2 - 28x + 8) : (5x - 3)$$

Lösung: $7x^2 + 6x - 2 + \frac{2}{5x-3}$

4. Führen Sie eine Polynomdivision durch:

$$(40x^2 - 47x - 50) : (8x + 5)$$

Lösung: $5x - 9 - \dfrac{5}{8x + 5}$

5. Zeigen Sie, dass $x_0 = -2$ eine Nullstelle des Polynoms

$$p(x) = x^5 + 2x^4 - 34x^3 - 68x^2 + 225x + 450$$

ist.
Zerlegen Sie dann das Polynom in Linearfaktoren und geben Sie alle Nullstellen an.

Lösung: $p(x) = (x + 2)(x - 3)(x + 3)(x - 5)(x + 5)$;
Nullstellen bei $x = -2; -3; 3; -5; 5$

6. Ein Polynom läßt sich folgendermaßen zerlegen:

$$2x^4 - \frac{49}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{13}{2}x + 12 \;=\; (\frac{1}{2}x - 3) \cdot (...)$$

Bestimmen Sie den fehlenden Faktor. Geben Sie anschließend eine Zahl an, die, wenn sie im links vom Gleichheitszeichen stehenden Polynom eingesetzt wird, für dieses Polynom den Wert 0 ergibt.

Lösung: $(4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 4)\,; \quad x = 6$

7. Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung: $x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0$

Lösung: $L = \{-1; -2; 4\}$

8. Zerlegen Sie in ein Produkt aus zwei Polynomen: $x^3 + x^2 - 21x - 45$

Lösung: Die vollständige Zerlegung lautet:$(x+3)^2(x-5)$

9. Zerlegen Sie das Polynom f vollständig in Linearfaktoren:

$$f(x) = 2x^4 - x^3 - 15x^2 + 18x$$

Lösung: $2x(x-2)(x+3)(x-1{,}5)$

10. Faktorisieren Sie soweit wie möglich:

$$x^5 + 7x^4 + 14x^3 - 7x^2 - 15x$$

Lösung: $x \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+7x+15)$

11. (a) Führen Sie folgende Polynomdivision durch (Ergebnis mit Restpolynom):

$$x^3 : (3x-1)$$

    (b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung! (Finden Sie eine Lösung durch Probieren und führen Sie dann eine Polynomdivision durch!)

$$x^6 - 5x^2 = 10x - 2x^5$$

Lösung: (a): $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{1}{27} + \frac{1}{27\cdot(3x-1)}$
(b): $L = \{0; -2; \pm\sqrt[4]{5}\}$

Division durch Polynome höheren Grades

1. Berechnen Sie: $(x^5 + x^4 - x - 1) : (x^2 - 1)$

Lösung: $x^3 + x^2 + x + 1$

2. Führen Sie eine Polynomdivision durch:

$$(48x^5 - 111x^3 + 83x^2 + 15x - 35) : (4x^2 + 3x - 7)$$

Lösung: $12x^3 - 9x^2 + 5$

3. Berechnen Sie: $(81x^8 + 4) : (9x^4 + 6x^2 + 2)$

Lösung: $9x^4 - 6x^2 + 2$

4. Führen Sie eine Polynomdivision durch:

$$(4x^6 - 4x^2 + 28x - 49) : (2x^3 + 2x - 7)$$

Lösung: $2x^3 - 2x + 7$

5. Führen Sie die Polynomdivision durch:

$$(4x^7 + 14x^5 - \frac{4}{3}x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 6x + 1) \ : \ (3x^4 + 6x^2 - x)$$

Lösung: $\frac{1}{3} \cdot (4x^3 + 6x - \frac{3}{x})$

6. (a) Dividieren Sie:

$$(x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 9x + 3) \ : \ (x^2 + 2x + 1)$$

   (b) Berechnen Sie unter Beachtung von Teilaufgabe (a) die Nullstellen des Polynoms $x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 9x + 3$!

   (c) Geben Sie ein Polynom 4. Grades an, das außer 2 keine weiteren Nullstellen hat! Der Gedankengang muss klar erkennbar sein!

Lösung: (a): $x^2 + 3x + 3$
(b): genau eine Nullstelle bei $x = -1$
(c): z.B. $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = (x - 2)^4$

7. Gegeben sind die Polynome
$A(x) = 6x^4 + 5x^3 - \frac{19}{2}x^2 + 5x - 1$ und $B(x) = 3x^2 - 2x + \frac{1}{2}$.
Führen Sie die Polynomdivision durch.

Lösung: $6x^4 + 5x^3 - \frac{19}{2}x^2 + 5x - 1 =$
$(3x^2 - 2x + \frac{1}{2})(2x^2 + 3x - \frac{3}{2}) + (\frac{1}{2}x - \frac{1}{4})$

8. Gegeben sind die Polynome
$A(x) = 6x^4 - 5x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x - 1$ und $B(x) = 3x^2 + 2x - \frac{1}{2}$.
Führen Sie die Polynomdivision durch.

Lösung: $6x^4 - 5x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x - 1 =$
$(3x^2 + 2x - \frac{1}{2})(2x^2 - 3x + \frac{3}{2}) + (-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4})$

9. Gegeben sind die Polynome
$$N(x) = 4x^4 - x^3 + x^2 + 3x + 8 \quad \text{und} \quad D(x) = x^3 - x^2 + 2\,.$$
Es ist folgende Darstellung möglich: $N(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$.
    - (a) Machen Sie Aussagen über die Grade der Polynome $Q(x)$ und $R(x)$
    - (b) Bestimmen Sie die Polynome $Q(x)$ und $R(x)$.

Lösung: (a) Grad(Q) = 1 ; Grad(R) < 3

(b) $4x^4 - x^3 + x^2 + 3x + 8 =$
$(x^3 - x^2 + 2)(4x + 3) + (4x^2 - 5x + 2)$

10. Gegeben sind die Polynome
$$N(x) = 3x^4 + 4x^3 + x^2 + 5x + 4 \quad \text{und} \quad D(x) = x^3 - x + 2\,.$$
Es ist folgende Darstellung möglich: $N(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$
    - (a) Machen Sie Aussagen über die Grade der Polynome $Q(x)$ und $R(x)$.
    - (b) Bestimmen Sie die Polynome $Q(x)$ und $R(x)$.

Lösung: (a) Grad(Q) = 1 ; Grad(R) < 3

(b) $3x^4 + 4x^3 + x^2 + 5x + 4 =$
$(x^3 - x + 2)(3x + 4) + (4x^2 + 3x - 4)$

Polynome mit Formvariablen

1. Führen Sie die Polynomdivision durch ($a \in \mathbb{R}$):
$$\big(x^5 + ax^4 + x^3 - (1 + a) \cdot x^2 - 2x + 1\big) : (x^2 - 1)$$

Lösung: $x^3 + ax^2 + 2x - 1$

2. Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass folgende Polynomdivision ohne Rest aufgeht:
$$\big(x^5 - (4 - 2a^2 + 5a) \cdot x\big) : (x^2 - x)$$

Lösung: $3, -\frac{1}{2}$

3. Gegeben ist das Polynom $p(x) = 2x^3 + (3k-4)x^2 + (5-6k)x - 10$ mit $k \in \mathbb{R}$.
   (a) Zeigen Sie, dass das Polynom für alle $k \in \mathbb{R}$ bei 2 eine Nullstelle besitzt.
   (b) Zerlegen Sie das Polynom in ein Produkt aus zwei Polynomen!
   (c) Für welche $k \in \mathbb{R}$ besitzt das Polynom $p(x)$ noch genau eine weitere Nullstelle?

Lösung: $p(2) = 0$; $p(x) = (x-2) \cdot (2x^2 + 3kx + 5)$; $k_1 = \frac{2}{3}\sqrt{10}$ und $k_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{10}$

Reihenentwicklung

1. Führen Sie folgende Division weiter aus:

$$\frac{1}{1+x} = \begin{array}{l} 1:(1+x) = 1 - x + x^2 \,.... \\ \underline{1+x} \\ \quad -x \\ \quad \underline{-x - x^2} \\ \qquad +x^2 \\ \qquad ..... \end{array}$$

   (a) Das Ergebnis der Division ist eine Summe mit unendlich vielen Summanden (unendliche Reihe). Der Wert dieser Summe ist nur für x mit $|x| < 1$ definiert. Überprüfen Sie diese Aussage für $x = 0{,}1$ und $x = 2$!

   (b) Ist der Betrag von x sehr klein gegen 1 ($|x| \ll 1$), dann kann man in der Reihe die höheren Potenzen von x vernachlässigen und erhält folgende Näherungen:

$$\boxed{\frac{1}{1+x} \approx 1 - x} \qquad \boxed{\frac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2}$$

lineare Näherung — quadratische Näherung

   Berechnen Sie den relativen Fehler der beiden Näherungen für $x = 0{,}1$ und $x = 0{,}005$!

   (c) Um Näherungsformeln für $\sqrt{1+x}$ zu finden, quadriert man den Ansatz $\sqrt{1+x} \approx 1 + a\,x + b\,x^2$, vernachlässigt alle Summanden ab der dritten Potenz und bestimmt dann a und b durch Koeffizientenvergleich. Wie lautet die lineare und die quadratische Näherung für $\sqrt{1+x}$ ($|x| \ll 1$)? Berechnen Sie den relativen Fehler der Näherungen für $x = 0{,}02$!

   (d) Wie lauten die Näherungsformeln (linear und quadratisch) für $\dfrac{1}{1-x}$ und $\sqrt{1-x}$? Leiten Sie daraus die lineare Näherung für $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ her!

   (e) Eine Atomuhr A wird mit der Geschwindigkeit $v = 108\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ von einer Uhr B zu einer 300 km entfernten Uhr C bewegt, die Uhren B und C zeigen für diesen Vorgang die Zeitdauer t an. Nach Einstein misst A für den gleichen Vorgang die Zeit $t' = t \cdot \sqrt{1-\beta^2}$ mit $\beta = \frac{v}{c}$ und der Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Berechnen Sie $\Delta t = t - t'$ mit der linearen Näherung! Versuchen Sie die Berechnung auch ohne Näherungsformel mit dem Taschenrechner!

(f) Einstein leitete für die kinetische Energie die Formel $W = m\,c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ her. Weisen Sie nach, dass diese Formel in linearer Näherung mit der klassischen Formel $W = \frac{m}{2}\,v^2$ übereinstimmt!

Lösung: (a) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \mp ....$

(b) linear: −1%, −0,0025%; quadratisch: 0,1%, 0,000125%

(c) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$

linear: 0,0049%; quadratisch: −0,000049%

(d) $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2$; $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$; $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{2}$

(e) $\Delta t \approx \frac{s}{v} \cdot \frac{\beta^2}{2} = 5 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s}$

11.2.2. Anwendungsaufgaben mit fächerübergreifenden Aspekten

1. Auf ein Konto wird an jedem Monatsersten, beginnend mit dem 1.1.2002, der konstante Betrag m einbezahlt, der jährliche Zinssatz sei z. Der fällige Zins wird am 31.12. des jeweiligen Jahres gutgeschrieben. Die einzelnen Raten werden dabei im Verhältnis zu ihrer tatsächlich auf dem Konto ruhenden Zeit berücksichtigt, der Zins für die Februar-Rate ist z.B. $Z_{\text{Februar}} = \frac{11}{12} \cdot z \cdot m$. Mit a_n bezeichnen wir den Kontostand nach n Jahren, d.h. am 31.12. im Jahre $2002 + n - 1$.
   Eine andere Bank schreibt den Zins an jedem Monatsletzten mit dem monatlichen Zinssatz $z_m = \frac{z^*}{12}$ gut, der Kontostand nach n Jahren sei hier b_n.
   Herr Traunicht spart seine zwölf Monatsraten im Sparstrumpf an und trägt sie erst am 31.12 zur Bank. Sein Kontostand am 31.12. im Jahre $2002+n-1$ sei c_n (jährlicher Zinssatz z).

   (a) Berechnen Sie zuerst a_1 und dann a_n! Verwenden Sie die Abkürzung $k = 1 + z$!

   (b) Berechnen Sie b_n unter Verwendung der Abkürzung $q = 1 + z_m$!

   (c) Berechnen Sie c_n!

   (d) Berechnen Sie a_{10}, b_{10} und c_{10} für $m = 1000$ € und $z = z^* = 6\%$!

   (e) Für welches z^* wäre $b_{10} = a_{10}$ ($z = 6\%$)? Numerische Lösung durch Probieren mit dem Taschenrechner!

Lösung: (a) $a_1 = 12\,m\left(1 + \frac{13}{24}\,z\right)$, $a_n = a_1 \sum\limits_{i=0}^{n-1} k^i = 12\,m\left(1 + \frac{13}{24}\,z\right)\frac{k^n - 1}{k - 1}$

(b) $b_n = m \sum_{i=1}^{12\,n} q^i = m\,q\,\frac{q^{12\,n}-1}{q-1}$

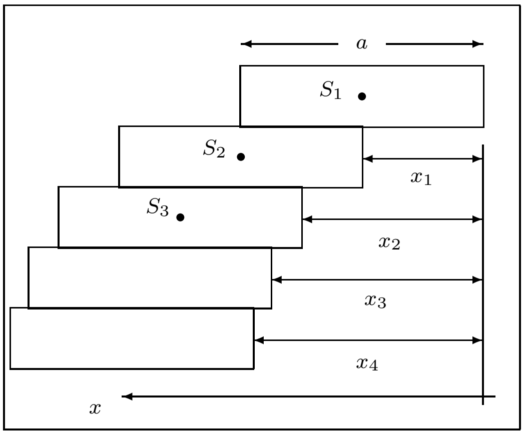
(c) $c_n = 12\,m \sum_{i=0}^{n-1} k^i = 12\,m\,\frac{k^n-1}{k-1}$

(d) $a_{10} = 163\,310{,}05$ €, $b_{10} = 164\,698{,}74$ €, $c_{10} = 158\,169{,}54$ €

(e) $q\,\frac{q^{120}-1}{q-1} = 163{,}31005\,;\; q = 1 + \frac{z^*}{12} = 1{,}0048718\,;\; z^* = 5{,}846\%$

2. Ein Konto wird monatlich mit dem Zinssatz z_m verzinst. Für welches z_m ist der Kontostand nach einem Jahr genauso groß wie bei jährlicher Verzinsung mit dem Zinssatz z? Wie groß ist z_m für $z = 6\%$?

Lösung: $a_0 \cdot (1+z_m)^{12} = a_0 \cdot (1+z)\,;\; z_m = \sqrt[12]{1+z} - 1 = 0{,}4868\%$



3. Den maximalen Überhang x_n von $n+1$ lose übereinander gestapelten gleichen Quadern (Länge a, Masse m) erhält man durch folgende Überlegung: Der gemeinsame Schwerpunkt der n oberen Quader liegt genau über der rechten Kante des $(n{+}1)$-ten Quaders. Sind s_1 und s_2 die x-Koordinaten der Schwerpunkte von zwei Körpern der Massen m_1 und m_2, dann ist die x-Koordinate des gemeinsamen Schwerpunkts der beiden Körper

$$s = \frac{m_1\,s_1 + m_2\,s_2}{m_1 + m_2}$$

(a) Beweisen Sie: $x_n = \frac{a}{2} \cdot h_n$ mit $h_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}$

h_n heißt **harmonische Reihe**.

(b) Die harmonische Reihe kann für $n = 2^r$ auf folgende Art geschrieben werden:

$$h_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{c_1} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{c_2} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{c_3} + \ldots.. = 1 + \sum_{k=1}^{r} c_k$$

mit den Teilsummen $c_k = \sum_{\nu=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{\nu}$. Beweisen Sie die Ungleichung $c_k \geq \frac{1}{2}$

und leiten Sie daraus eine Ungleichung für h_n ab! Welche Konsequenz hat diese Ungleichung für den maximalen Überhang x_n, wenn n immer größer gewählt wird? Für welches n zum Beispiel ist x_n **sicher** größer als $50\,a$?

(c) Berechnen Sie x_{10}! Ab welchem n ist $x_n > 2\,a$?

Lösung: (a) $x_{n+1} = \dfrac{n \cdot m \cdot x_n + m \cdot \left(x_n + \frac{a}{2}\right)}{(n+1)\,m} = x_n + \dfrac{a}{2\,(n+1)}$ und $x_1 = \dfrac{a}{2}$:

$$x_2 = x_1 + \frac{a}{4} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\ ,\ x_3 = x_2 + \frac{a}{6} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \text{ u.s.w.}$$

(b) $c_k \geq \dfrac{2^k}{2} \cdot \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1}{2}$, $x_{2^r} \geq \dfrac{a}{2}\left(1 + \dfrac{r}{2}\right) \to \infty$ wenn $n = 2^r \to \infty$

$$x_{2^r} \geq \frac{a}{2}\left(1 + \frac{r}{2}\right) > 50\,a \implies r > 198 \implies n > 2^{198} = 4{,}017 \cdot 10^{59}$$

(c) $x_{10} = 1{,}464 \cdot a$, $x_{30} = 1{,}997 \cdot a$, $x_{31} = 2{,}014 \cdot a$; ab $n = 31$

4. Ein Gummiball fällt zur Zeit $\tau = 0$ aus der Höhe h_1 auf den Boden und erreicht bei jedem Sprung 81% seiner vorhergehenden Höhe. Die Zeitdauer für den Fall aus der Höhe h_ν bzw. für den Sprung vom Boden bis zur Höhe h_ν ist $t_\nu = \sqrt{\frac{2\,h_\nu}{g}}$ mit $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

   (a) Zeigen Sie, dass die Folgen h_ν bzw. t_ν geometrisch sind und geben Sie jeweils den Quotienten an!

   (b) Der Zeitpunkt des n-ten Aufpralls auf dem Boden sei τ_n, der gesamte vom Ball zurückgelegte Weg bis zum n-ten Aufprall sei s_n. Drücken Sie s_n durch h_1 und τ_n durch t_1 aus! Welche Werte können von s_n bzw. τ_n nie überschritten werden, auch wenn n noch so groß wird?

   (c) Berechnen Sie s_n und τ_n für $h_1 = 1\,\mathrm{m}$ und $n \in \{10; 20; 100; 1000\}$! An welche Grenzwerte nähern sich h_n und τ_n an, wenn n immer größer wird?

Lösung: (a) $h_{\nu+1} = 0{,}81\,h_\nu$; $h_\nu = h_1 \cdot 0{,}81^{\nu-1}$, $t_\nu = \sqrt{\dfrac{2}{g}} \cdot \sqrt{h_\nu} = t_1 \cdot 0{,}9^{\nu-1}$

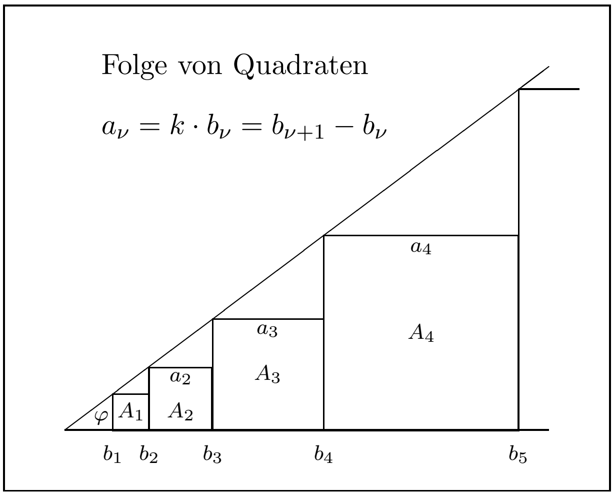
(b) $s_n = 2 \cdot \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu - h_1 = h_1 \cdot \left(2 \cdot \frac{1 - 0{,}81^n}{0{,}19} - 1\right) < \frac{181}{19}\,h_1$

$$\tau_n = 2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} t_\nu - t_1 = t_1 \cdot [20\,(1 - 0{,}9^n) - 1] < 19\,t_1$$

(c)

n	10	20	100	1000	∞
s_n in m	8,247	9,371	9,526	9,526	9,526
τ_n in s	5,430	7,481	8,5787	8,5789	8,5789

5. Nebenstehende Abbildung zeigt eine Folge von Quadraten mit den Kantenlängen a_ν und den Flächeninhalten A_ν. Die Quadrate werden von zwei Geraden eingeschlossen, die sich unter dem Winkel φ schneiden. Mit F_n bezeichnen wir die Gesamtfläche der ersten n Quadrate, mit U_n den Umfang der von den ersten n Quadraten gebildeten, treppenartigen Figur.



   (a) Zeigen Sie, dass die Folgen der b_ν, a_ν und A_ν geometrisch sind und berechnen Sie die Quotienten der drei Folgen in Abhängigkeit von k (siehe Abbildung)!

   (b) Drücken Sie F_n und U_n durch a_1 und k aus!

   (c) Berechnen Sie F_{50} und U_{50} für $a_1 = 1\,\text{cm}$ und $\varphi = 45°$! Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der Oberfläche und dem Umfang der Erde (Erdradius: $R = 6370\,\text{km}$)!

   (d) Lösen Sie Teilaufgabe (c) für $\varphi = 30°$!

Lösung: (a) $b_{\nu+1} = b_\nu \cdot (1+k)\ ,\ a_{\nu+1} = a_\nu \cdot (1+k)\ ,\ A_{\nu+1} = A_\nu \cdot (1+k)^2$

(b) $$F_n = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu = a_1^2 \cdot \frac{(1+k)^{2n} - 1}{(1+k)^2 - 1}$$

$$U_n = 2 \cdot (b_{n+1} - b_1) + 2\,a_n = 2\,a_1 \cdot \left(\frac{(1+k)^n - 1}{k} + (1+k)^{n-1} \right)$$

(c) $k = \tan 45° = 1\ ,\ F_{50} = 4{,}23 \cdot 10^{19}\,\text{km}^2 = 8{,}29 \cdot 10^{10} \cdot A_{\text{Erde}}$
$U_{50} = 3{,}38 \cdot 10^{10}\,\text{km} = 8{,}44 \cdot 10^5 \cdot U_{Erde}$

(d) $k = \tan 30° = 0{,}577\ ,\ F_{50} = 4{,}17 \cdot 10^9\,\text{km}^2 = 8{,}18 \cdot A_{\text{Erde}}$
$U_{50} = 3{,}73 \cdot 10^5\,\text{km} = 9{,}32 \cdot U_{Erde}$

6. Setzt man beim Roulette auf einfache Chancen (z.B. rot-schwarz), dann erhält man bei einem Treffer den doppelten Einsatz zurück, d.h. der Gewinn ist gleich dem Einsatz. Beim **Martingale-System** verdoppelt man nach jedem verlorenen Spiel den Einsatz. Den Einsatz im ersten Spiel einer Verlust-Verlust-... -Gewinn-Serie bezeichnen wir mit a_1.

   (a) Welchen Gewinn G erzielt man in einer Spielserie, bei der man n-mal hintereinander verliert und das $(n+1)$-te Spiel gewinnt?

   (b) Wieviel Geld muss man dabei haben, wenn man bei $a_0 = 100\,€$ siebenmal hintereinander verliert und das Spiel trotzdem fortsetzen möchte?

(c) Lösen Sie die Teilaufgaben (a) und (b) für ein Vervierfachen des Einsatzes nach jedem Verlust!

Warnung!! Mit dem Martingale-System kann man auf Dauer nicht gewinnen, da die Spielbanken Höchsteinsätze festlegen. Man kann zwar viele kleine Gewinne erzielen, aber es kommt unweigerlich der Augenblick, bei dem man wegen des Höchsteinsatzes nicht mehr verdoppeln kann und auf einen Schlag viel verliert! Die Gewinnquoten sowie die Mindest- und Höchsteinsätze sind so aufeinander abgestimmt, dass man auf lange Zeit gesehen immer verliert, ganz gleich nach welchem System man spielt!

Lösung: (a) Einsatz beim k-ten Spiel: $a_k = a_1 \cdot 2^{k-1}$

$$G = a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1$$

(b) $a_1 \cdot \sum_{k=1}^{8} 2^{k-1} = 25\,500\,€$

(c) Einsatz beim k-ten Spiel: $a_k = a_1 \cdot 4^{k-1}$

$$G = a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot \frac{2 \cdot 4^n + 1}{3}$$

$$a_1 \cdot \sum_{k=1}^{8} 4^{k-1} = 2\,184\,500\,€$$

12. Potenzfunktionen

12.1. Eigenschaften und Klassifikation von Potenzfunktionen

1. Ordnen Sie ohne Benutzung des Taschenrechners folgende Potenzen der Größe nach, mit kurzer Begründung:

$$0{,}25^{2{,}8};\ 5^{-3{,}1};\ 4^{-3{,}1};\ 5^{-4{,}1}$$

Lösung: $5^{-4{,}1} < 5^{-3{,}1} < 4^{-3{,}1} < 0{,}25^{2{,}8}$

2. Gegeben sei die Potenzfunktion $x \longmapsto a \cdot x^b$ mit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{Z}$. Welche Aussagen können Sie jeweils über a und b treffen, wenn
   - (a) der Graph der Funktion durch den Punkt $(1|7)$ verläuft und symmetrisch zur y-Achse ist?
   - (b) der Graph der Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist und die x-Achse Asymptote des Funktionsgraphen ist?
   - (c) der Graph der Funktion im I. Quadranten monoton fallend und im II. Quadranten monoton steigend ist?
   - (d) der Graph der Funktion im I. Quadranten monoton steigend und im II. Quadranten monoton fallend ist?
   - (e) der Graph der Funktion im I. und im III. Quadranten monoton steigend ist?
   - (f) der Graph der Funktion im I. und im III. Quadranten monoton fallend ist?

Lösung: (a) $a = 7$; $b \in \mathbb{Z}$, b gerade
(b) $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{Z}$, $b < 0$ und ungerade
(c) $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{Z}$, $b < 0$ und gerade
(d) $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{N}$, b gerade
(e) $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{N}$, b ungerade
(f) $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{Z}$, $b < 0$ und ungerade

3. Gegeben ist die Funktion $x \longmapsto a \cdot x^{\frac{1}{b}}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich in Abhängigkeit von b an!

(b) Der Graph der Funktion verläuft durch den Punkt $P(1|5)$ und ist monoton steigend bzw. monoton fallend. Was können Sie jeweils über a und b aussagen?

Lösung: $D = \mathbb{R}_0^+$ falls $b > 0$; $D = \mathbb{R}^+$ falls $b < 0$
$a = 5$; $b > 0$ bzw. $b < 0$

4. Untersuchen Sie auf Symmetrie und Monotonie:
$f:\ x \longmapsto x^{3n+1} \qquad n \in \mathbb{N},\ D_f = \mathbb{R}$

Lösung: f gerade (ungerade) für ungerades (gerades) n;
f streng monoton steigend für gerades n;
f streng monoton fallend in $\mathbb{R}^-$ und streng monoton steigend in $\mathbb{R}^+$ für ungerades n

5. Untersuchen Sie die Funktion

$$f : x \longmapsto x^{2z} \qquad z \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \quad D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

in Abhängigkeit von z auf Symmetrie und Monotonie.

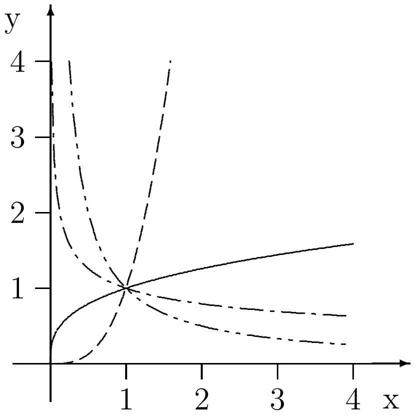
Lösung: f ist gerade für alle $z \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$
$z > 0$: streng monoton fallend auf $\mathbb{R}^-$; streng monoton steigend auf $\mathbb{R}^+$
$z < 0$: streng monoton steigend auf $\mathbb{R}^-$; streng monoton fallend auf $\mathbb{R}^+$

6. Im vorliegenden Koordinatensystem sind die Graphen der Funktionen $x \mapsto x^{-1}$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^{-\frac{1}{3}}$ und $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ gezeichnet.

(a) Welcher Graph gehört zu welcher Funktion? Beschriften Sie die Graphen entsprechend.

(b) Welche der vier Funktionen sind Umkehrfunktionen zueinander? Wie erkennt man das an den Graphen?

(c) Skizzieren Sie in dieses Koordinatensystem den Graphen der Funktion $x \mapsto x^{-3}$ <u>ohne</u> eine Wertetabelle zu erstellen.
Begründen Sie Ihr Vorgehen!



Lösung:

12.2. Funktionsterme, Graphen, Umkehrfunktionen

1. Gegeben ist die Funktion $f : x \longmapsto x^{-2}$
   (a) Fertigen Sie eine sorgfältige Zeichnung des Graphen dieser Funktion an. (Einheit 1 cm auf beiden Achsen, mindestens 4 Punkte pro Kurvenast.)
   (b) Berechnen Sie die x-Werte, für die der Funktionswert kleiner als $\frac{1}{2}$ ist?
   (c) Berechnen Sie die x-Werte, für die der Funktionswert größer als 1 ist?

Lösung: (b) $x < -\sqrt{2}$ oder $\sqrt{2} < x$ (c) $-1 < x < 0$ oder $0 < x < 1$

2. Gegeben sei die Funktion $f : x \longmapsto \frac{1}{10}x^{-3} + 2$
   (a) Übertragen Sie die folgende Wertetabelle auf Ihr Arbeitsblatt und berechnen Sie die fehlenden y-Werte:

x	-3	-1	$-0{,}5$	$-0{,}3$	$-0{,}2$
y					

   (b) Zeichnen Sie den Graphen mit Hilfe der in (a) berechneten Werte. (1 Längeneinheit = 1 cm)
   (c) Berechnen Sie die fehlende Koordinate des Punktes $Q(\,?\,|-2{,}45)$ so, dass er auf dem Graphen liegt (3 geltende Ziffern).

Lösung: (a) 2,0; 1,9; 1,2; –1,7; –10,5 (c) –0,282

3. Gegeben sind die Funktionen $f : x \longmapsto \frac{1}{3} \cdot x^2$ mit $D_f = \mathbb{R}$ und $g : x \longmapsto -3 \cdot x^{-1}$ mit $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   (a) Legen Sie jeweils für $x = 1{,}2, 3{,}4$ eine Wertetabelle an und zeichnen Sie ohne weitere Rechnung die Graphen beider Funktionen im Intervall $[-4; 4]$ in ein Koordinatensystem (Längeneinheit: 1 cm) ein. Welche Eigenschaften der Funktionen f und g verwenden Sie dabei?
   (b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S beider Funktionsgraphen!

Lösung: (a): Symmetrieeigenschaften; (b): $S\left(-3^{\frac{2}{3}} \mid 3^{\frac{1}{3}}\right)$

4. (a) Bestimmen Sie c und n so, dass die Punkte $P(-1|-0{,}5)$ und $Q(2|4)$ auf dem Graphen der Funktion $f(x) = c \cdot x^n$ liegen.
   (b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ für $-2{,}5 \leq x \leq 2{,}5$ in ein Koordinatensystem (Schrittweite für die x-Koordinaten der Punkte: 0,5).
   (c) Spiegeln Sie den Graphen an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten und geben Sie für $x \geq 0$ die Funktion an, die zum gespiegelten Graph gehört.

(d) Geben Sie für $x \leq 0$ die Funktion an, die zum gespiegelten Graph gehört.

Lösung: (a) $c = 0{,}5$; $n = 3$

5. Skizzieren Sie die Graphen folgender Potenzfunktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem:

$f_1: \quad x \longmapsto -x^3$

$f_2: \quad x \longmapsto (x+3)^4 - 2$

$f_3: \quad x \longmapsto -(x-4)^3 + 1$

und geben Sie jeweils deren Definitions- und Wertemenge an!

Lösung: $D_{f_1} = D_{f_2} = D_{f_3} = \mathbb{R}$; $\qquad W_{f_1} = \mathbb{R};\ W_{f_2} = [-2;\infty[;\ W_{f_3} =]-\infty;\infty]$

6. Gegeben ist die Funktion f: $x \mapsto 7 \cdot x^{-\frac{2}{5}}$.
   (a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich an!
   (b) Geben Sie die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion g dieser Funktion an!
   (c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S von f und g!

Lösung: a) $D = \mathbb{R}^+$ b) $y = (\frac{1}{7}x)^{-\frac{5}{2}}$ c) $S(\sqrt[7]{7^5}|\sqrt[7]{7^5})$

7. Gegeben ist die Funktion f: $x \mapsto (3x)^{\frac{3}{5}}$.
   (a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich an!
   (b) Für welche x-Werte sind die Funktionswerte kleiner bzw. größer als die x-Werte?
   (c) Geben Sie die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion g dieser Funktion an!

Lösung: a) $D = \mathbb{R}_0^+$ b) kleiner für $x > \sqrt{27}$, größer für $0 < x < \sqrt{27}$ c) $y = \frac{1}{3}x^{\frac{5}{3}}$

8. Gegeben sind die beiden Potenzfunktionen

$f_1:\ x \longmapsto a \cdot x^{-\frac{2}{3}} - 1$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus 0$ sowie $f_2:\ x \longmapsto x^{-\frac{4}{3}} - 5$

jeweils mit maximaler Definitionsmenge.
   (a) Geben Sie für f_1 und f_2 jeweils Definitions- und Wertemenge ohne Begründung an!
   (b) Geben Sie für die Funktion f_2 die Funktionswerte für $x = \frac{1}{3}$; 3; 5; 7 auf 2 Dezimalen gerundet an und zeichnen Sie dann den Graphen von f_2 in ein Koordinatensystem ein!

(c) Bestimmen Sie für die Funktion f_1 den Wert von a so, dass der Punkt $P(8|-0{,}25)$ auf dem Graphen liegt!

Ab jetzt sei $a = 3$ gesetzt!

(d) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Funktionsgraphen!

Lösung: (a) $D_{f_1} = \mathbb{R}^+$; $W_{f_1} =]-\infty; -1[$ falls $a < 0$; $W_{f_1} =]-1; \infty[$ falls $a > 0$;
$D_{f_2} = \mathbb{R}^+$; $W_{f_2} =]-5; \infty[$
(b) $-0{,}67$; $-4{,}77$; $-4{,}88$; $-4{,}93$
(c) $a = 3$
(d) $S\left(\frac{1}{8}|11\right)$

9. Gegeben sind die beiden Potenzfunktionen $p_1 : x \longmapsto x^{-\frac{2}{3}}$ und $p_2 : x \longmapsto x^{\frac{2}{3}}$ jeweils mit der Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$.

(a) Erstellen Sie für $x = \frac{1}{4}, 1{,}3, 8$ eine Wertetabelle für beide Funktionen und zeichnen Sie dann die Graphen in ein Koordinatensystem ein!
(Längeneinheit: 1 cm)

Nun werden die Funktionen $f_1 : x \longmapsto x^{-\frac{2}{3}} - 2$ und $f_2 : x \longmapsto 2 \cdot x^{\frac{2}{3}} - 1$ jeweils mit der Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$ betrachtet.

(b) Zeichnen Sie unter Beachtung von Teilaufgabe a) die Graphen der Funktionen f_1 und f_2 in ein neues Koordinatensystem ein! (Längeneinheit: 1 cm)

(c) Geben Sie die Wertemengen beider Funktionen an!

(d) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Graphen von f_1 und f_2!

Lösung: (c) $W_{f_1} =]-2; \infty[$; $W_{f_2} =]-1; \infty[$
(d) Substitution, quadratische Gleichung; $S\left(2^{-1{,}5} \mid 0\right)$

10. Gegeben ist die Funktion f: $x \mapsto 3 \cdot x^{-\frac{2}{3}}$.

(a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich an!

(b) Die Punkte $P(8|y_P)$ und $Q(x_Q|6)$ liegen auf dem Graphen dieser Funktion. Bestimmen Sie y_P und x_Q zunächst exakt und dann auf eine Dezimale gerundet.

(c) Für welche x-Werte sind die Funktionswerte kleiner bzw. größer als die x-Werte?

(d) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f mit Hilfe der Ergebnisse aus a), b) und c) ohne weitere Werte zu berechnen!

(e) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion g und skizzieren Sie deren Graphen in obiges Koordinatensystem ohne eine Wertetabelle zu erstellen!

Lösung: a) $D = \mathbb{R}^+$
b) $y_P = 0{,}75 \approx 0{,}8$; $x_Q = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}4$
c) kleiner für $x > \sqrt[5]{27}$, größer für $0 < x < \sqrt[5]{27}$
e) $y = (\frac{1}{3}x)^{-\frac{3}{2}}$

11. Gegeben ist die Funktion $y = a \cdot x^{-\frac{3}{2}} + b\,, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ mit maximaler Definitionsmenge.
    (a) Bestimmen Sie Definitionsmenge und Wertemenge dieser Funktion!
    (b) Bestimmen Sie a und b so, dass die Punkte $P(1|-1)$ und $Q(4|-2{,}75)$ auf dem Graphen liegen!

    Nun sei $y = 2 \cdot x^{-\frac{3}{2}} - 3$.

    (c) Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion! (Längeneinheit: 1 cm)
    (d) Dieser Graph wird nun an der x-Achse gespiegelt. Wie lautet die Funktionsgleichung des gespiegelten Graphen?

Lösung: (a) $a > 0: \; D = \mathbb{R}^+, \; W =]b; \infty[; \qquad a < 0: \; D = \mathbb{R}^+, \; W =]-\infty; b[$
(b) $a = 2; \; b = -3$
(d) $y = -2x^{-\frac{3}{2}} + 3$

12. Bestimmen Sie mit Hilfe einer sauberen und übersichtlichen Zeichnung (ein Koordinatensystem genügt!) die Zahl der Lösungen folgender Gleichung über $G = \mathbb{R}$:

$$\sqrt[3]{x+2} = \frac{1}{x^2} - 1$$

Lösung: $|L| = 2$

12.3. Potenzfunktionen in Anwendungen

1. Aus einem Drahtstück der Gesamtlänge L soll ein Kantenmodell eines Würfels vom Volumen V hergestellt werden.
    (a) Stellen Sie die Länge L in Abhängigkeit vom Volumen V dar.
    (b) Um welchen Faktor vergrößert sich die Länge, wenn man das Volumen verdoppelt?

Lösung: $L = 12\sqrt[3]{V}$, $\sqrt[3]{2}$

2. Ein Würfel habe die Kantenlänge $2a$.
   (a) Geben Sie die Funktionsgleichung der Funktion an, die jedem a das Volumen des entsprechenden Würfels zuordnet.
   Zeichnen Sie den zugehörigen Graphen für $0 \leq a \leq 1$ in ein Koordinatensystem. (Einheit auf der a-Achse: 10 cm; Einheit auf der V-Achse: 1 cm)

   (b) Geben Sie die Funktionsgleichung der Funktion an, die dem Radius a einer Kugel das Volumen dieser Kugel zuordnet. Zeichnen Sie den zugehörigen Graphen in dasselbe Koordinatensystem.

   (c) Vergleichen Sie für gleiches a das Volumen des Würfels mit dem der Kugel! Deuten Sie Ihr Ergebnis anschaulich!

   (d) Entnehmen Sie der graphischen Darstellung, wie groß der Radius einer Kugel ist, deren Volumen gleich dem Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge 1 m ist.

Lösung: (a) $V_W(a) = 8a^3$; (b) $V_K(a) = \frac{4}{3}a^3\pi$; (c) $V_K(a) < V_W(a)$; (d) $a \approx 0{,}62m$

13. Exponential- und Logarithmusfunktionen

13.1. Exponentialfunktionen

13.1.1. Exponentialfunktionen - Eigenschaften und Graphen

1. **Taschengeld**

   Peter startet in wenigen Tagen zu einer zweiwöchigen Klassenfahrt. Seine Eltern möchten ihm nach folgendem Plan Taschengeld mitgeben:
   Für den ersten Tag 3 Euro, dann täglich 2 Euro mehr als am Tag vorher. Peter überlegt kurz und macht einen scheinbar bescheidenen Gegenvorschlag: Für den ersten Tag 3 Cent, dann täglich den doppelten Betrag des Vortages.
   Was meinst du dazu?

2. **Eigenschaften der Logarithmusfunktion**

   Logarithmusfunktionen sind Funktionen der Form $f(x) = \log_b x$ mit $x \in$ .... und $b \in$ .... d.h. die Logarithmusfunktion ist nur für .... x-Werte definiert: $D =$ ....

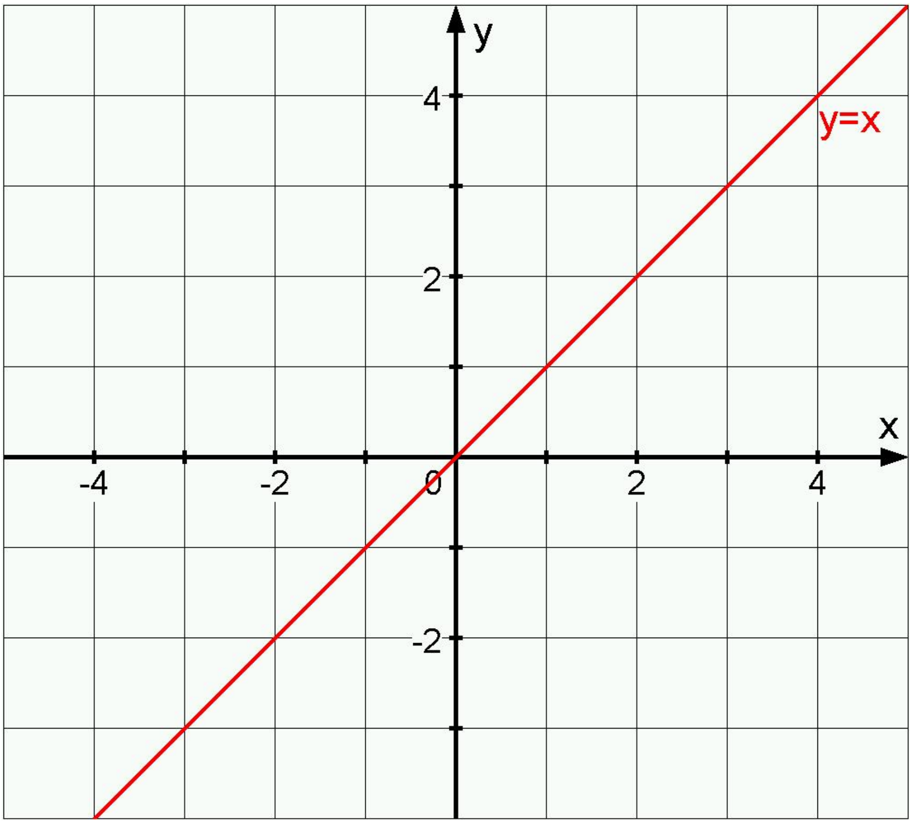
   (a) $\log_b x$ ist diejenige reelle Zahl, mit der man b potenzieren muss, um x zu erhalten. Damit ist die Logarithmusfunktion die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.
   Also gilt für den Wertebereich: $W =$ ....

   (b) Die Graphen der Logarithmusfunktionen $f(x) = \log_b x$ mit $b > 0$ gehen alle durch die Punkte $P_1 = (....; ....)$ und $P_2 = (....; ....)$.

   (c) Die Graphen der Logarithmusfunktionen $f(x) = \log_b x$

   - mit .... sind streng monoton ....;
   - mit .... sind streng monoton fallend.

   (d) Der Graph der Logarithmusfunktion $f(x) = \log_b x$ mit $b > 0$ hat die .... - Achse als Asymptote.



Zeichne hier die Graphen von $f(x) = 2^x$ und $g(x) = \log_2 x$

(e) Für das Rechnen mit Logarithmen gelten die folgenden Regeln $(u, v, a > 0;\ a \neq 1)$:

  i. $\log_b(u \cdot v) =$ ....

  ii. $\log_b(\frac{u}{v}) =$ ....

  iii. $\log_b(u^r) =$ ....

(f) Beispiele für Anwendungen der Logarithmusfunktion in der Realität sind:

(g) Was ich sonst noch wichtig finde:

3. Nach der Reiskornlegende durfte der Erfinder des Schachspiels an den indischen Herrscher Shihram, den das Spiel sehr erfreute, einen Wunsch richten. Er wünschte sich, dass auf das erste Feld ein Reiskorn gelegt wird, auf das zweite doppelt so viele Reiskörner wie auf das erste, auf das dritte doppelt so viele wie auf das zweite usw. Zunächst lächelte der Herrscher über die Bescheidenheit dieses Wunsches, etwas später wurde er sehr zornig.

   (a) Vervollständige die nachstehende Tabelle:

Feld–	Körner auf Feld		Körner auf Brett	
nummer	als Zahl	als 2–er Potenz	als Zahl	mit 2–er Potenz geschrieben
1				
2				
3				
4				
5				
6				
...	...	...	...	...
63				
64				

   (b) Reis hat eine Dichte von etwa 1,39 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Zwanzig Reiskörner haben etwa eine Masse von 1 Gramm.

   Der vierachsige Güterwaggon UIC 571–2 hat eine Länge über Puffer von 16,52 m und einen Laderaum vom Volumen 105 m^3.

   Wie lang müsste ein Zug bestehend aus solchen Waggons sein, damit man den gesamten Reis, der sich auf dem Schachbrett befindet, transportieren kann? Die Länge der Lok darfst du vernachlässigen (eventuell wird eine Lok zum Ziehen dieser Waggons nicht ausreichen).

   (c) Wie lange müsstest du an einem beschrankten Bahnübergang warten, bis der Zug vorbeigefahren ist, wenn du annimmst, dass der Zug mit einer konstanten Geschwindigkeit von 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt?

Lösung: (a) Vervollständige die nachstehende Tabelle:

Feld–	Körner auf Feld		Körner auf Brett	
nummer	als Zahl	als 2–er Potenz	Zahl	mit einer 2–er Potenz geschrieben
1	1	2^0	1	$2^1 - 1$
2	2	2^1	3	$2^2 - 1$
3	4	2^2	7	$2^3 - 1$
4	8	2^3	15	$2^4 - 1$
5	16	2^4	31	$2^5 - 1$
6	32	2^5	63	$2^6 - 1$
...	...	...	...	...
63		2^{62}		$2^{63} - 1$
64		2^{63}		$2^{64} - 1$

(b) Es befinden sich $2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$ Reiskörner auf dem Schachbrett.

Diese haben eine Masse von etwa $m = 922\,337\,203\,685\,477\,\mathrm{kg}$.

Sie nehmen ein Volumen von $V = \frac{m}{\varrho} = \frac{922\,337\,203\,685\,477\,\mathrm{kg}}{1{,}39 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} \approx 663\,551\,945\,097\,\mathrm{m}^3$

Dafür brauchen wir $\frac{663\,551\,945\,097\,\mathrm{m}^3}{105\,\mathrm{m}^3} = 6\,319\,542\,334$ Waggons.

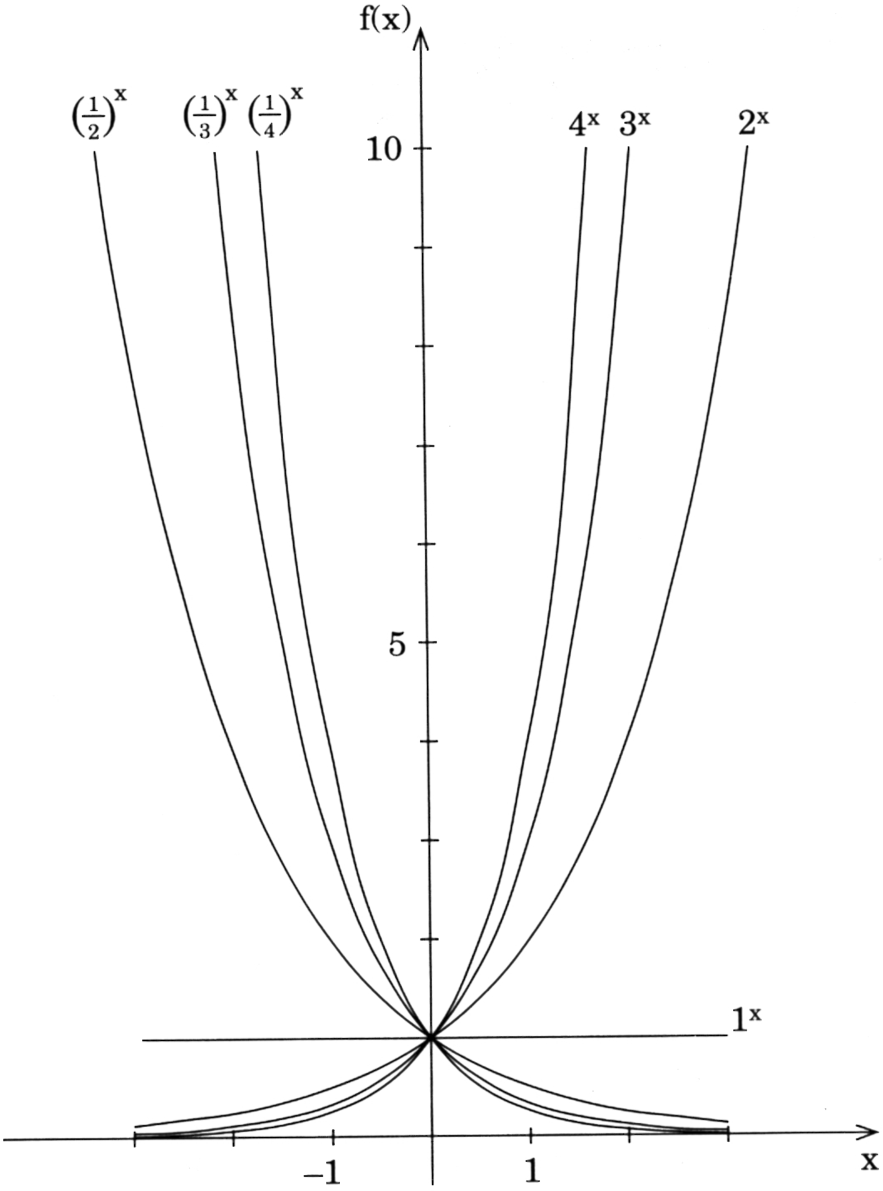
Diese haben eine Länge von $6\,319\,542\,334 \cdot 16{,}52\,\mathrm{m} \approx 104\,398\,839\,\mathrm{km}$.

In Worten: Etwa 104 Millionen Kilometer!

(c) Am Bahnübergang muss man $\frac{104\,398\,839\,\mathrm{km}}{100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} \approx 1\,043\,988\,\mathrm{h} \approx 119\,\mathrm{a}$ warten.

Hinweis: Die Ergebnisse wurden mit einem Computeralgebra–System über alle Maßen genau berechnet. Selbstverständlich können die Ergebnisse auch unter Verwendung von 10–er–Potenzen formuliert werden.

4. Deutungen der Koeffizienten der Exponentialfunktion



Graphen zu $f(x) = a^x$ für verschiedene Werte von a

Einige Graphen der Funktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ sind in der neben stehenden Abbildung dargestellt:

(a) Was fällt auf?

(b) Beweise die Vermutung!

(c) Jetzt sei $a = 2$.

Wie ändert sich der Graph, wenn c verändert wird? Quelle: mathematik lehren (1996), H. 75, S. 55-60

Lösung: (a) Es lassen sich eine Vielzahl von Eigenschaften angeben, u.a.:

- Spiegelt man den Graph von a^x an der y-Achse, so erhält man den Graph von $(\frac{1}{a})^x$
- Für $a > 1$ steigt der Graph
- Für $0 < a < 1$, fällt der Graph
- $1^x = 1$; der Graph ist eine Parallele zur x-Achse
- der Graph schneidet die x-Achse in $(0|1)$ bzw. in $(0|c)$
- die x-Achse ist Asymptote für Graphen mit $a \neq 1$

(b)

(c) $f(x) = c{\cdot}2^x$: $c > 1$ Streckung; $0 < c < 1$ Stauchung; $c < -1$ Streckung und Spiegelung an der x-Achse; $-1 < c < 0$ Stauchung und Spiegelung an der x-Achse

5. **Eigenschaften der Exponentialfunktion**

Exponentialfunktionen sind Funktionen der Form $f(x) = b^x$ mit $x \in$ .... und $b \in$ ...., d.h. für den Definitionsbereich gilt: $D =$ ....

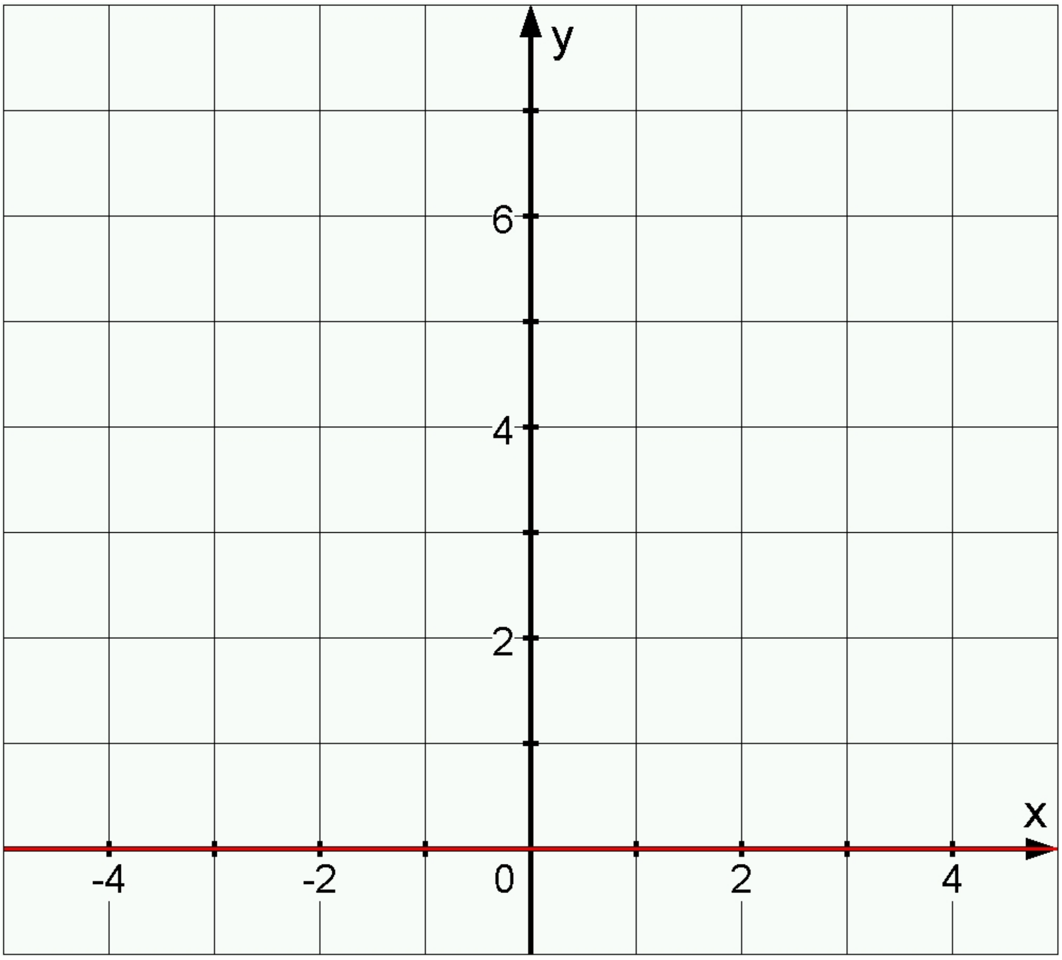
(a) Die Exponentialfunktion hat nur .... Funktionswerte y, d.h. für den Wertebereich gilt : $W =$ ....

(b) Die Graphen der Exponentialfunktionen $f(x) = b^x$ mit $b > 0$ gehen alle durch die Punkte $P_1(....; ....)$ und $P_2(....; ....)$.

(c) Die Graphen der Exponentialfunktionen $f(x) = b^x$

- mit .... sind streng monoton ....;
- mit .... sind streng monoton fallend;

(d) Der Graph der Exponentialfunktion $f(x) = b^x$ mit $b > 0$ hat die .... - Achse als Asymptote, das bedeutet ....



Zeichne hier die Graphen von $f(x) = 2^x$ und $g(x) = (\frac{1}{3})^x$

(e) Die charakteristische Eigenschaft von exponentiellem Wachstum ist:

(f) Beispiele für exponentielle Prozesse in der Realität sind:

(g) Was ich sonst noch wichtig finde:

Lösung:

6. **Eigenschaften der logarithmusfunktion**

   logarithmusfunktionen sind Funktionen der Form $f(x) = \log_b x$ mit $x \in$ .... und $b \in$ .... d.h. die logarithmusfunktion ist nur für .... x-Werte definiert: $D =$ ....

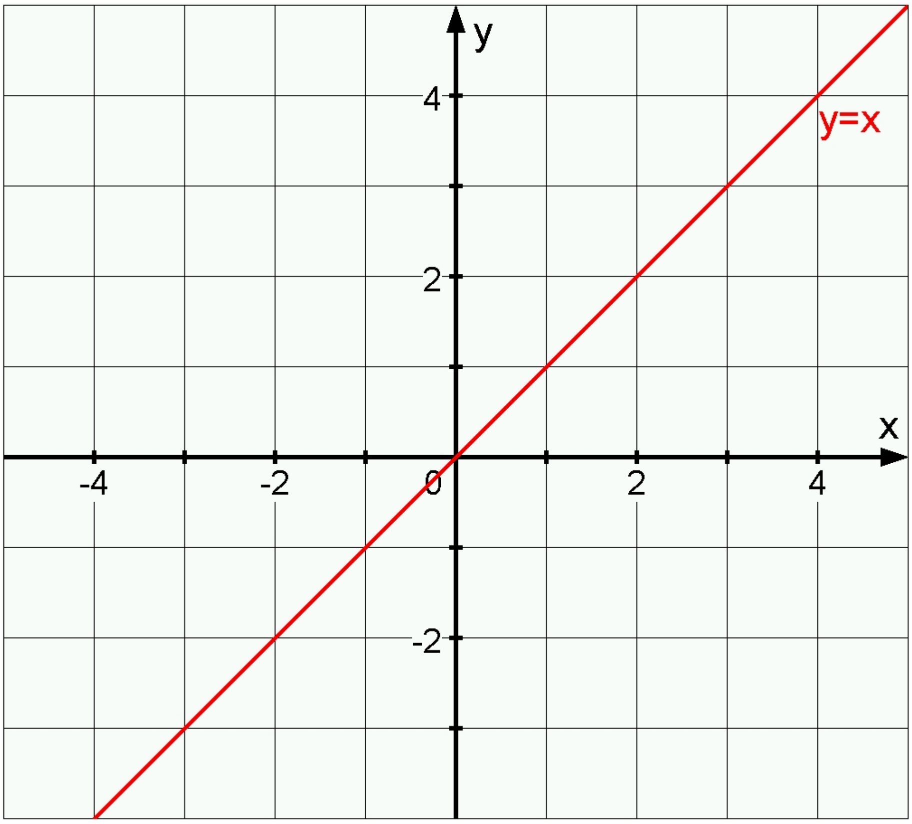
   (a) $\log_b x$ ist diejenige reelle Zahl, mit der man b potenzieren muss, um x zu erhalten. Damit ist die logarithmusfunktion die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Also gilt für den Wertebereich: $W =$ ....

   (b) Die Graphen der logarithmusfunktionen $f(x) = \log_b x$ mit $b > 0$ gehen alle durch die Punkte $P_1 =$ (....; ....) und $P_2 =$ (....; ....).

   (c) Die Graphen der logarithmusfunktionen $f(x) = \log_b x$

   - mit .... sind streng monoton ....;
   - mit .... sind streng monoton fallend.

   (d) Der Graph der logarithmusfunktion $f(x) = \log_b x$ mit $b > 0$ hat die .... - Achse als Asymptote.



Zeichne hier die Graphen von $f(x) = 2^x$ und $g(x) = \log_2 x$

(e) Für das Rechnen mit logarithmen gelten die folgenden Regeln $(u, v, a > 0;\ a \neq 1)$:

   i. $\log_b(u \cdot v) =$ ....

   ii. $\log_b(\frac{u}{v}) =$ ....

   iii. $\log_b(u^r) =$ ....

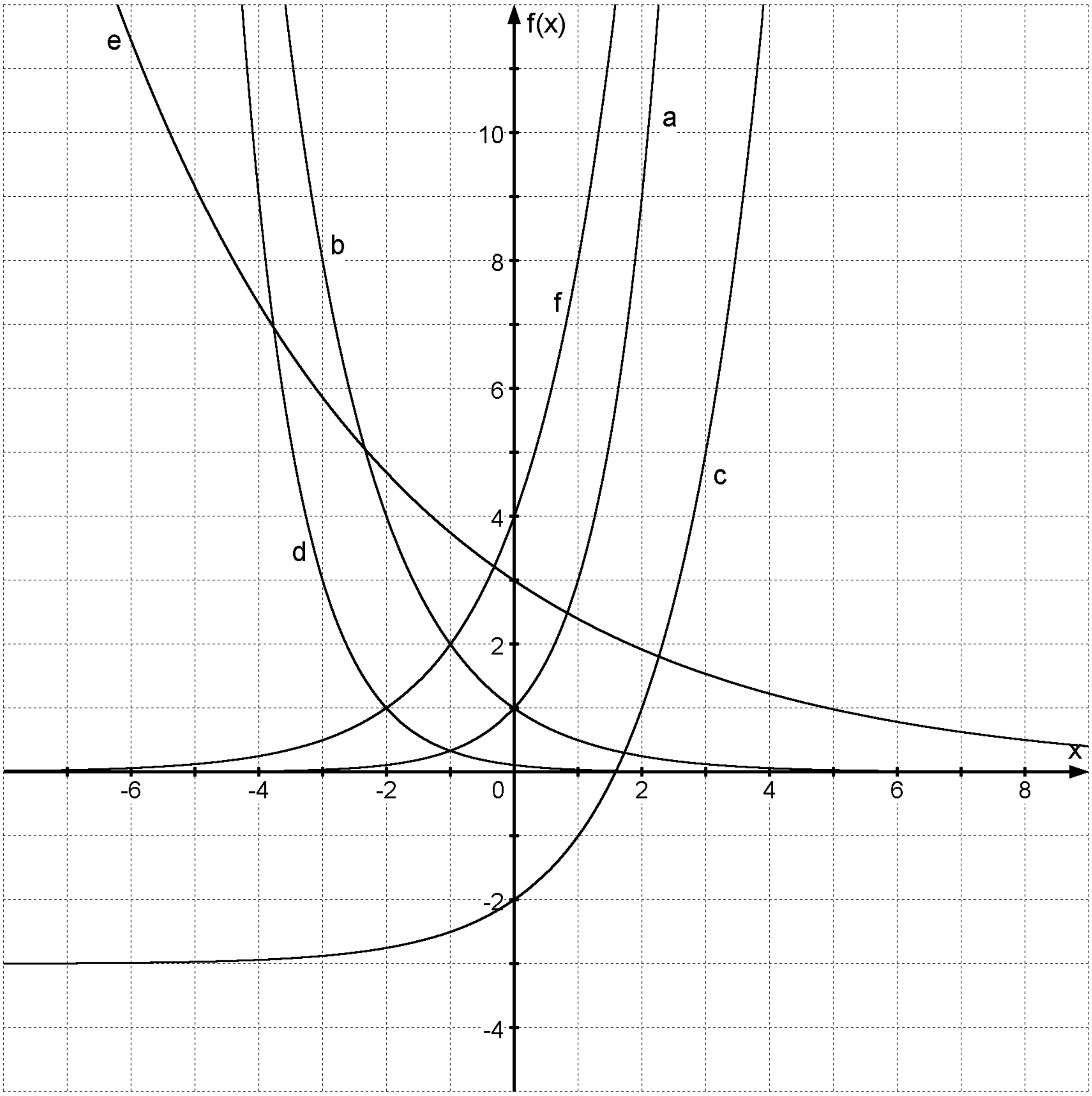
(f) Beispiele für Anwendungen der logarithmusfunktion in der Realität sind:

(g) Was ich sonst noch wichtig finde:

Lösung:

7. **Funktionsgleichungen bestimmen**

   Bestimme die Funktionsgleichungen zu den abgebildeten Graphen!



Lösung: (a) $f(x) = 3^x$

(b) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

(c) $f(x) = 2^x - 3$

(d) $f(x) = (\frac{1}{3})^{x+2}$ oder $f(x) = \frac{1}{9} \cdot (\frac{1}{3})^x$

(e) $f(x) = 3 \cdot 0,8^x$

(f) $f(x) = 4 \cdot 2^x$

8. Gegeben ist die Exponentialfunktion $f : x \longmapsto (\sqrt{\frac{1}{3}})^x$ $(x \in \mathbb{R})$.

   (a) Welche Funktion erhält man durch Spiegelung von G_f an der y-Achse?

   (b) Zeichnen Sie den Graphen G_f und finden Sie aus der Zeichnung eine Näherungslösung der Gleichung $(\sqrt{\frac{1}{3}})^x = 6$.

Lösung: $y = (\sqrt{\frac{1}{3}})^{-x}$, präziser Wert: $\frac{-2\lg 6}{\lg 3} \approx -3{,}26$

9. Gegeben ist die Exponentialfunktion $f : x \mapsto 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$

   (a) Geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich von f an!

   (b) Erstellen Sie eine Wertetabelle für f für ganzzahlige x mit $-3 \leq x \leq 3$ und zeichnen Sie damit den Graphen von f!

   (c) Wie erhält man aus dem Graphen von f den Graphen der Umkehrfunktion g von f? Zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion g in das Koordinatensystem von b) ein!

   (d) Bestimmen Sie durch Rechnung die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion! Geben Sie ihren Definitionsbereich und Wertebereich an!

Lösung:

10. (a) Erstellen Sie für die Funktion $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ eine Wertetabelle im x-Intervall $[-4; 3]$ und zeichnen Sie den Graphen von f in der Einheit 1 cm!

    (b) Wir betrachten jetzt die Funktion $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} - 3$. Schreiben Sie in Worten hin, wie man den Graphen von g aus dem Graphen von f erhält! Zeichnen Sie jetzt, ohne neue Werte zu berechnen, den Graphen von g in das schon vorhandene Koordinatensystem!

    (c) Für welches x gilt $g(x) = 0$? Die graphisch gewonnene Lösung soll durch Probieren mit dem Taschenrechner auf eine Genauigkeit von zwei Nachkommastellen verbessert werden!

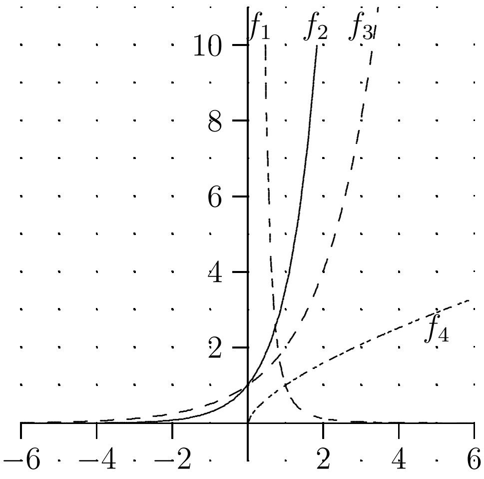
Lösung: (b) Verschiebung um 2 nach links und 3 nach unten. (c) $x \approx -4{,}71$

11. (a) Ordnen Sie den abgebildeten Funktionsgraphen jeweils eine der folgenden Funktionsgleichungen zu:

    a) $y = 2^x$ b) $y = x^{-3}$ c) $y = 3{,}5^x$
    d) $y = x^{\frac{2}{3}}$ e) $y = x^{\frac{3}{2}}$ f) $y = x^3$

    (b) Wie lautet die Umkehrfunktion zu f_4? Zeichnen Sie den Graphen ein.

    (c) Durch Spiegeln des Graphen von f_3 an der y-Achse erhält man einen neuen Funktionsgraphen. Geben Sie den Funktionsterm dazu an.



Lösung: (a) Es gehört f_3 zu a), f_2 zu c) (beide sind Exponentialfunktionen), f_1 gehört zu b) (Potenzfunktion mit neg. Exponenten) und f_4 zu d).

(b) $y = x^{\frac{3}{2}}$

(c) $y = 2^{-x}$

13.1.2. Exponentialgleichungen - Lösung ohne Logarithmen

Exponentialgleichungen - Lösung ohne Logarithmen

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge: $0{,}01^x = 100^{4x-1}$

Lösung: $L = \{\frac{1}{5}\}$

2. Lösen Sie folgende Gleichung:

$$3{,}375^x = 1{,}5^{3{,}375}$$

Lösung: $L = \{\frac{9}{8}\}$

3. Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge:

$$3^x - 4 \cdot 3^{x-2} = 15$$

Lösung: $D = \mathbb{R}$, $L = \{3\}$

4. Lösen Sie folgende Gleichung:

$$5^{4x} - 125 \cdot 5^{\frac{1}{x}} = 0$$

Lösung: $L = \{1; -\frac{1}{4}\}$

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$(7^x)^{2x-4} = (7^{x+4})^{x-2}$$

Lösung: Durch Exponentenvergleich: $L = \{2; 4\}$

6. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$(4^x)^{3x-1} \; - \; 8^{-5x-2} \; = \; 0$$

Lösung: $L = \left\{-\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}\right\}$

7. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$\left(81^{5x-4}\right)^x \; = \; 27^{2-3x}$$

Lösung: $L = \left\{\frac{3}{4}; -\frac{2}{5}\right\}$

8. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$(5^{2x})^{x-1} = (25^x)^2$$

Lösung: $L = \{0; 3\}$

9. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$4^{2x} \cdot 8^{x-4} - (32)^{5x} : 2^{\,x} = 0$$

Lösung: $L = \{-\frac{12}{17}\}$

10. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$(3^{2x})^{2x-1} : (27)^{x+1} - (81^{3x-7})^{x} \cdot 9^{-x} = 0$$

Lösung: $L = \{\frac{1}{8}; 3\}$

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$4^{3x+2} + 4^{3x-2} - 4^{3x-1} - 506 = 0$$

Lösung: $L = \{\frac{5}{6}\}$

2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$9^{x} + 4 \cdot 3^{2x-1} + 3 \cdot 3^{2x+1} = 34$$

Lösung: $L = \{\frac{1}{2}\}$

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$64^{2x-1} - 2^{x} \cdot 1024^{3x-2} = 0$$

Lösung: $L = \{\frac{14}{19}\}$

4. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$\frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} - 3 \cdot 3^{2x+1} = 9 \cdot 6^{2x}$$

Lösung: $L = \{\frac{1}{2}\}$

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$(9^x)^2 = 27^{2x+1} : 81^{-x}$$

Lösung: $L = \{-\frac{1}{2}\}$

6. Bestimmen Sie die Lösungsmenge: $81^{3x} - 3 \cdot 27^{4x-1} - 2 \cdot 9^{6x-1} \; = \; 2$

Lösung: $L = \{\frac{1}{12}\}$

7. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$\frac{5}{3^{2x-1}} - \frac{3^x}{27^{x-1}} + 108 = 0$$

Lösung: $L = \{-1\}$

8. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$3^{3x-1} - 3^{3x+2} + 3^{3x+3} = 165$$

Lösung: $L = \{\frac{2}{3}\}$

9. Lösen Sie folgende Exponentialgleichung über $G = \mathbb{R}$:

$$81^{\frac{x-1}{x+1}} \cdot 27^{\frac{x+1}{x-1}} = 3^{\frac{7x^2+1}{x^2-1}}$$

Lösung: $L = \{3\}$

10. Berechnen Sie die Lösungsmenge (mit Brüchen rechnen):

$$\left(5^{x-3}\right)^{x+3} = \frac{625^{2\,x^2}}{390625^{-6\,x+2}}$$

Lösung: $7\,x^2 + 48\,x = 7 \quad \Longrightarrow \quad L = \{\frac{1}{7}\,; -7\}$

11. Berechnen Sie die Lösungsmenge (mit Brüchen rechnen):

$$\left(7^{5-x}\right)^{5+x} = \frac{49^{4\,x^2}}{5764801^{-2-10\,x}}$$

Lösung: $9\,x^2 + 80\,x = 9 \quad \Longrightarrow \quad L = \{\frac{1}{9}\,;\,-9\}$

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$4^{2x+2} + 2^{4x+2} - 15 \cdot 4^x + \frac{5}{2} = 0$$

Lösung: $L = \{-0{,}5; -1\}$

2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$5 \cdot 25^x \;-\; 26 \cdot 5^x \;+\; 5 \;=\; 0$$

Lösung: $L = \{-1; 1\}$

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$3 \cdot 9^x \;-\; 26 \cdot 3^x \;-\; 9 \;=\; 0$$

Lösung: $L = \{2\}$

4. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$2^{x+3} \;-\; 2^{2-x} \;+\; 31 \;=\; 0$$

Lösung: $L = \{-3\}$

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung:

$$4^{x-2} + 4 \cdot 4^{2-x} = 5$$

Lösung: $L = \{2; 3\}$

6. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung:

$$5^{2x+2} + 3 \cdot 5^{x+2} - 16 = 0$$

Lösung: $L = \{-1\}$

7. Lösen Sie folgende Exponentialgleichung über $G = \mathbb{R}$:

$$3^{0{,}5-2x} - \sqrt{12} \cdot 9^x - 1 = 0$$

Lösung: $L = \{-0{,}25\}$

8. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$(2^x - 1)^2 - 8(2^x - 1) + 15 = 0$$

Lösung: $L = \{2; \log_2 6\}$

9. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$5^x - 1 - \frac{2}{5^x} = 0$$

Lösung: $L = \{\log_5 2\}$

1. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = 2^x$ im Intervall $[\,-2\,;\,2\,]$ und bestimmen Sie aus der Zeichnung die Lösung der Gleichung $2^x = -x$. Verbessern Sie den gefundenen Wert durch Probieren mit dem Taschenrechner auf fünf geltende Ziffern!

Lösung: $x = -0{,}64119$

2. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = x^x$ im Intervall $]\,0\,;\,2\,]$ und bestimmen Sie aus der Zeichnung die Lösung der Gleichung $x^x = 2$. Verbessern Sie den gefundenen Wert durch Probieren mit dem Taschenrechner auf fünf geltende Ziffern!

Lösung: $x = 1{,}5596$

Wachstums- und Abklingvorgänge

1. **Das Bevölkerungsgesetz von Thomas R. Malthus** (1766 – 1834)

   Im Jahre 1798 veröffentlichte der englische Philosoph Thomas R. Malthus sein „Essay on the Principles of Population“. Er vermutete, dass die Nahrungsmittelerzeugung dem rasanten Bevölkerungswachstum im Zuge der industriellen Revolution nicht würde folgen können, und prognostizierte permanente Hungersnöte, die wir heute in Entwicklungsländern z.T. beobachten können. Zur Begründung seiner Thesen entwickelte er einfache Modelle für das Wachstum von Populationen: die Bevölkerung wachse exponentiell, die zur Verfügung stehenden Nahrungsmittel jedoch nur linear. Mit seiner „Wachstumsfunktion“ $N = N_0 \cdot 1,0302^t$ gelang es Malthus, das Bevölkerungswachstum in den USA für die erste Hälfte des 19. Jahrhunderts gut zu beschreiben:

   THOMAS ROBERT MALTHUS (1766–1834)

Jahr	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860
N (in Mio.)	$N_0 = 3,9$	$5,3$	$7,2$	$9,6$	$12,9$	$17,1$	$23,2$	$31,4$

   (a) Vergleiche die Angaben aus Volkszählungen mit den „theoretischen“ Werten der Wachstumsfunktion.

   (b) Aus späteren Volkszählungen sind folgende Anzahlen bekannt:

Jahr	1880	1900	1930	1970
N (in Mio.)	$50,2$	$76,0$	$123,2$	$203,2$

Überprüfe, ob die Wachstumsfunktion noch sinnvoll ist. Begründe!

(c) Betrachtet wird eine Bevölkerung, die zu Beginn eines bestimmten Jahres aus 1 Million Personen besteht und jährlich um 3% wächst. Zum gleichen Zeitpunkt wären Nahrungsmittel für 2 Millionen Personen verfügbar, wobei die Produktion der Nahrungsmittel für jährlich 100000 Personen gesteigert werden könnte. Untersuche diese Entwicklung (mithilfe einer Tabellenkalkulation). In welchem Jahr übersteigt die Anzahl der Personen die zur Verfügung stehenden Mittel?

Quelle: Abakus 10 (1995), Schöningh

Lösung: (a)

$3,9$	$5,3$	$7,1$	$9,5$	$12,8$	$17,3$	$23,2$	$31,3$

(b)

$56,8$	$102,9$	$251,2$	$825,9$

Gründe für die schlechte Passung: Weltkriege und Rezessionen führen zu einem veränderten Fortpflanzungsverhalten

(c) $f(t) = 1.000.000 \cdot 1,03^t$ und $g(t) = 100.000t + 2.000.000$

t	0	1	2	3	4	5	...	75	76	77	78
$f(t)$ in Mio	1	$1,03$	$1,06$	$1,09$	$1,13$	$1,16$		$9,2$	$9,5$	$9,7$	$10,0$
$g(t)$ in Mio	2	$2,1$	$2,2$	$2,3$	$2,4$	$2,5$		$9,5$	$9,6$	$9,7$	$9,8$

Tabellarische Darstellung ist auch im Sinne einer systematischen Einschachtelung möglich. Ansatzweise Termumformung: $1.000.000 \cdot 1,03^t = 2.000.000 + 100.000t \Leftrightarrow 1,03^t - 0,1t = 2$. Hier ist der Tippaufwand geringer als oben und die Lösung schneller erreichbar: $76 < t < 77$.

2. **Exponentielle Prozesse**

Um die Funktion der Bauchspeicheldrüse zu testen, wird ein bestimmter Farbstoff in sie eingespritzt und dessen Ausscheiden gemessen. Eine gesunde Bauchspeicheldrüse scheidet pro Minute 4% des jeweils noch vorhandenen Farbstoffs aus.
Bei einer Untersuchung wird einem Patienten $0,2$ Gramm des Farbstoffes injiziert. Nach 30 Minuten sind noch $0,09$ Gramm des Farbstoffes in seiner Bauchspeicheldrüse vorhanden.
Funktioniert seine Bauchspeicheldrüse normal?

Lösung: Nein, da nur noch $0,06\,\mathrm{g}$ vorhanden sein dürfen.

3. **Exponentielle Prozesse**

Ein Ball fällt aus $2\,\mathrm{m}$ Höhe auf eine feste Unterlage und springt nach jedem Aufprall jeweils auf 80% der Höhe zurück, aus welcher er gefallen ist.
Stelle den Funktionsterm auf, der angibt, welche Höhe der Ball nach dem n-ten Aufprall erreicht. Wie hoch springt der Ball nach dem 5. Aufprall?

Lösung: $0,66\,\mathrm{m}$

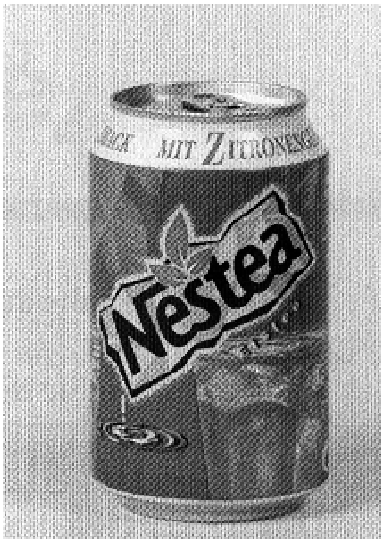
4. **Exponentielle Prozesse**

   Ein Bakterienstamm kann durch Erhitzung vernichtet werden. Die Abnahme der Individuen folgt näherungsweise dem Gesetz $N(t) = N(0) \cdot 0,8^t$.
   Wie viele Bakterien lagen zu Beginn der Beobachtung vor, wenn es nach 2 Stunden noch 960 sind?
   Wann ist der Bakterienstamm abgestorben (d.h. weniger als ein Bakterium vorhanden)?

Lösung: 1500; 33 h

5. **Exponentielle Prozesse**

   Abbau von Koffein im Blut
   Eistee kann einen Koffeingehalt von 50 Milligramm pro 0,33 l Dose haben. Bei einem Jugendlichen setzt die Wirkung des Koffeins nach ca. 1 Stunde ein. Der Koffeingehalt im Blut nimmt dann exponentiell mit einer Halbwertszeit von 3 Stunden ab. Eine Büchse Eistee enthält 50 mg Koffein.
   Wann sind nur noch 0,01 mg Koffein im Blut vorhanden, wenn der Abbau ca. 1 Stunde nach dem Verzehr beginnt?



Lösung: Zwischen 36 und 37 h nach Zerfallsbeginn (37 bzw. 38 h nach Einnahme $\approx 37,86$)

6. **Exponentielle Prozesse**

   Aus Unachtsamkeit wird einem Patienten die 2,5-fache Menge eines Medikamentes gespritzt. Er soll daher so lange unter medizinischer Kontrolle bleiben, bis sich im Körper nur noch die ursprünglich vorgesehene Dosis von 2 ml befindet. Es wird davon ausgegangen, dass pro Stunde etwa 4% des im Körper befindlichen Medikaments abgebaut und ausgeschieden werden.

- Nach wie vielen Stunden ist im Körper des Patienten nur noch die Normaldosis - 2 ml - enthalten?
- Veranschauliche den Abnahmeprozess in einem Graphen.
- Bestimme die „biologische Halbwertzeit“ des Medikamentes sowohl am Graphen als auch rechnerisch.

Lösung: 23 h; 17 h

7. **Exponentielle Prozesse**

Jedermann weiß, dass der Wertverlust eines Neuwagens im ersten Jahr am größten ist und in den Folgejahren zunehmend geringer wird.

(a) Der Autohandel geht (bei einem bestimmten Kfz-Typ und einer durchschnittlichen Fahrleistung) davon aus, dass der jährliche Wertverlust 15% des letztjährigen Werts beträgt. Bestimme die Funktionsgleichung, die den jeweils noch vorhandenen Restwert (gemessen in €) eines 34000 € teuren Neuwagens in Abhängigkeit von der jeweiligen Zeitspanne (gemessen in Jahren) beschreibt.

(b) Wie viel €ist das in Teil (a) beschriebene Auto nach 10 Jahren noch wert? Runde das Ergebnis auf volle €.

(c) Nach wie vielen Jahren ist das in Teil (a) beschriebene Auto noch die Hälfte seines Neupreises wert? Runde das Ergebnis auf 1 Dezimale.

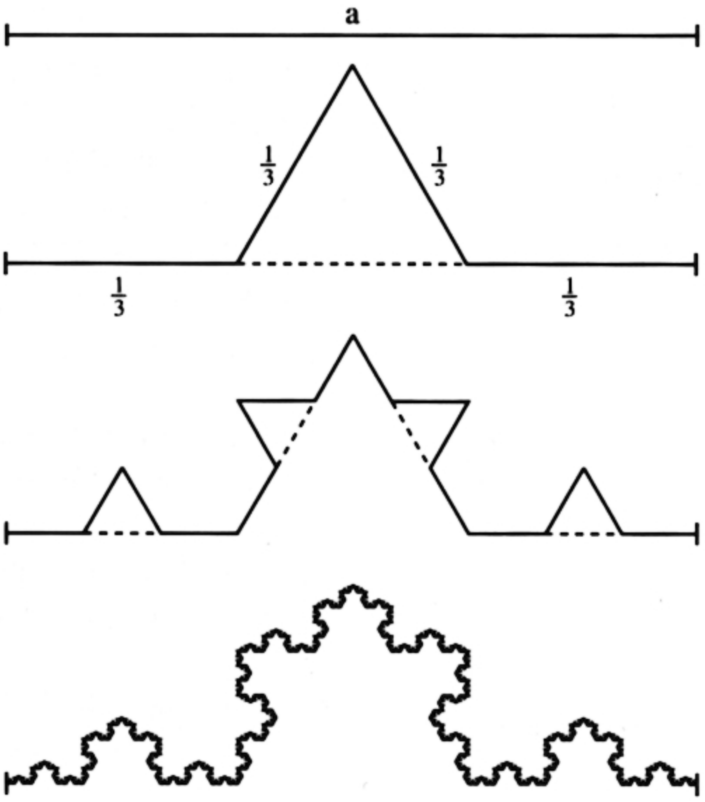
(d) Ein Händler kalkuliert nach der Faustregel, dass sich der Wert eines Autos in 3 Jahren halbiert. Von welcher prozentualen jährlichen Wertminderung geht er aus?

(e) Nach wie vielen Jahren hätte ein 40000 € teures Auto nach der Faustregel aus Teil (d) nur noch Schrottwert (= 700 €)? Runde auf eine Dezimale.

Lösung:

8. **Geometrische Figuren**

Die Abbildung zeigt den Beginn einer Folge geometrischer Figuren. Das Konstruktionsprinzip ist bei jedem Schritt dasselbe:
Jede Strecke wird gedrittelt. Über dem mittleren Stück wird ein gleichseitiges Dreieck aufgesetzt.
Offensichtlich wird die Länge des Streckenzuges von Schritt zu Schritt größer.
Berechne die Länge des Streckenzuges nach $4, 40, 400$ und 100000 Schritten.
Handelt es sich um exponentielles Wachstum?



Quelle: Lambacher Schweizer 10

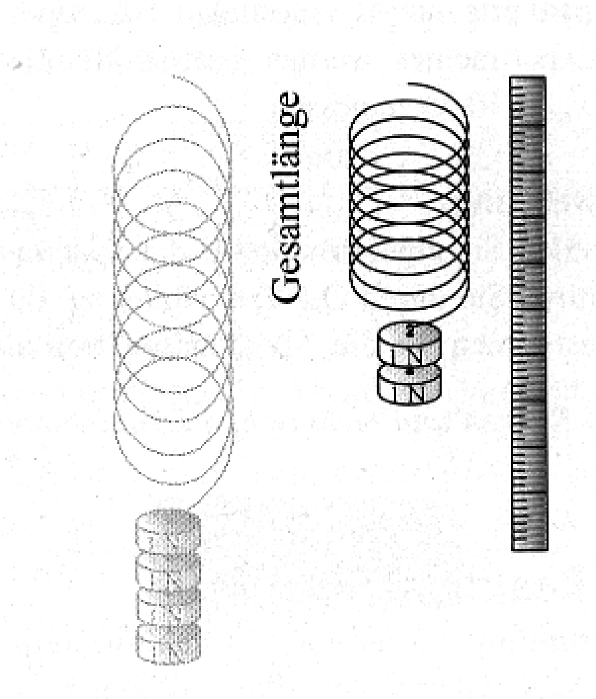
Lösung: Zur Vereinfachung: Ausgangsstrecke 1 LE.
1. **Schritt:** $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$
2. **Schritt:** $4 \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{9} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9}$
3. **Schritt:** $16 \cdot \frac{4}{27} = \frac{64}{27} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{16}{27}$
4. **Schritt:** $64 \cdot \frac{4}{81} = \frac{256}{81} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{16}{27} + \frac{64}{81}$
n. **Schritt:** $(\frac{4}{3})^n = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{4^{i-1}}{3^i}$

Es handelt sich um exponentielles Wachstum mit dem Wachstumsfaktor $\frac{3}{4}$.

n	Länge
4	$3,16049$
40	$99437,3$
400	$9,45317 \cdot 10^{49}$
100.000	$7,47585 \cdot 10^{1249}$

9. **Ein Federexperiment**

Eine (feste) Schraubfeder wird durch Anhängen von Gewichtstücken von je 1 N ausgedehnt. Nach dem Anhängen jedes Gewichtstücks wird die Gesamtlänge der Feder gemessen. Führe das Experiment für 10 Gewichtstücke durch.



- Stelle die gesammelten Daten in einem Koordinatensystem graphisch dar.
- Liegt eine exponentielle Zunahme vor?

Quelle: Mathematik 11 Hessen

Lösung:

10. Ein Ball fällt aus 2 m Höhe auf eine feste Unterlage und springt nach jedem Aufprall jeweils auf 80% der Höhe zurück, aus welcher er gefallen ist.
Stellen Sie die Funktion auf, die angibt welche Höhe der Ball nach dem n-ten Aufprall erreicht. Wie hoch springt der Ball nach dem 5. Aufprall?

Lösung: 0,66 m

11. Am Eröffungstag eines Streichelzoos befanden sich 93 Meerschweinchen in einem Gehege. Ein Jahr später waren es bereits 115 Meerschweinchen.
    (a) Wieviele Meerschweinchen werden es am Tag des 10-jährigen Jubiläums sein, wenn man annimmt, dass der Bestand linear wächst?
    (b) Wieviele Meerschweinchen werden es an diesem Tag sein, wenn man ein exponentielles Wachstum annimmt?

Lösung: a) 313; b) 777

12. Um die Funktion der Bauchspeicheldrüse zu testen, wird ein bestimmter Farbstoff in sie eingespritzt und dessen Ausscheiden gemessen. Eine gesunde Bauchspeicheldrüse scheidet pro Minute etwa 4% des jeweils noch vorhandenen Farbstoffs aus.
    Bei einer Untersuchung wird einem Patienten 0,2 Gramm des Farbstoffes injiziert. Nach 30 Minuten sind noch 0,09 Gramm des Farbstoffes in seiner Bauchspeicheldrüse vorhanden.
    Funktioniert seine Bauchspeicheldrüse normal?

Lösung: Nein, da nur noch 0,06 g vorhanden sein dürfen

13. Der Bierschaum einer bestimmten Biersorte zerfällt in 80 Sekunden von 1 dm auf 0,5 dm Höhe. Nach weiteren 80 Sekunden sind nur noch 0,25 dm Schaum vorhanden usw. Der Zerfall kann in guter Näherung als exponentiell angesehen werden.
    (a) Ermitteln Sie den funktionellen Zusammenhang zwischen der Schaumhöhe y (in dm) und der Zeit x (in Sekunden).
    (b) Wie viel Prozent des Schaumes sind nach 10 Minuten noch übrig (2 geltende Ziffern)?

Lösung: a) $x \longmapsto 0{,}99137^x$ b) $0{,}0055 = 0{,}55\,\%$

14. Radioaktive Stoffe zerfallen im Laufe der Zeit.
    Ein bestimmter radioaktiver Stoff hat eine Halbwertszeit von 4 Tagen, d.h. nach 4 Tagen ist nur noch die Hälfte der ursprünglichen Stoffmenge vorhanden.
    (a) Bestimmen Sie den Wachstumsfaktor!
    (Zwischenergebnis: 0,84)
    (b) Wieviel Prozent einer anfangs vorhandenen Menge dieses Stoffes zerfallen jeweils im Verlauf eines Tages?
    (c) Welcher Bruchteil der anfangs vorhandenen Stoffmenge ist nach 2,3,4,6,8,10 Tagen noch vorhanden? (Fertigen Sie eine Tabelle an!)
    (d) Zeichnen Sie mit Hilfe der obigen Ergebnisse ein Schaubild der Zuordnung
    Zeit in Tagen ↦ *vorhandener Bruchteil in Prozent*
    und ermittlen Sie graphisch nach wievielen Tagen nur noch $\frac{1}{5}$ der anfangs vorhandenen Stoffmenge vorhanden ist.

Lösung: a) 0,84 b) 16% c) 71%; 59%; 50%; 35%; 25%; 17%; d) nach ca. 9,3 Tagen

15. Radioaktive Stoffe zerfallen im Laufe der Zeit.
    Ein bestimmter radioaktiver Stoff hat eine Halbwertszeit von 3 Tagen, d.h. nach 3 Tagen ist nur noch die Hälfte der ursprünglichen Stoffmenge vorhanden.

(a) Bestimmen Sie den Wachstumsfaktor!
(Zwischenergebnis: 0,79)

(b) Wieviel Prozent einer anfangs vorhandenen Menge dieses Stoffes zerfallen jeweils im Verlauf eines Tages?

(c) Welcher Bruchteil der anfangs vorhandenen Stoffmenge ist nach 2,3,4,6,8,10 Tagen noch vorhanden? (Fertigen Sie eine Tabelle an!)

(d) Zeichnen Sie mit Hilfe der obigen Ergebnisse ein Schaubild der Zuordnung
Zeit in Tagen ↦ *vorhandener Bruchteil in Prozent*
und ermittlen Sie graphisch nach wievielen Tagen nur noch $\frac{1}{5}$ der anfangs vorhandenen Stoffmenge vorhanden ist.

Lösung: a) 0,79 b) 21% c) 62%; 49%; 39%; 24%; 15%; 9%; d) nach ca. 6,8 Tagen

16. Herr K. hat Geld bei der Bank XY angelegt. Nach 5 Jahren beträgt sein Guthaben 14140,95 €. Nach weiteren 3 Jahren beträgt es 17567,26 €.

(a) Welchen Zinssatz erhält er?

(b) Wieviel Geld hat Herr K. damals angelegt?

Lösung: (a) 7,5% (b) 9850 €

17. (a) Ein Kunde legt bei einer Bank 10200 € an. Wieviel € beträgt sein Kapital (mit Zinseszins) nach 7 Jahren bei einem Zinssatz von 6,5%?

(b) Eine andere Bank verspricht: Bei uns verdreifacht sich ihr Guthaben in 15 Jahren. Dabei wird der Zins mitverzinst. Welchen Zinssatz gewährt diese Bank?

Lösung: 15850,66 €; 7,6%

18. Eine Bakterienkultur enthält 3 Stunden nach dem Aufguß geschätzt 1200 Bakterien, 2 Stunden später geschätzt 10 000 Bakterien.

(a) Wie viele Bakterien enthielt sie 1 Stunde, 2 Stunden, 4 Stunden nach diesem Aufguß? Runden Sie die Ergebnisse jeweils auf 3 geltende Ziffern (nicht bei der Rechnung!).

(b) Fertigen Sie eine graphische Darstellung des Wachstums an. Waagrechte Achse Zeit mit $1\,\mathrm{h} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$, senkrechte Achse Anzahl mit $1\,000$ Bakterien $\mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$.

Lösung: (a) $144; 416; 3460$

19. Bei einer Bank werden 37 100 € angelegt. Nach 8 Jahren werden sie auf 53 983,84 € angewachsen sein.
Geben Sie die Exponentialfunktion an, die das Anwachsen der Spareinlage beschreibt.
Wie hoch ist der Zinssatz in Prozent?

Lösung: $x \longmapsto 37\,100 \cdot 1{,}048^x$ (x in Jahren); Zinssatz 4,8 %

20. (a) Ein fabrikneuer PKW der Marke *Racing* 12 kostet 56000 €. Er verliert in jeweils zwei Jahren etwa 35% seines Zeitwertes.
Welchen Zeitwert hat dieser PKW nach einem bzw. nach vier Jahren?
Nehmen Sie an, dass der jährliche Wertverlust prozentual immer ungefähr gleich groß ist und runden Sie auf 10 € genau.
    (b) Ein PKW der Marke *Stabil* 02 ist nach einem Jahr 39230 € und nach vier Jahren 25990 € wert.
Berechnen Sie dessen Neupreis (wieder auf 10 € genau gerundet) und dessen prozentualen Wertverlust in jeweils zwei Jahren.

Lösung: *ca.*45150 €; 23660 €; *ca.*45000 €; *ca.*24%

21. Fred S. soll in seiner Bio - Facharbeit untersuchen, ob die Vermehrung von Obstfliegen exponentiell oder linear verläuft.
Nach 5 Tagen zählt er 269 Fliegen; nach 19 Tagen sind es bereits 605 Fliegen.
    (a) Bestimmen Sie den Anfangsbestand der Fliegen, die tägliche Zuwachsrate (in Prozent) und die Fliegenanzahl nach 31 Tagen bei exponentiellem Wachstum!
    (b) Bestimmen Sie den Anfangsbestand, den täglichen Zuwachs und die Fliegenanzahl nach 31 Tagen bei linearem Wachstum!

Lösung: (a) 201; 5,96%; 1209 (b) 149; 24; 893

22. **Bevölkerungswachstum**
Im Jahre 1990 lebten auf der Erde 5,3 Milliarden Menschen. Für das Jahr 2000 erwartet man eine Weltbevölkerung von 6,5 Milliarden.
    (a) Rechnen Sie mit **exponentiellem** Wachstum! Stellen Sie die Wachstumsfunktion auf und errechnen Sie die für das Jahr 2001 bzw. 2050 erwartete Weltbevölkerung.
    (b) Rechnen Sie mit **linearem** Wachstum! Stellen Sie auch dazu die Wachstumsfunktion auf und errechen Sie die Werte für die Jahre 2001 bzw. 2050.
    (c) Wächst die Weltbevölkerung zur Zeit in Wahrheit etwa exponentiell oder etwa linear? Geben Sie die jährliche Zuwachsrate in Prozent an! Ist es denkbar, dass diese Zuwachsrate seit tausend Jahren gilt? Begründen Sie Ihre Antwort mathematisch!

Lösung: (a) 6,6 $Mrd.$; 18,0 $Mrd.$ (b) 6,6 $Mrd.$; 12,5 $Mrd.$
(c) 2%; im Jahre 990 hätte es dann nur ca. 13 Menschen gegeben!

23. **Exponentielle Prozesse**

Quellen für Aufg. 2-14: Elemente 11, Abakus 10, Mathematik 11 Hessen, Mathematik 12.1 GK Hessen

Meerschweinchen

Am Eröffnungstag eines Streichelzoos befanden sich 93 Meerschweinchen in einem Gehege. Ein Jahr später waren es bereits 115 Meerschweinchen.

(a) Wie viele Meerschweinchen werden es am Tag des 10-jährigen Jubiläums sein, wenn man annimmt, dass der Bestand linear wächst?

(b) Wie viele Meerschweinchen werden es an diesem Tag sein, wenn man ein exponentielles Wachstum annimmt?

(c) Lässt sich die Vermehrung der Meerschweinchen eher mit dem linearen oder dem exponentiellen Modell erklären?

Lösung: (a) 313

(b) 777

24. **Bevölkerungswachstum**

Wann wird bei Annahme gleich bleibender Wachstumsrate

	Bevölkerung 1991	Jährliche Wachstumsrate
Afrika	631.000.000	$2,9\%$
Asien und Ozeanien	3.073.000.000	$1,9\%$
Lateinamerika	497.000.000	$2,7\%$

- die Bevölkerung von Afrika die von Asien und Ozeanien übertroffen haben?
- die Bevölkerung von Lateinamerika die von Asien und Ozeanien übertroffen haben?
- Stelle das Bevölkerungswachstum graphisch dar.

Lösung: $\approx$ 162 Jahre; $\approx$ 232 Jahre (etwas länger zum „Übertreffen“)

25. **Forschung mit Bakterien**

In einem Forschungslabor wird ein neues Medikament gegen eine Infektionskrankheit entwickelt. Dazu wird unter anderem das Wachstum einer bestimmten Bakterienart experimentell untersucht. Das dargestellte Messprotokoll gibt die Anzahl N der Bakterien in Abhängigkeit von der Zeit t an.

t in min	30	40	50	60	70	80	90
N in 100	17	24	34	48	68	96	136

(a) Wie viele Bakterien kann man nach 2 h, 3 h, 4 h und 5 h erwarten, wenn man die gleiche Verdopplungszeit annimmt? Stelle den Sachverhalt in einem Koordinatensystem dar.

(b) Auch vor Beginn der Beobachtung verdoppelte sich die Anzahl der Bakterien jeweils in der gleichen Zeit. Wie viele Bakterien befanden sich zu Versuchsbeginn ($t = 0$) in der Glasschale? Ermittle die Anzahl der Bakterien 10 min, 30 min und 1 h vor Versuchsbeginn.

Lösung: (a) 384 / 3072 / 24576 / 196608

(b) 6 / 4,25 / 2,125 / 0,75

26. **Schlafmittel**

Es gibt verschiedene Schlafmittel auf dem Markt, die zu einer besseren nächtlichen Schlafeinleitung führen sollen. Ihre Wirkung sollte jedoch spätestens am nächsten Morgen weitgehend abgebaut sein. Die Messung ergab, dass von 2 mg des Wirkstoffes Triazolam nach 3 Stunden 1,18 mg noch nicht abgebaut sind.
Was ist von diesem Schlafmittel zu halten?

Lösung: Nach ca. 13 h ist die Konzentration auf ca. 10% abgesunken. $N(t) = N(0) \cdot 0{,}84^t$; $a^3 = \frac{1{,}18}{2} \Leftrightarrow a = 0{,}84$
Wenn „weitgehend abgebaut“ als Restmenge 10% angesehen wird, sind ca. 13, 09 h richtig. Konsequenz: Vom Mittel ist abzuraten, da es zu lange wirkt. Was aber, wenn jemand mit größeren Prozentzahlen operiert? Ein schönes Beispiel für offeneres Herangehen, da die Voraussetzungen zum Lösen individuell variieren können und damit auch die Einschätzungen.

27. **Stadtflucht**

1990 betrug die Einwohnerzahl einer Großstadt ca. 200000; ein Jahr später waren es 2000 weniger.

(a) Gib unterschiedliche Funktionsgleichungen an, mit deren Hilfe sich der Abnahmeprozess beschreiben lässt.

(b) Wie lautet die Prognose für die Entwicklung der Einwohnerzahl in den Jahren 2000 und 2010 in den unterschiedlichen Vorhersagemodellen?

(c) In welchem Zeitraum hätte sich die Bevölkerungszahl bei den unterschiedlichen Vorhersagemodellen halbiert?

28. **Krebszellen**

Eine einzelne Krebszelle wird einer Maus injiziert. Am Tag darauf sind durch Zellteilung bereits 5 Zellen vorhanden, wiederum einen Tag später bereits 25 Zellen.

(a) Bestimme den Funktionsterm der zugehörigen Exponentialfunktion, die die Menge vorhandener Krebszellen in Abhängigkeit von der jeweiligen Zeitspanne (gemessen in Tagen) beschreibt.

(b) Ein hochwirksames Gegenmittel steht zur Verfügung. Wann muss es spätestens eingesetzt werden, um die Maus am Leben zu erhalten?
Hinweis: Man nimmt an, dass 1 Mio. Krebszellen tödlich sind. Berechne den Zeitpunkt für den Einsatz des Gegenmittels auf 2 Dezimalen genau.

(c) Das eben erwähnte Gegenmittel tötet 91% aller Krebszellen. Angenommen, das Mittel wurde gespritzt, als die Anzahl der Krebszellen 900000 betrug. Wann muss erneut gespritzt werden? Beachte den Hinweis zu Teil (b). Berechne den Zeitpunkt auf 1 Dezimale genau.

29. **Das Superballexperiment**

Man lässt einen Superball (Flummi) aus 2 m Höhe senkrecht nach unten fallen. Er prallt auf den Boden und steigt ein erstes Mal nach oben, wobei er eine Sprunghöhe erreicht, die knapp unter 2 m liegt. Er beginnt erneut zu fallen, prallt ein zweites Mal auf und steigt ein zweites Mal nach oben usw. Die Sprunghöhe wird von Mal zu Mal kleiner. Mit einem senkrecht gehaltenen Zollstock lässt sie sich relativ gut messen.

Überprüfe in einem Versuch, ob ein exponentieller Prozess vorliegt.

Quelle: Mathematik 11 Hessen

30. **Bevölkerungswachstum in unterschiedlichen Ländern**

Die Tabelle enthält die Bevölkerungszahlen (in Tausend) von 1990 und 1999 für verschiedene Länder und eine Prognose für das Jahr 2020.
Nimm an, dass zwischen 1990 und 1999 exponentielles Wachstum zugrunde liegt.

Jahr	1990	1999	2020
Brasilien	149042	161191	197950
Deutschland	79479	81378	73523
Indien	846191	931044	1328565
Mexiko	84486	91290	137717
USA	249975	260479	329337

(a) Welches Land hat den größten (den kleinsten) prozentualen Zuwachs pro Jahr?

(b) Überprüfe, ob bei der Prognose für das Jahr 2020 in den Ländern das exponentielle Wachstum beibehalten wurde.

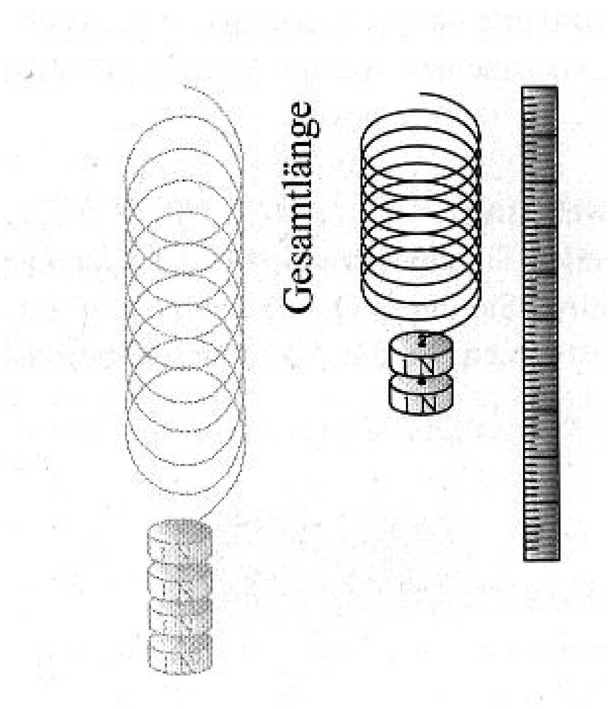
Quelle: Elemente 11

Lösung: (a) Brasilien $0,87\%$; Deutschland $0,26\%$; Indien $1,07\%$; Mexiko $0,86\%$; USA $0,46\%$

(b) Deutschland nein, sogar Abnahme; Brasilien 193530 (ja); Indien 1163610 (?); Mexiko 109373 (?); USA 286737 (?). Tabellenwerte liegen über dem errechneten Wert; das Wachstum wird sich also beschleunigen, aber ob exponentiell, das lässt sich eigentlich nicht beantworten. Prozentualer Zuwachs pro Jahr ab 1999: Indien $1,71\%$; Mexiko $1,71\%$; USA $1,98\%$.

31. **Ein Federexperiment**

Eine (feste) Schraubfeder wird durch Anhängen von Gewichtstücken von je 1 N ausgedehnt. Nach dem Anhängen jedes Gewichtstücks wird die Gesamtlänge der Feder gemessen. Führe das Experiment für 10 Gewichtstücke durch.

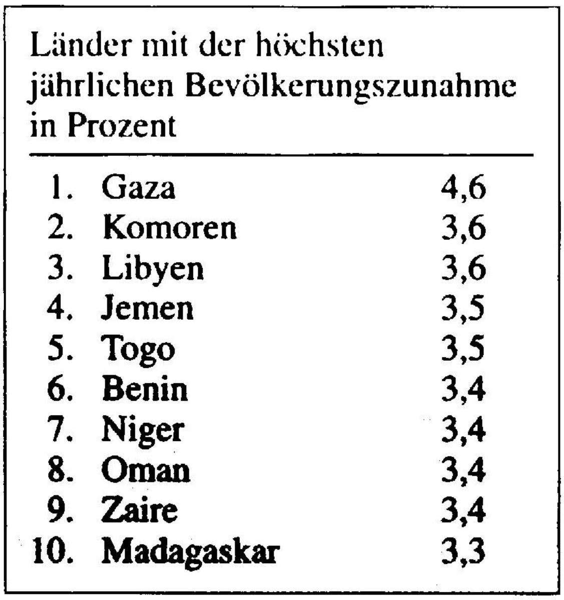


- Stelle die gesammelten Daten in einem Koordinatensystem graphisch dar.
- Liegt eine exponentielle Zunahme vor?

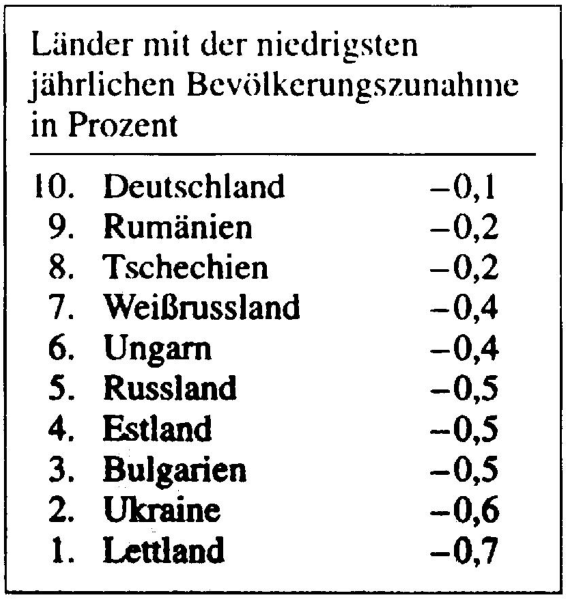
Quelle: Mathematik 11 Hessen

32. **Erdbevölkerung**

Es gibt optimistische Schätzungen, die davon ausgehen, dass die Erde mehr als 100 Milliarden Menschen ernähren kann. Die meisten Schätzungen gehen aber davon aus, dass die Obergrenze zwischen 8 und 12 Milliarden liegt.
1999 betrug die Erdbevölkerung 6, 0 Mrd. Bewohner. Die beiden Tabellen geben einige Wachstumsraten aus dem Jahre 1998 an.



Länder mit der höchsten jährlichen Bevölkerungszunahme in Prozent		
1.	Gaza	4,6
2.	Komoren	3,6
3.	Libyen	3,6
4.	Jemen	3,5
5.	Togo	3,5
6.	Benin	3,4
7.	Niger	3,4
8.	Oman	3,4
9.	Zaire	3,4
10.	Madagaskar	3,3



Länder mit der niedrigsten jährlichen Bevölkerungszunahme in Prozent		
10.	Deutschland	−0,1
9.	Rumänien	−0,2
8.	Tschechien	−0,2
7.	Weißrussland	−0,4
6.	Ungarn	−0,4
5.	Russland	−0,5
4.	Estland	−0,5
3.	Bulgarien	−0,5
2.	Ukraine	−0,6
1.	Lettland	−0,7

- Berechne die Verdopplungszeit der Bevölkerung von Gaza.
- Wann hat sich die Bevölkerung Lettlands halbiert? Wann ist die Bevölkerungszahl Lettlands auf 10% gegenüber dem heutigen Stand geschrumpft?
- Berechne die Bevölkerungszahl von Deutschland für die Jahre $2010, 2030$ und 2050.

Quelle: Analysis Grundkurs Gesamtband (2000), Klett

Lösung: Gaza: $\approx 15,41$ Jahre; Lettland: $\approx 98,67$ Jahre bzw. $\approx 327,79$ Jahre; BRD: $N_0 \cdot 0,999^t$

33. **Alkoholkontrolle**

Bei einer Verkehrskontrolle wird bei einem Verkehrsteilnehmer ein Alkoholgehalt im Blut von 0,8 ‰ festgestellt. Nach einer Stunde ergibt die Blutanalyse einen Alkoholgehalt von 0,6 ‰. Es ist eine Funktion gesucht, die den Abbau des Alkohols im Blut beschreibt.

(a) Berechne den Blutalkoholgehalt unter der Annahme, dass der Körper in jeder Stunde gleich viel Alkohol abbaut.

(b) Gehe davon aus, dass die stündliche Abbaumenge proportional zum vorhandenen Bestand ist.

(c) Vergleiche die beiden Ansätze und stelle die Entwicklung graphisch dar.

(d) Welche Schlüsse kann man auf den Alkoholgehalt im Blut des Verkehrsteilnehmers eine Stunde (zwei Stunden) vor der Kontrolle ziehen?

Lösung: Wir setzen $t = 0$ als den Zeitpunkt der Kontrolle und gehen davon aus, dass in der Abbauphase kein Alkohol konsumiert wurde.

(a) $g(t) = -0,2t + 0,8$

(b) Nach Voraussetzung gilt: $f(t) - f(t+1) = c \cdot f(t)$. Also gilt auch: $f(t+1) = (1-c) \cdot f(t)$ und allgemeiner $f(t) = (1-c)^t \cdot f(0)$. Demnach hier: $f(t) = (\frac{3}{4})^t \cdot 0,8$.

(c) Nach allem was wir über den Abbau von Blutalkohol wissen, ist ein lineares Modell angemessener. Entscheidungskriterium hier in erster Linie Fachkenntnisse.

(d) Vor einer Stunde: Pegel ca. 1 Promille in beiden Modellen.
Vor zwei Stunden: Lineares Modell: Pegel $1,2$.
Exponentielles Modell: Pegel ca. $1,4$.

34. Wann verdoppelt sich das Geld?

> **Geldanlage:**
> **Wann verdoppelt sich das Geld?**
> Das ist leicht auszurechnen, wie die Gesellschaft für Bankpublizität mitteilt. Dafür müssen Sie lediglich die Zahl 70 durch die Rendite der Kapitalanlage teilen. Das bedeutet beispielsweise, bei einem Zinssatz von sieben Prozent sind aus angelegten 20.000 Euro in 10 Jahren bereits 40.000 Euro geworden ($70 : 7 = 10$).
> Beträgt die Rendite fünf Prozent, dauert es entsprechend länger, nämlich 14 Jahre, bis sich das Kapital verdoppelt.
> Voraussetzung, damit die Rechnung aufgeht, ist allerdings, dass Sie die fälligen Zinsen zu gleichen Bedingungen regelmäßig wieder anlegen und so den Zinseszins-Effekt nutzen.

Was meinst du dazu?

Quelle: Herget/Scholz: Die etwas andere Aufgabe aus der Zeitung

Lösung: Diese „Faustformel“ liefert in dem „üblichen“ Zinsbereich sehr brauchbare Werte: Die Verdopplungszeit berechnet man mit: $2K_0 = K_0(1 + \frac{p}{100})^d$ umgeformt ergibt sich: $\lg 2 = d \cdot \lg(1 + \frac{p}{100})$, d.h. $d \approx \frac{0{,}3}{\lg(1+\frac{p}{100})}$.
Hintergrund-Info für Lehrer: Es gilt: $\ln 2 = d \cdot \ln(1 + \frac{p}{100})$, wegen $\ln(1 + x) \approx x$ (für kleine $|x|$) folgt: $d \cdot \frac{p}{100} \approx \ln 2 \approx 0,6931 \approx 0,7$, d.h. $d \cdot p \approx 70$.
Für sehr kleine p wäre also eigentlich 69 noch besser als 70 - aber 70 lässt sich natürlich leichter merken, und für die „üblichen“ Zinssätze liefert die 70 tatsächlich bessere Werte.

$p\%$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15
t exakt	$17,7$	$14,2$	$11,9$	$10,2$	$9,0$	$8,0$	$7,3$	$6,6$	$6,1$	$5,7$	$5,0$
t Artikel	$17,5$	14	$11,7$	10	$8,75$	$7,8$	7	$6,4$	$5,8$	$5,4$	$4,7$

35. Schuldentilgung

Herr Huber möchte sich von seiner Bank 10000 Euro leihen.
Vorschlag A: Das Geld wird mit 8% verzinst, er muss nach 10 Jahren die Schulden mit Zinseszinsen zurückzahlen.
Vorschlag B: Das Geld wird mit 7% verzinst. Er muss aber jedes Jahr einen Abtrag von 1000 Euro vornehmen.
Für welchen Rückzahlungsmodus würdest du dich entscheiden?

Lösung: **Plan A:** $K_{10} = 10000 \cdot (1 + \frac{8}{100})^{10} = 21589,25$

Plan B: Man erkennt, dass zunächst fast nur Zinsen und kaum Tilgung geleistet werden. Es müssen nur 10000 € + 5855, 07 € = 15855, 07 € gezahlt werden.

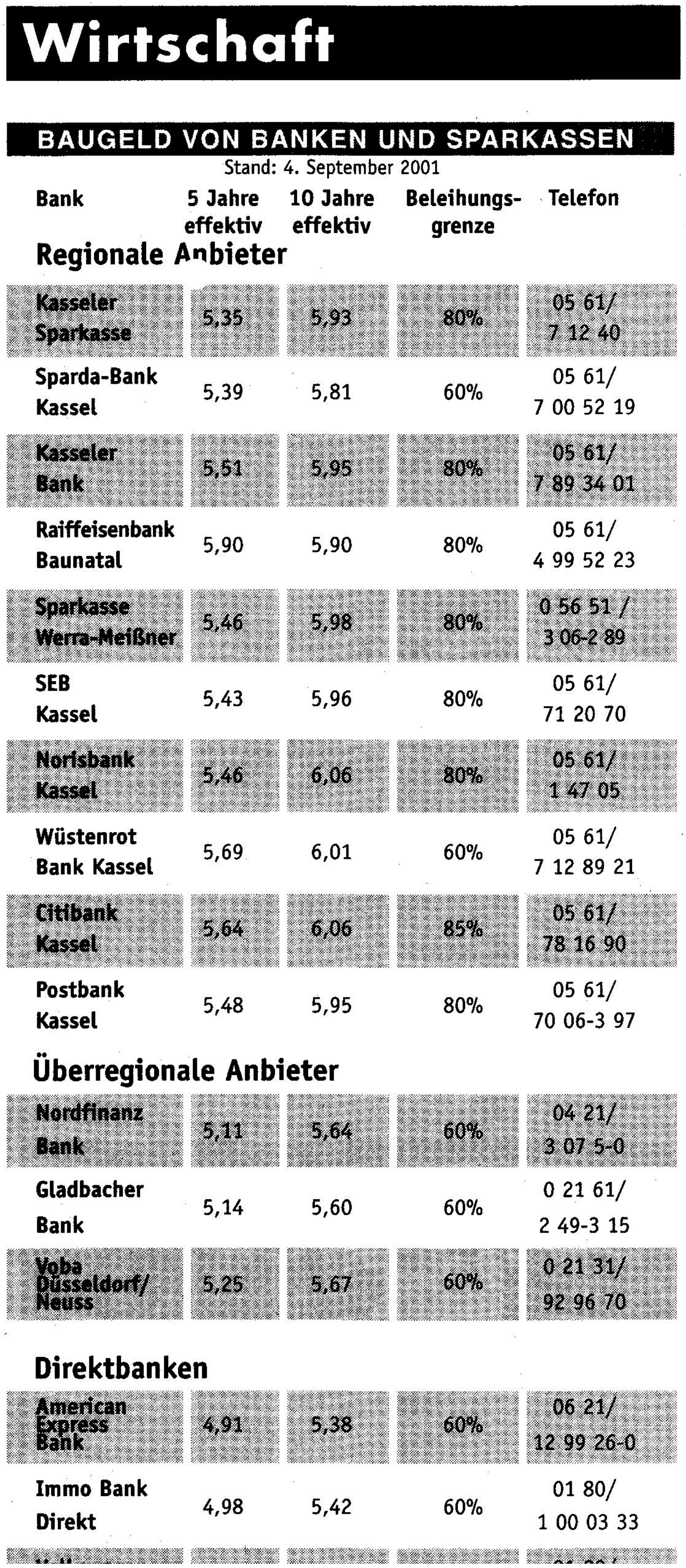
Jahre	Abtrag	Restschuld
1	1000	9700, 00
2	1000	9379, 00
3	1000	9035, 53
4	1000	8668, 02
5	1000	8274, 78
6	1000	7854, 01
7	1000	7403, 79
8	1000	6922, 06
9	1000	6406, 60
10	1000	5855, 07

Jahre	Einzahlung	Kapital 4%	Kapital 5%
1	0	0, 00	0
2	1000	1040, 00	1050, 00
3	1000	2121, 60	2152, 50
4	1000	3246, 46	3310, 13
5	1000	4416, 32	4525, 63
6	1000	5632, 98	5801, 91
7	1000	6898, 29	7142, 01
8	1000	8214, 23	8549, 11
9	1000	9582, 80	10026, 56
10	1000	11006, 11	11577, 89

Zusatz: Was passiert, wenn man die 1000 Euro jährlich spart, die man bei **Plan A** zunächst nicht zu zahlen hat?
In den 10 Jahren könnte Herr Huber nur ca. 1500 Euro an Zinsen erwirtschaften. **Plan A** bleibt trotzdem teurer.

36. **Hypothekenzinsen**
In der HNA vom 5.9.01 ist die nachstehende Übersicht (nächste Seite) über die aktuellen Hypothekenzinsen erschienen. Diese Zinsen muss man beim Bau oder Kauf einer Immobilie an die Bank zahlen, wenn man sich das nötige Bargeld leihen muss. Man zahlt dann jedes Jahr einen konstanten Betrag zurück, der sich aus dem Tilgungsteil (in der Regel 1% der Hypothek) und dem Zinsanteil des ersten Jahres (siehe Übersicht) zusammensetzt.
Es werden 100000 Euro benötigt.
Wie könnte ein Tilgungsplan aussehen?
Ist die Abnahme der Schuld exponentiell?

Lösung: Es handelt sich nicht um eine exponentielle Abnahme, sondern um eine Überlagerung eines exponentiellen Prozesses mit einem linearen Anteil.



Wirtschaft

BAUGELD VON BANKEN UND SPARKASSEN

Stand: 4. September 2001

Bank	5 Jahre effektiv	10 Jahre effektiv	Beleihungsgrenze	Telefon
Regionale Anbieter				
Kasseler Sparkasse	5,35	5,93	80%	05 61/ 7 12 40
Sparda-Bank Kassel	5,39	5,81	60%	05 61/ 7 00 52 19
Kasseler Bank	5,51	5,95	80%	05 61/ 7 89 34 01
Raiffeisenbank Baunatal	5,90	5,90	80%	05 61/ 4 99 52 23
Sparkasse Werra-Meißner	5,46	5,98	80%	0 56 51 / 3 06-2 89
SEB Kassel	5,43	5,96	80%	05 61/ 71 20 70
Norisbank Kassel	5,46	6,06	80%	05 61/ 1 47 05
Wüstenrot Bank Kassel	5,69	6,01	60%	05 61/ 7 12 89 21
Citibank Kassel	5,64	6,06	85%	05 61/ 78 16 90
Postbank Kassel	5,48	5,95	80%	05 61/ 70 06-3 97
Überregionale Anbieter				
Nordfinanz Bank	5,11	5,64	60%	04 21/ 3 07 5-0
Gladbacher Bank	5,14	5,60	60%	0 21 61/ 2 49-3 15
Voba Düsseldorf/ Neuss	5,25	5,67	60%	0 21 31/ 92 96 70
Direktbanken				
American Express Bank	4,91	5,38	60%	06 21/ 12 99 26-0
Immo Bank Direkt	4,98	5,42	60%	01 80/ 1 00 03 33

37. **Taschengeld**

    Peter startet in wenigen Tagen zu einer zweiwöchigen Klassenfahrt. Seine Eltern möchten ihm nach folgendem Plan Taschengeld mitgeben:
    Für den ersten Tag 3 Euro, dann täglich 2 Euro mehr als am Tag vorher. Peter überlegt kurz und macht einen scheinbar bescheidenen Gegenvorschlag: Für den ersten Tag 3 Cent, dann täglich den doppelten Betrag des Vortages.
    Was meinst du dazu?

38. **Zerfall radioaktiver Stoffe**

    Beim radioaktiven Zerfall wandelt sich ein Stoff unter Aussendung von radioaktiver Strahlung in einen anderen Stoff um. Der ursprüngliche Stoff wird also weniger.
    Die Anzahl der ursprünglich vorhandenen Atome des Stoffes bezeichnet man mit $N(0)$, die nach einer Zeit t noch vorhandene Anzahl mit $N(t)$. Dann lautet die Funktionsgleichung für den Zerfall radioaktiver Stoffe $N(t) = N(0) \cdot a^t$. Dabei ist a die *Zerfallskonstante*, die für jeden Stoff einen spezifischen Wert hat.

    Meistens wird beim radioaktiven Zerfall die sog. *Halbwertszeit* angegeben. Das ist die Zeit, in der die Hälfte der zu Beginn vorhandenen Atome zerfallen ist.

    (a) Für radioaktives Jod gilt $a = 0,917$.
        i. Wie viel mg sind von 3 g dieses Jods nach 45 Tagen noch vorhanden?
        ii. Bestimme die Halbwertszeit von radioaktivem Jod!
    (b) Das Element Radon zerfällt mit einer Halbwertszeit von 3, 8 Tagen.
        Nach welcher Zeit ist noch ein Achtel der Ausgangsmenge Radon vorhanden?
    (c) Thorium zerfällt nach dem Gesetz $N(t) = N(0) \cdot 0,963^t$. Ein Stoff enthält 10 mg Thorium und 15 mg radioaktives Jod.
        Nach welcher Zeit sind von beiden Stoffen noch gleiche Mengen vorhanden?

Lösung: (a) i. 60, 8 mg
ii. 8 Tage

(b) $11,4$ Tage

(c) $8,3$ Tage

Geometrische Folgen und Reihen

1. In der Formelsammlung findet man zum Thema „geometrische Reihen“:

$$a_\nu = a_1 \cdot q^{\nu-1} \Longrightarrow s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Beweisen Sie damit folgende Formeln:

$$\text{(a)} \sum_{\nu=1}^{n} q^\nu = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} \quad \text{(b)} \sum_{\nu=0}^{n-1} q^\nu = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{(c)} \sum_{\nu=0}^{n} q^\nu = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Lösung:

2. Eine Folge von Zahlen, in welcher der Unterschied je zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Zahlen konstant ist, heißt *arithmetische Folge.*
Betrachtet werde nun eine aufsteigende arithmetische Folge mit vier Gliedern. Addiert man zum ersten Folgenglied 1, zum zweiten 8, zum dritten 35 und zum vierten 122, so erhält man eine geometrische Folge. Bestimmen Sie die Glieder der beiden Folgen!

Lösung: arithmetische Folge: $4, 7, 10, 13$ geometrische Folge: $5, 15, 45, 135$

3. Die Summe aus den ersten fünf Gliedern einer geometrischen Folge mit $q = 0{,}8$ hat den Wert 420,2. Wie heißen der erste und der letzte Summand?

Lösung: $a_1 = 125$; $a_5 = 51{,}2$

4. In einer geometrischen Folge mit positiven Gliedern ist die Summe aus dem 2. und 4. Glied 102. Das 6. Glied ist 1536.
Berechnen Sie die Summe der ersten 7 Glieder.

Lösung: Anfangswert $a = 1{,}5$; Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder $q = 4$; $s_7 = 8191{,}5$

5. In einer geometrischen Folge mit positiven Gliedern ist das Produkt aus dem zweiten und vierten Glied gleich 1296, das fünfte Glied ist 16. Berechnen Sie die Summe der ersten 10 Glieder.

Lösung: Es ist $a_1 = aq^0 = 81$, $q = \frac{2}{3}$ und $s_{10} = \sum_{i=0}^{9} aq^i = a\frac{q^{10}-1}{q-1} = \frac{58025}{243}$

6. Berechnen Sie den Wert der Summe $-3+6-12+24-...-3072$ mit Hilfe der Summenformel für geometrische Folgen.

Lösung: -2049

7. Bei einer geometrischen Folge mit positiven rationalen Gliedern beträgt die Summe des ersten und dritten Gliedes 20, die Summe des ersten und fünften Gliedes 17. Wie lautet das erste und das zehnte Glied dieser Folge?

Lösung: 16, $\frac{1}{32}$

8. Bei einer geometrischen Folge mit lauter positiven Gliedern beträgt das Produkt der beiden ersten Glieder 324, die Summe der Quadrate dieser Glieder 1377.
   (a) Berechnen Sie das erste Glied sowie den Quotienten dieser Folge!
   (b) Berechnen Sie die Summe der ersten sieben Glieder!

Lösung: (a): 2 Lösungen: $a_1 = 9,\ q = 4$ bzw. $a_1 = 36,\ q = \frac{1}{4}$
(b): 49 149 bzw. $47\frac{1021}{1024}$

9. Die Summe der geraden Glieder einer geometrischen Folge von 5 rationalen Zahlen beträgt $\frac{5}{2}$, die der ungeraden Glieder $\frac{21}{4}$. Wie lauten die einzelnen Glieder?
   Hinweis: Das mittlere Glied sei x; verwenden Sie $\dfrac{1}{q^2}+q^2=\left(\dfrac{1}{q}+q\right)^2-2$!

Lösung: 0,25; 0,5; 1; 2; 4 *bzw.* 4; 2; 1; 0,5; 0,25

10. Der Brahmane Sissa, Erfinder des Schachspiels, erbat sich auf Aufforderung des indischen Königs Shehram hin als Belohnung für seine Erfindung diejenige Summe Weizenkörner, die sich ergibt, wenn man auf das erste Feld des Schachbretts ein einziges Weizenkorn, auf das zweite Feld zwei, auf das dritte Feld 4, auf das vierte Feld acht Körner usw. legt.
    (a) Welche Summe von Weizenkörnern ergäbe sich?
    (b) Welches Gewicht hätten diese insgesamt, wenn 20 Körner durchschnittlich 1 g wiegen?
    (c) Wie hoch könnte eine quadratische Fläche der Seitenlänge 100 km damit bedeckt werden, wenn 15 Körner etwa 1 cm^3 Raum einnehmen?

Lösung: (a): $2^{64}-1 \approx 1{,}84 \cdot 10^{19}$ (b): $9{,}22 \cdot 10^{11}\,t$ (c): ca. $120\,m$

11. Zwischen 2 Tönen mit den Schwingungszahlen 1000 Hz und 2000 Hz (Oktave!) sollen elf Töne eingeschaltet werden, so dass die Folge der Schwingungszahlen dieser dreizehn Töne eine geometrische Folge bildet. Wie lautet der Quotient dieser Folge?

Lösung: $\sqrt[12]{2}$

12. Schiebt man zwischen die Töne einer Oktave 11 Zwischentöne derart ein, dass deren Frequenzen eine geometrische Folge bilden, so entsteht eine Tonleiter mit „gleichmäßig-temperierter Stimmung “.

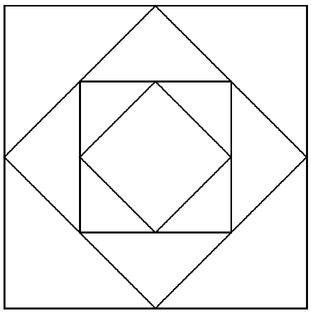
    Beispiel: Der Ton c' hat eine Frequenz von 261 Hz*, seine Oktave c" eine doppelt so große. In C-Dur heißen die 11 Zwischentöne cis, d, dis, e, f, fis, g, gis, a, ais und h.*

    (a) Berechnen Sie den Quotienten dieser geometrischen Folge auf zwei Dezimalen genau.

    (b) Der 9. Zwischenton ist der Kammerton a', der zum Stimmen von Musikinstrumenten benutzt wird. Berechnen Sie seine Frequenz!

Lösung: 1,06; 441 Hz

13. Einem Quadrat mit der Seitenlänge a wird ein zweites Quadrat derart einbeschreiben, dass dessen Ecken in den Seitenmitten des ersten liegen. Setzt man dieses Verfahren fort, so ersteht eine Folge von Quadraten. (vgl. Abb)

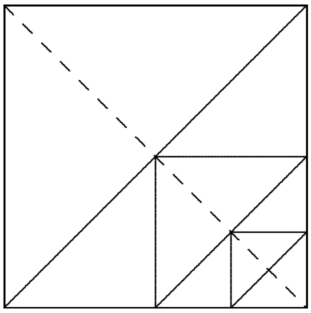


    (a) Stellen Sie den Flächeninhalt und den Umfang des n-ten Quadrats mit Hilfe der Seitenlänge a des ersten Quadrats dar.

    (b) Berechnen Sie die Summe der Umfänge der ersten 10 Quadrate für $a = 15\,\text{cm}$.

Lösung: $A_n = a^2 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}$; $U_n = 4a \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}$; $S_{10} \approx 198.5\,\text{cm}$

14. Ein Quadrat mit der Seitenlänge a wird durch eine Diagonale in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt. In eines der beiden Dreiecke wird ein weiteres Quadrat einbeschrieben, das wiederum durch seine Diagonale in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird. Wiederholt man dieses Verfahren, so entsteht eine Folge von Quadraten. (vgl. Abb.)



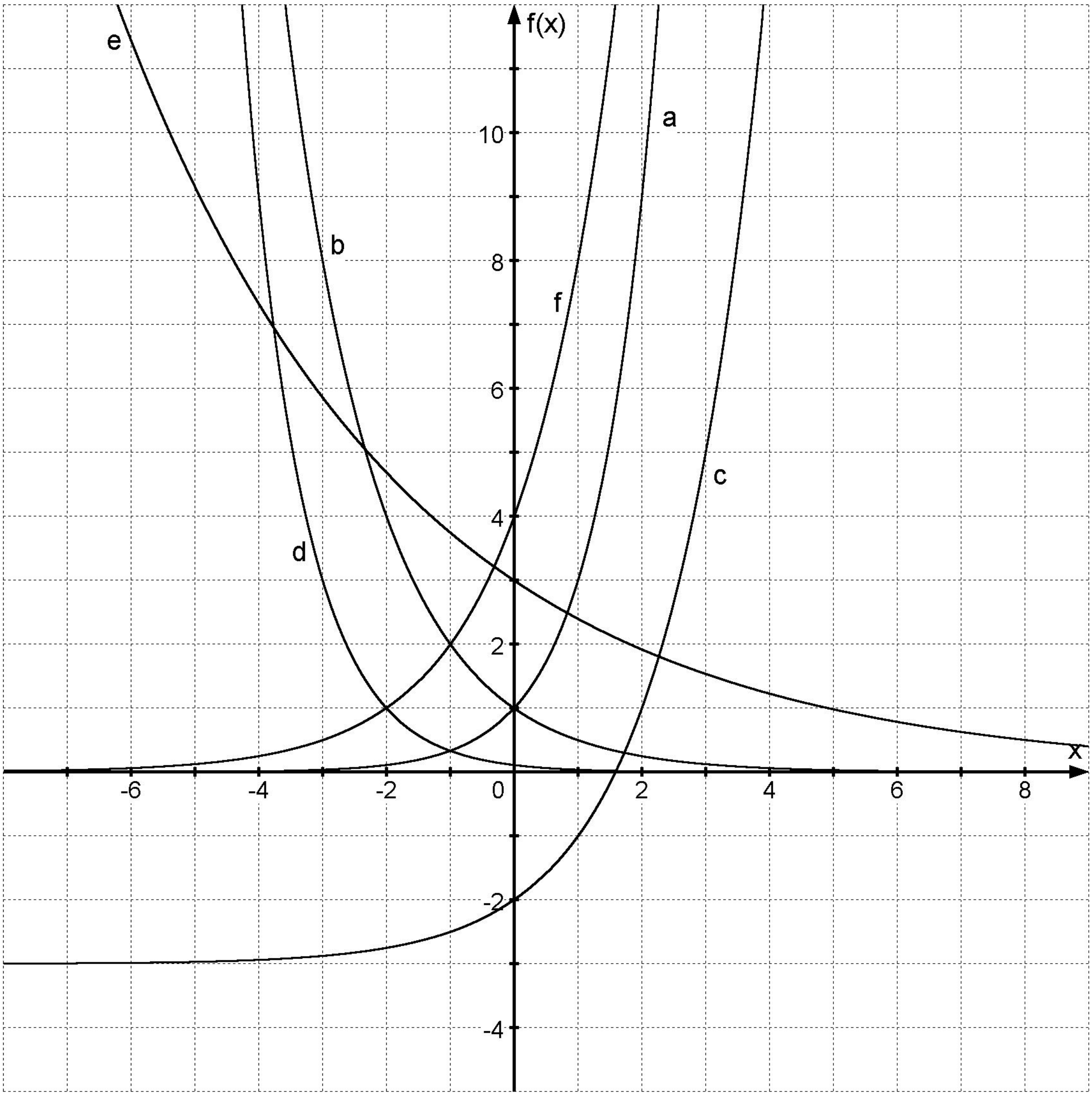
    (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des n-ten Quadrats in Abhängigkeit der Seitenlänge a des ersten Quadrats.
    (b) Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte der ersten 8 Quadrate für $a = 10\,\text{cm}$.

Lösung: $A_n = a^2 \cdot (\frac{1}{4})^{n-1}$; $S_8 \approx 133\,\text{cm}^2$

Logarithmen

1. **Funktionsgleichungen bestimmen**

   Bestimme die Funktionsgleichungen zu den abgebildeten Graphen!



Lösung: (a) $f(x) = 3^x$

(b) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

(c) $f(x) = 2^x - 3$

(d) $f(x) = (\frac{1}{3})^{x+2}$ oder $f(x) = \frac{1}{9} \cdot (\frac{1}{3})^x$

(e) $f(x) = 3 \cdot 0,8^x$

(f) $f(x) = 4 \cdot 2^x$

2. **Mathe-Quiz I. selbstgemacht!**

   (a) Was ist der Unterschied zwischen absolutem und relativem Zuwachs?

(b) Was ist der Unterschied zwischen dem Wachstumsfaktor und dem Zerfallsfaktor?

(c) Wie wird der relative Zuwachs in der Regel angegeben?

(d) Erkläre den Begriff Halbwertszeit.

(e) Was bedeutet äquidistant?

(f) Was sind Logarithmen?

(g) Wie nennt man die Zahl y in dem Term x^y?

(h) Wie nennt man in dem Ausdruck $\log_a x$ die Zahl x?

(i) Nenne je einen anderen Begriff für die Grundzahl und für die Hochzahl einer Potenz.

(j) Wie schreibt man kurz für $\log_{10} x$?

(k) Schreibe $2^x = 16$ als Logarithmengleichung.

(l) Gib die Formel für relativen Zuwachs an.

(m) Bestimme x in $x = \log_2 64$.

(n) Bestimme x in $x = \log_5 625$.

(o) Bestimme x in $x = \log_3 81$.

Quelle: mathematik lehren (2001), H. 106, S. 55-57

Lösung: (a) Beim absoluten Zuwachs wird die Differenz gebildet, beim relativen Zuwachs der Quotient.

(b) Der Wachstumsfaktor q ist größer als 1; für den Zerfallsfaktor gilt: $0 < q < 1$

(c) In Prozent.

(d) Die Halbwertszeit gibt an, in welchem Zeitraum sich bei einem Zerfallsprozess die Substanz jeweils um die Hälfte verringert.

(e) Äquidistant bedeutet den gleichen Abstand habend.

(f) Der Logarithmus a einer Grundzahl b ist die Hochzahl k, mit der man b potenzieren muss, um a zu erhalten.

(g) Hochzahl oder Exponent

(h) Numerus

(i) Grundzahl = Basis; Hochzahl = Exponent

(j) $\lg x$

(k) $\log_2 16 = x$

(l) $r = q - 1 = \frac{W_{i+1}}{W_i} - 1 = \frac{W_{i+1} - W_i}{W_i}$

(m) $x = 6$

(n) $x = 4$

(o) $x = 4$

3. Betrachtet wird die Wachstumsfunktion

   $x \longmapsto N = N_0 \cdot a^x \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R}.$

   Für $x = 3{,}0$ ist $N = 14929{,}92$.
   Für $x = 2{,}5$ ist $N = 12441{,}60$.

   (a) Berechnen Sie N_0 und den Wachstumsfaktor a!

   (b) Um welchen Betrag muss x zunehmen, damit der Bestand N um ein Drittel seines momentanen Wertes ansteigt?

Lösung: (a): $N_0 = 5000$; $a = 1{,}44$
(b): $\Delta x = 0{,}79$

4. (a) Zeichnen Sie für $-3 \leqq x \leqq 3$ den Graphen G_f der Funktion $f: \; x \longmapsto 2^x$ (Längeneinheit 1 cm)

   Nur eine genaue Zeichnung ermöglicht die Beantwortung der folgenden Teilaufgabe!

   (b) Die Gleichungen $\log_2 u = -1{,}7$ und $\log_2 3 = v$ lassen sich nach geeigneter Umformung mit Hilfe des Graphen G_f näherungsweise lösen.
   Veranschaulichen Sie die Lösungen u und v als Strecken im Koordinatensystem der Teilaufgabe (a) und geben Sie einen guten Näherungswert für u und einen für v an!

Lösung: (b): $u \approx 0{,}3$; $v \approx 1{,}6$

5. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot 10^x - 1$ und maximaler Definitionsmenge D_f.

   (a) Geben Sie D_f und die Wertemenge W_f an!

   (b) Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen G_f mit den Koordinatenachsen!

   (c) Bestimmen Sie den Term der Umkehrfunktion f^* von f!

   (d) Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen G_{f^*} mit den Koordinatenachsen durch Überlegung! (Begründung angeben, keine Rechnung!)

Lösung: (a): $D_f = \mathbb{R}$; $W_f =]-1; \infty[$
(b): $(0|1)$ bzw. $(-\lg 0{,}5|0)$
(c): $y = \lg \dfrac{x+1}{2}$
(d): $(0|-\lg 0{,}5)$ bzw. $(1|0)$

6. Die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = 5 \cdot 3^x$ und $g(x) = 2 \cdot x^3$ ergeben bei geeigneter Achseneinteilung jeweils eine Gerade.
   (a) Welche Darstellung muss jeweils gewählt werden? (Keine Zeichnung.)
   (b) Berechnen Sie für die beiden Geraden die Steigung m und den Achsenabschnitt t.

Lösung: (a) Für f:einfach-logarithmisch, für g:doppelt-logarithmisch
(b) bei f: $m = \lg 3$, $t = \lg 5$, bei g: $m = 3$, $t = \lg 2$

7. Gegeben ist die Funktion

$$f : x \longmapsto \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}x}, \ D_f = \mathbb{R}$$

Zeichnen Sie den Graphen im Intervall $[-4; 4]$. (Längeneinheit auf beiden Achsen 1cm.)
   (a) Wenn das Argument um 2 wächst, dann ändert sich der Funktionswert y in charakteristischer Weise. Formulieren Sie diese Änderung in Worten und weisen Sie die Allgemeingültigkeit nach, indem Sie die Funktionswerte für x_1 und $x_2 = x_1 + 2$ vergleichen.
   (b) Bestimmen Sie den Term der Umkehrfunktion und ihren Definitionsbereich. Zeichne Sie den Graphen der Umkehrfunktion noch in das vorhandene Koordinatensystem ein.

Lösung: (a) Er ändert sich um den Faktor $\frac{1}{3}$
(b) $y = -\dfrac{2}{\lg 3} \lg x$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$

1. Berechnen Sie x:
   a) $\log_{\frac{1}{a}} \sqrt[3]{a} = x$ b) $2 \cdot \log_2 x = 5$ c) $\log_x \frac{4}{9} = -2$

Lösung: a) $x = -\frac{1}{3}$ b) $x = 2^{\frac{5}{2}}$ c) $x = \frac{3}{2}$

2. Bestimmen Sie jeweils x:
   a) $\log_x 0{,}008 = -3$ b) $\log_{\sqrt{32}} 0{,}125 = x$ c) $\log_4 \sqrt[7]{16} = x$

Lösung: a) 5, b) $-\frac{6}{5}$, c) $\frac{2}{7}$

3. Geben Sie jeweils x an:
   a) $\log_u \dfrac{1}{u^3} = x$ b) $\log_x \frac{27}{8} = 3$ c) $\log_8 x = \frac{5}{3}$

Lösung: a) -3; b) $\frac{3}{2}$; c) 32

4. Für welches x gilt $\log_x 256 = x$? Am Ende der Rechnung darf probiert werden!

Lösung: $x^x = 256 \quad ; \quad x = 4$

5. Für welches x gilt $\log_x 3125 = x$? Am Ende der Rechnung darf probiert werden!

Lösung: $x^x = 3125 \quad ; \quad x = 5$

6. Welche natürliche Zahl x erfüllt die Gleichung: $\log_x 8 = x + 1$?

Lösung: 2

7. Formen Sie folgende Wortlaute in eine logarithmische Gleichung um und geben Sie jeweils die Lösung an!
   - (a) Mit welcher Zahl muss man 7 potenzieren, um 2401 zu erhalten?
   - (b) Potenziert man eine Zahl mit 5, so erhält man $\frac{243}{32}$.
   - (c) Welche Zahl erhält man, wenn man $\frac{4}{5}$ dreimal mit sich selbst multipliziert?

Lösung: (a) $\log_7 2401 = x$; $x = 4$
(b) $\log_x \frac{243}{32} = 5$; $x = \frac{3}{2}$
(c) $\log_{\frac{4}{5}} x = 3$; $x = \frac{64}{125}$

1. **Flucht aus Heidelberg**

   Im Jahr 1855 flüchtete in Heidelberg ein Student nach einem Duell mit einer Legitimationskarte, die er sich von einem Kommilitonen ausgeliehen hatte. Als die Flucht über die Grenze gelungen war, warf der Student die Karte fort; sie wurde als verdächtig an das Heidelberger Universitätsgericht eingesandt. In der folgenden Untersuchung antwortete der Kommilitone, dem die Karte gehörte, mit einem Satz, der sich zunächst unter den Studenten schnell verbreitete und heute als Redewendung allgemein bekannt ist. Dieser Satz ist der Lösungsspruch des Rätsels.

	Aufgaben:	Lösung
a)	$\log_3 27$	
b)	$\log_3 x = 2 \to x =$	
c)	$\log_x 49 = 2 \to x =$	
d)	$\log_{\frac{3}{4}} 3 - \log_{\frac{3}{4}} 4$	
e)	$(\log_2 2^{25}) : (\log_5 5^5)$	
f)	$\log_3 5 + \log_3 \frac{1}{5}$	
g)	$\log_2 4^2 + \log_2 4$	
h)	$\log_2 16 \cdot \log_2 4$	
i)	$6 \log_3 3 + \log_3 \frac{1}{9}$	
j)	$4(\log_2 88 - \log_2 11)$	
k)	$\log_2(\log_2 2^{2^{10}})$	
l)	$2 \log_2 5 + \log_3 90 + \log_2 \frac{1}{25} - \log_3 10$	

Zuordnung:

Lösung	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Buchstabe	H	S	E	V	T	C	N	O	A	W	I

Lösung	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Buchstabe	B	M	Q	Y	L	Z	G	P	X	R	F

Als **Lösungssatz** ergibt sich eine Redewendung:

j)	l)	k)	g)	g)	h)	j)	l)	k)	d)	i)	f)	h)	d)	l)

k)	e)	f)	b)	l)	k)	d)	d)	a)	c)	g)	g)	k)	e)	f)	i)	d)

Quelle: mathematik lehren (1998), H. 92, S. 60

Lösung: Lösungen der Aufgaben: 3; 9; 7; 1; 5; 0; 6; 8; 4; 12; 10; 2
Lösungssatz: MEIN NAME IST HASE; ICH WEISS VON NICHTS

2. **Flucht aus Heidelberg**

   Im Jahr 1855 flüchtete in Heidelberg ein Student nach einem Duell mit einer Legitimationskarte, die er sich von einem Kommilitonen ausgeliehen hatte. Als die Flucht über die Grenze gelungen war, warf der Student die Karte fort; sie wurde als verdächtig an das Heidelberger Universitätsgericht eingesandt. In der folgenden Untersuchung antwortete der Kommilitone, dem die Karte gehörte, mit einem Satz, der sich zunächst unter den Studenten schnell verbreitete und heute als Redewendung allgemein bekannt ist. Dieser Satz ist der Lösungsspruch des Rätsels.

	Aufgaben:	Lösung
a)	$\log_3 27$	
b)	$\log_3 x = 2 \rightarrow x =$	
c)	$\log_x 49 = 2 \rightarrow x =$	
d)	$\log_{\frac{3}{4}} 3 - \log_{\frac{3}{4}} 4$	
e)	$(\log_2 2^{25}) : (\log_5 5^5)$	
f)	$\log_3 5 + \log_3 \frac{1}{5}$	
g)	$\log_2 4^2 + \log_2 4$	
h)	$\log_2 16 \cdot \log_2 4$	
i)	$6 \log_3 3 + \log_3 \frac{1}{9}$	
j)	$4(\log_2 88 - \log_2 11)$	
k)	$\log_2(\log_2 2^{2^{10}})$	
l)	$2 \log_2 5 + \log_3 90 + \log_2 \frac{1}{25} - \log_3 10$	

Zuordnung:

Lösung	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Buchstabe	H	S	E	V	T	C	N	O	A	W	I

Lösung	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Buchstabe	B	M	Q	Y	L	Z	G	P	X	R	F

Als **Lösungssatz** ergibt sich eine Redewendung:

j)	l)	k)	g)	g)	h)	j)	l)	k)	d)	i)	f)	h)	d)	l)

k)	e)	f)	b)	l)	k)	d)	d)	a)	c)	g)	g)	k)	e)	f)	i)	d)

Quelle: mathematik lehren (1998), H. 92, S. 60

Lösung: Lösungen der Aufgaben: 3; 9; 7; 1; 5; 0; 6; 8; 4; 12; 10; 2
Lösungssatz: MEIN NAME IST HASE; ICH WEISS VON NICHTS

3. (a) $\log_{10} 10^{111}$
   (b) Produktwert der Lösungen der Gleichung $x^2 - 7x + 6$ über $G = \mathbb{N}_0$
   (c) $3(\log_{10} 10^6 + \log_{10} 10^8 + \log_{10} 1000) =$
   (d) $\sqrt{55^2 + 15^2 - 1^4}$

(e) $(\log_2 1024 + \log_2 512)^2$

Quelle: Kreuzzahlrätsel von Ulrike Schätz

Lösung: (a) 111 (b) 6 (c) 51 (d) 57 (e) 361

4. (a) $\sqrt[7]{2187} + 4\log_3 59\,049$
   (b) $72^{0,5} \cdot 162^{0,5}$
   (c) $(1+2)^{\log_{10} 10\,000}$
   (d) Lösung der Gleichung $x^2(x+1)(x-12)$ über $G = \mathbb{R}^+$

   Quelle: Kreuzzahlrätsel von Ulrike Schätz

Lösung: (a) 43 (b) 108 (c) 81 (d) 12

5. (a) $\log_5 3\,125$
   (b) Lösung der Gleichung $\log(2x-21) = 0$ über $]10,5;\infty[$
   (c) $(\log_{10} 10^{10} + \log_5 125)^2$
   (d) $10,5 \cdot \sqrt[4]{38\,416}$
   (e) $\log_2[(2^{10} : 512)^2]$

   Quelle: Kreuzzahlrätsel von Ulrike Schätz

Lösung: (a) 5 (b) 11 (c) 169 (d) 147 (e) 2

6. (a) $4\log_{100} 10^{20}$
   (b) Diskriminante der Gleichung $2x^2 - 25x - 9 = 0$
   (c) $100\log_5 15\,625 + 4\log_5 125 + 3\log_5 125$
   (d) $2\log_7 343 + 4\log_5 625$
   (e) $\log_{10} 1^{20} + \log_{10} 10$

   Quelle: Kreuzzahlrätsel von Ulrike Schätz

Lösung: (a) 40 (b) 697 (c) 621 (d) 22 (e) 1

7. Geben Sie jeweils den Wert des Logarithmus an!

   a) $\log_{10} 0{,}001$ b) $\log_{0{,}25} 256$ c) $\log_{\sqrt[3]{a^2}} \sqrt{a^3}$

Lösung: a) -3, b) -4, c) $\frac{9}{4}$

8. Berechnen Sie <u>ohne</u> Verwendung des Taschenrechners:

$$\log_5 \frac{1}{\sqrt[7]{125}}$$

Lösung: $-\frac{3}{7}$

9. Die folgende Aufgabe soll ohne Verwendung des Taschenrechners bearbeitet werden! Fassen Sie den folgenden Term zunächst zu einem einzigen Logarithmusterm zusammen und vereinfachen Sie diesen dann möglichst weit.

$$\frac{1}{3} \cdot \lg 27 - 3 \cdot \lg 2 + 2 - 3 \cdot \lg 5$$

Lösung: $\lg 0{,}3$

10. Formen Sie folgende Wortlaute in eine logarithmische Gleichung um und geben Sie jeweils die Lösung an!
    (a) Mit welcher Zahl muss man 7 potenzieren, um 2401 zu erhalten?
    (b) Potenziert man eine Zahl mit 5, so erhält man $\frac{243}{32}$.
    (c) Welche Zahl erhält man, wenn man $\frac{4}{5}$ dreimal mit sich selbst multipliziert?

Lösung: (a) $\log_7 2401 = x$; $x = 4$
(b) $\log_x \frac{243}{32} = 5$; $x = \frac{3}{2}$
(c) $\log_{\frac{4}{5}} x = 3$; $x = \frac{64}{125}$

11. Berechnen Sie folgenden Term:

$$\log_{\frac{1}{a^2}} \sqrt[3]{a} - \log_{\sqrt{a}} \left(\frac{1}{a} \cdot \sqrt[5]{a} \right)$$

Lösung: $\frac{43}{30}$

12. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\log_2 \frac{8}{7} - \log_2 \sqrt{3} + \log_2 \frac{9}{5} - \log_2 \frac{\sqrt{27}}{35}$$

Lösung: 3

13. Fassen Sie zu einem einzigen Logarithmus zusammen und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$2 \cdot \log u \,-\, 3 \cdot \log \sqrt{u} \,+\, \frac{1}{3} \cdot \log u^2$$

Lösung: $\log u^{\frac{7}{6}}$

14. Fassen Sie folgenden Term so weit wie möglich zusammen:

$$\frac{1}{2} \cdot (1 \,+\, \log_a b \,-\, \log_a c^3) \qquad a, b, c \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$$

Lösung: $\log_a \sqrt{\frac{ab}{c^3}}$

15. Vereinfachen Sie so weit wie möglich ($a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$):

$$\log_2 \frac{a}{4} \,+\, 3 \cdot \log_2 \sqrt{8} \,-\, \log_4 a^2 \,+\, \log_a \sqrt{a}$$

Lösung: 3

16. Das gleichseitige Dreieck ABC ist Grundfläche der Pyramide $ABCS$. Der Fußpunkt der Pyramidenhöhe ist A, die Höhe 6 m, das Volumen $8\sqrt{3}\,\mathrm{m}^3$ groß.
    (a) Erstellen Sie eine saubere und übersichtliche Schrägbildskizze!
    (b) Berechnen Sie die Längen sämtlicher Pyramidenkanten!
    (c) Welchen Neigungswinkel haben die Ebenen $E(A; B; C)$ und $E(B; C; S)$?

Lösung: (b): $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = 4\,m;\ \overline{SC} = \overline{SB} = 2\sqrt{13}\,m;\ \overline{SA} = 6\,m$
(c): 60^o

17. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\log_a z^{-0{,}5} - 0{,}25 \cdot \log_a z + 0{,}1 \cdot \log_a \frac{\sqrt{z}}{z^3}$$

Lösung: $-\log_a z$

18. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$2\log_a \frac{x}{2} - 3\log_a 0{,}25y + \log_a x\sqrt{x} - \log_a \frac{1}{y^3} - log_a\sqrt{4x}$$

Lösung: $3\log_a 2x$

19. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\log_b 16 - \log_b 2\sqrt{2b} + \log_b \sqrt{2b} + \log_b(0{,}125b^2)$$

Lösung: 2

20. (a) Weisen Sie die Gültigkeit der folgenden Gleichung nach:

$$\log_{\frac{1}{6}} 216 = -3$$

(b) Berechnen Sie unter Verwendung der Gleichung aus Aufgabe (a) den Wert des Terms:

$$\frac{\log_{\frac{1}{6}} \sqrt[5]{216} \cdot (\log_{\frac{1}{6}} 108 - \log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{2})}{\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}}$$

Lösung: $\frac{3}{5}$

21. Für welche $b, v, w \in \mathbb{R}$ gilt: $\log_b v^w = w \log_b v$

Lösung: $v > 0$; $b > 0$ und $b \neq 1$; w beliebig

22. Für welche $b, x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y$

Lösung: $x > 0$; $y > 0$; $b > 0$ und $b \neq 1$

23. Gegeben ist die Formel:

$$\log_b z = \frac{1}{\log_z b}$$

(a) Prüfen Sie die Formel am Beispiel: $b = 8$, $z = 32$

(b) Beweisen Sie die Formel. (Hinweis: Setze $z = b^u$)

Lösung:

24. Gegeben ist der Term

$$\log_3[3\sqrt{3}\cdot(x^2-y^2)]-\log_9{(x-y)}^4-\log_3(x+y)$$

wobei x und y reelle Zahlen vertreten.

(a) Welche Beziehung muss zwischen x und y bestehen, damit obiger Term definiert ist?

(b) Man vereinfache den Term so weit wie möglich!

Lösung: (a): $x+y>0 \ \wedge \ x-y>0$ (b): $1{,}5-\log_3(x-y)$

25. Gesucht ist irgendein $x>2$, so dass

$$2^x \ > \ x^{1\,000\,000}.$$

Lösung: z.B. $x=2^{25}$ (Monotonie des Logarithmus verwenden!)

1. Bestimmen Sie, falls möglich, die Lösung auf 3 geltende Ziffern genau:
a) $10^{8x}=-7$ b) $1{,}8\cdot 10^{x-7}=4{,}32$

Lösung: (a) $L=\{\}$ (b) $x=7{,}38$

2. Bestimmen Sie die Lösung auf 6 Dezimalen genau: $2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=2$

Lösung: $x\approx -1{,}807355$

3. Bestimmen Sie x:

$$5^x=2\cdot 3^x$$

Lösung: $x=\frac{\lg 2}{\lg\frac{5}{3}}$

4. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$3^{x-1}=5\cdot 2^x$$

Lösung: $1 + \frac{1}{\lg 1{,}5} = 6.67887$

5. Berechnen Sie die Lösungsmenge: $5^{2x} - 27 \cdot 5^x = 0$

Lösung: $L = \{\, \frac{\lg 27}{\lg 5} \,\} = \{\, 2{,}048 \,\}$

6. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$3 \cdot 9^x \;-\; 7 \cdot 3^x \;+ 2 \;=\; 0$$

Lösung: $L = \{-1; \frac{\lg 2}{\lg 3}\}$

7. Berechnen Sie die Lösungsmenge: $5^{2x} + 50 = 27 \cdot 5^x$

Lösung: $L = \left\{ 2\,;\, \dfrac{\lg 2}{\lg 5} \right\}$

8. Berechnen Sie die Lösungsmenge: $5^{2x} - 27 \cdot 5^x = 0$

Lösung: $L = \{\, \frac{\lg 27}{\lg 5} \,\} = \{\, 2{,}048 \,\}$

9. Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung:

$$2 \cdot 5^{x+1} - 3 \cdot 5^{2-x} = 5$$

Lösung: Substitution und Lösung einer quadratischen Gleichung: $x = \frac{\lg 3}{\lg 5}$

10. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$5 \cdot 25^x \;-\; 16 \cdot 5^x \;+ 3 \;=\; 0$$

Lösung: $L = \{-1; \frac{\lg 3}{\lg 5}\}$

11. Berechnen Sie die Lösungsmenge: $\log_{0{,}01} x + \log_{1000}(2\,x) = \lg 2$

Lösung: $D = \mathbb{R}^+$, $L = \left\{ \dfrac{1}{16} \right\}$

12. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung in der Grundmenge $G = \mathbb{R}$:

$$(5^{x+1})^2 - 4 \cdot 5^{x+1} + 3 = 0$$

Lösung: $x_1 = -1 + \log_5 3$; $x_2 = -1$

1. Wir untersuchen die Funktion$f : x \longmapsto \log_2 x$
   (a) Zeichnen Sie zunächst den Graphen der Umkehrfunktion von f und entwickeln Sie daraus den Graphen von f im Intervall $[0; 8]$ (Einheit 1 cm).
   (b) Wie erhält man daraus geometrisch den Graphen von $x \longmapsto \log_{\frac{1}{2}} x$? Zeichnung und algebraische Begründung!
   (c) Bestimmen Sie graphisch $\log_2 5$.

Lösung: (a) Zeichnung mit Hilfe ganzzahliger Werte von $y = 2^x$. Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.
(b) Spiegelung an der x-Achse
(c) 2,32

2. (a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \log_3 x$ in $D_f = \mathbb{R}^+$ unter Zuhilfenahme des Graphen einer geeigneten Exponentialfunktion g. Geben Sie die Funktionsgleichung von g an!
   (b) Die Punkte $A(9|y_A)$, $B(x_B|\frac{1}{2})$ und $C(5|y_C)$ liegen auf G_f. Geben Sie die fehlenden Koordinaten zunächst exakt und dann auf zwei Dezimalen gerundet an!
   (c) Für welche x-Werte sind die Funktionswerte von f größer als 5?

Lösung: $g(x) = 3^x$; $y_A = 2$; $x_B = \sqrt{3} \approx 1{,}73$; $y_C = \log_3 5 \approx 1{,}46$; $x > 243$

3. Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung
   $f(x) = \lg(x^2 + 1)$ in ihrem maximalen Definitionsbereich.
   (a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich und die Wertemenge der Funktion f an! (Begründung!)
   (b) Fertigen Sie eine saubere Zeichnung des Funktionsgraphen G_f im Bereich $0 \leq x \leq 7$! (Einheit auf beiden Achsen: 1cm)
   Erstellen Sie dazu eine Wertetabelle für $x \in \{0; 1; 2; ...; 7\}$
   (c) Für welchen Wert von a $(a > 0)$ hat der Graph der Funktion $g(x) = \lg(ax)$ mit G_f nur $\underline{\text{einen}}$ gemeinsamen Punkt?

Lösung: $D = \mathbb{R}$; $W = \mathbb{R}_0^+$; $a = 2$

4. Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen

$$y = \log_2 x \qquad \text{und} \qquad y = \log_{\frac{1}{2}} x \qquad D = \mathbb{R}^+$$

in ein Koordinatensystem.
Beweisen Sie anschließend: $\log_a x + \log_{\frac{1}{a}} x = 0$

Lösung: $\log_{\frac{1}{a}} x = \frac{\log_a x}{\log_a \frac{1}{a}} = -\log_a x$

5. Bestimmte Logarithmuskurven liegen symmetrisch zueinander.
   (a) Um welche Art von Symmetrie handelt es sich?
   (b) Geben Sie ein Beispiel dafür an. Wie lautet der allgemeine Zusammenhang zwischen den Funktionstermen zweier solcher Kurven?

Lösung: (a) Symmetrie zur x-Achse
(b) $\log_b x$ und $\log_{\frac{1}{b}} x$

6. (a) Bestimmen Sie a und b so, dass sich die Graphen der Funktionen mit den Funktionsgleichungen $y = a^x$ und $y = \log_b x$ im Punkt $P(3|8)$ schneiden.
   (b) Bestimmen Sie jeweils die Umkehrfunktion und geben Sie einen Schnittpunkt der Graphen der Umkehrfunktionen an.
   (c) Welche Bedingung muss eine Funktion erfüllen, damit sie umkehrbar ist? (Ohne Begründung!)

Lösung: (a) $a = 2$; $\quad b = 3^{\frac{1}{8}} \approx 1{,}1472$
(b) $y = \log_2 x$; $\quad y = (\sqrt[8]{3})^x$; $\quad Q(8|3)$
(c) Jedem x-Wert darf höchstens ein x-Wert zugeordnet sein.

7. In dieser Aufgabe untersuchen wir die allgemeine Logarithmusfunktion

$$f(x) = A \cdot \log_B(C\,x + D) + E$$

   (a) Beweisen Sie, dass $f(x)$ in der Form

$$g(x) = a\ \lg(x + b) + c$$

   dargestellt werden kann und drücken Sie die Konstanten a, b und c durch A, B, C, D und E aus!

(b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \lg 8 \cdot \log_2(100\,x + 500) - 5$ nach Umformung wie in Teilaufgabe (a)! Wie geht der Graph von f aus dem Graphen von $f_0(x) = 3\ \lg x$ hervor? Berechnen Sie die Nullstelle von f!

(c) Ermitteln Sie die Gleichung der allgemeinen Logarithmusfunktion f, deren Graph die Punkte $P(-2{,}9|-6)$, $Q(-2|-2)$ und $R(7|2)$ enthält! Zeichnen Sie den Graphen von f nach Ermittlung der Definitionsmenge und der Nullstelle!

Hinweis: Verwenden Sie $\dfrac{f(7) - f(-2{,}9)}{f(7) - f(-2)}$ zur Berechnung von b!

Lösung: (a) $A = \dfrac{A}{\lg B}$, $b = \dfrac{D}{C}$, $c = \dfrac{A \lg C}{\lg B} + E$

(b) $f(x) = 3\ \lg(x+5)+1$. Verschiebung um 5 nach links und 1 nach oben. $x_0 = 10^{-\frac{1}{3}} - 5 \approx -4{,}54$

(c) $\lg \dfrac{b+7}{b-2{,}9} = 2 \cdot \lg \dfrac{b+7}{b-2} \implies \dfrac{b+7}{b-2{,}9} = \left(\dfrac{b+7}{b-2}\right)^2 \implies b = 3$

$f(x) = 4\ \lg(x+3) - 2$, $D_f =]-3\,; +\infty[$, $x_0 = -3 + \sqrt{10} \approx 0{,}16$

8. Die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = 5 \cdot 3^x$ und $g(x) = 2 \cdot x^3$ ergeben bei geeigneter Achseneinteilung jeweils eine Gerade.
   (a) Welche Darstellung muss jeweils gewählt werden? (Keine Zeichnung.)
   (b) Berechnen Sie für die beiden Geraden die Steigung m und den Achsenabschnitt t.

Lösung: (a) Für f:einfach-logarithmisch, für g:doppelt-logarithmisch

(b) bei f: $m = \lg 3$, $t = \lg 5$, bei g: $m = 3$, $t = \lg 2$

1. Jod 131 hat eine Halbwertszeit von 8 Tagen. Nach wie vielen Tagen sind 95% einer ursprünglich vorhandenen Stoffmenge zerfallen?

Lösung: 34,6 Tage

2. Faltet man ein Stück Papier im DIN-Format mehrfach längs einer Mittellinie, so liegen erst zwei, dann vier Schichten übereinander. Es wird dabei immer kleiner und dicker. Wie oft müsste man es falten können, um einen Turm zu erhalten, der bis zum Mond reicht? (Entfernung des Mondes:384000 km, Papierdicke 0,2 mm)

Lösung: Bei einer Dicke von 0,2 mm erhält man ca. $n = 41$ Faltungen.

3. Am 1.1.1960 lebten $a_0 = 3{,}01$ Milliarden Menschen auf der Erde. In welchem Jahr überschreitet die Erdbevölkerung die 10 Milliardengrenze, wenn der jährliche Zuwachs 1,9% beträgt? In welchem Jahr erreichte die Menschheit die 2 Milliardengrenze?

Lösung: $n \approx 63{,}79\,a \Longrightarrow$ im Jahre 2023 ; $n \approx -21{,}72\,a \Longrightarrow$ im Jahre 1938

4. In einer Schale mit Nährflüssigkeit leben am 1.1.1995 um 0.00 Uhr genau $N_0 = 100$ Bakterien. Die Bakterienkultur wächst täglich um 24%. An welchem Tag (Datum!) überschreitet die Kultur die Millionengrenze? An welchem Tag wurde die Kultur mit genau 8 Bakterien angesetzt?

Lösung: $n \approx 42{,}82\,d \Longrightarrow$ am 12.02.1992 ; $n \approx -11{,}74\,d \Longrightarrow$ am 20.12.1991

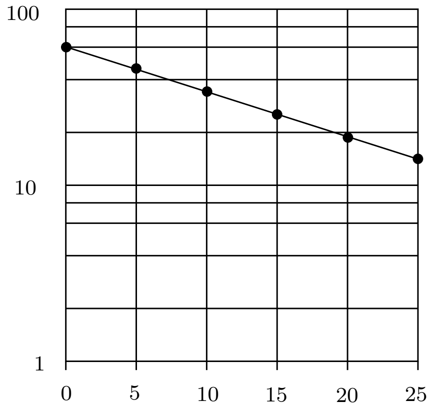
5. Die Temperatur einer vollen Kaffetasse ist um 60^0C höher als die Zimmertemperatur. Nun wird der Temperaturunterschied $\Delta\vartheta$ zur Zimmertemperatur in gleichmäßigen Zeitabständen gemessen:

t in min	0	5	10	15	20	25
$\Delta\vartheta$ in ^0C	60	45	34	25	19	14

(a) Zeichnen Sie auf dem beiliegenden halblogarithmischen Papier ein t-$\Delta\vartheta$-Diagramm.

(b) Welche Bedeutung hat der geradlinige Verlauf des Graphen im Diagramm für den Zusammenhang von t und ϑ?

Lösung: Ein geradliniger Verlauf in halblogarithmischer Darstellung entspricht einer Exponentialfunktion. Der Ansatz $\Delta\vartheta = 60^0 \cdot 10^{-\beta t}$ liefert logarithmiert $\log\frac{\Delta\vartheta}{60^0} = -\beta t$. Substitution $y = \log\frac{\Delta\vartheta}{1^0}$ ergibt die Geradengleichung $y = \log 60 - \beta t$ und $-\beta = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\log 14 - \log 60}{25\ \text{min}}$ bzw. $\beta = \frac{1}{25\ \text{min}} \cdot \log\frac{30}{7}$



6. Die Helligkeit eine Sterns kann man physikalisch durch die auf der Erde einfallende **Lichtintensität** E (Energie pro Flächen- und Zeiteinheit) beschreiben. n gleichartige Sterne am selben Ort des Himmels bewirken also die n-fache Lichtintensität. Die Helligkeitsempfindung im Auge hängt damit zusammen, wir bezeichnen sie als **scheinbare Helligkeit** m. Zwischen E und m besteht folgender Zusammenhang (Weber-Fechnersches Gesetz):

$$m = -2{,}5 \lg \frac{E}{E_0}$$

(Dabei ist E_0 die Intensität eines Sternes der Helligkeit $m = 0$, die Helligkeit von Mars und Saturn schwankt um diesen Wert.)

   (a) Ein bestimmter Stern hat die scheinbare Helligkeit m_0. Wie würde sich diese ändern, wenn am selben Ort nicht ein sondern 10 gleichartige Sterne wären?

   (b) Die Sonne hat die scheinbare Helligkeit $m_S = -28$. Um welchen Faktor unterscheidet sich ihre Lichtintensität von der des Polarsterns mit $m_P = 2$? (Löse die Gleichung nach E auf!)

Lösung: (a) $-2{,}5$

(b) 10^{12}

7. Die Intensität I einer Schallwelle ist definiert als einfallende Leistung pro Fläche und wird in $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ gemessen. Das Ohr eines jungen Menschen kann im Frequenzbereich von ca. 1000 Hz gerade noch die Intensität $I_{01} = 10^{-12}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ wahrnehmen (Hörschwelle), bei tiefen Tönen ($\approx 100\,\mathrm{Hz}$) liegt die Hörschwelle bei $I_{02} = 10^{-9}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$. Die Lautstärke L einer Schallwelle ist definiert durch

Schallquelle	Schall-Leistung
menschliche Sprache	$7 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{W}$
Geige	$1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{W}$
Flügel	$2 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{W}$
Trompete	$3 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{W}$
Hupe	$5\,\mathrm{W}$
Orgel	$10\,\mathrm{W}$
Lautsprecher	$100\,\mathrm{W}$
Sirene	$3000\,\mathrm{W}$

$$L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}\,\mathrm{phon}\,,$$

wobei für I_0 die Intensität der Hörschwelle bei der jeweiligen Frequenz einzusetzen ist. Die Benennung **phon** gibt an, dass es sich um eine Lautstärke handelt, ist aber keine Einheit im physikalischen Sinn.

   (a) Berechnen Sie für die Schallquellen der Tabelle die Intensitäten und Lautstärken in der Entfernung $d = 4\,\mathrm{m}$, und zwar einmal für 1000 Hz und einmal für 100 Hz. Gehen Sie davon aus, dass die Schallwellen in alle Richtungen gleich stark abgestrahlt werden.

(b) Wie geht der Graph der Funktion $L_2(I) = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_{02}}$ aus dem Graphen von $L_1(I) = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_{01}}$ hervor? Zeichnen Sie beide Graphen einmal im Intervall $10^{-12}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \leqq I \leqq 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ und einmal im Intervall $10^{-12}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \leqq I \leqq 3\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ jeweils in ein Koordinatensystem! Versuchen Sie graphisch für beide Frequenzen die I-Werte zu bestimmen, die zu den Lautstärken 35 phon bzw. 85 phon gehören! Welche Schwierigkeit ergibt sich dabei?

(c) Um die in Teilaufgabe (b) auftretenden Schwierigkeiten zu beseitigen, führen wir die neue Variable $x = \lg I$ ein. Drücken Sie L_1 und L_2 durch x aus und zeichnen Sie die Graphen von $L_1(x)$ und $L_2(x)$ im Intervall $10^{-12}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \leqq I \leqq 10^{3}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ in ein Koordinatensystem! Bestimmen Sie graphisch und durch Rechnung die fehlenden Werte in folgender Tabelle:

I in $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$	$4 \cdot 10^{-6}$		
L_1 in phon		9	
L_2 in phon			80

Lösung: (a) $I = \dfrac{P}{4\,\pi\,r^2}$, $\qquad L_2 = L_1 - 30$

P in W	$7 \cdot 10^{-6}$	0,001	0,2	0,3	5	10	100	3000
I in $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$	$3{,}5 \cdot 10^{-8}$	$5{,}0 \cdot 10^{-6}$	$9{,}9 \cdot 10^{-4}$	0,0015	0,025	0,050	0,50	15
L_1 in phon	45	67	90	92	104	107	117	132
L_2 in phon	15	37	60	62	74	77	87	102

(b) Verschieben um 30 nach unten.
$L_1 = 35\,\text{phon} \Longrightarrow I = 3{,}2 \cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ $\qquad L_2 = 85\,\text{phon} \Longrightarrow I = 0{,}32\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$
Die beiden anderen Werte sind nicht ablesbar.
(c) $L_1(x) = 10\,x + 120$, $\quad L_2(x) = 10\,x + 90$

I in $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$7{,}9 \cdot 10^{-12}$	0,1
L_1 in phon	66	9	110
L_2 in phon	36	−21	80

8. Das dritte Planetengesetz von Kepler

In der folgenden Tabelle wird vereinfachend angenommen, die Planeten der Sonne bewegten sich auf Kreisbahnen vom Radius a um die Sonne. Der Bahnradius der Erde wird als Astronomische Einheit bezeichnet: $1\mathrm{AE} = 1{,}496 \cdot 10^8\mathrm{km}$. Es wird ein funktionaler Zusammenhang zwischen dem Bahnradius a und der Umlaufszeit U der Planeten um die Sonne gesucht, dieser wird als drittes Keplersches Gesetz bezeichnet.

Das dritte Keplersche Gesetz

Planet	a in 10^8km	$a' = \frac{a}{1\text{AE}}$	$\log a'$	U in Jahren	$\log U$	$\frac{\log U}{\log a'}$
Merkur	0,579			0,241		
Venus	1,082			0,615		
Erde	1,496			1,000		
Mars	2,274			1,880		
Jupiter	7,779			11,860		
Saturn	14,287			29,500		
Uranus	28,723			84,000		
Neptun	45,030			164,800		
Pluto	59,391			247,700		

(a) Vervollständigen Sie die Tabelle.

(b) Tragen Sie $\log U$ in Abhängigkeit von $\log a'$ auf.

(c) Leiten Sie mit Hilfe des Diagramms eine Gleichung zwischen U und a' her.

Lösung: Die Zahl der Planeten sollte bedarfsgerecht verringert werden. Die Quotienten der Logarithmen variieren zwischen 1.499 und 1.508, mit dem Mittelwert 1,500. Dies ergibt $\log U = \log a'^{1,5}$ bzw. $U = a'^{1,5}$

9. Die Explosion einer Atombombe läuft im Prinzip folgendermaßen ab:
Ein Neutron spaltet einen Plutoniumkern, wobei drei weitere Neutronen entstehen (1. Zerfallsstufe). Jedes der drei erzeugten Neutronen spaltet einen weiteren Kern und es entstehen insgesamt neun Neutronen (2. Zerfallsstufe). Dieses Spiel setzt sich solange fort, bis alle Plutoniumkerne zerfallen sind (Kettenreaktion). Wie lange dauert der vollständige Zerfall eines Plutoniumstücks mit $N = 7{,}85 \cdot 10^{26}$ Kernen, wenn die Dauer einer Zerfallsstufe $\tau = 10^{-8}\,\text{s}$ beträgt?

Lösung: In der k-ten Stufe zerfallen $a_k = 3^{k-1}$ Neutronen.

Nach n Stufen sind $N = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \frac{3^n - 1}{2}$ Kerne zerfallen.

$$\Delta t = n\,\tau = \frac{\lg(2\,N + 1)}{\lg 3} \cdot \tau = 5{,}7 \cdot 10^{-7}\,\text{s}$$

10. N_0 Teilchen einer radioaktiven Strahlung treffen auf eine Bleiplatte der Dicke x. Wegen der abschirmenden Wirkung des Bleis sind nach der Platte nur noch $N = f(x) = N_0 \cdot 10^{-\lambda x}$ Teilchen mit $\lambda = 0{,}40\,\frac{1}{cm}$ vorhanden.

(a) Zeichnen Sie den Graphen von $f(x)$ im Intervall $[\,0\,;\,5\,\text{cm}\,]$ ($N_0 \widehat{=} 10\,\text{cm}$)!

(b) Für welche Plattendicke x_H (Halbwertsdicke) wird die Strahlung auf die Hälfte reduziert?

(c) Welche Gleichung hat die Umkehrfunktion $x = g(N)$? Welche Definitionsmenge ist für g nur sinnvoll? Zeichnen Sie den Graphen von g ($N_0 \widehat{=} 10\,\text{cm}$)! Wie geht der Graph von g aus dem Graphen von $h(x) = \dfrac{\lg N}{\lambda}$ hervor?

Lösung: (b) $x = \dfrac{\lg 2}{\lambda} = 0{,}75\,\text{cm}$

(c) $x = g(N) = \dfrac{\lg N_0 - \lg N}{\lambda}$; $D_g =]\,0\,;\,N_0\,]$

Spiegelung an der N-Achse und Verschiebung um $\dfrac{\lg N_0}{\lambda}$ nach oben.

11. Die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = 5 \cdot 3^x$ und $g(x) = 2 \cdot x^3$ ergeben bei geeigneter Achseneinteilung jeweils eine Gerade.

(a) Welche Darstellung muss jeweils gewählt werden? (Keine Zeichnung.)

(b) Berechnen Sie für die beiden Geraden die Steigung m und den Achsenabschnitt t.

Lösung: (a) Für f:einfach-logarithmisch, für g:doppelt-logarithmisch

(b) bei f: $m = \lg 3$, $t = \lg 5$, bei g: $m = 3$, $t = \lg 2$

1. Die größte Zahl, die man mit dreimal der Ziffer 5 schreiben kann, ist $x = 5^{5^5}$.

Bringen Sie x in die Gleitkommadarstellung, d.h. in die Form

$$x = a \cdot 10^n \quad \text{mit } 1 \leqq a < 10 \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Berechnen Sie zuerst y mit $x = 10^y$.

Lösung: $x = 5^{3125} = 10^y \quad \Longrightarrow \quad y = 3125 \cdot \lg 5 = 2184{,}28126$

$x = 10^{2184{,}28126} = 10^{0{,}28126} \cdot 10^{2184} = 1{,}911 \cdot 10^{2184}$

2. Wir betrachten die sehr große Zahl $x = 7^{3^8}$. Wie lang ist die ausgeschriebene Zahl, wenn pro Ziffer 0,5 cm beansprucht werden? Schreiben sie x als Gleitkommazahl mit drei geltenden Ziffern hin!

Lösung: $x = 4{,}88 \cdot 10^{5544} \quad \Longrightarrow \quad 5545$ Ziffern $\widehat{=}$ 27,725 m

3. Wir betrachten die sehr große Zahl $x = 8^{4^6}$. Wie lang ist die ausgeschriebene Zahl, wenn pro Ziffer 0,5 cm beansprucht werden? Schreiben sie x als Gleitkommazahl mit drei geltenden Ziffern hin!

Lösung: $x = 1{,}14 \cdot 10^{3699} \quad \Longrightarrow \quad 3700$ Ziffern $\widehat{=}$ 18,5 m

4. Die größte bekannte Primzahl war im Jahr 1994 die Zahl

$$p = 2^{859433} - 1$$

(a) a bezeichne eine Zahl aus dem Intervall $[l; l+1[$ $(l \in \mathbb{N})$. Wie viele Stellen besitzt die Zahl $z = 10^a$ in der Dezimaldarstellung. Begründen Sie präzise!

(b) Wieviele Dezimalen hat die Zahl $z = 2^{859433}$?

(c) Begründen Sie, dass p die gleiche Anzahl von Dezimalen hat.

(d) Wieviele Seiten im DIN A4 Format füllt die Zahl, wenn man eine Seite mit 40 Zeilen zu 80 Zeichen bedruckt?

Lösung: (a) Wegen der Monotonie gilt $10^l \leqq z < 10^{l+1}$, z hat also $l+1$ Stellen falls $a < 10^{l+1}$.

(b) Die Stellenzahl von $z = 2^{859433}$ ist $l = [\log_{10} 2 \cdot 859433] + 1 = 258716$ (Gauss'sche Klammer).

(c) Es kann nicht $z = 10^l$ sein (warum?), also haben z und p gleiche Stellenzahl.

(d) 81 Seiten.

Teil IV.

Stochastik: Zusammengesetzte Zufallsexperimente

14. Stochastik: Zusammengesetzte Zufallsexperimente

14.1. Pfadregeln

1. **Aufgaben zur Anwendung**

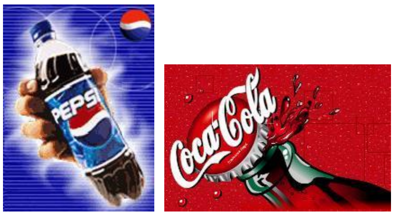
   Die Ritter Kunibald, Georgius und Ottokar sind bei einer Schlacht gefangen genommen und anschließend zum Tode verurteilt worden. Der Herrscher beschließt, einen der drei per Losverfahren zu begnadigen. Der Name des Glücklichen wird streng geheim gehalten. Kunibald sagt sich: „Die Wahrscheinlichkeit, dass ich es bin, beträgt $\frac{1}{3}$.„ Er sagt dem Wärter: „Einer der beiden anderen wird sicher hingerichtet werden. Du wirst mir also nichts verraten, wenn du mir einen Mann nennst, Georgius oder Ottokar, der hingerichtet wird.“ Darauf sagt der Wärter, „Ottokar wird hingerichtet.“ Die Antwort hat Kunibald ermutigt, denn damit wird er oder aber Georgius sicher nicht hingerichtet. Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass er selbst überlebt, $\frac{1}{2}$. Hat Kunibald Recht?

Lösung: Er hat nicht recht, da die Entscheidung durch Losverfahren ($p = \frac{1}{3}$) getroffen wird.

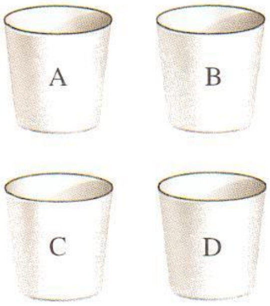
Auf $p = \frac{1}{2}$ käme man, wenn unter der Bedingung ,,Ottokar wird hingerichtet” das Los zwischen Kunibald und Georgius entscheiden würde.

2. **Pepsi vs. Coca-Cola**

   Über Geschmack lässt sich bekanntermaßen streiten. Häufig stellt sich nämlich die Frage, ob der Unterschied zwischen zwei Produkten überhaupt feststellbar ist. Einer der wohl bekanntesten Tests diesbezüglich ist der sogenannte Pepsitest. Bei diesem versucht man herauszufinden, ob sich in einem Becher Pepsi oder eine andere Cola befindet. Dieser Test soll im Folgenden unter Berücksichtigung mathematischer Aspekte durchgeführt werden.



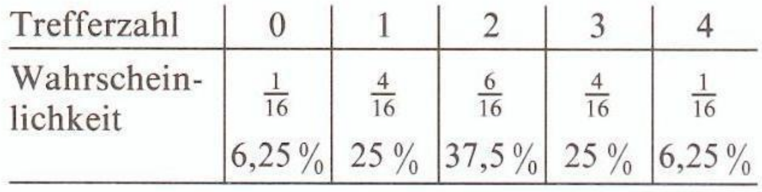
Schritt 1: Bestimmt einen Versuchsleiter (Schüler oder Lehrer).
Schritt 2: Der Versuchsleiter füllt - von der Klasse unbeobachtet - der Reihe nach vier beschriftete Becher A, B, C, D je nach Ausfall eines Münzwurfs mit Pepsi oder Coca-Cola.
Vorschrift: Zahl $\sim$ Pepsi / Wappen $\sim$ Coca-Cola



Schritt 3: Die Becher machen die Runde durch die Klasse. Jeder kostet die vier Getränke mit einem Trinkhalm und entscheidet, welche Colasorte sich in den einzelnen Bechern befinden. Die Ergebnisse werden an der Tafel gesammelt.
Schritt 4: Der Versuchsleiter gibt die tatsächliche Füllung bekannt. Jeder ermittelt seine Trefferzahl.
Schritt 5: Die erreichten Trefferzahlen der Klasse werden in einer Tabelle zusammengefasst, in der sowohl die absolute als auch die relative Häufigkeit für die einzelnen Trefferzahlen bestimmt werden.

Trefferzahl	0	1	2	3	4
abs. Häufigk.					
rel. Häufigk.					

Schritt 6: Wenn man annimmt, dass der Unterschied zwischen den Colasorten überhaupt nicht zu schmecken ist, dann erhält man bei jedem der Becher A bis D einen Treffer nur mit 50sich dann vorstellen, dass die Anzahl der Treffer völlig ohne Kostproben für jeden Versuchsteilnehmer durch viermaliges Werfen einer Münze ermittelt werden kann. Rechnet nach, dass dann die neben stehenden Wahrscheinlichkeiten stimmen.



Trefferzahl	0	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$
	6,25 %	25 %	37,5 %	25 %	6,25 %

Schritt 7: Vergleicht die Ergebnisse aus **Schritt** 5 mit denen aus **Schritt 6**. Was lässt sich damit über die Möglichkeit, den unterschiedlichen Geschmack zu schmecken, aussagen? Quelle: Lambacher Schweitzer 8, S. 172 (leicht verändert)

Variationen:

Variation der Produkte, der Kostprobenzahl, der Produktanzahl

3. **Dunkelfeldforschung**

Ein Kriminologe möchte in einer Befragung (Stichprobe: 1000 Personen) herausfinden, wie viel Prozent der Bundesbürger bereits einmal einen Ladendiebstahl begangen haben. Da aber auf die direkte Frage („Haben Sie bereits einmal einen Ladendiebstahl begangen?“) vermutlich viele Befragte nicht ehrlich antworten würden, plant er folgendes Verfahren: Er legt jedem Befragten 10 gleich aussehender Kärtchen vor. Auf 4 dieser Kärtchen steht: „Ist es richtig, dass Sie bereits einmal einen Ladendiebstahl begangen haben?“ Auf den 6 anderen steht: „Ist es richtig, dass Sie noch nie einen Ladendiebstahl begangen haben?“ Der Befragte zieht nun eines dieser Kärtchen, ohne dass der Kriminologe dies sehen kann, und beantwortet die darauf stehende Frage wahrheitsgemäß (mit ja oder nein).

(a) Wie lässt sich anhand dieses Vorgehens der Anteil der Bürger schätzen, die schon einmal einen Ladendiebstahl begangen haben?

(b) Was ändert sich, wenn gleich viele von beiden Sorten Kärtchen vorhanden sind?

Quelle: MatheNetz 9 (2001)

Lösung: Sei A: Die gezogene Frage wird bejaht
B: Es wurde Frage 1 gezogen
C: Es wurde Frage 2 gezogen
p: Anteil der Bürger, die schon einmal einen Ladendiebstahl begangen haben
Also: $P(B) = 0,4$; $P(C) = 0,6$ sowie $P(A|B) = p$; $P(A|C) = 1 - p$
Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit (oder elementar hergeleitet) folgt daher:

$P(A) = 0,4 \cdot p + 0,6 \cdot (1 - p) = 0,6 - 0,2 \cdot p \Leftrightarrow p = 3 - 5 \cdot P(A)$
Setzt man nun für $P(A)$ die relative Häufigkeit $h(A)$ der Ja-Antworten aus der Umfrage ein, kann man also den entsprechenden Anteil p schätzen.

4. **Dopingproben (1)**

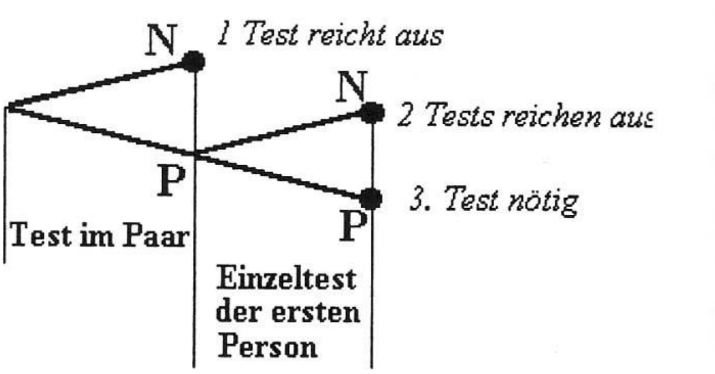
Nach einem großen Sportfest sollen alle Sportler Urinproben abgeben, mit Hilfe derer Dopingproben durchgeführt werden sollen.
Es werden zwei Möglichkeiten vorgeschlagen:

(a) Jede Probe wird einzeln überprüft.

(b) Jeweils Teile von zwei Proben werden zusammengeschüttet und das Resultat getestet. Fällt es positiv aus, testet man die Einzelproben.

Vergleicht die beiden Vorschläge.

Quelle: ISTRON 6, S. 124/125

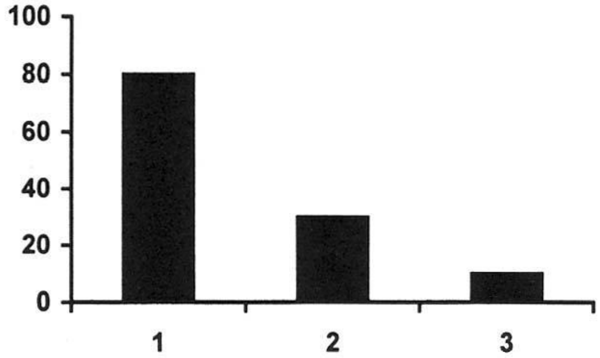


Lösung:

Entweder ist nur ein Test pro Paar erforderlich (wenn kein Doping nachgewiesen)
oder zwei Tests (wenn Doping nachgewiesen und erster Nachtest negativ)
oder drei Tests (wenn Doping nachgewiesen und erster Nachtest positiv)
Also:
Bei Einzeltests sind bei n Teilnehmern n Tests erforderlich, bei „Doppeltests“ dagegen abhängig von Dopingquote: min. $\frac{n}{2}$ Tests und max. $1,5 \cdot n$ Tests.

5. **Dopingproben (2)**

Im folgenden Diagramm ist dargestellt, wie oft beim Dopingtest nach dem Sportfest die zwei Proben eines Paares jeweils nur einmal, zweimal oder sogar dreimal getestet werden mussten.



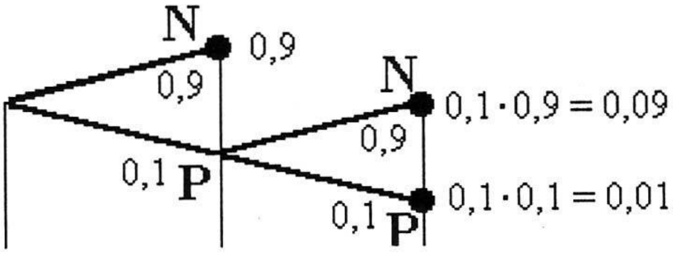
Was kann man alles aus diesem Diagramm entnehmen?

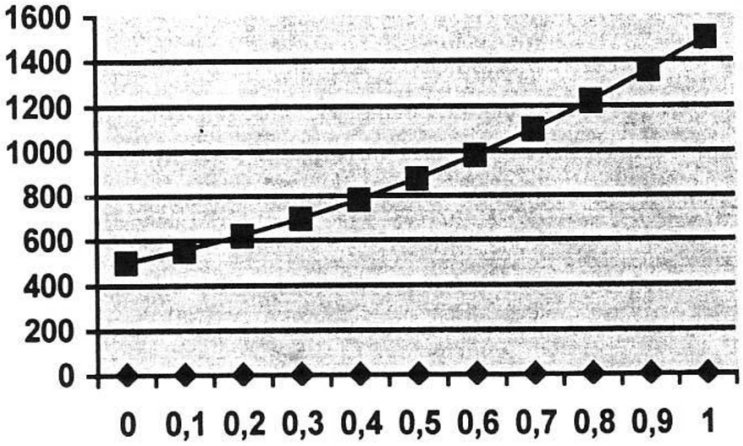
Lösung: Insgesamt $80 + 30 + 10 = 120$ Testpaare, also 240 Sportler
Statt 240 Einzeltests hier nur $80 + 30 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 150$ Tests
Abschätzung der Dopingfälle: min. $30 + 10 = 40$, max. $30 + 20 = 50$ Dopingfälle

6. **Dopingproben (3)**

Wie viele Proben sind bei 1000 Sportlern zu erwarten, wenn man aus langjähriger Erfahrung weiß, dass 10% (20%, 30%, ...) aller Sportler Doping betreiben?

Lösung: Zur Wahrscheinlichkeit von 10% Baumdiagramm aus Aufgabe 1!!! mit Pfadwahrscheinlichkeiten:





Man hat also für die 1000 Personen in 500 Testpaaren $(0,9 \cdot 1 + 0,09 \cdot 2 + 0,01 \cdot 3) \cdot 500 = 555$ Tests zu erwarten, im Vergleich zu Einzeltests also eine deutliche Ersparnis
Verallgemeinerung (für 20%, 30%, …) :
Berechnung liefert das neben stehende Ergebnis. Die Vermutung eines quadratischen Zusammenhangs lässt sich bestätigen:
Zu erwarten sind $[(1-p) \cdot 1 + p \cdot (1-p) \cdot 2 + p^2 \cdot 3] \cdot 500 = (p^2 + p + 1) \cdot 500$ Tests
(im Vergleich zu 1000 Einzeltests)

14.2. bedingte Wahrscheinlichkeit

1. Neun von zehn Ungeborenen bevorzugen im Mutterleib den rechten Daumen zum Lutschen. Forscher fanden heraus, dass alle Kinder, die rechts genuckelt hatten, im Alter von 10 bis 12 Jahren Rechtshänder waren. Zwei Drittel der Kinder, die im Mutterleib am linken Daumen lutschten, waren Linkshänder.
   (a) Wie viel Prozent der Kinder sind Linkshänder geworden, wie viel Prozent Rechtshänder?
   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Rechtshänder vor der Geburt am linken Daumen genuckelt?

Lösung: (a) $p(l) = 0,1 \cdot \frac{2}{3} = 7\%$, $p(r) = 0,9 \cdot 1 + 0,1 \cdot \frac{1}{3} = 93\%$
(b) $p_r(l_v) = \frac{p(r \cap l_v)}{p(r)} = 4\%$

2. In einem Betrieb sind 60% Männer beschäftigt. Von den Betriebsangehörigen rauchen 10%. Unter den weiblichen Betriebsangehörigen rauchen 15%.
   (a) Berechnen Sie den Anteil der weiblichen Raucher unter den Betriebsangehörigen.
   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein beliebig herausgegriffener Betriebsangehöriger
      i. weiblich und raucht?
      ii. männlich, falls ,,er" raucht?
      iii. Raucher, falls ,,er" männlich ist?

Lösung: (a) $p(W \cap R) = p(W) \cdot p_W(R) = 0,4 \cdot 0,15 = 6,0\%$
(b) i. $p_R(W) = \frac{p(W \cap R)}{p(R)} = \frac{0,06}{0,1} = 60\%$
ii. $p_R(M) = 1 - p_R(W) = 40\%$
iii. $p_M(R) = \frac{p(M \cap R)}{p(M)} = \frac{0,04}{0,6} = 6,7\%$

3. Bei SMV-TV treten Bildstörungen mit 10% Wahrscheinlichkeit auf. In diesem Fall kommt es dann mit 70% Wahrscheinlichkeit zu Tonstörungen. Ist das bild einwandfrei, so ist mit 95% Wahrscheinlichkeit auch der Ton in Ordnung.
   (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für ein einwandfreies Bild, falls der Ton gestört ist.
   (b) Untersuchen Sie die Ereignisse ,,Es tritt keine Bildstörung auf" und ,,Es tritt eine Tonstörung auf" auf stochastische Unanhängigkeit.

Lösung: T: Tonstörung, B: Bildstörung

(a) $p_T(\overline{B}) = \frac{p(T\cap\overline{B})}{p(T)} = \frac{0{,}9\cdot 0{,}05}{0{,}9\cdot 0{,}05+0{,}1\cdot 0{,}7} = 0{,}39$

(b) $p(T) = 0{,}9 \cdot 0{,}05 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 = 0{,}115,$

$p(\overline{B}) = 0{,}9;\ p(T) \cdot p(\overline{B}) = 0{,}115 \cdot 0{,}9 = 0{,}1035 \neq 0{,}39$

$\Rightarrow$ stochastisch abhängig

4. **Vierfeldertafeln**

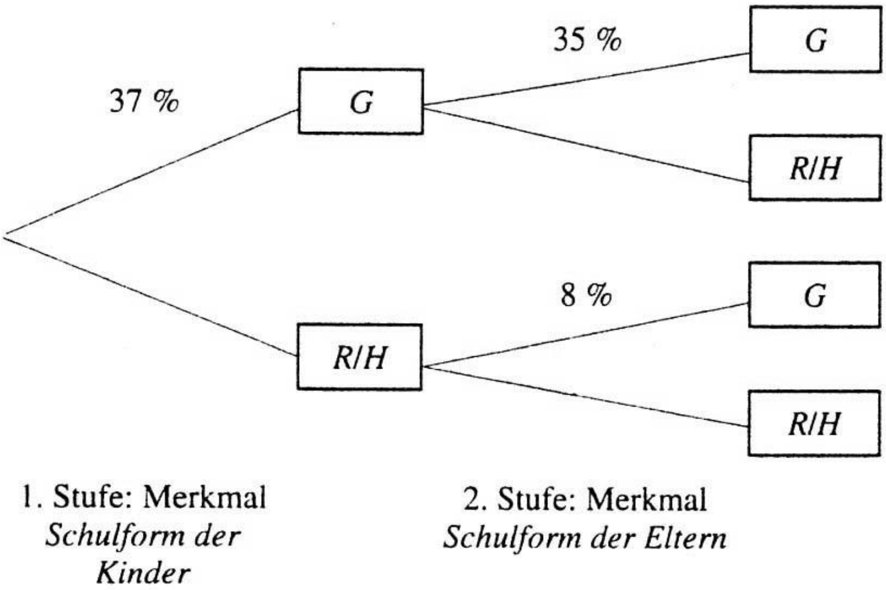
Gegeben ist folgender Zeitungsartikel:

> **Fahrstuhleffekt im Schulsystem**
>
> *Eltern wünschen höheren Bildungsabschluss für Kinder*
>
> 37% aller 10− bis 16jährigen Kinder besuchen derzeit die Schulform Gymnasium. Jedoch nur 35% dieser Jugendlichen haben Eltern, die selbst zum Gymnasium gingen. Umgekehrt findet man unter den Schülerinnen und Schülern, die eine Haupt- oder Realschule besuchen, nur 8%, deren Eltern ein Gymnasium absolvierten.

(a) Stellt die Informationen des Zeitungsartikels in einem zweistufigen Baum dar.
(b) Stellt eine Vierfeldertafel dazu auf.
(c) Entwickelt aus (b) das umgekehrte Baumdiagramm.
(d) Verfasst auf Grundlage der nun gewonnenen Daten einen Zeitungsartikel.

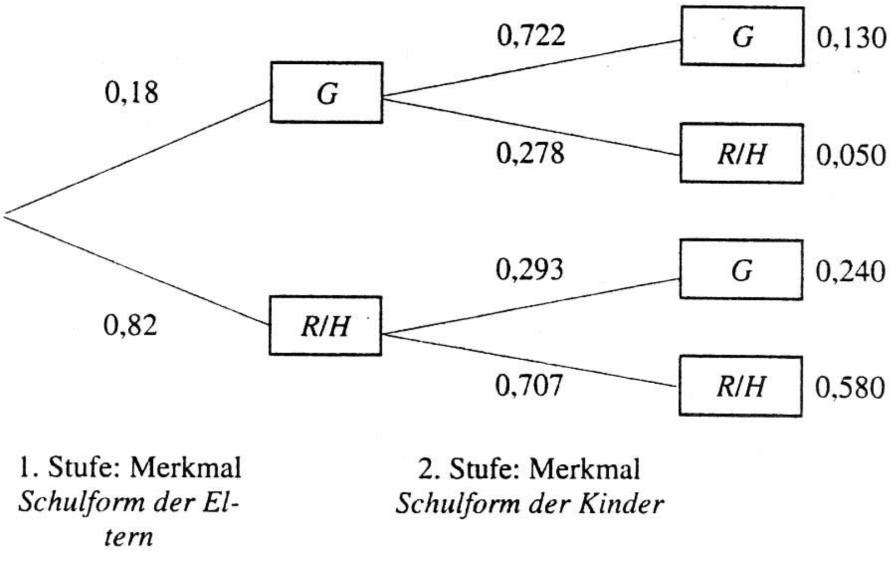
Quelle: PM 2/41 (1999)

Lösung: (a) Aus dem Text entnehmen wir unmittelbar folgende Informationen über die Merkmale *Schulform, die die Kinder besuchen bzw. Schulform, die die Eltern besuchten:*



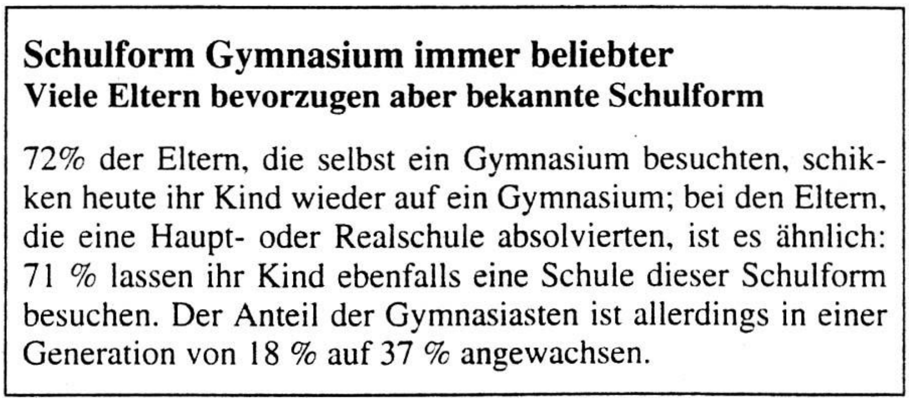
(b) Die zugehörige Vierfeldertafel sieht dann so aus:

Eltern Kinder	Gymnasium	Real- / Hauptschule	gesamt
Gymnasium	13,0%	24,0%	37,0%
Real- / Hauptschule	5,0%	58,0%	63,0%
gesamt	18,0%	82,0%	100%



(c)

(d) Die im Baumdiagramm enthaltenen Informationen können z.B. wie folgt als Zeitungsnotiz erscheinen:



Schulform Gymnasium immer beliebter
Viele Eltern bevorzugen aber bekannte Schulform

72% der Eltern, die selbst ein Gymnasium besuchten, schikken heute ihr Kind wieder auf ein Gymnasium; bei den Eltern, die eine Haupt- oder Realschule absolvierten, ist es ähnlich: 71 % lassen ihr Kind ebenfalls eine Schule dieser Schulform besuchen. Der Anteil der Gymnasiasten ist allerdings in einer Generation von 18 % auf 37 % angewachsen.

5. **Krebsfrüherkennung**

Im Folgenden sind die Ergebnisse eines schwedischen Modellversuchs zur Krebsfrüherkennung durch Mammographie dargestellt:

		Vorliegen einer Krebserkrankung		
		ja	nein	gesamt
Untersuchungs-Ergebnis	auffällig	$0,75\%$	$2,62\%$	$3,37\%$
	ohne Befund	$0,07\%$	$6,56\%$	$96,63\%$
gesamt		$0,82\%$	$99,18\%$	100%

(a) Welche Informationen kann man aus diesen Daten entnehmen?

(b) Versucht mithilfe dieser Resultate Außenstehende über die mathematischen Hintergründe einer solchen Vorsorgeuntersuchung zu informieren. Erstellt ein entsprechendes Wandplakat.

Quelle: PM 6/42 (2000)

Lösung: (a) $p(\text{krank}) = 0,82\%$, $p(\text{Befund auffällig}) = 3,37\%$, usw.
$p(\text{krank} \cap \text{Befund auffällig}) = 0,75\%$, $p(\text{nicht krank} \cup \text{Befund auffällig}) = 2,62\%$

$p_{\text{Befund auffällig}}(\text{krank}) = \frac{0,75\%}{3,37\%} = 22,2\%$,
d. h. bei einem auffälligem Befund ist nur etwa jeder fünfte Untersuchte krank.

$p_{\text{krank}}(\text{Befund auffällig}) = \frac{0,75\%}{0,82\%} = 91,5\%$

(b) Z. B.:

Da die Untersuchungen immer mit Fehlern behaftet sind, müssen Ergebnisse sachlich gedeutet werden. Bei der Entwicklung von Untersuchungsmethoden ist es primär wichtig von den kranken Personen einen sehr hohen Anteil zu erkennen, hier $p_{\text{krank}}(\text{Befund auffällig}) = 91,5\%$. Oft, insbesondere bei seltenen Erkrankungen, muss man damit in Kauf nehmen, dass viele gesunde ebenfalls das Ergebnis Befund auffällig erhalten. Dieses muss dann in weiteren Untersuchungen geklärt werden.

6. **Dunkelfeldforschung**

   Ein Kriminologe möchte in einer Befragung (Stichprobe: 1000 Personen) herausfinden, wie viel Prozent der Bundesbürger bereits einmal einen Ladendiebstahl begangen haben. Da aber auf die direkte Frage („Haben Sie bereits einmal einen Ladendiebstahl begangen?“) vermutlich viele Befragte nicht ehrlich antworten würden, plant er folgendes Verfahren: Er legt jedem Befragten 10 gleich aussehender Kärtchen vor. Auf 4 dieser Kärtchen steht: „Ist es richtig, dass Sie bereits einmal einen Ladendiebstahl begangen haben?“ Auf den 6 anderen steht: „Ist es richtig, dass Sie noch nie einen Ladendiebstahl begangen haben?“ Der Befragte zieht nun eines dieser Kärtchen, ohne dass der Kriminologe dies sehen kann, und beantwortet die darauf stehende Frage wahrheitsgemäß (mit ja oder nein).

   (a) Wie lässt sich anhand dieses Vorgehens der Anteil der Bürger schätzen, die schon einmal einen Ladendiebstahl begangen haben?

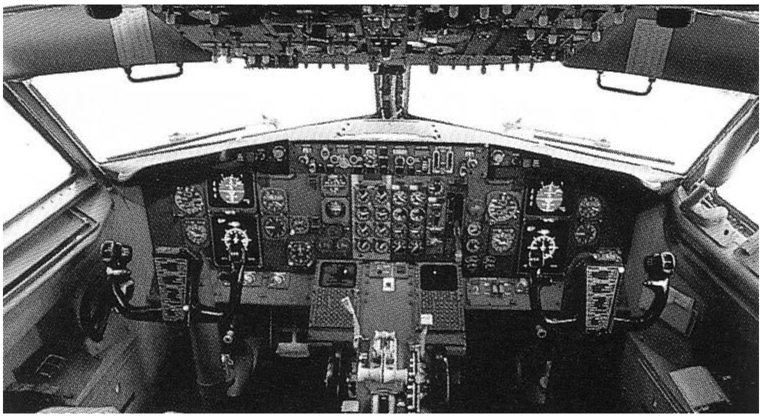
   (b) Was ändert sich, wenn gleich viele von beiden Sorten Kärtchen vorhanden sind?

   Quelle: MatheNetz 9 (2001)

Lösung: Sei A: Die gezogene Frage wird bejaht
B: Es wurde Frage 1 gezogen
C: Es wurde Frage 2 gezogen
p: Anteil der Bürger, die schon einmal einen Ladendiebstahl begangen haben
Also: $P(B) = 0,4$; $P(C) = 0,6$ sowie $P(A|B) = p$; $P(A|C) = 1 - p$
Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit (oder elementar hergeleitet) folgt daher:
$P(A) = 0,4 \cdot p + 0,6 \cdot (1 - p) = 0,6 - 0,2 \cdot p \Leftrightarrow p = 3 - 5 \cdot P(A)$
Setzt man nun für $P(A)$ die relative Häufigkeit $h(A)$ der Ja-Antworten aus der Umfrage ein, kann man also den entsprechenden Anteil p schätzen.

7. **Aufgaben zur Anwendung**

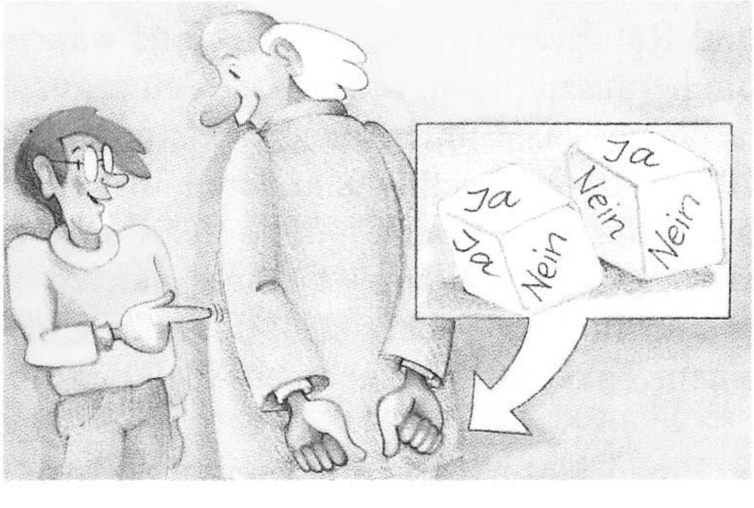
   Moderne Düsenverkehrsflugzeuge verfügen über Bodenannäherungswarnanlagen, die den Piloten akustisch und optisch warnen, wenn sich das Flugzeug ungeplant dem Boden nähert. Aus langjährigen Studien haben sich ergeben:
   Wenn in einer Flugminute tatsächlich eine ungeplante Bodenannäherung vorliegt, dann schlägt das System mit einer Wahrscheinlichkeit von $99,9\%$ Alarm. Wenn dagegen in einer Flugminute tatsächlich ungeplante Bodenannäherung vorliegt, so gibt das System mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,002\%$ einen falschen Alarm. Eine ungeplante Bodenannäherung ist aufgrund der hohen navigatorischen und technischen Zuverlässigkeit der Verkehrsluftfahrt sehr selten. Durchschnittlich nur in einer von zwei Millionen Flugminuten ist eine solche Bodenannäherung zu erwarten.
   Wenn das System Alarm gibt, wie wahrscheinlich ist es dann, dass sich das Flugzeug tatsächlich ungeplant dem Boden nähert? Was bedeutet das Ergebnis psychologisch für den Piloten, der jederzeit über die Möglichkeit verfügt das Warnsystem auszuschalten?



Lösung:

8. **Aufgaben zur Anwendung**

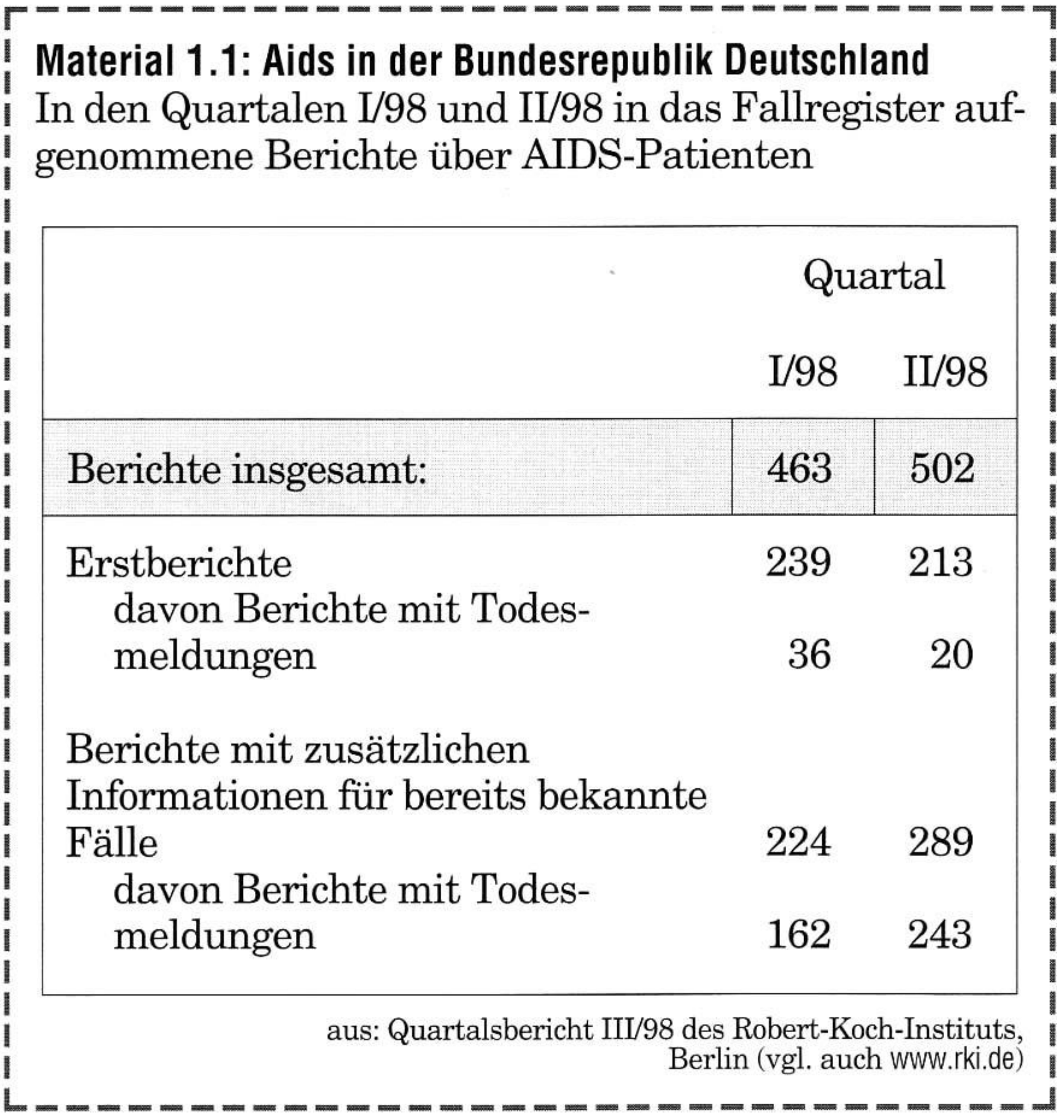
   Der Lehrer bringt zwei faire Würfel mit. Auf dem ersten Würfel sind fünf Flächen mit „Ja“ überschrieben, auf dem anderen Würfel nur zwei Flächen. Auf den restlichen Flächen steht „Nein“. Nachdem der Lehrer diese Würfel gezeigt hat, nimmt er sie verdeckt jeweils in die eine oder die andere Hand. Peter muss nun blind nach Zufall einen Würfel auswählen, den er dann - für die Klasse verdeckt - vom Lehrer erhält. Peter würfelt mit diesem Würfel dreimal - weiterhin für die Klasse verdeckt - und nennt als Ergebnisse: „Ja, Ja, Nein.“
   Die übrige Klasse soll nun wetten, ob Peter den ersten Würfel oder den zweiten Würfel erhielt.



   (a) Was tippst du? Bestimme für die beiden Würfel die Wahrscheinlichkeiten!
   (b) Baut euch selber Würfel (auch mit anderen Beschriftungen) und überprüft eure vorher (!) erstellten Berechnungen!

Lösung:

9. **AIDS**



Material 1.1: Aids in der Bundesrepublik Deutschland

In den Quartalen I/98 und II/98 in das Fallregister aufgenommene Berichte über AIDS-Patienten

	Quartal	
	I/98	II/98
Berichte insgesamt:	463	502
Erstberichte	239	213
davon Berichte mit Todesmeldungen	36	20
Berichte mit zusätzlichen Informationen für bereits bekannte Fälle	224	289
davon Berichte mit Todesmeldungen	162	243

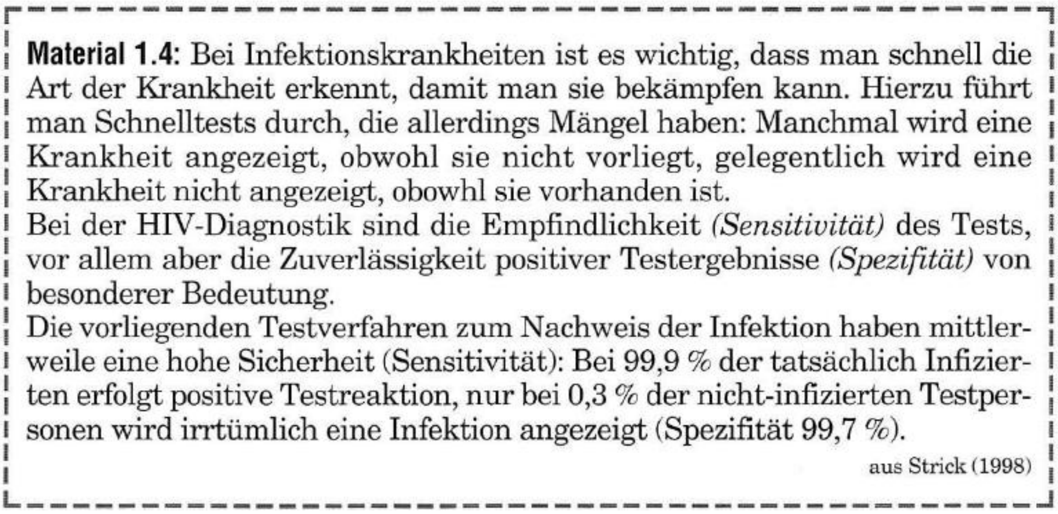
aus: Quartalsbericht III/98 des Robert-Koch-Instituts, Berlin (vgl. auch www.rki.de)

Material 1.2.: Zahl der gemeldeten AIDS-Fälle nach Geschlecht sowie der gemeldeten Todesfälle nach Bundesländern bzw. ausgewählten Großräumen und aufgeführten Zeiträumen der Registrierung

Bundesländer/ Großräume	Zeitraum der Registrierung							Verstorben gemeldet
	Quart. II/98	1. 7. 97–30. 06. 98			Gesamt			
	Ges.	Ges.	Männl.	Weibl.	Ges.	Männl.	Weibl.	
Baden-Württemberg	18	80	65	15	1431	1139	292	830
Bayern (ohne M)	16	73	56	17	989	835	154	611
München (M)	7	115	102	13	1602	1481	121	1070
Berlin (West)	27	126	113	13	3325	3028	297	2406
Berlin (Ost)	7	27	26	1	202	186	16	96
Brandenburg	2	5	2	3	36	26	10	16
Bremen	0	64	50	14	254	215	39	115
Hamburg	13	89	77	12	1632	1514	118	1056
Hessen (ohne F)	13	36	26	10	866	750	116	559
Frankfurt/Main (F)	12	37	30	7	1153	1039	114	819
Mecklenburg-Vorpommern	1	3	3	0	26	25	1	14
Niedersachsen	14	68	53	15	918	793	125	622
NRW (ohne K/D)	42	217	181	36	2431	2112	319	1389
Köln (K)	13	78	71	7	884	819	65	668
Düsseldorf (D)	2	10	9	1	547	503	44	346
Rheinland-Pfalz	4	20	15	5	522	432	90	328
Saarland	4	11	20	1	178	150	28	117
Sachsen	1	5	4	1	35	31	4	15
Sachsen-Anhalt	4	8	6	2	24	22	2	9
Schleswig-Holstein	12	36	33	3	420	383	37	266
Thüringen	1	2	2	0	15	12	3	8
Gesamt	213 100%	1110 100%	934 84,1%	176 15,9%	17490 100%	15495 88,6%	1995 11,4%	11360 65,0%

Material 1.3.: Verteilung der gemeldeten AIDS-Fälle nach Bundesländern, Großstädten über 100.000 Einwohner bzw. ausgewählten Großräumen sowie nach Infektionsrisiko

	Infektionsrisiko							Gesamt	Als verst. gemeldet
	Homo/ bi	IVDA	Hämo/ Trans	Hetero	Pattern II	PPI	k. A.		
Nordrhein-Westf.	2526	523	220	215	117	24	237	3862	2403
Köln	703	56	22	30	18	1	54	884	668
Düsseldorf	428	42	17	25	9	2	24	547	346
Ruhrgeb.-West	78	37	12	10	7	3	6	153	109
Ruhrgeb.-Mitte	199	67	22	17	9	4	22	340	175
Ruhrgeb.-Ost	192	83	20	14	7	0	20	336	168
Ruhrgeb.-SO	37	17	8	3	2	2	3	72	35
Wuppertal	63	10	8	7	2	3	9	102	64
Bielefeld	51	17	3	4	0	1	3	79	51
Bonn	77	15	13	10	11	1	10	137	62
Mönchengladbach	29	4	3	5	0	0	2	43	31



Material 1.4: Bei Infektionskrankheiten ist es wichtig, dass man schnell die Art der Krankheit erkennt, damit man sie bekämpfen kann. Hierzu führt man Schnelltests durch, die allerdings Mängel haben: Manchmal wird eine Krankheit angezeigt, obwohl sie nicht vorliegt, gelegentlich wird eine Krankheit nicht angezeigt, obowhl sie vorhanden ist.
Bei der HIV-Diagnostik sind die Empfindlichkeit *(Sensitivität)* des Tests, vor allem aber die Zuverlässigkeit positiver Testergebnisse *(Spezifität)* von besonderer Bedeutung.
Die vorliegenden Testverfahren zum Nachweis der Infektion haben mittlerweile eine hohe Sicherheit (Sensitivität): Bei 99,9 % der tatsächlich Infizierten erfolgt positive Testreaktion, nur bei 0,3 % der nicht-infizierten Testpersonen wird irrtümlich eine Infektion angezeigt (Spezifität 99,7 %).

aus Strick (1998)

Formuliert in eurer Gruppe mindestens vier sinnvolle (statistische) Fragen, die mit Hilfe des zur Verfügung stehenden Datenmaterials untersucht werden können. Versucht diese Fragen zu beantworten.
Bereitet euch auch auf die Präsentation der Lösungen vor. Quelle: mathematik lehren (2001), H. 104, S. 62-66

Lösung:

10. **BSE**

BSE

Blindflug ins Hirn

Im Rinderwahn gehen auch die letzten Sicherheiten zu Grunde: Der meistbenutzte Schnelltest hat eine BSE-Kuh nicht erkannt.

Kaum hat die neue Landwirtschaftsministerin Renate Künast vergangene Woche mehr Tests angekündigt, richtet sich der massivste Verdacht ausgerechnet gegen den Schnelltest "Platelia BSE", nach Herstellerangaben Deutschlands meistverwendetes Hilfsmittel für die Fahndung nach der Rinderseuche.

Schon mehrfach hat der Test der Firma Bio-Rad (...) gepatzt, als er bei gesunden Rindern BSE ortete. Jedes Mal musste das nationale BSE-Referenzzentrum, die Bundesforschungsanstalt für Viruskrankheiten in Tübingen, den Spuk auflösen. Forscher stöhnen dort mittlerweile schon über die Welle von Fehlmeldungen; die „falsch-positiven“ Fälle lähmten den Testapparat bei der Enttarnung des Erregers.

Auch für die betroffenen Bauern hatten die Scheintreffer Folgen: Ihre Bestände wurden bis zur Entwarnung gesperrt. Doch bisher konnte wenigstens der Verbraucher beruhigt sein – besser eine Meldung zu viel als eine zu wenig.

Jetzt aber steht der Bio-Rad-Test erstmals im Verdacht, eine BSE-Kuh nicht erkannt zu haben, ein Fall, der das Vertrauen in den gesamten Testapparat erschüttert. Erst recht, weil sich am gleichen Material später auch noch der Test des einzigen Bio-Rad-Konkurrenten in Deutschland, Prionics, vergeblich versuchte.

(aus: DER SPIEGEL, 04/2001)

(a) Recherchiert, was man unter BSE und nCJK versteht. Tragt Informationen zusammen, was zum Ausbruch und zur Verbreitung von BSE geführt hat. Forscht im Internet nach aktuellem Zahlenmaterial aus europäischen Staaten.

(b) Wie würdet ihr die Sicherheit des erwähnten Tests beschreiben? Wie wirkt sich der Fehler des Tests auf die betroffenen Bauern und Verbraucher aus?

(c) Tragt Informationen zusammen, was zum Ausbruch und zur Verbreitung von BSE geführt hat. Forscht im Internet nach aktuellem Zahlenmaterial aus europäischen Staaten.

(d) In der Bundesrepublik wurden in den Jahren um 2000 jährlich etwa 480000 Rinder geschlachtet. Die Verbraucherschutzministerin Renate Künast hat im Jahr 2001 angegeben, „dass in diesem Jahr 500 BSE-Fälle erwartet werden“. Alle geschlachteten Rinder werden mit einem Schnelltest untersucht. Dieser Schnelltest identifiziert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% die erkrankten Rinder korrekt, er gibt aber auch in 3% der Fälle gesunde Rinder als BSE-erkrankt aus.

Bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rind, das positiv getestet wurde, auch wirklich krank ist.

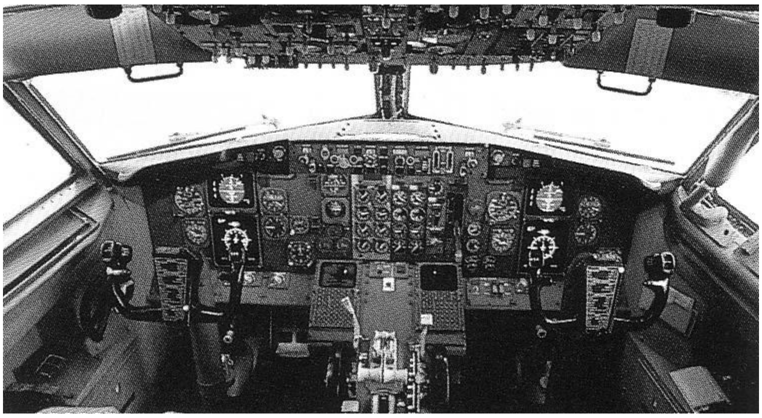
(e) Da Schnelltests nicht absolut sicher sind, treten immer Fehler auf. Wie wirken sich die Fehler aus, wenn der Anteil der BSE-Erkrankungen ansteigt?

Quelle: MatheNetz 9 (2001)

Lösung:

11. **Aufgaben zur Anwendung**

Moderne Düsenverkehrsflugzeuge verfügen über Bodenannäherungswarnanlagen, die den Piloten akustisch und optisch warnen, wenn sich das Flugzeug ungeplant dem Boden nähert. Aus langjährigen Studien haben sich ergeben:
Wenn in einer Flugminute tatsächlich eine ungeplante Bodenannäherung vorliegt, dann schlägt das System mit einer Wahrscheinlichkeit von $99,9\%$ Alarm. Wenn dagegen in einer Flugminute tatsächlich geplante Bodenannäherung vorliegt, so gibt das System mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,002\%$ einen falschen Alarm. Eine ungeplante Bodenannäherung ist aufgrund der hohen navigatorischen und technischen Zuverlässigkeit der Verkehrsluftfahrt sehr selten. Durchschnittlich nur in einer von zwei Millionen Flugminuten ist eine solche Bodenannäherung zu erwarten.
Wenn das System Alarm gibt, wie wahrscheinlich ist es dann, dass sich das Flugzeug tatsächlich ungeplant dem Boden nähert? Was bedeutet das Ergebnis psychologisch für den Piloten, der jederzeit über die Möglichkeit verfügt das Warnsystem auszuschalten?



Lösung: $p_{\text{Alarm}}(\text{ungeplante Bodernnäherung}) =$

$$= \frac{5\cdot 10^{-7}\cdot 0{,}999}{5\cdot 10^{-7}\cdot 0{,}999+(1-5\cdot 10^{-7})\cdot 0{,}00002} = 0,0244 = 2,44\%$$

Bei Alarm ist die Wahrscheinlichkeit für eine ungeplante Bodernnäherung zwar nur $2,44\%$; der Alarm muss trotzdem sehr ernst genommen werden!

Teil V.

Ausbau der Funktionenlehre

15. Graphen ganzrationaler Funktionen

15.1. Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

15.1.1. Lineare Funktionen

1. Der Graph G_f einer linearen Funktion f schneidet die x-Achse unter einem 60°-Winkel und enthält den Punkt $\mathrm{A}\,(4|6)$. Stellen Sie die Funktionsgleichung auf und berechnen Sie die Nullstelle x_0 von f.

Lösung: $f_1(x) = \sqrt{3}\cdot x + 6 - 4\sqrt{3} \quad , \quad x_{01} = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0{,}536$

$f_2(x) = -\sqrt{3}\cdot x + 6 + 4\sqrt{3} \quad , \quad x_{02} = 4 + 2\sqrt{3} \approx 7{,}464$

2. Wir betrachten die linearen Funktionen

$$f(x) = a_1\,x + b_1 \quad \text{und} \quad h(x) = a_2\,x + b_2 \quad \text{mit} \quad a_1 \neq 0$$

Beweisen Sie: $\boxed{\mathrm{G}_f \perp \mathrm{G}_h \quad \Longleftrightarrow \quad a_2 = -\frac{1}{a_1}}$

Lösung:

3. Gegeben sind die Punkte $\mathrm{A}\,(-1|4)$, $\mathrm{B}\,(3|1)$ und $\mathrm{C}\,(4|4)$. Von den linearen Funktionen f und g weiß man Folgendes:

$$\mathrm{G}_f = \mathrm{AB} \quad , \quad \mathrm{G}_g \perp \mathrm{G}_f \quad , \quad \mathrm{C} \in \mathrm{G}_g \quad \text{und} \quad \{\mathrm{S}\} = \mathrm{G}_f \cap \mathrm{G}_g$$

Berechnen Sie die Koordinaten von S und die Nullstellen von f und g.

Lösung: $f(x) = -\frac{3}{4}\,x + \frac{13}{4} \quad , \quad g(x) = \frac{4}{3}\,x - \frac{4}{3} \quad , \quad \mathrm{S}\,(2{,}2|1{,}6)$

$f\left(\frac{13}{3}\right) = 0 \quad , \quad g(1) = 0$

4. Folgende Tabelle gibt die Weltrekorde im 5000m-Lauf der Männer wieder:

Jahr	1955	1966	1972	1982	1987	1994	1997
Zeit	13:40,6	13:16,6	13:13,0	13:00,42	12:58,39	12:44,39	12:39,74

(a) Tragen Sie die Werte in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein und zeichnen Sie „nach Augenmaß“ eine Ausgleichsgerade.

(b) Stellen Sie die Gleichung der Ausgleichsgerade auf.

Aus:
Rüdiger Baumann, Funktionsanpassung an Beobachtungsdaten; Ein anwendungsorientierter Einstieg in die Analysis, Mathematik in der Schule 36 (1998) 4

Lösung: (a)

(b) $y(x) = -0{,}0242\,\frac{\mathrm{min}}{\mathrm{a}}\,(x - 1955\,\mathrm{a}) + 13{,}677\,\mathrm{min}$

5. Wann kommutieren lineare Funktionen $f(x) = ax + b$ und $g(x) = cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$?
   (a) Unter welcher Bedingung gilt $f \circ g = g \circ f$?
   (b) Geben Sie zu $f(x) = x + 1$ fünf Funktionen $g_i(x)$, $i \in \{1,2,3,4,5\}$ an, die mit f kommutieren und zeichnen Sie die Funktionen in ein Koordinatensystem.
   Was fällt auf?
   Begründen Sie die Beobachtung.
   (c) Geben Sie zu $f(x) = 2x + 1$ fünf Funktionen $g_i(x)$, $i \in \{1,2,3,4,5\}$ an, die mit f kommutieren und zeichnen Sie die Funktionen in ein Koordinatensystem.
   Was fällt auf?
   Begründen Sie die Beobachtung.
   (d) Suchen Sie allgemein einen geometrischen Zusammenhang zwischen dem Graph von $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ und den Graphen der Funktionen $g(x)$, die mit f kommutieren.
   Begründen Sie den Zusammenhang.

Lösung: (a) $b(c - 1) = d(a - 1)$

(b) Beispiele: $g_1(x) = x + 2$, $g_2(x) = x + 3$, $g_3(x) = x + 4$, $g_4(x) = x - 2$, $g_4(x) = x - 3$
Diese Funktionen sind alle parallel zu f.
Begrüngung:
Aus $b(c - 1) = d(a - 1)$ folgt für diesen Fall $c = 1 \Rightarrow$
$g(x) = x + d$, d beliebig. Diese Funktionen haben alle die gleiche Steigung wie f und sind daher alle parallel zu f.

(c) Beispiele: $g_1(x) = 3x+2$, $g_2(x) = 4x+3$, $g_3(x) = 5x+4$, $g_4(x) = -x-2$, $g_4(x) = -2x-3$
Diese Funktionen gehen alle (wie auch f) durch den Punkt $(-1| - 1)$.
Begrüngung:
Aus $b(c - 1) = d(a - 1)$ folgt für diesen Fall $c - 1 = d \Rightarrow$
$g(x) = cx + c - 1 = c(x + 1) - 1$. Diese Funktionen gehen alle durch $(-1| - 1)$, da $g(-1) = -1$ unabhängig von c.

(d) Der Graph von $f(x)$ schneidet die Winkelahlbierende des 1. und 3. Quadranten im Punkt $\mathrm{S}(-\frac{b}{a-1}| - \frac{b}{a-1})$.
Aus $b(c - 1) = d(a - 1)$ folgt $d = \frac{b(c-1)}{a-1} \Rightarrow$
$g(x) = cx + \frac{b(c-1)}{a-1} = c(x + \frac{b}{a-1}) - \frac{bc}{a-1}$.
$g(x)$ geht offensichtlich für jedes c durch S.

6. Unter welchen Voraussetzungen kommutieren zwei lineare Funktionen $f(x) = ax + b$ und $g(x) = cx + d$ $(a, c \neq 0)$.

Lösung: $g \circ f(x) = c(ax + b) + d = acx + bc + d$ und
$f \circ g(x) = a(cx + d) + b = acx + ad + b$
$\Rightarrow bc + d = ad + b \Rightarrow b(c - 1) = d(a - 1)$

1. Fall: $a = c = 1$:
f und g kommutieren für alle b und d.
D. h. alle Geraden, die parallel zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten sind, kommutieren miteinander.

2. Fall: $a = 1$, $b = 0 \Rightarrow f(x) = x$ und g beliebig
3. Fall: $c = 1$, $d = 0 \Rightarrow g(x) = x$ und f beliebig
D. h. alle Geraden kommutieren mit der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten.

4. Fall $b = d = 0 \Rightarrow f(x) = ax$ und $g(x) = cx$
D. h. alle Ursprungsgeraden kommutieren miteinander.

5. Fall: $a, c \neq 1$ und $b, d \neq 0$:
Aus obiger Bedingung folgt: $d = \frac{b(c-1)}{a-1} \Rightarrow g(x) = cx + \frac{b(c-1)}{a-1} \Rightarrow$
Geraden, die mit f kommutieren schneiden den Graphen von f im Punkt $(\frac{b}{1-a}|\frac{b}{1-a})$.

7. Die Orte Vordemwald, Hintermwald und Ganzimwald haben in einer Landkarte die Koordinaten $\mathrm{V}(-2|-1)$, $\mathrm{H}(3|3)$ und $\mathrm{G}\left(4\middle|-\frac{47}{20}\right)$. Vordemwald und Hintermwald sind durch eine geradlinige Straße miteinander verbunden, durch Ganzimwald soll eine gerade Straße gebaut werden, die senkrecht auf der Verbindungsstraße der beiden anderen Orte steht. Stellen Sie die Gleichungen der beiden „Straßengeraden" auf und berechnen Sie die Koordinaten der Kreuzung K der beiden Straßen.

Lösung: $f(x) = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5} \quad , \quad g(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{53}{20} \quad , \quad \mathrm{K}\left(1\middle|\frac{7}{5}\right)$

15.1.2. Quadratische Funktionen

1. Berechnen Sie die Scheitelkoordinaten und die Nullstellen. Zeichnen Sie die Graphen:
(a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5$ (b) $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{7}{2}$ (c) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{19}{6}$

Lösung: (a) $\mathrm{S}(4|-3)$, $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{6}$ (b) $\mathrm{S}(-1|5)$, $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\frac{10}{3}}$
(c) $\mathrm{S}\left(2\middle|-\frac{1}{2}\right)$, keine NS.

1

2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^2 + bx$.
   (a) Bestimmen Sie allgemein die Nullstellen der Funktion.
   (b) Bestimmen Sie allgemein die Koordinaten des Scheitels.
   (c) Zeichnen Sie für $b = 2$ und für fünf verschiedene Werte von a die Parabeln in ein Koordinatensystem. Markieren Sie jeweils den Scheitel farbig. Was fällt auf?
   (d) Beweisen Sie, dass für festes b und variables a die Scheitel der Parabeln auf einer Gerade liegen.
   (e) Zeichnen Sie für $a = 1$ und für zehn verschiedene Werte von b die Scheitel der Parabeln in ein Koordinatensystem. Was fällt auf?
   (f) Beweisen Sie, dass für festen a und variables b die Scheitel der Parabeln auf einer Parabel liegen.

Lösung: (a) $N_1(0|0)$, $N_2(-\frac{b}{a}|0)$

(b) $x_S = -\frac{b}{2a}$, $y_S = -\frac{b^2}{4a}$

(c) Die Scheitel liegen auf einer Gerade.

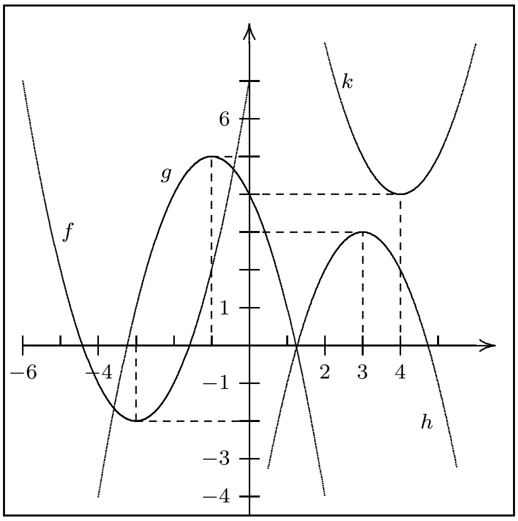
(d) $y_S = -\frac{b^2}{4a} = \frac{b}{2}(-\frac{b}{2a}) = \frac{b}{2} \cdot x_S$

(e) Die Scheitel liegen auf einer Parabel.

(f) $y_S = -\frac{b^2}{4a} = -a \cdot (-\frac{b}{2a})^2 = -a \cdot x_S^2$

2

3. Die Graphen der nebenstehenden Abbildung sind verschobene und gespiegelte Normalparabeln. Geben Sie jeweils die Funktionsgleichung an!

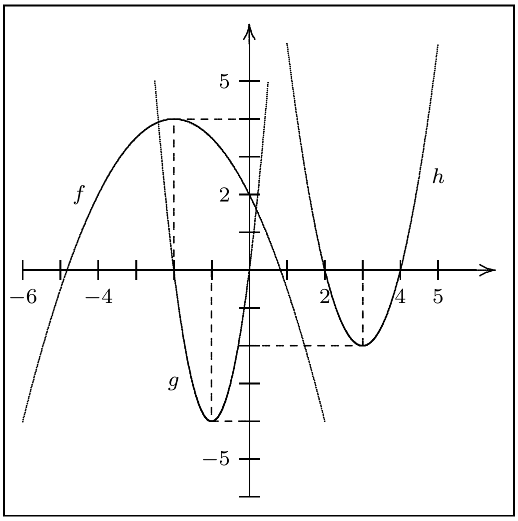


Lösung: $f(x) = x^2 + 6\,x + 7 \quad g(x) = -x^2 - 2\,x + 4$

$h(x) = -x^2 + 6\,x - 6 \quad k(x) = x^2 - 8\,x + 20$

3

4. Die Graphen der nebenstehenden Abbildung gehören zu quadratischen Funktionen. Geben Sie jeweils die Funktionsgleichung an!



Lösung: $f(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 - 2\,x + 2 \quad g(x) = 4\,x^2 + 8\,x$

$h(x) = 2\,x^2 - 12\,x + 16$

4

5. Wann kommutieren die Funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ und $g(x) = dx^2 + ex + f$ $(a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ und $a, d \neq 0)$?

Lösung: $f \circ g(x)$ und $g \circ f(x)$ berechnen.
Aus Koeffizientenvergleich bei x^4 folgt: $a = d$
Aus Koeffizientenvergleich bei x^3 folgt mit $a = d$: $e = b$
Aus Koeffizientenvergleich bei x^2 folgt mit $a = d$ und $e = b$: $f = c$
Also: Die Funktionene f und g kommutieren nur, wenn sie identisch sind.

5

6. (a) Konstruieren Sie in einem Koordinatensystem 10 verschiedene Punkte, die vom Punkt N(0|1) und der x-Achse den gleichen Abstand haben.
   Formulieren Sie eine Vermutung über die Lage diese Punkte. Konstruieren Sie dazu weitere geeignete Punkte.
   (b) Beweisen Sie die Vermutung aus Teilaufgabe (a).
   (c) Wo liegen alle Punkte, die von N'$(a|b)$ und der x-Achse den gleichen Abstand haben?

Lösung: (a) Die Punkte liegen auf einer Parabel.

(b) $y = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}$

(c) $y = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{2b}\,x^2 - \dfrac{a}{b}\,x + \dfrac{a^2 + b^2}{2b}$

6

7. (a) In welchen Punkten berühren sich die Funktionen $p(x) = x^2$ und $f(x) = -x^4 + 2x^3$ $(D = \mathbb{R})$?
   (b) In welchen Punkten berühren sich die Funktionen $p(x) = x^2$ und $f(x) = ax^4 + 4x^3$ $(D = \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fest$)$?
   (c) In welchen Punkten berühren sich die Funktionen $p(x) = x^2$ und $f(x) = ax^4 + bx^3$ $(D = \mathbb{R},\ a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fest$)$?
   (d) Für welche Werte von a und b berühren sich die Funktionen $p(x) = x^2$ und $f(x) = ax^4 + bx^3$ $(D = \mathbb{R},\ a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fest$)$ im Punkt $\mathrm{P}_1(-3|9)$ $(\mathrm{P}_2(4|16)$, $\mathrm{P}_3(6|36))$?

Lösung: (a) Berührpunkte: $(0|0)$, $(1|1)$
(b) Berührpunkte: $(0|0)$, $\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{4}\right)$, falls $a = -4$
(c) Berührpunkte: $(0|0)$, $\left(\frac{2}{b}\middle|\frac{4}{b^2}\right)$, falls $a = -\frac{b^2}{4}$
(d) Bedingung für Berührpunkte $(x_B|x_B^2)$ verschieden von $(0|0)$:
$b = \frac{2}{x_B}$, $a = -\frac{1}{x_B^2}$, also $a = -\frac{1}{4}b^2 \Rightarrow$
$\mathrm{P}_1 : a = -\frac{1}{9}, b = -\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}_2 : a = -\frac{1}{16}, b = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}_3 : a = -\frac{1}{36}, b = \frac{1}{3}$

7

15.2. ganzrationale Funktionen

15.2.1. Nullstellen

1. Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen.
   (a) $f_1(x) = x^3 + x^2 - 4x + 2$
   (b) $f_2(x) = 2x^3 + 12x^2 + 14x - 4$
   (c) $f_3(x) = 3x^3 + 24x^2 - 120$
   (d) $f_4(x) = 4x^3 - 36x^2 + 48x + 88$
   (e) $f_5(x) = x^3 - 9x^2 - 2x + 102$
   (f) $f_6(x) = -2x^3 + 34x^2 - 168x + 252$
   (g) $f_7(x) = -5x^3 - 60x^2 + 55x + 1060$
   (h) $f_8(x) = 2x^3 - 40x^2 + 70x + 1048$

Lösung: (a) $x_1 = 1$, $x_2 = -1 - \sqrt{3}$, $x_3 = -1 + \sqrt{3}$
(b) $x_1 = -2$, $x_2 = -2 - \sqrt{5}$, $x_3 = -2 + \sqrt{5}$
(c) $x_1 = 2$, $x_2 = -5 - \sqrt{5}$, $x_3 = -5 + \sqrt{5}$

(d) $x_1 = -1$, $x_2 = 5 + \sqrt{3}$, $x_3 = 5 - \sqrt{3}$
(e) $x_1 = -3$, $x_2 = 6 + \sqrt{2}$, $x_3 = 6 - \sqrt{2}$
(f) $x_1 = 3$, $x_2 = 7 + \sqrt{7}$, $x_3 = 7 - \sqrt{7}$
(g) $x_1 = 4$, $x_2 = -8 - \sqrt{11}$, $x_3 = -8 + \sqrt{11}$
(h) $x_1 = -4$, $x_2 = 12 + \sqrt{13}$, $x_3 = 12 - \sqrt{13}$

15.3. Vertiefen der Funktionenlehre

15.3.1. Eigenschaften von Funktionsgraphen

Symmetrie

1. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf ihr Symmetrieverhalten und zeichnen Sie die Graphen!

   $(a)\quad f(x) = x^3 - x \qquad (b)\quad f(x) = x^3 + 1 \qquad (c)\quad f(x) = x^2 \cdot \cos x$

   $(d)\quad f(x) = \tan x \qquad (e)\quad f(x) = \sqrt{x} \qquad (f)\quad f(x) = x^2 \cdot \sin x$

   $(g)\quad f(x) = 2^x + 2^{-x} \qquad (h)\quad f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad (i)\quad f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Lösung: (a) ungerade (b) keine Symmetrie (c) gerade

(d) ungerade (e) keine Symmetrie (f) ungerade

(g) gerade (h) ungerade (i) gerade

2. (a) f sei eine beliebige Funktion. Untersuchen Sie

   $$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{und} \quad u(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

   auf Symmetrie! Wie kann f durch g und u dargestellt werden?

   (b) Eine zur y-Achse symmetrische Funktion heißt *gerade*, eine zum Ursprung symmetrische Funktion heißt *ungerade*. Beweisen Sie den Satz:

   $$\boxed{\text{Jedes } f \text{ kann man als Summe eines geraden und eines ungeraden Teils schreiben!}}$$

   (c) Zerlegen Sie in einen geraden und einen ungeraden Summanden:

   (i) $f(x) = \dfrac{2\,x^3 - x^2 + x - 3}{x^2}$ (ii) $f(x) = 2^x$ (iii) $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{x}$

Lösung: (a) g ist gerade, u ungerade

(b) $f(x) = g(x) + u(x)$

(c) $f(x) = g(x) + u(x)$ mit

  i. $g(x) = -1 - \frac{3}{x^2}$ und $u(x) = 2\,x - \frac{1}{x}$

  ii. $g(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$ und $u(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$

  iii. $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ und $u(x) = \frac{\cos x}{x}$

3. Zeigen Sie, dass
   (a) $f_1(x) = x^2 \cdot \sin x + x \cdot \cos x$ punktsymmetrisch zu (0|0) ist.
   (b) $f_2(x) = \tan x \cdot \cos x + \sin 2x$ punktsymmetrisch zu (0|0) ist.
   (c) $f_3(x) = (1 - \cos 2x) \cdot \cos x$ achsensymmetrisch zur y-Achse ist.
   (d) $f_4(x) = (1 + \cos 2x) \cdot (1 - \cos 2x)$ achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

Lösung: (a) $f_1(x) = -f_1(-x)$

(b) $f_2(x) = -f_2(-x)$

(c) $f_3(x) = f_3(-x)$

(d) $f_4(x) = f_4(-x)$

4. (a) Zeichnen sie den Graphen der Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 5$.
   (b) Geben sie die Gleichung der Funktion $b(x)$ an, so dass der Graph von $b(x)$ achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse zum Graphen von $f(x)$ ist.
   (c) Geben sie die Gleichung der Funktion $c(x)$ an, so dass der Graph von $c(x)$ achsensymmetrisch bezüglich der Achse $x = 2$ zum Graphen von $f(x)$ ist.
   (d) Geben sie die Gleichung der Funktion $d(x)$ an, so dass der Graph von $d(x)$ achsensymmetrisch bezüglich der x-Achse zum Graphen von $f(x)$ ist.
   (e) Geben sie die Gleichung der Funktion $e(x)$ an, so dass der Graph von $e(x)$ achsensymmetrisch bezüglich der Achse $y = 3$ zum Graphen von $f(x)$ ist.
   (f) Geben sie die Funktionsgleichung $g(x)$ an, so dass der Graph von $g(x)$ punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs zum Graphen von $f(x)$ ist.

Lösung: (a)

(b) $b(x) = x^2 + 4x + 5$

(c) $c(x) = (x-2)^2 - 4(x-2) + 5 = x^2 - 8x + 17$

(d) $d(x) = -h(x) = -x^2 + 4x - 5$

(e) $e(x) = 6 - h(x) = -x^2 + 4x + 1$

(f) $f(x) = -h(-x) = -x^2 + 4x - 5$

5. Überlegen Sie, wie der Graph der Funktion f für verschiedene Werte der Parameter a, b und c qualitativ verläuft und skizzieren Sie den Graphen.
   Überprüfen Sie Ihre Überlegungen mit Hilfe einer geeigneten Software.
   (a) i. $f(x) = x^3 + ax$ mit $a \in \mathbb{R}^+$
       ii. $f(x) = x^3 + ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$
       iii. $f(x) = x^4 + ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}^+$
       iv. $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$
       v. $f(x) = x^5 + ax^3 + bx$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$
       vi. $f(x) = x^5 + ax^3 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}^+$
   (b) i. $f(x) = x - \frac{a}{x}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$
       ii. $f(x) = x^2 - \frac{a}{x} + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$
       iii. $f(x) = x^3 - \frac{a}{x^2} + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$
   (c) i. $f(x) = x\sin(x)$
       ii. $f(x) = \frac{1}{2}x^2\sin(x)$
       iii. $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$
       iv. $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}$

Lösung:

6. Zeigen Sie, dass
   (a) $f_1(x) = x^3 - 6x^2 + 14x - 12$ punktsymmetrisch zu $(2|0)$ ist.
   (b) $f_2(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ punktsymmetrisch zu $(-1|0)$ ist.
   (c) $f_3(x) = x^4 + 8x^3 + 25x^2 + 36x + 21$ achsensymmetrisch zu $x = -2$ ist.
   (d) $f_4(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2$ achsensymmetrisch zu $x = 1$ ist.

Lösung: (a) $f_1(2 + x) = x^3 + 2x = -f_1(2 - x)$
(b) $f_2(-1 + x) = x^3 + x = -f_2(-1 - x)$
(c) $f_3(-2 + x) = x^4 + x^2 + 1 = f_3(-2 - x)$
(d) $f_4(1 + x) = x^4 + x^2 = f_3(1 - x)$

7. Beweisen Sie folgende Sätze:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f \text{ gerade} & \Longrightarrow & f' \text{ ungerade} \\ f \text{ ungerade} & \Longrightarrow & f' \text{ gerade} \end{array}}$$

$$\boxed{f \text{ ungerade und } 0 \in D_f \quad \Longrightarrow \quad f(0) = 0}$$

$$\boxed{f \text{ gerade und } 0 \in D_f \text{ und } 0 \in D_{f'} \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = 0}$$

Lösung:

8. Zeigen Sie, dass folgende Funktionen die jeweils angegebene Symmetrie besitzen.
   (a) $f(x) = |x-1|(x-1)+5$, punktsymmetrisch zu $(1|5)$
   (b) $f(x) = |x-3|(x-3)^2+2$, achsensymmetrisch zu $x=3$
   (c) $f(x) = |x-2|(2-x)-1$, punktsymmetrisch zu $(2|-1)$
   (d) $f(x) = |x-4|(4-x)^2+7$, achsensymmetrisch zu $x=4$
   (e) $f(x) = (x-\pi)\cos(x)$, punktsymmetrisch zu $(\pi|0)$
   (f) $f(x) = (x-\pi)\sin(x)$, achsensymmetrisch zu $x=\pi$
   (g) $f(x) = \cos(x+2)\sin(x+2)+2$, punktsymmetrisch zu $(-2|2)$
   (h) $f(x) = x^3-6x^2+12x-3$, punktsymmetrisch zu $(2|5)$
   (i) $f(x) = -x^3-3x^2-3x$, punktsymmetrisch zu $(-1|1)$

Lösung: (a) $g(x) = |x|x$ ist punktsymmetrisch zu $(0|0)$. $f(x)$ erhält man aus $g(x)$ durch Verschiebung um 1 nach rechts $(x \to x-1)$ und um 5 nach oben (Addition von 5!)$\Rightarrow$ Beh.

(b) $g(x) = |x|x^2$ ist achsensymmetrisch zu $x=0$. $f(x)$ erhält man aus $g(x)$ durch Verschiebung um 3 nach rechts $(x \to x-3)$ und um 2 nach oben (Addition von 2!)$\Rightarrow$ Beh.

(c) $g(x) = -|x|x$ ist punktsymmetrisch zu $(0|0)$. $f(x)$ erhält man aus $g(x)$ durch Verschiebung um 2 nach rechts $(x \to x-2)$ und um 1 nach unten (Subtraktion von 1!)$\Rightarrow$ Beh.

(d) $g(x) = -|x|x^2$ ist achsenymmetrisch zu $x=0$. $f(x)$ erhält man aus $g(x)$ durch Verschiebung um 4 nach rechts $(x \to x-4)$ und um 7 nach oben (Addition von 7!)$\Rightarrow$ Beh.

(e) $f(\pi+\Delta x) = (\pi+\Delta x-\pi)\cos(\pi+\Delta x) = \Delta x\cos(\pi+\Delta x)$
$f(\pi-\Delta x) = (\pi-\Delta x-\pi)\cos(\pi-\Delta x) = -\Delta x\cos(\pi+\Delta x) = -f(\pi+\Delta x) \Rightarrow$ Beh.

(f) $f(\pi+\Delta x) = (\pi+\Delta x-\pi)\sin(\pi+\Delta x) = -\Delta x\sin(\Delta x)$
$f(\pi-\Delta x) = (\pi-\Delta x-\pi)\sin(\pi-\Delta x) = -\Delta x\sin(\Delta x) = f(\pi+\Delta x) \Rightarrow$ Beh.

(g) Zu zeigen: $f(x) = \cos(x+2)\sin(x+2)$ ist punktsymmetrisch zu $(-2|0)$.
$f(-2+\Delta x) = \cos(-2+\Delta x+2)\sin(-2+\Delta x+2)+2 = \cos(\Delta x)\sin(\Delta x)+2$
$f(-2-\Delta x) = \cos(-2-\Delta x+2)\sin(-2-\Delta x+2)+2 = \cos(-\Delta x)\sin(-\Delta x)+2 = -\cos(\Delta x)\sin(\Delta x)+2 \Rightarrow$ Beh.

(h) $f(x+2)-5 = x^3 \Rightarrow$ Beh.

(i) $f(x-1)-1 = -x^3 \Rightarrow$ Beh.

9. Beweisen Sie folgende Behauptung:
Wenn eine Funktion $f(x)$ punktsymmetrisch zu $(a|0)$ ist, dann ist die Funktion $g(x) = f(x)^2$ achsensymmetrisch zu $x = a$.

Lösung: $f(x)$ punktsymmetrisch zu $(a|0) \Leftrightarrow f(a+x) = -f(a-x) \Rightarrow$
$g(a+x) = f(a+x)^2 = [-f(a-x)]^2 = f(a-x)^2 = g(a-x)$
$\Rightarrow g(x)$ ist achsensymmetrisch zu $x = a$.

Manipulation am Funktionsgrahen

1. (a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = x^3 - 4x$.
   (b) Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen in das Koordinatensystem von (a):
      i. $f(x) = x^3 - 4x + 2$
      ii. $f(x) = x^3 - 4x - 3$
      iii. $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 4x)$
      iv. $f(x) = 2(x^3 - 4x)$
      v. $f(x) = (x-1)^3 - 4(x-1)$
      vi. $f(x) = (x+3)^3 - 4(x+3)$
   (c) Überprüfen Sie Ihre Zeichnungen mit einer geeigneten Software.

Lösung:

2. (a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$.
   (b) Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen in das Koordinatensystem von (a):
      i. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 2$
      ii. $f(x) = (x+1)^3 + 4(x+1)^2 + 4(x+1)$
      iii. $f(x) = (x+1)^3 + 4(x+1)^2 + 4(x+1) + 2$
      iv. $f(x) = (x-2)^3 + 4(x-2)^2 + 4(x-2)$

    v. $f(x) = (x-2)^3 + 4(x-2)^2 + 4(x-2) - 3$
    vi. $f(x) = (x+4)^3 + 4(x+4)^2 + 4(x+4)$
    vii. $f(x) = (x+4)^3 + 4(x+4)^2 + 4(x+4) + 4$
  (c) Überprüfen Sie Ihre Zeichnungen mit einer geeigneten Software.

Lösung:

3. (a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \sin(x)$.
   (b) Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen in das Koordinatensystem von (a):
      i. $f(x) = \sin(x) + 2$
      ii. $f(x) = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)$
      iii. $f(x) = \sin(x + \frac{1}{2}\pi) + 2$
      iv. $f(x) = 2 \cdot \sin(x)$
      v. $f(x) = 2 \cdot \sin(x + \pi)$
      vi. $f(x) = \sin(2x)$
      vii. $f(x) = \sin(2x) - 3$
   (c) Überprüfen Sie Ihre Zeichnungen mit einer geeigneten Software.

Lösung:

4. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3}{4} - x^2$$

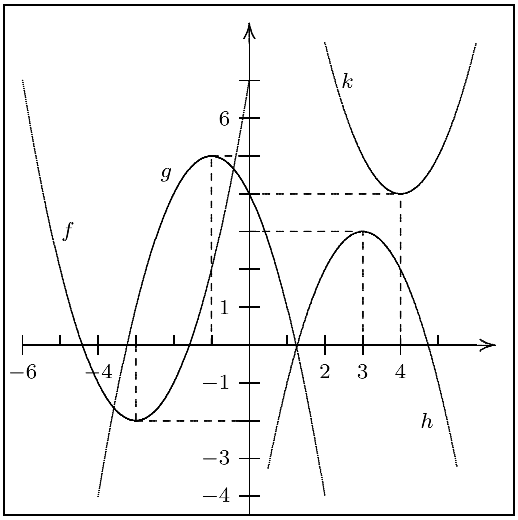
Wird der Graph von f an der y-Achse gespiegelt, dann vom Ursprung aus mit dem Faktor 2 zentrisch gestreckt und schließlich um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ verschoben, dann erhält man den Graphen von g. Wird G_f dagegen zuerst verschoben und dann erst gespiegelt und gestreckt, dann erhalten wir den Graphen von h.
Berechnen Sie die Funktionsgleichungen von g und h und zeichnen Sie deren Graphen in **ein** Koordinatensystem! Beweisen Sie, dass G_g durch eine Verschiebung aus G_h hervorgeht!

Lösung:

$$
\begin{array}{lcrcl}
f \text{ an der } y\text{-Achse spiegeln} & : & g_1(x) & = & -\dfrac{x^3}{4} - x^2 \\[2ex]
g_1 \text{ zentrisch strecken} & : & g_2(x) & = & 2 \cdot g_1\left(\dfrac{x}{2}\right) = -\dfrac{x^3}{16} - \dfrac{x^2}{2} \\[2ex]
g_2 \text{ verschieben} & : & g(x) & = & -\dfrac{(x+2)^3}{16} - \dfrac{(x+2)^2}{2} + 2 \\[2ex]
f \text{ verschieben} & : & h_1(x) & = & \dfrac{(x+2)^3}{4} - (x+2)^2 + 2 \\[2ex]
h_1 \text{ an der } y\text{-Achse spiegeln} & : & h_2(x) & = & \dfrac{(-x+2)^3}{4} - (-x+2)^2 + 2 \\[2ex]
h_2 \text{ zentrisch strecken} & : & h(x) & = & 2 \cdot h_2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \\[2ex]
 & & & = & \dfrac{(-\frac{x}{2}+2)^3}{2} - 2\left(-\dfrac{x}{2}+2\right)^2 + 4 = \\[2ex]
 & & & = & -\dfrac{(x-4)^3}{16} - \dfrac{(x-4)^2}{2} + 4
\end{array}
$$

$$g(x-6) + 2 = h(x)$$

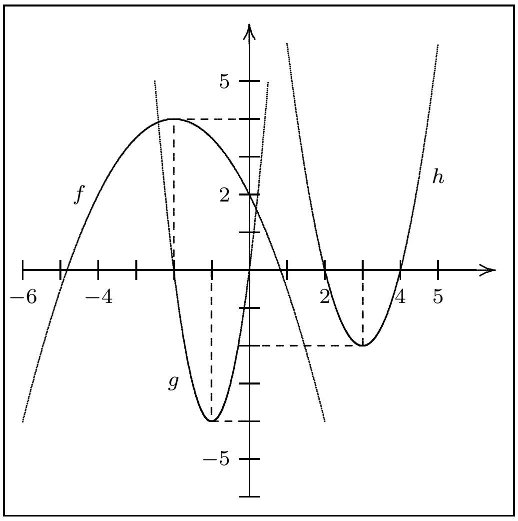
5. Die Graphen der nebenstehenden Abbildung sind verschobene und gespiegelte Normalparabeln. Geben Sie jeweils die Funktionsgleichung an!



Lösung: $f(x) = x^2 + 6\,x + 7 \quad g(x) = -x^2 - 2\,x + 4$

$h(x) = -x^2 + 6\,x - 6 \quad k(x) = x^2 - 8\,x + 20$

6. Die Graphen der nebenstehenden Abbildung gehören zu quadratischen Funktionen. Geben Sie jeweils die Funktionsgleichung an!



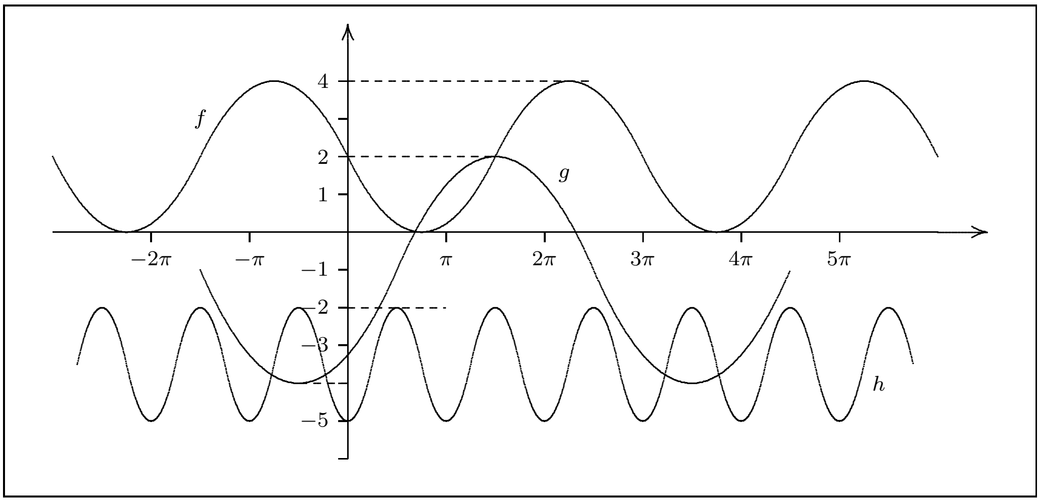
Lösung: $f(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 - 2\,x + 2 \quad g(x) = 4\,x^2 + 8\,x$

$h(x) = 2\,x^2 - 12\,x + 16$

7. Die Graphen der folgenden Abbildung gehören zu allgemeinen Sinusfunktionen

$$f(x) = A \cdot \sin(kx + \varphi) + b$$

Geben Sie jeweils die Funktionsgleichung an!



Lösung: $f(x) = 2\,\sin\left(\frac{2}{3}\,x - \pi\right) + 2 \qquad g(x) = 3\,\sin\left(\frac{1}{2}\,x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$

$h(x) = \frac{3}{2}\,\sin\left(2\,x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{7}{2}$

8. (a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f(x) = (x-1)^2(x+2)$, $g(x) = 2f(x)$, $h(x) = f(x) + 2$ und $k(x) = f(x-3)$ und überprüfen Sie ihre Zeichnung mit einer geeigneten Software.
   (b) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f(x) = -2(x-1)(x+2)^2$, $g(x) = -f(x)$, $h(x) = f(x) - 5$, $k(x) = f(x+2)$ und überprüfen Sie ihre Zeichnung mit einer geeigneten Software.
   (c) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2(x-2)(x-1)$, $g(x) = -2f(x)$, $h(x) = 2f(x) - 2$ und $k(x) = f(x-3) + 1$ und überprüfen Sie ihre Zeichnung mit einer geeigneten Software.

Lösung:

9. (a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{3}{2}f(x)$, $h(x) = f(x) - 3$ und $k(x) = -f(x-2)$ und überprüfen Sie ihre Zeichnung mit einer geeigneten Software.
   (b) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2 + 3x + 2$, $g(x) = -2f(x)$, $h(x) = \frac{1}{2}f(x) - 2$, $k(x) = f(x+2) + 3$ und überprüfen Sie ihre Zeichnung mit einer geeigneten Software.
   (c) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2 - 6 + 5$, $g(x) = f(x-3) + 2$, $h(x) = 2f(x) - 3$ und $k(x) = 2f(x-3)$ und überprüfen Sie ihre Zeichnung mit einer geeigneten Software.

Lösung:

10. (a) Geben Sie die Gleichung einer Parabel an, deren Scheitel bei S(−3|5) liegt und durch den Punkt P(−2|3) geht.
    (b) Geben Sie die Gleichung der dazu um
        i. 2 nach oben
        ii. 5 nach unten
        iii. 1 nach rechts
        iv. 3 nach links

        verschobenen Parabel an.
    (c) Geben Sie die Gleichung der zur Parabel aus (a) mit dem Vektor
        i. (6|9)
        ii. (−2|5)

        verschobenen Parabel an.

Lösung: (a) $p(x) = -2(x+3)^2 + 5$

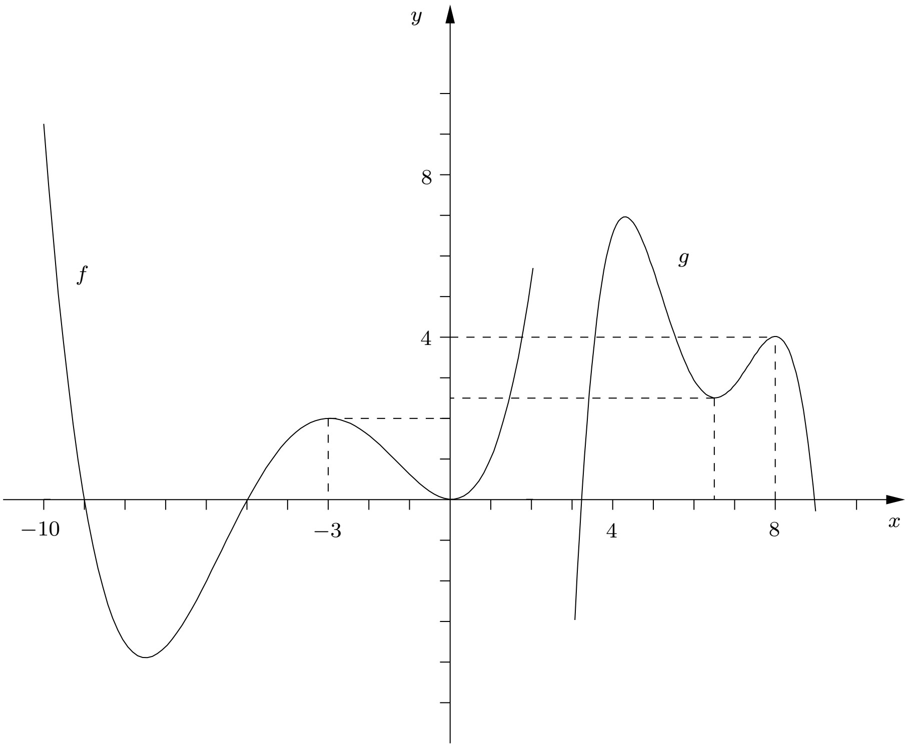
(b)
  i. $p(x) = -2(x+3)^2 + 7$
  ii. $p(x) = -2(x+3)^2$
  iii. $p(x) = -2(x+2)^2 + 5$
  iv. $p(x) = -2(x+6)^2 + 5$

(c)
  i. $p(x) = -2(x-3)^2 + 14$
  ii. $p(x) = -2(x+5)^2 + 10$

11. Die Abbildung zeigt den Grafen der Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{54}x^2(x+5)(x+9)$$

Beschreiben Sie, wie der ebenfalls dargestellte Graf der Funktion g aus dem Grafen von f hervorgeht und entwickeln Sie schrittweise die Gleichung von g. Zeichnen Sie beschriftete Hilfsfunktionen in die gegebene Abbildung. Überprüfen Sie die gefundene Gleichung durch die Berechnung der Werte $g(3{,}5)$, $g(6{,}5)$ und $g(8)$.



Lösung: f spiegeln an der x-Achse → $f_1(x) = -f(x)$

f_1 strecken mit Zentrum (0|0) in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$ und in y-Richtung mit Faktor $\frac{3}{4}$ →

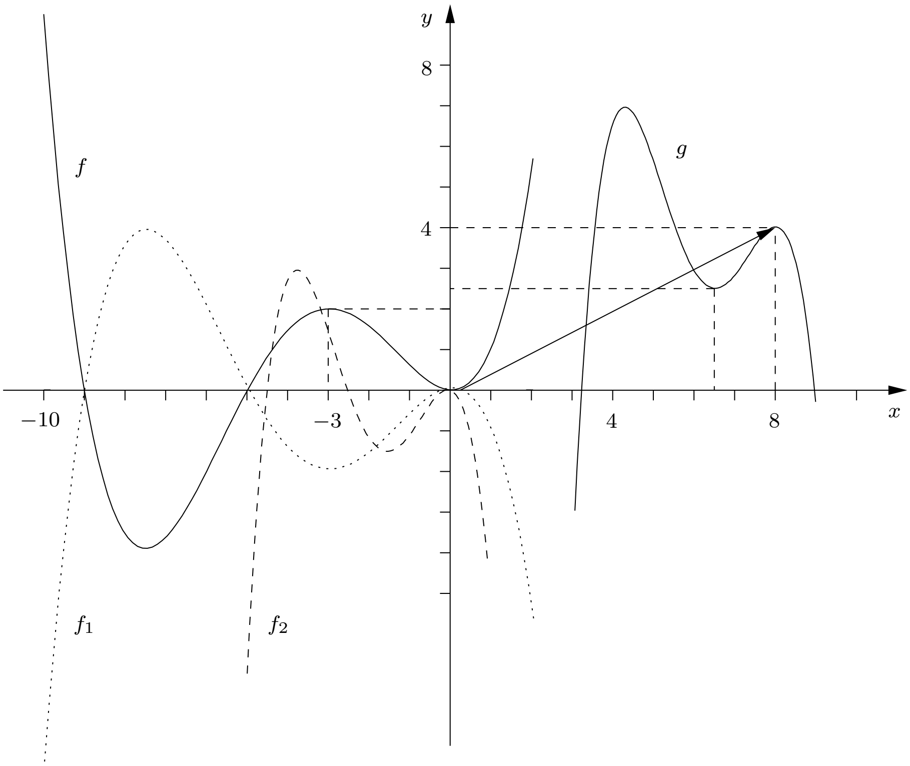
$$f_2(x) = -\frac{3}{4}f(2x) = -\frac{1}{18}x^2(2x+5)(2x+9)$$

f_2 verschieben um 8 nach rechts und um 4 nach oben →

$$g(x) = f_2(x-8) + 4 = -\frac{1}{18}(x-8)^2(2(x-8)+5)(2(x-8)+9)$$

$$g(x) = -\frac{1}{18}(x-8)^2(2x-11)(2x-7)+4$$

$g(3{,}5) = 4, \quad g(6{,}5) = 2{,}5, \quad g(8) = 4$



12. Beschreiben Sie, wie der Graf der Funktion

$$f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{3}{4}x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$$

aus dem Grafen der Funktion $g(x) = \sin x$ hervorgeht und zeichnen Sie beide Grafen.

Lösung: $f(x) = 2 \cdot \sin\left[\frac{3}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] + 3$

Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{4}{3}$ – Verschiebung um $\frac{\pi}{3}$ nach rechts – Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2 – Verschiebung um 3 nach oben.

Oder:

Verschiebung um $\frac{\pi}{4}$ nach rechts – Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{4}{3}$ – Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2 – Verschiebung um 3 nach oben.

13. Streckt man den Grafen der Funktion $f(x) = \sin x$ zuerst in x-Richtung mit dem Faktor $k = \frac{2}{3}$ und verschiebt ihn dann nach links um $a = \frac{\pi}{4}$, dann erhält man den Grafen von g. Verschiebt man den Grafen von f zuerst um a nach links und streckt ihn dann in x-Richtung mit dem Faktor k, dann erhält man den Grafen von h. Schreiben Sie die Gleichungen von g und h hin. Wie weit und in welche Richtung muss man den Grafen von g verschieben, um den Grafen von h zu erhalten?

Lösung:
$$g(x) = \sin\left[\frac{1}{k}(x+a)\right] = \sin\left[\frac{3}{2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sin\left[\frac{3}{2}x+\frac{3\pi}{8}\right]$$
$$h(x) = \sin\left[\frac{1}{k}x+a\right] = \sin\left[\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{4}\right] = \sin\left[\frac{3}{2}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$h(x) = \sin\left[\frac{3}{2}\left(x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)\right] = g\left(x-\frac{\pi}{12}\right) \quad \Longrightarrow \text{Verschiebung um } \frac{\pi}{12} \text{ nach rechts.}$$

15.3.2. Grenzwerte

Grenzwerte mit x -¿ Unendlich

1. Berechnen Sie folgende Grenzwerte.
   - (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2-x}{1+x}$
   - (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\sin(x)}{x}$
   - (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}}$
   - (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+2\sqrt{x}}{3x-\sqrt{x}}$

Lösung:
(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2-x}{1+x} = -1$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\sin(x)}{x} = 0$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}} = 2$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+2\sqrt{x}}{3x-\sqrt{x}} = \frac{1}{3}$

2. In einer Schülerarbeit findet sich folgende fehlerhafte Lösung:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^2} &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\cdot(x^3+1)\right) \quad (1)\\ &= \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}_{=0}\cdot\lim_{x\to\infty}(x^3+1) \quad \text{(Grenzwertregel)} \quad (2)\\ &= 0\cdot\lim_{x\to\infty}(x^3+1)=0 \quad \text{(Multiplikation mit 0!)} \quad (3)\end{aligned}$$

Erläutern Sie den (bzw. die) Fehler.
Bestimmen Sie das korrekte Ergebnis!

Lösung: (2) ist falsch, da diese Zerlegung in das Produkt der Grenzwerte nur richtig ist, wenn beide Grenzwerte existieren.
(3) ist falsch, da der zweite Faktor unendlich ist.

3. Berechnen Sie

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+3}{n^3+1}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2-n^2}{4n}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-2)^2-4n^2}{n}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{n^2}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n^3}$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+3^3+...+n^3}{n^4}$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^4+2^4+3^4+...+n^4}{n^5}$

(h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)...\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)...\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

Lösung: (a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) -8 (d) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{1}{3}$
(f) $\frac{1}{4}$ (g) $\frac{1}{5}$ (h) 0 (i) $\frac{1}{2}$

4. Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+2x-1}-2x)$, $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+3x-1}-2x)$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x^2+5}{4x^4+2x+1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^3+5x^2-11}{2x^3-4x+1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-3x^2+7x}{-2x^2+x-5}$

Lösung: (a) $\frac{1}{2}$, ∞

(b) 0, $-\frac{1}{2}$, $-\infty$

5. Grenzwert der Funktion $f(x)=\sin(\frac{\pi}{x})$?
   (a) Untersuchen Sie für $x_{1,m}=10^{-m}$, $x_{2,m}=2\cdot 10^{-m}$, $x_{3,m}=3\cdot 10^{-m}$, $x_{4,m}=4\cdot 10^{-m}$, $x_{5,m}=5\cdot 10^{-m}$, $x_{6,m}=6\cdot 10^{-m}$, $x_{7,m}=7\cdot 10^{-m}$, $x_{8,m}=8\cdot 10^{-m}$ und $x_{9,m}=9\cdot 10^{-m}$ ($m\in\{1,2,3,4,5,...\}$) die Folgen der Funktionswerte von f. Was fällt auf?

   (b) Begründen Sie ihre Beobachtungen.

   Literatur: Michael Vowe, Grenzwerte, Praxis der Mathematik, Heft 4, 40. Jahrgang, 1998, S. 158

Lösung: (a) $\sin\left(\dfrac{\pi}{x_{1,m}}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{x_{2,m}}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{x_{5,m}}\right)=0$, für $m\in\{1,2,3,4,5,...\}$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{x_{4,m}}\right)=0$, für $m\in\{2,3,4,5,...\}$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{x_{8,m}}\right)=0$, für $m\in\{3,4,5,...\}$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{x_{3,m}}\right)=\sin\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{x_{6,m}}\right)=\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ und

$\sin\left(\dfrac{\pi}{x_{9,m}}\right)=\sin\left(\dfrac{10}{9}\pi\right)=-0{,}3420201...$, für $m\in\{2,3,4,5,...\}$

Für $\sin\left(\dfrac{\pi}{x_{7,m}}\right)$ existiert kein Grenzwert.

(b) $\sin\left(\dfrac{\pi}{x_{1,m}}\right)=\sin(10^m\cdot\pi)=0$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{x_{2,m}}\right)=\sin(5\cdot 10^{m-1}\cdot\pi)=0$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{x_{3,m}}\right)=\sin\left(\dfrac{10^m-4+4}{3}\cdot\pi\right)=\sin\left(2k\pi+\dfrac{4}{3}\cdot\pi\right)=\sin\left(\dfrac{4}{3}\cdot\pi\right)$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{x_{4,m}}\right)=\sin(5^2\cdot 10^{m-2}\cdot\pi)=0$, für $m\in\{2,3,4,5,...\}$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{x_{5,m}}\right)=\sin(2\cdot 10^{m-1}\cdot\pi)=0$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{x_{6,m}}\right)=\sin\left(\dfrac{10^m-4+4}{6}\cdot\pi\right)=\sin\left(2k\pi+\dfrac{4}{6}\cdot\pi\right)=\sin\left(\dfrac{2}{3}\cdot\pi\right)$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{x_{8,m}}\right)=\sin(5^3\cdot 10^{m-3}\cdot\pi)=0$, für $m\in\{3,4,5,...\}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{x_{9,m}}\right) = \sin\left(\frac{10^m - 10 + 10}{9}\cdot\pi\right) = \sin\left(2k\pi + \frac{10}{9}\cdot\pi\right) = \sin\left(\frac{10}{9}\cdot\pi\right),$$

für $m \in \{2,3,4,5,...\}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{x_{7,m}}\right) = \begin{cases} -\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) & \text{falls} \quad m = 1+6k \\ \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) & \text{falls} \quad m = 2+6k \\ \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right) & \text{falls} \quad m = 3+6k \\ \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) & \text{falls} \quad m = 4+6k \\ -\sin\left(\frac{5\pi}{7}\right) & \text{falls} \quad m = 5+6k \\ -\sin\left(\frac{1\pi}{7}\right) & \text{falls} \quad m = 6+6k \end{cases}$$

6. (a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-2x}$ (b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x^6-3}{1-x^4}$ (c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^5-6x^3}{x^7-x^5}$

   (d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^5-6x^3}{x^8-x^5}$ (e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^n-x^{n-2}}{x^{n-2}-x^{n-1}}$ (f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^n-x^{n-2}}{x^{n+2}-x^{n-1}}$

Lösung: (a) $\pm\infty$ (b) $-\infty$ (c) 0^+ (d) $0^\pm$ (e) $\mp\infty$ (f) 0^+

7. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-x}{3x-2\sqrt{x}}$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-4}}$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{3}{5}}}{x^{\frac{11}{6}}+x^{\frac{6}{11}}}$

   (d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{x}}$ (e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{2}}{(\sqrt[10]{x}-\sqrt[10]{2})^2}$ (f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^{\frac{1}{3}}-3\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}-x^{\frac{1}{2}}}$

Lösung: (a) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^+$ (b) 1^- (c) 0^+ (d) $+\infty$ (e) 1^+ (f) 3^-

8. Berechnen Sie den folgenden Grenzwert und beachten Sie dabei zwei Fälle:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{2n}-x^n}{x^n-x^{n-1}} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Lösung: $+\infty$ für gerades n, $\pm\infty$ für ungerades n

9. Suchen Sie Beispiele von Funktionen f und g mit $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, für die gilt: (a) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-g(x)) = \infty$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-g(x)) = 0$

   (c) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-g(x)) = -\infty$ (d) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-g(x)) = 5$

Lösung: (a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x$ (b) $f(x) = x$, $g(x) = x$ (c) $f(x) = x$, $g(x) = x^2$
(d) $f(x) = x+5$, $g(x) = x$

10. Verwenden Sie in dieser Aufgabe nach geeigneter Umformung die Formel der linearen Näherung für die Wurzelfunktion:

$$\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2} \quad \text{für} \quad |h| \ll 1$$

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} (x\sqrt{x^2+1} - x^2)$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2\sqrt{x^2+1} - x^3)$ (d) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - x^2)$

Lösung: Lineare Näherung: $x \to +\infty \implies x > 0 \implies$

$$\sqrt{x^2+1} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \approx x\left(1+\frac{1}{2x^2}\right)$$

(a) 0^+ (b) $\left(\frac{1}{2}\right)^-$ (c) $+\infty$ (d) $-\infty$

11. (a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3^x-2}{2\cdot 3^x}$ (b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{2^x}$ (c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (2^x - x^{100})$

(d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (x^3 \cdot 10^{-x})$ (e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (x^{20} - 1{,}001^x)$ (f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (3^x - 2^x)$

Lösung: (a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3^x-2}{2\cdot 3^x} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^- \\ -\infty \end{cases}$ (b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{2^x} = \begin{cases} 0 \\ \text{existiert nicht} \end{cases}$

(c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (2^x - x^{100}) = \pm\infty$ (d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (x^3 \cdot 10^{-x}) = \begin{cases} 0 \\ -\infty \end{cases}$

(e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (x^{20} - 1{,}001^x) = \mp\infty$ (f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (3^x - 2^x) = \begin{cases} +\infty \\ 0^- \end{cases}$

15.3.3. Funktionen mit Parameter