SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Jahrgangsstufe 9 (Gymnasium)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

5. Juni 2012

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Algebra

1. Die reellen Zahlen

1.1. Quadratwurzel

1. Quelle: Schnittpunkt 9 (1995)

   Variationen:

   (a) einfachere Zahlen

   (b) ein weiteres offensichtliches Beispiel einfügen

   (c) weiteren Pfeil einzeichnen

   (d) Pfeile ganz weglassen

   (e) Zahlen betrachten, die keinen Partner haben

   (f) Zuordnungstabelle

   - $12 \to 144$; $0,2 \to 0,04$; $1,5 \to 2,25$; $\frac{1}{10} \to \frac{1}{100}$; $12 \to 144$; $17 \to 289$; $7 \to 49$; $30 \to 900$
   - Zahlen, die keinen (rationalen) Partner haben: 298; 2, 5; 99
   - Fehlende Zahlenpartner: $5 \to 25$; $0,02 \to 0,0004$; $2 \to 4$; $10 \to 100$

2. Quelle: mathematik lehren 70 (1995)

3. Quelle: Westermann

   Billy der Schlaue

4. (a) Für das DIN-A4 Blatt beträgt das Seitenverhältnis $a : b$, für das Blatt DIN-A5 beträgt es $b : \frac{a}{2}$. Also gilt: $\frac{a}{b} = \frac{2 \cdot b}{a} \Rightarrow a^2 = 2b^2$. Das Seitenverhältnis $a : b$ beträgt also $\sqrt{2} : 1$. Der Flächeninhalt wird halbiert, also wird jede Seitenlänge (und darauf bezieht sich die eingestellte Zahl) um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 70,71\%$ gekürzt.

   (b)

   (c) Auf anschaulichem Niveau: Klar, die Schachteln sind ähnlich zueinander. Jede Seitenlänge wird mit dem Faktor $\sqrt{2}$ gestreckt, also vervielfacht sich das Volumen um den Faktor $\sqrt{8}$.

5. Quelle: Curriculum Geschichte I: Altertum. Diesterweg (1975), S.79ff

6. (a): $x^2 = 4$ (b): $x^2 = \frac{1}{5}$

7. $\sqrt{0,0004}$; $\sqrt{\frac{16}{81}}$; $\sqrt{a^6}$, falls $a \geqq 0$;
   $\sqrt{(a-2b)^2}$, falls $a \geqq 2b$; $\sqrt{x^6}$, falls $x \leqq 0$; $\sqrt{x^4}$, falls $x \geqq 0$

8. (a): $\sqrt{x^2 z^2}$ (b): $\sqrt{p^4}$ (c): $\sqrt{y^2 z^4}$ (d), (e): nicht möglich

9. (a) wahr
   (b) nur wahr, falls $x > 1$
   (c) nur wahr, falls $x \leqq 0$

10.

11. (a): Widerspruchsbeweis (Quadrieren liefert Widerspruch!)
    (b): Die Umkehrung ist falsch.

12. (a) $D = [-4; \infty[$ (b) $D = \{0\}$ (c) $D = \mathbb{R}$ (d) $D = \mathbb{R}_0^+$

13. $D =]0; 4[$

14. $D = \mathbb{R} \setminus [-5; 3]$

15. $D =]2; \infty[\setminus \{4\}$

1.2. Menge der reellen Zahlen

1. (a) $a^2 = \frac{Z^2}{N^2} = \frac{p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot \; ... \; \cdot p_n^2}{q_1^2 \cdot q_2^2 \cdot \; ... \; \cdot q_m^2}$ kann nicht gekürzt werden, da $q_i \neq p_k$. a^2 wäre nur dann eine natürliche Zahl, wenn sich alle Faktoren im Nenner wegkürzen ließen.

   $\boxed{\text{Das Quadrat einer nicht ganzen rationalen Zahl ist nicht ganz.}}$

   (b) Wegen $3^2 = 9 < 10$ und $4^2 = 16 > 10$ gibt es keine natürliche Zahl mit dem Quadrat 10. Da es auch keine nicht ganze rationale Zahl mit dem Quadrat 10 gibt, gibt es überhaupt keine rationale Zahl, deren Quadrat 10 ist.

   (c) Wegen $31^2 = 961 < 1000$ und $32^2 = 1024 > 1000$ gibt es keine natürliche Zahl mit dem Quadrat 10 $\Longrightarrow$ nein

   (d) $x^2 = 10^n = 2^n \cdot 5^n$. x muss also $\frac{n}{2}$-mal den Faktor 2 und $\frac{n}{2}$-mal den Faktor 5 enthalten. Das geht nur für n gerade.

2. • $1,112123123412345123456\ldots$

- $1,1010010001000010000010000001\ldots$

3. (a) irrational, da unendlicher, nichtperiodischer Dezimalbruch
   (b) $x = -\dfrac{3}{55}$ (c) $x = \dfrac{139}{1100}$
   (d) $x \notin \mathbb{Z} \wedge x^2 \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad x$ irrational
   (e) existiert nicht

1.3. Intervallschachtelungen

1. Variationen:
   (a) Tel-Nr. eines Schülers verwenden
   (b) Wie oft muss man bei einer sechsstelligen Zahl höchstens nachfragen? Antwort: Zwanzig Mal

2. Quelle: Elemente der Mathematik 9 (1995) offen

3. Quelle: Lambacher Schweizer (1997)

1.4. numerische Berechnungen von Wurzeln

1. (a) $x_{n+1} = \left(x_n + \dfrac{17}{x_n}\right) : 2$

$$x_2 = \left(4 + \frac{17}{4}\right) : 2 = 4{,}125, \qquad x_2^2 = 17{,}015\,625$$
$$x_3 = \left(x_2 + \frac{17}{x_2}\right) : 2 = 4{,}1231060606, \qquad x_3^2 = 17{,}000\,003\,587$$
$$x_4 = \left(x_3 + \frac{17}{x_3}\right) : 2 = 4{,}12310562562, \qquad x_3^2 = 17{,}000\,000\,000$$

   (b) $x_{n+1} = \left(x_n + \dfrac{1+h}{x_n}\right) : 2$

$$x_2 = \left(1 + \frac{1+h}{1}\right) : 2 = 1 + \frac{h}{2}$$
$$a = \sqrt{1 + 0{,}005} \approx 1 + \frac{0{,}005}{2} = 1{,}0025 = x_2, \quad a = 1{,}00249688279$$
$$\delta_{\text{rel}} = \frac{x_2 - a}{a} = \frac{3{,}1172 \cdot 10^{-6}}{1{,}00249688279} = 3{,}1094 \cdot 10^{-6} = 0{,}00031094\,\%$$

2. $x = 1 \cdot 10^7\,\text{mm} \quad \Longrightarrow \quad \frac{y^2}{x^2} = 10^{-14}$

   $$\delta \approx x \cdot \left(1 + \frac{y^2}{2x^2} - 1\right) = \frac{y^2}{2x} = \frac{1\,\text{mm}^2}{2 \cdot 10^7\,\text{mm}} = 5 \cdot 10^{-8}\,\text{mm}$$

3. Die Stellenzahl in der Aufgabe a) muß gegebenenfalls an die zur Verfügung stehenden Taschenrechner angepaßt werden. Da die Abweichung von 1 ca. $5 \cdot 10^{-15}$ beträgt, werden gängige Geräte 1 anzeigen.

4. Man erhält die Folge der Werte: $4,\ 2{,}875,\ 2{,}6548913,\ 2{,}645767,\ 2{,}6457513$. Danach ändern sich die erforderlichen Dezimalen nicht mehr.

5.

Schritt	1	2	3	4
1.Seite	2	3,5	3,179	3,162
2.Seite	5	2,857	3,146	3,162

6.

7. (b)
   $x_2 = 3{,}1\overline{6}$ $\delta_2 = 1{,}39 \cdot 10^{-3}$
   $x_3 = 3{,}162280701754386$ $\delta_3 = 9{,}62 \cdot 10^{-7}$
   $x_4 = 3{,}162277660169842$ $\delta_4 = 4{,}63 \cdot 10^{-13}$
   $x_5 = 3{,}162277660168379$ $\delta_5 \approx 0 \quad (1{,}07 \cdot 10^{-25})$

   (c)
   $x_2 = 1{,}5$ $\delta_2 = 6{,}07 \cdot 10^{-2}$
   $x_3 = 1{,}41\overline{6}$ $\delta_3 = 1{,}73 \cdot 10^{-3}$
   $x_4 = 1{,}414215686627451$ $\delta_4 = 1{,}50 \cdot 10^{-6}$
   $x_5 = 1{,}414213562374690$ $\delta_5 = 1{,}13 \cdot 10^{-12}$
   $x_6 = 1{,}414213562373095$ $\delta_5 \approx 0 \quad (6{,}36 \cdot 10^{-25})$

8. (a) $a = \frac{1}{2}$, d. h. $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$
   (b) $\sqrt{1{,}002} \approx 1{,}001,\ \delta = 5 \cdot 10^{-7}$; $\sqrt{0{,}99996} \approx 0{,}99998,\ \delta = 2 \cdot 10^{-10}$
   (c) Taschenrechner: $y = 0$; lineare Näherung: $y = 5000$
   (d) $\Delta t \approx \frac{s\,\beta^2}{2\,v} = 5 \cdot 10^{-11}\,\text{s}\ (2{,}7 \cdot 10^{-8}\,\text{s})$

9. (a) $a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{8}$ d.h. $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$
   (b) $\sqrt{1{,}02} \approx 1{,}00995,\ \delta_{rel} = -4{,}9 \cdot 10^{-7}$
   $\sqrt{0{,}996} \approx 0{,}997998,\ \delta_{rel} = 4{,}0 \cdot 10^{-9}$
   (c) $\sqrt{17} \approx 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{32} - \frac{1}{2048}\right) = 4{,}1230469;\ \delta_{rel} = -1{,}4 \cdot 10^{-5}$
   $\sqrt{99} \approx 10 \cdot \left(1 - \frac{1}{200} - \frac{1}{80000}\right) = 9{,}949875;\ \delta_{rel} = 6{,}3 \cdot 10^{-8}$
   (d) $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2$
   $\frac{1}{1{,}005} \approx 0{,}995025;\ \delta_{rel} = 1{,}25 \cdot 10^{-7}$
   $\frac{1}{0{,}94} \approx 1{,}0636;\ \delta_{rel} = -2{,}2 \cdot 10^{-4}$

1.5. Umformen und Vereinfachen von Wurzeltermen

1.5.1. Wurzeln zusammenfassen

1. Quelle: Schnittpunkt 9 (1995)
2. Quelle: Schnittpunkt 9 (1995) CASABLANCA
3.
4. $L =]-\infty; 9]$
5. $\sqrt{14+3\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$, da sonst $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ wäre!

1.5.2. Radizieren

1. (a) 196 (b) 23 (c) 43
   (d) 62 (e) 721
2. $-9|x|^3$
3. (a) $|4x+7|$ (b) $3\sqrt{|c|}$ (c) $\frac{5}{10^4}\sqrt{7}$ (d) $\frac{b^2}{c}\sqrt{ab}$ (e) $9\sqrt{3}$
4. $\sqrt{x^4+x^2y^2+0,25y^4} = x^2+0,5y^2$;
   $\sqrt{9x^2+4,5x+0,75^2} = \begin{cases} 3x+0,75 & \text{für } x \geqq -0,25 \\ -3x-0,75 & \text{für } x < -0,25 \end{cases}$
5. $\frac{1}{2}$
6. $\frac{1}{5}(1-4x)$
7. $-a-2$
8. -1
9. $\frac{-2x+1}{2}$
10. (a): $2,1x$ (b): $1-x^2$
11. $2\sqrt{11}+3\sqrt{7}$
12. $\sqrt{7}-2\sqrt{3}$
13. $\frac{3a}{a+3b}\sqrt{3}$

14. $2a^2(3-x)$

15. $\sqrt{\dfrac{2(b-1)}{a(b+1)}}$

16. Ergebnis $x-3$, falls $x \geqq 3$, $3-x$ falls $x \leqq -3$

17. $7{,}7a^2 - 4\sqrt{2}b^4$

18. (a) $4|x|^7 y^{13} z^3 \sqrt{yz}$, definiert für $yz \geqq 0$
    (b) $a^2 b\sqrt{b-1}$, definiert für $b \geqq 1$

19. $2 \cdot (x-4)$ für $x \geqq 4$; $2 \cdot (4-x)$ für $x < 4$

20. (a): $\dfrac{x^2 \cdot |y|}{z^2} \cdot \sqrt{x}$, definiert für $x \geqq 0$ und $z \neq 0$

    (b): $\left|\dfrac{b}{c-4}\right| \cdot \sqrt{(a^2+2) \cdot b}$, definiert für $b \geqq 0$ und $c \neq 4$

21. 0 für $k=0$ oder $c=1$; $8k - 8kc$ für $k<0 \wedge c>1$ oder für $k>0 \wedge c<1$;
    $8kc - 8k$ für $k<0 \wedge c<1$ oder für $k>0 \wedge c>1$

22. (a): $-xy^2$ (b): $2x^2+1$
    (c): $3x^2-y$, falls $3x^2 \geqq y$; $-3x^2+y$, falls $3x^2 < y$

23. (a): $0{,}5x+1$ (b): 1

24. $-6x-1$

1.5.3. Rationalmachen des Nenners

1. (a) $8\sqrt{5}$ (b) $\frac{9}{13}$

2. $\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$

3. $2\sqrt{2}-6$

4. $\frac{\sqrt{ab}}{ab}$

5. $10-3\sqrt{11}$

6. $\frac{x^3+y\sqrt{y}}{x^2-y}$

7. $\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$

8. $2+\sqrt{3}$

9. $\frac{\sqrt{14x}}{7}$

10. $\sqrt{p} - 1$
11. $\sqrt{\sqrt{10} - 3}$
12. $1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$
13. $5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{10} - 10$
14. $a' = \dfrac{ac - rbd}{c^2 - rd^2}$, $b' = \dfrac{bc - ad}{c^2 - rd^2}$

1.5.4. Kombinierte Aufgaben umfangreicherer Art

1. (a) $D =]3, +\infty[\quad \Longrightarrow \quad x - 3 > 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-3)\sqrt{\dfrac{1}{x-3}} = \sqrt{\dfrac{(x-3)^2}{x-3}} = \sqrt{x-3}$

   (b) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\} \quad \Longrightarrow \quad (x-3)\sqrt{\dfrac{1}{(x-3)^2}} = \dfrac{x-3}{|x-3|} = \operatorname{sgn}(x-3) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 3 \\ -1 & \text{für } x < 3 \end{cases}$

   (c) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\} \quad \Longrightarrow \quad (x^2 - 4) \cdot \sqrt{\dfrac{1}{(x-2)^2}} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{|x-2|} = \begin{cases} x+2 & \text{für } x > 2 \\ -x-2 & \text{für } x < 2 \end{cases}$

2. (a) $D = \mathbb{R}, \qquad f(x) = x - \sqrt{x^2} = x - |x| = \begin{cases} 0 & \text{für } x \geqq 0 \\ 2x & \text{für } x < 0 \end{cases}$

   (b) $x \in \mathbb{R}_0^+$, $y \in \mathbb{R}, \qquad T = \sqrt{3 \cdot 25x \cdot x^6 y^{10}} = 5x^3|y^5|\sqrt{3x}$

   (c) $a = \sqrt{7} + \dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{8}}{7 - 8} = \sqrt{7} - \sqrt{7} - \sqrt{8} = -\sqrt{8}$

3. (a): $\sqrt{8}$ (b): $\sqrt{80 + 36\sqrt{5}}$

4. -1
5. $46 - 10\sqrt{10}$
6. 33
7. (a): $54\sqrt{6} - 324$ (b): definiert für $r > 0$; $\frac{1}{9} \cdot (-q)$
8. $L = \{2 - \sqrt{2}\}$
9. $\frac{5}{48} \cdot |abxy|$
10. $\frac{x|y|\sqrt{x}}{10}$, $x > 0$, $z > 0$
11. $-\sqrt{\dfrac{2z^3}{x^5 y}}$

12. (a): $\sqrt{6}$ (b): $4\sqrt{3}+8$

13. $5\sqrt{3}-6$

14. $3-\sqrt{5}$

15. Hauptnenner 6, Ergebnis -3

16. $-19-\sqrt{10}$

17. $D=\mathbb{R}_0^+\setminus\{4\}$, Ergebnis $\frac{2x}{x-4}$

18. $D=]9;+\infty[$, Ergebnis $\frac{1}{\sqrt{x-9}}$

19. 0

20. $y=-\dfrac{y_S}{9}\cdot(x-4)^2+y_S$

21. $\frac{4\sqrt{5}+\sqrt{2}}{5}$

22. $\dfrac{5\sqrt{6}+6}{3}$

23. $\dfrac{b}{a^2-b}$

24. $\dfrac{(b-\sqrt{b})\cdot(b\sqrt{a}-1)}{b\cdot(b-1)}$

25. $\dfrac{4\sqrt{b}}{b}$

26. $\dfrac{2\cdot(1+\sqrt{d})}{d\cdot(4c-d)}$

27. (a) $a,b\in\mathbb{R}^+, a\neq b$
    (b) $\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{b\cdot(a-b)}$

2. Funktionale Zusammenhänge

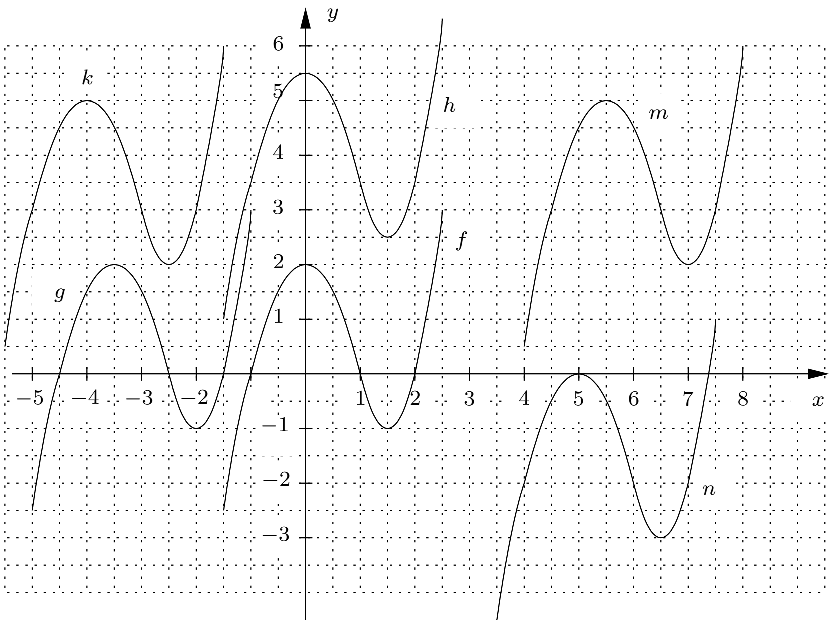
2.1. Graphen quadratischer Funktionen und deren Nullstellen

2.1.1. binomische Formeln

2.1.2. Parabeln als Graphen quadratischer Funktionen

Funktionsgraphen

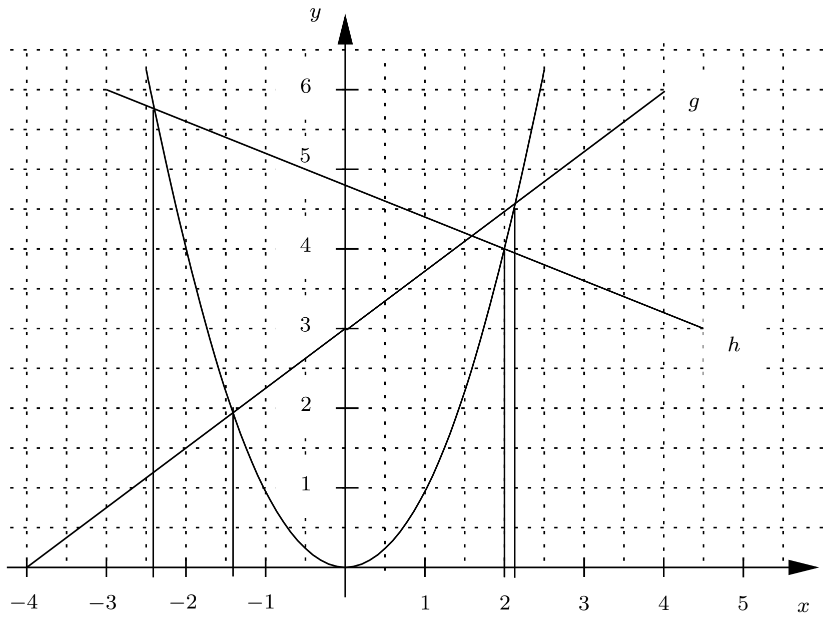
1. (a) Z. B. $x(x-3)$
   (b) Z. B. $\frac{1}{x-2}$

2. 

3.

$$g(x) = f(x+4) \qquad h(x) = f(x) + 3 \qquad k(x) = f(x+4) + 3{,}5$$
$$m(x) = f(x-7) + 3 \qquad n(x) = f(x-4) - 2{,}5$$

4. $x^2 = -\frac{2}{5}x + \frac{24}{5} = g(x), \qquad x^2 = \frac{3}{4}x + 3 = h(x)$



$$\begin{aligned} x^2 + \frac{2}{5}x &= \frac{24}{5} \\ x^2 + 2\cdot\frac{1}{5}x + \left(\frac{1}{5}\right)^2 &= \frac{24}{5} + \frac{1}{25} \\ \left(x + \frac{1}{5}\right)^2 &= \frac{121}{25} \\ x &= -\frac{1}{5} \pm \frac{11}{5} \\ x_1 = 2 \quad x_2 &= -2{,}4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{3}{4}x &= 3 \\ x^2 - 2\cdot\frac{3}{8}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2 &= 3 + \frac{9}{64} \\ \left(x - \frac{3}{8}\right)^2 &= \frac{201}{64} \\ x &= \frac{3}{8} \pm \frac{\sqrt{201}}{8} \\ x_1 \approx 2{,}15 \quad x_2 &= -1{,}40 \end{aligned}$$

5. (a) $f(x) = -\frac{1}{4}(x-5)^2 + 6$

   (b) $f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-5)^2 = 24, \quad x_1 = 5 - \sqrt{24} \approx 0{,}101, \quad x_2 = 5 + \sqrt{24} \approx 9{,}899$

6.

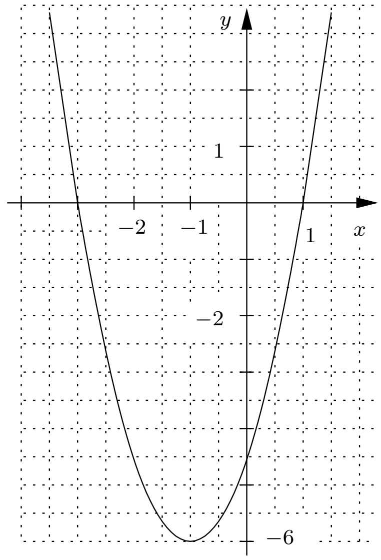
(a) $f(x) = \frac{3}{2}\left[x^2 + 2x + 1 - 1\right] - \frac{9}{2}$

$f(x) = \frac{3}{2}(x+1)^2 - 6 \quad \Longrightarrow \quad S(-1|-6)$

(b) $f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x+1)^2 = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$

$x = -1 \pm 2 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 1$

$f(x) = \frac{3}{2}(x+3)(x-1)$



7. Z. B.: Scheitelpunkt der Parabel auf (0|45), weiter liegen dann die Punkte (124|0) und (−124|0) auf der Parabel $\Rightarrow y = -0,003x^2 + 45$

8. Z. B.:

Die Geraden G_f und G_g sind parallel.

Nullstellen der Parabel G_p sind die Nullstellen der Geraden G_f und G_g.

y-Wert zu einem x-Wert von h erhält mann, indem man die y-Werte von f und g multipliziert.

9. (a) Z. B.: $g(x) - p(x) = (x-3)^2 - 3 \Rightarrow$ Differenz am kleinsten für $x = 3$

(b) Verschiebung um $a \Rightarrow g(x) - p(x) = (x-3)^2 - 3 + a \Rightarrow$ Differenz am kleinsten für $x = 3$; Differenz der Funktionswerte verändert sich: g(3)-p(3)=-3+a

(c) Differenz am kleinsten für $x = 3$; Differenz der Funktionswerte verändert sich: g(3)-p(3)=-3+4b

10. (a) .

(b) Z. B.: zwei Punkten $g(x) = 0,5x + 3$, kein Punkt $g(x) = 0,5x - 5$, genau ein Punkt $g(x) = 0,5x - 3$

(c) Z. B.: $y = 0,5x^2$ oder $y = x^2 + 7$

(d) wahr, falsch, wahr

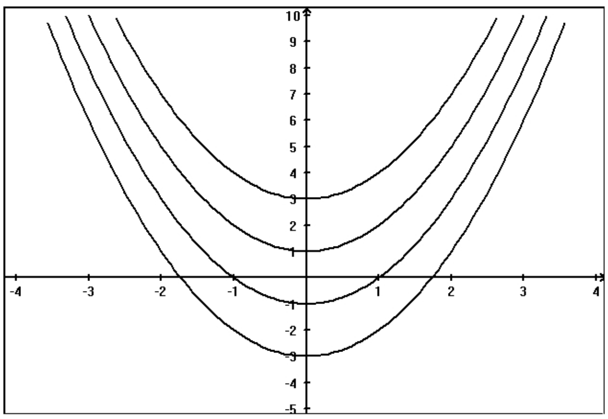
11. (a) .

(b) Z. B. $P_1(0|\frac{1}{2}) : \overline{P_1A} = \frac{1}{2}$
$P_2(1|1) : \overline{P_2A} = 1$
$P_3(2|2\frac{1}{2}) : \overline{P_3A} = \sqrt{2^2 + \frac{3}{2}^2} = 2\frac{1}{2}$
$P_4(-2|2\frac{1}{2}) : \overline{P_4A} = \sqrt{(-2)^2 + \frac{3}{2}^2} = 2\frac{1}{2}$
$P_5(4|8\frac{1}{2}) : \overline{P_5A} = \sqrt{4^2 + (7\frac{1}{2})^2} = 8\frac{1}{2}$
Vermutung: Der Abstand ist die y-Koordinate von P_i. Die Punkte der Parabel haben von A und von der x-Achse gleichen Abstand

(c) $P(x|y)$; $\overline{PA}^2 = x^2 + (y-1)^2 = x^2 - 2y + 1 + y^2$;
$d = y$: Abstand des Punktes P von der x-Achse Bedingung für gleichen Abstand von A und der x-Achse: $y^2 = x^2 - 2y + 1 + y^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

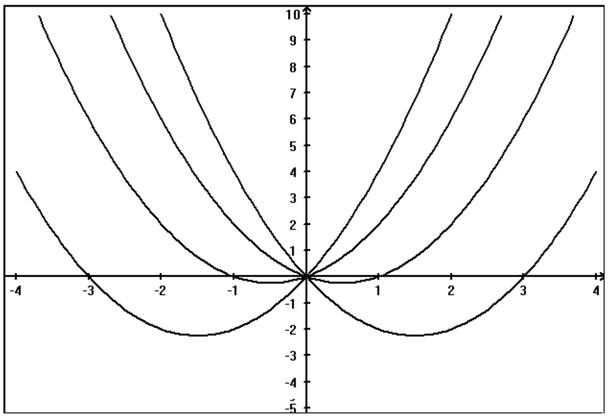
12. (a) $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$, $A(1|0)$
(b) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $D_2 = \mathbb{R}$, $B(2|1)$
(c) $D_1 = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $D_2 = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$, $C_1(\frac{1}{4}(-3+\sqrt{104})|\frac{8}{-7+\sqrt{104}})$, $C_2(\frac{1}{4}(-3-\sqrt{104})|\frac{8}{-7-\sqrt{104}})$
(d) $D_1 = \mathbb{R}$, $D_2 = \mathbb{R}$, $D_1(3|0)$, $D_2(-3|12)$

13. (a) .



(b) Verschiebung entlang der y-Achse um -3, -1, 1, 3
(c) $S(0|c)$
(d) Der Scheitel wandert auf der y-Achse.

14. (a) .



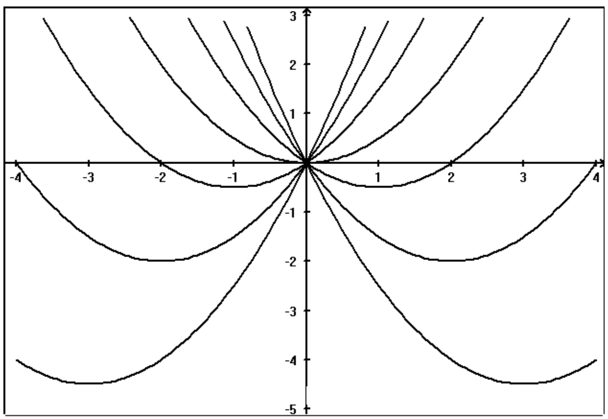
.

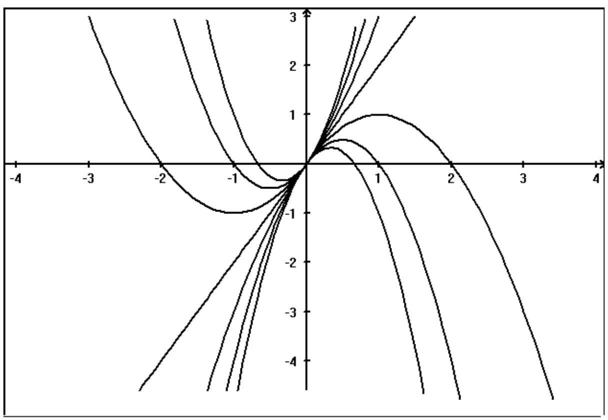
(b) Verschiebung entlang der x-Achse um $1,5;\ 0,5;\ -0,5;\ -1,5$

(c) $S(-\frac{b}{2}| - \frac{b^2}{4})$

(d) $x = -\frac{b}{2} \Rightarrow b = -2x;\ y = -\frac{b^2}{4} = -\frac{(-2x)^2}{4} = -x^2$. Der Scheitel wandert auf der Parabel $s(x) = -x^2$

15. (a) .





(b) $S(-\frac{b}{2a}| - \frac{b^2}{4a})$

(c) Der Scheitel wandert auf der Parabel $s_a(x) = -ax^2$

(d) Der Scheitel wandert auf der Gerade $s_b(x) = \frac{b}{2}x$

16. falsch, falsch, richtig, richtig

17.
    1. $f(x) = x^2 - 6,5$
    2. $f(x) = x^2$
    3. $f(x) = (x-3)^2 - 5$
    4. $f(x) = (x-6)^2 + 5$
    5. $f(x) = (x-6)^2$
    6. $f(x) = (x+4)^2 - 4,5$
    7. $f(x) = (x+4)^2 + 3,5$
    8. $f(x) = (x+2)^2 - 2$
    9. $f(x) = x^2 + 5$
    10. $f(x) = (x - \frac{1}{4})^2 + 2,5$

18.
    1. $f(x) = -(x+7)^2$
    2. $f(x) = -x^2 + 3$
    3. $f(x) = -x^2$
    4. $f(x) = -x^2 - 3$
    5. $f(x) = -(x-4)^2 + 2$
    6. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
    7. $f(x) = x^2$
    8. $f(x) = 2x^2$
    9. $f(x) = -2x^2$
    10. $f(x) = -4x^2 + 6$

19.
    1. $f(x) = (x+1,5)^2 - 3$
    2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$
    3. $f(x) = -(x+4)^2 + 5$
    4. $f(x) = (x-3,5)^2 + 1$
    5. $f(x) = -(x-5)^2 + 7$
    6. $f(x) = (x+3)^2 - 2$
    7. $f(x) = -2x + 1,5$

8. $f(x) = x^2 + 3$
9. $f(x) = \frac{3}{4}x$
10. $f(x) = -(x - 3,5)^2 + 3$

20. (a) jeweils nur Bereich in dem der Graph fällt:
    (a) $x \leq 0$
    (b) $x \leq 0$
    (c) $x \leq 3$
    (d) $x \leq 3$
    (e) $x \leq -1$
    (f) $x \geq 7$
    (g) $x \leq -2,5$
    (h) $x \leq 4$ oder $x \geq 4$
    (b) (a) z.B. $f(x) = (x + 4)^2 + c$
    (b) z.B. $f(x) = -(x - 2)^2 + c$

21.

22.

23.

24.
    1. $f(x) = x^2 - 6,5$
    2. $f(x) = x^2$
    3. $f(x) = (x - 3)^2 - 5$
    4. $f(x) = (x - 6)^2 + 5$
    5. $f(x) = (x - 6)^2$
    6. $f(x) = (x + 4)^2 - 4,5$
    7. $f(x) = (x + 4)^2 + 3,5$
    8. $f(x) = (x + 2)^2 - 2$
    9. $f(x) = x^2 + 5$
    10. $f(x) = (x - \frac{1}{4})^2 + 2,5$

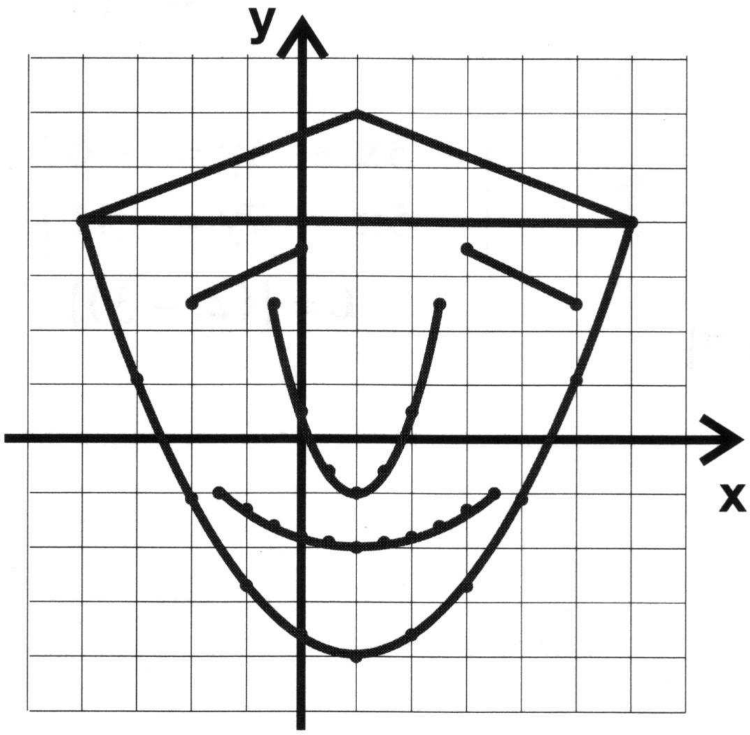
25.

26. $y = \frac{1}{2}(x + 1)^2 + 4$

27. $y = -1{,}04x^2$

28. (a) $124\,\mathrm{m}$
    (b) $5{,}12\,\mathrm{s}$; $131{,}4\,\mathrm{m}$
    (c) $1{,}1\,\mathrm{s}$ und $9{,}4\,\mathrm{s}$

29.



30.

31. (a): 2 mögliche Scheitelpunkte, welche auf der Mittelsenkrechten zur Strecke $[AB]$ liegen und von $M(-3{,}5|1)$ die Entfernung $6{,}25$ Längeneinheiten haben.

    (b): $y = (x + 3{,}5)^2 - 5{,}25$; $\qquad y = -(x + 3{,}5)^2 + 7{,}25$

32. $y = -\frac{1}{4} \cdot (x - 3)^2 + 4$

33. $y = -\dfrac{y_S}{9} \cdot (x - 4)^2 + y_S$

34.

Ausschließlich rechnerische Aufgaben

1. $f(x) = ax^2 + bx + c,$ $\quad$ $\text{A} \in f \implies c = 11{,}5$
   $\text{B} \in f \implies 100a + 10b + 11{,}5 = 31{,}5 \implies 10a + b = 2$
   $\text{C} \in f \implies 400a + 20b + 11{,}5 = 47{,}5 \implies 20a + b = 1{,}8$

   $\implies \quad a = -0{,}02, \quad b = 2{,}2 \quad \implies \quad f(x) = -0{,}02x^2 + 2{,}2x + 11{,}5$

   $f(x) = -0{,}02(x^2 - 110x) + 11{,}5 = -0{,}02(x - 55)^2 + 72 \quad \implies \quad \text{S}(55|72)$

   $f(x) = 0 \quad \implies \quad (x - 55)^2 = 3600 \quad \implies \quad x = 55 \pm 60, \quad x_1 = -5, \quad x_2 = 115$

2. (a) $A(-1|3)$
   (b) $B_1(2|5,5)$, $B_2(-4|19)$
   (c) $C_1(-2|2)$, $C_2(1,7|0,52)$
   (d) Die Graphen schneiden sich nicht.

3. (a) $A(1\frac{43}{70}|3\frac{13}{14})$
   (b) $B_1(3|59)$, $B_2(-7|159)$
   (c) Die Graphen schneiden sich nicht.
   (d) $D_1(\frac{5+\sqrt{33}}{4}|\frac{\sqrt{33}-1}{2})$, $D_2(\frac{5-\sqrt{33}}{4}|\frac{-\sqrt{33}-1}{2})$

4. (a) $p_a(x) = 5(x-1)^2 - 2$
   (b) $p_b(x) = \frac{1}{35}(-23x^2 + 59x + 105)$
   (c) $p_c(x) = 2(x-1)(x-3)$
   (d) unendlich viele Lösungen der Form $p_d(x) = a(x-b)^2; ab^2 = -2$
   (e) $p_e(x) = (x-2)^2 - 3$

5. (a) $S(1|-6)$ $\qquad$ (b) $S(-1|-5)$

6. $S(3|1,5)$; die Parabel ist nach unten geöffnet und schmaler als die Normalparabel

7. $y = -3x^2 + 12x - 9$

8. $a = 3$; $b = -60$; $c = 299$; $y = -3x^2 + 60x - 299$

9. Maximum in $(0,125|4,0125)$; steigend für $x < 0,125$; fallend für $x > 0,125$

10. (a) $S(1,5|-2,5)$, Minimum, weiter, steigt für $x > 1,5$, fällt für $x < 1,5$
    (b) $P(0,6|-2,2)$ $\qquad$ (c) $f(x) = -2x^2 - 8x + 1$

11. (a) $f(x) = -3x^2 + 42x - 147$
    (b) $S(3|1,5)$; Graph steigt für $x < 3$, fällt für $x > 3$

12. $S(1|3)$

13. $x = 1$

14. (a) $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $S(1|2)$
(b) $t = -3$

Umfangreichere Aufgaben

1. $E(x) = (95 + y)(8 + x) = -20(x + 1,625)^2 + 812,81$
Theoretisch maximale Einnahme bei Preisreduzierung auf $6,375$. Dies ist aber wohl kein guter Preis…

2. $D = \mathbb{R}$; $W = [-4; \infty[$; $S(-0,5|-4)$; $N_1(1,5|0)$ $N_2(-2,5|0)$

3. $s : x = 1$; $W =]-\infty; 2]$; $S_1(0|1,5)$; $S_2(3|0)$; $S_3(-1|0)$

4. (a) $c = -1$ (c) Für $x = -2$ (d) $f_3(x) < f_1(x)$ für $x < -3$ und $x > 2$

5. (a) $c = 20,25$ (c) Für $x = 2,5$ (d) $f_3(x) < f_1(x)$ für $x < -3$ und $x > 1$

6. (a): $S\left(-\frac{9}{4}|\,5\right)$; $R_1\left(-6\,|-\frac{35}{8}\right)$; $R_2\left(0\,|\,\frac{13}{8}\right)$
(b): $W = \left[-\frac{35}{8}; 5\right]$
(c): $\left(-\frac{1}{4}\,|\,\frac{7}{3}\right)$ *bzw.* $\left(-\frac{17}{4}\,|\,\frac{7}{3}\right)$

7. (a) $f(x) = x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{43}{18}$
(b) $S(-3|2,5)$
(c) MIN$(2|-9)$; MAX$(-1|0)$; fallend in $I_1 = [-1; 2]$; steigend in $I_2 = [2; 3]$

8. (a) $S(3|-2)$, $N_{1/2}(3 \pm \sqrt{6}|0), N_3(0|1)$
(b) $t = -5,75$; $B(4,5|-1,25)$
(c) $(\alpha)\, y = -\frac{1}{3} \cdot (x-3)^2 + 2$
$(\beta)\, y = \frac{1}{3} \cdot (x+3)^2 - 2$
$(\gamma)\, y = -\frac{1}{3} \cdot (x-3)^2 + 6$

9. (a): $S(-2,5|-1,5)$
(b): $N_{1/2}\left(\frac{1}{2} \cdot (-5 \pm \sqrt{6})|0\right)$
(c): $t > -7,5$

10. (b): $S(-3|5)$
(c): $(\alpha):\ y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{7}{4}$; $(\beta):\ y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{7}{4}$

11. (a) $f(x) = 7x^2 + 21x + 14$
(b) $S(-4,5|-2)$; $NST_1(-4,5 + \sqrt{2}|0)$; $NST_2(-4,5 - \sqrt{2}|0)$

12. (a): Kongruenz zur Normalparabel und Öffnung nach oben
    (b): Ortslinie für die Parabelscheitel: $y = -x + 2$
    (c): $k_1 = -1;\ k_2 = -7$
    (d): $B_1(2|2)$, $B_2(5|-1)$

13. (a) $y = -0,0075\,\frac{1}{\mathrm{m}} \cdot x^2 + 6\,x - 525\,\mathrm{m}$
    (b) $x = 700\,\mathrm{m}$
    (c) $h' = 900\,\mathrm{m}$
    (d) $y' = y + 525\,\mathrm{m}$

2.1.3. Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen

rein quadratische Gleichungen

1. $x_1 = 2;\ x_2 = -2$

Quadratische Ergänzung

1. $L = \left\{\frac{1}{2} \cdot (-\sqrt{10} \pm 3)\right\}$

2. $L = \{\frac{1}{3}; 3\}$
3. $L = \{2k; -5k\}$
4. $L = \left\{-\frac{1}{a} \cdot (1 \pm \sqrt{2})\right\}$
5. $L = \{\frac{1}{2} \cdot (-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})\}$, falls $a^2 \geqq 4b$; genau eine Lösung für $a^2 = 4b$

Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen

1.

$$\begin{aligned}
8x^2 + 2x - 3 &= 0 \ \ |:8 \\
x^2 + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot x + \left(\frac{1}{8}\right)^2 &= \frac{3}{8} + \frac{1}{64} \\
\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 &= \frac{25}{64} \\
x &= -\frac{1}{8} \pm \frac{5}{8}
\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{3}{4}, \quad L = \left\{-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right\}$$

2. (a) $L = \{-2; 0,8\}$ (b) $L = \{1; 3\}$
3. $L = \{\frac{1-\sqrt{7}}{6}; \frac{1+\sqrt{7}}{6}\}$
4. $L = \{\sqrt{5} - \sqrt{3}; \sqrt{5} + \sqrt{3}\}$
5. $L = \left\{\frac{1}{2} \cdot \left[(\sqrt{2}+1)^2 \pm \sqrt{5} \cdot (\sqrt{2}+1)\right]\right\}$
6. $L = \{0; -\frac{20}{9}\}$
7. $L = \{-2 + \sqrt{14}; -2 - \sqrt{14}\}$
8. $L = \{2; 6\}$
9. $D = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$, $L = \{-3\}$
10. Zunächst Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, von denen nur $-\sqrt{2}$ in der Definitionsmenge liegt.
11. $L = \left\{\frac{27}{5}; 5\right\}$
12. $L = \left\{1; \frac{15}{2}\right\}$
13. $L = \{-3,2; 3\}$
14. $L = \{-3\,; \,5\}$
15. $L = \left\{\dfrac{389}{271}\right\}$, $\left(\dfrac{7}{5}\right.$ ist keine Lösung! Schnelle Lösung durch Faktorisieren!$\left.\vphantom{\dfrac{7}{5}}\right)$
16. $L = \{-5\}$, $\left(\dfrac{2}{3}\right.$ ist keine Lösung! Schnelle Lösung durch Faktorisieren!$\left.\vphantom{\dfrac{2}{3}}\right)$
17. $L = \left\{\dfrac{17}{29}\right\}$, $\left(\dfrac{2}{3}\right.$ ist keine Lösung! Schnelle Lösung durch Faktorisieren!$\left.\vphantom{\dfrac{2}{3}}\right)$
18. $L = \{\}$, $\left(\dfrac{7}{5}\right.$ ist keine Lösung! Schnelle Lösung durch Faktorisieren!$\left.\vphantom{\dfrac{7}{5}}\right)$
19. $L = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{7}{3}\right\}$, (Schnelle Lösung durch Faktorisieren!)
20. $L = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}; -\dfrac{2}{3}\right\}$, (Schnelle Lösung durch Faktorisieren!)
21. $L = \{\}$, $\left(\dfrac{3}{2}\right.$ und $-\dfrac{2}{3}$ sind keine Lösung! Schnelle Lösung durch Faktorisieren!$\left.\vphantom{\dfrac{2}{3}}\right)$
22. (a) $L = \{2a\,, \,-3a\}$, (b) $L = \{\frac{7}{8} \pm \frac{\sqrt{97}}{8}\}$

23. (a) $L =]-9\,;1\,[$ (b) $L =]-\infty\,;\frac{1}{5}(8-2\sqrt{41})\,[\cup]\,\frac{1}{5}(8+2\sqrt{41})\,;\infty\,[$
(c) $L = \mathbb{R}$

1. $L = \{2a; 3b\}$

2. $L = \left\{\pm a; \pm\frac{1}{a}\right\}$ für $a \neq 0$; $L = \{0\}$ für $a = 0$

3. $a = 0:\ L = \{-0,25\}$; $a = -1:\ L = \{-0,5\}$

4. $k = 0:\ L = \{0\}$; $k = -1:\ L = \{-1\}$; $k = \frac{1}{3}:\ L = \{1\}$

5. $t = -1:\ L = \{-1\}$; $t = -5:\ L = \{-5\}$

6. $t_1 = -3;\ x_1 = -\frac{3}{7};\quad t_2 = 0,5;\ x_2 = \frac{1}{7};\quad t_3 = -3,5;\ x_3 = -1$

7. $\beta \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2}\right]$

8. $a = 0:\ L = \{-1\}$;
$a < 0,5$ und $a \neq 0:\ L = \{\frac{-1-\sqrt{1-2a}}{a}; \frac{-1+\sqrt{1-2a}}{a}\}$;
$a = 0,5:\ L = \{-2\}$;
$a > 0,5:\ L = \{\,\}$

Der Satz von Vieta

1. $x_2 = 2\sqrt{2};\ p = -\sqrt{2}$

2. $s_2 = 1 - \sqrt{2}\,;\ c = -1$

3. (a) $x^2 - x - 1 = 0$ (b) $x^2 + 9x - 90 = 0$

4. $4x^2 - 8x + 1 = (2x - 2 - \sqrt{3}) \cdot (2x - 2 + \sqrt{3})$

5. $L = \{-3; 2\}$

6. (a) $x_2 = 5 + \sqrt{2}$; $q = 23$
(b) $x_2 = -2\sqrt{2}$; $q = -4$
(c) $x_2 = -5 + \sqrt{10}$; $p = 10$

7. $x_2 = 9$; $b = -7\frac{2}{3}$

8. $x_2 = 7 - \sqrt{2}$; $c = 47$

9. $x_2 = 1 - \sqrt{2}$

10. $x_1 = -0,25$; $x_2 = -0,5$; $r = 2$

11. $m = 9$; am einfachsten mit Vieta

12. (a) $x^2 - 5x - \sqrt{6} = 0$ (b) $x_2 = 5$; $x_3 = 15$; $q = 75$

13. $x_1 = 2,8$; $x_2 = 4$; Fehlender Koeffizient: 34
Man beachte, daß der fehlende Koeffizient sinnvollerweise eine positive Zahl darstellt!

14. (a): $x_1 + x_2 = -a$; $x_1 \cdot x_2 = b$
(b): $x^2 + \frac{a}{b} \cdot x + \frac{1}{b} = 0$

Faktorzerlegung quadratischer Terme

1. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1,5\}$; $L = \{1\}$
2. $2(x-7)(x+5)$
3. $18(x - \frac{1}{6})(x - \frac{1}{3})$

Sonstige Lösungsmethoden

1. $L = \{0; \pm\sqrt{5}\}$
2. (a) $L = \{-3; 3\}$; (b) $L = \{-3; 1\}$
3. (a) $L = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}; -\sqrt{\frac{5}{2}}; \sqrt{\frac{5}{2}}\}$ (b) $L = \{16\}$
4. $L = \{16\}$
5. $L = \left\{\pm\frac{1}{3}\sqrt{6}\right\}$
6. $L = \left\{\frac{8}{15}\right\}$

1. $D = \mathbb{R}_0^+$

Lösung durch Quadrieren:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} &= x + \frac{4}{25} \quad \Big|^2 \\
x &= x^2 + \frac{8}{25}\,x + \frac{16}{625} \\
x^2 - \frac{17}{25}\,x &= -\frac{16}{625} \\
x^2 - 2\cdot\frac{17}{50}\,x + \left(\frac{17}{50}\right)^2 &= -\frac{16}{625} + \frac{289}{2500} \\
\left(x - \frac{17}{50}\right)^2 &= \frac{289-64}{2500} = \frac{225}{2500} \\
x &= \frac{17}{50} \pm \frac{15}{50} \\
x_1 = \frac{16}{25} = 0{,}64; \quad x_2 &= \frac{1}{25} = 0{,}04
\end{aligned}$$

Oder mit Substitution: $y = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
y &= y^2 + \frac{4}{25} \\
y^2 - y &= -\frac{4}{25} \\
y^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4} &= -\frac{4}{25} + \frac{1}{4} \\
\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{25-16}{100} = \frac{9}{100} \\
y &= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{10} \\
y_1 = \frac{4}{5} \quad &\Longrightarrow \quad x_1 = y_1^2 = \frac{16}{25} \\
y_2 = \frac{1}{5} \quad &\Longrightarrow \quad x_2 = y_2^2 = \frac{1}{25}
\end{aligned}$$

Probe: $\quad x_1 : \quad \mathrm{LS} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}; \quad \mathrm{RS} = \frac{16}{25} + \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

$\quad x_1 : \quad \mathrm{LS} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}; \quad \mathrm{RS} = \frac{1}{25} + \frac{4}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

$$L = \left\{\frac{16}{25}, \frac{1}{25}\right\} = \{0{,}64;\ 0{,}04\}$$

2. $x > 1 \quad \Longrightarrow \quad D = [1, +\infty[$

$$\begin{aligned}
x + 1 &= x + x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x} \\
2 - x &= 2\sqrt{x^2 - x} \\
4 - 4x + x^2 &= 4x^2 - 4x \\
x^2 &= \frac{4}{3} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3}, \quad \left(x_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{3} \notin D\right)
\end{aligned}$$

3. $x > 3 \quad \Longrightarrow \quad D = [3, +\infty[$

$$\begin{aligned}
x + 5 &= x - 3 + x - 2 + 2\sqrt{x^2 - 5x + 6} \\
10 - x &= 2\sqrt{x^2 - 5x + 6} \\
100 - 20x + x^2 &= 4x^2 - 20x + 24 \\
x^2 &= \frac{76}{3} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{2}{3}\sqrt{57} \approx 5{,}03, \quad \left(x_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{57} \notin D\right)
\end{aligned}$$

4. $x > 22 \quad \Longrightarrow \quad D = [22, +\infty[$

$$
\begin{aligned}
x + 23 &= x - 1 + x - 22 + 2\sqrt{x^2 - 23x + 22} \\
46 - x &= 2\sqrt{x^2 - 23x + 22} \\
2116 - 92x + x^2 &= 4x^2 - 92x + 88 \\
x^2 &= 676 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 26, \quad (x_2 = -26 \notin D)
\end{aligned}
$$

5. $x > 313 \quad \Longrightarrow \quad D = [313, +\infty[$

$$
\begin{aligned}
x + 314 &= x - 1 + x - 313 + 2\sqrt{x^2 - 314x + 313} \\
628 - x &= 2\sqrt{x^2 - 314x + 313} \\
394384 - 1256x + x^2 &= 4x^2 - 1256x + 1252 \\
x^2 &= 131044 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 362, \quad (x_2 = -362 \notin D)
\end{aligned}
$$

6. $D = \mathbb{R} \setminus [-2; 2], \quad L = \{-2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\}$

7. $D = [-4; \infty[\ ;\ L = \{4\}$

8. 18 und 30

9. $D = [-2; \infty[; \quad L = \{-2\}$

10. $D = [-6,5; \infty[\ ;\ L = \{6\}$

11. $L = \{0, 4\}$

12. $D = [\frac{5}{4}; \infty[\ ;\ L = \{\}$

13. $D = [\frac{2}{9}; \infty[\ ;\ L = \{1\frac{5}{9}\}$

14. $D = [2; \infty[\ ;\ L = \{3, 5\}$

15. $D =]-\infty; -7] \cup [7; \infty[\ ;\ L = \{7, 4\}$

1. $L = \{-4; 0; 4\}$

2. $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{6}{5}; 1\}; \quad L = \{\frac{1}{3} \cdot (-1 \pm \sqrt{5})\}$

3. $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}\ ;\ L = \{-4; -1\}$

2.2. Quadratische Funktionen in Anwendungen

2.2.1. Textaufgaben, die auf quadratische Gleichungen führen

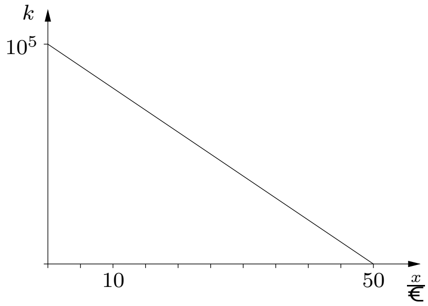
1. (a) $k(x) = 100\,000 - ax$ mit $k(50\,€) = 0 \quad\Longrightarrow\quad a = 2000\,\frac{1}{€} \quad\Longrightarrow$

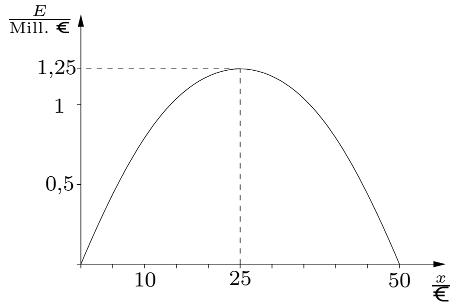
$k(x) = 100\,000 - 2000\,\frac{1}{€}\cdot x \quad\Longrightarrow$

$E(x) = x\cdot k(x) = 100\,000x - 2000\,\frac{1}{€}\cdot x^2$

E hat Nullstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 50\,€$, der Scheitel liegt also bei $x_0 = 25\,€$.

Maximale Einnahmen: $E(x_0) = 1\,250\,000\,€$





(b) $E(x) = x\cdot k(x) = -ax^2 + k_0x - b = -a\left(x - \frac{k_0}{2a}\right)^2 + \frac{k_0^2}{4a} - b$

$x_1 = \frac{k_0}{2a} = 41\frac{2}{3}\,€ \approx 41{,}67\,€$

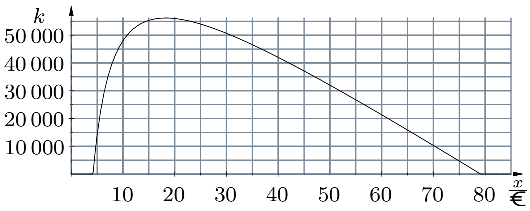
$E(x_1) = \frac{k_0^2}{4a} - b = 1\,683\,333\,€, \qquad E(x_0) = \frac{k_0^2}{4a} - b = 1\,350\,000\,€$

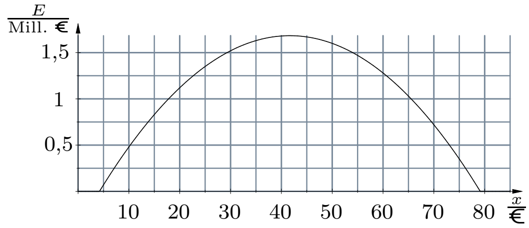
Die Wahl der richtigen Käuferfunktion bedeutet also bares Geld!

Sinnvolle Definitionsmenge: $k(x) \geqq 0$ bzw. $E(x) \geqq 0$ führt auf

$$-a\left(x - \frac{k_0}{2a}\right)^2 + \frac{k_0^2}{4a} - b \geqq 0 \quad\Longrightarrow\quad \left|x - \frac{k_0}{2a}\right| \leqq \sqrt{\frac{k_0^2 - 4ab}{4a^2}}$$

$$\underbrace{\frac{k_0 - \sqrt{k_0^2 - 4ab}}{2a}}_{x_{01}\approx 4{,}21\,€} \leqq x \leqq \underbrace{\frac{k_0 + \sqrt{k_0^2 - 4ab}}{2a}}_{x_{02}\approx 79{,}12\,€}, \qquad D = [x_{01}, x_{02}]$$





(c) $k(x) = k_g(x) + k_s(x) = \underbrace{k_{0g} - ax}_{\text{Geizige}} + \underbrace{k_{0s} - \frac{b}{x}}_{\text{Snobs}}$

Die Annahme eines linearen Zusammenhangs für die Gezigen führt auf

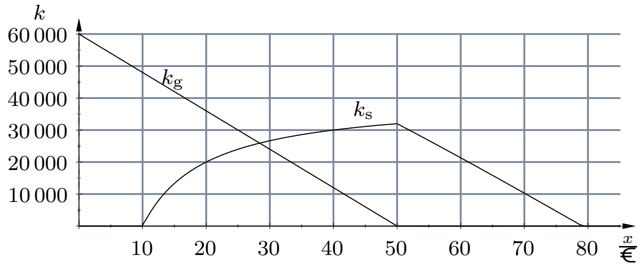
$k_g(50\,€) = k_{0g} - a \cdot 50\,€ = 0 \quad \Longrightarrow \quad k_{0g} = 1200\,\frac{1}{€} \cdot 50\,€ = 60\,000$

Mike und seine Frau gehen wohl von 60 000 Geizigen und 40 000 Snobs aus.

$$k_g(x) = \begin{cases} 60\,000 - 1200\,\frac{1}{€} \cdot x & \text{für } x \leqq 50\,€ \\ 0 & \text{für } x > 50\,€ \end{cases}$$

$$k_s(x) = k(x) - k_g(x) = \begin{cases} 40\,000 - \dfrac{400\,000\,€}{x} & \text{für } 10\,€ \leqq x \leqq 50\,€ \\ 100\,000 - 1200\,\dfrac{1}{€} \cdot x - \dfrac{400\,000\,€}{x} & \text{für } 50\,€ < x \leqq x_{02} \end{cases}$$

Es zeigt sich eine weitere Einschränkung der Definitionsmenge auf $x \geqq 10\,€$, da ein negatives $k_s(x)$ keinen Sinn ergibt.



Die angenommene Käuferfunktion beschreibt also eine Abnahme der Kauffreudigkeit der Snobs für einen Preis größer als 50 €.

2. (a) Der Besitz von Lisa ist x: $\quad x + \frac{1}{x} = 4x + \frac{1}{4x} \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{2}$

Wenn wir annehmen, dass sie keine Schuldscheine in ihren Geldbeuteln haben, besitzt Lisa 0,5 €und Georg 2 €.

(b) i. $nx + \frac{1}{nx} = \beta x + \frac{\beta}{x} \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{\beta n - 1}{n(n-\beta)} \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{\beta n - 1}{n(n-\beta)}}$

Lösungen gibt es nur, wenn $\frac{\beta - \frac{1}{n}}{n - \beta} > 0$ (da $x \neq 0$) $\quad \Longrightarrow$

$$\left(\beta - \frac{1}{n} > 0 \wedge n - \beta > 0\right) \vee \left(\beta - \frac{1}{n} < 0 \wedge n - \beta < 0\right)$$

$$\left(\beta > \frac{1}{n} \wedge \beta < n\right) \vee \left(\beta < \frac{1}{n} \wedge \beta > n\right)$$

Da $n > 1$, fällt die zweite Möglichkeit weg und es folgt $\frac{1}{n} < \beta < n$.

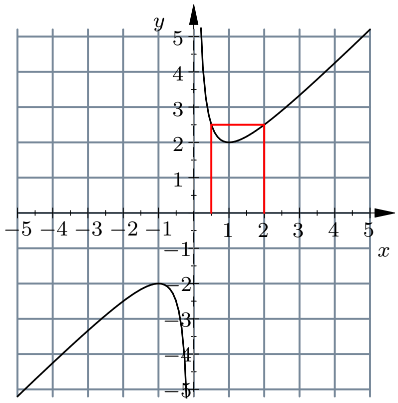
In Teilaufgabe (a) ist $\beta = 1$ und $n = 4$ und es folgt $x = \pm\sqrt{\frac{1 \cdot 4 - 1}{4(4-1)}} = \pm\frac{1}{2}$.

ii. $x + \frac{1}{x} = a \quad \Longrightarrow \quad x^2 - ax = -1 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - 1$

$$x = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2 \text{ Lösungen für } |a| > 2 \\ 1 \text{ Lösung für } a = \pm 2 \\ \text{keine Lösung für } |a| < 2 \end{cases}$$

Da die Lösungen die x-Koordinaten der Schnittpunkte von Parallelen zur x-Achse im Abstand a mit dem Funktionsgrafen sind und es für $|a| < 2$ keine Lösungen gibt, ist die Wertemenge $W_f =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

iii. Parallele zur x-Achse im Abstand 2,5 schneidet den Grafen bei $x_1 = 0{,}5$ und $x_2 = 2$.



3. $x + y = \frac{130}{2} = 65 \quad \Longrightarrow \quad y = 65 - x, \qquad xy = 1026 \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} x(65 - x) &= 1026 \\ 65x - x^2 &= 1026 \\ x^2 - 2 \cdot \frac{65}{2} \cdot x + \left(\frac{65}{2}\right)^2 &= -1026 + \frac{65^2}{4} = \frac{4225 - 4104}{4} \\ \left(x - \frac{65}{2}\right)^2 &= \frac{121}{4} \\ x &= \frac{65}{2} \pm \frac{11}{2} \end{aligned}$$

$$x_1 = 38 \quad \Longrightarrow y_1 = 65 - 38 = 27, \qquad x_2 = 27 \quad \Longrightarrow y_2 = 65 - 27 = 38$$

Das Grundstück ist 38 m lang und 27 m breit.

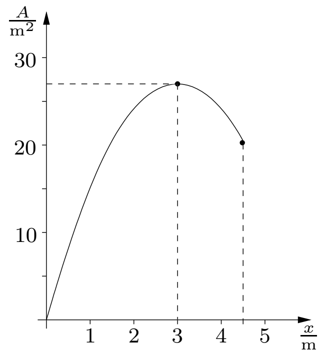
4. (a) $u = 4x + 4y \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{u}{4} - x$

Vier Seitenflächen und Deckfläche:

$A(x) = 4xy + x^2 = 4x\left(\frac{u}{4} - x\right) + x^2 = ux - 4x^2 + x^2 = ux - 3x^2$

Maximales x, wenn $y = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{\max} = \frac{u}{4} \quad \Longrightarrow \quad D_A = \left[0; \frac{u}{4}\right] = [0\,;\,4{,}5\,\mathrm{m}]$

(b) $A(x) = ux - 3x^2 = -3x\left(x - \frac{u}{3}\right)$



Nullstellen von A: $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{u}{3} = 6\,\mathrm{m}$

Scheitel bei $x_\mathrm{m} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{u}{6} = 3\,\mathrm{m}$

$y_\mathrm{m} = \frac{u}{4} - x_\mathrm{m} = \frac{u}{12} = 1{,}5\,\mathrm{m}$

$A(x_\mathrm{m}) = \frac{u}{2}\left(\frac{u}{3} - \frac{u}{6}\right) = \frac{u^2}{12} = 27\,\mathrm{m}^2$

(c) $V(x) = x^2 y = x^2\left(\frac{u}{4} - x\right) = x^2(4{,}5\,\mathrm{m} - x)$, $\qquad V(x_\mathrm{m}) = 9 \cdot (4{,}5 - 3)\,\mathrm{m}^2 = 13{,}5\,\mathrm{m}^2$

Berechnung von $V(x)$ mit x knapp neben x_m:

$V(2{,}99\,\mathrm{m}) = 13{,}499551\,\mathrm{m}^3 < V(x_\mathrm{m})$, $V(3{,}01\,\mathrm{m}) = 13{,}499549\,\mathrm{m}^3 < V(x_\mathrm{m}) \quad\Longrightarrow$

$V(x_\mathrm{m})$ scheint der maximale Wert von V zu sein.

Exakter Beweis (der Einfachheit halber rechnen wir ohne Benennungen):

Für $x \in D_A$ kann man schreiben $x = x_\mathrm{m} + \varepsilon = 3 + \varepsilon$ mit $-3 \leqq \varepsilon \leqq 1{,}5$

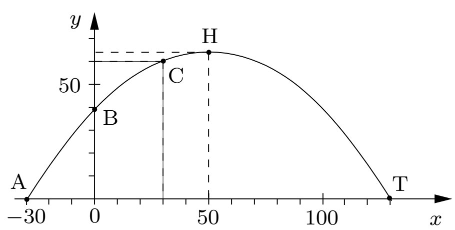
$$\begin{aligned} V(x) = V(3+\varepsilon) &= (3+\varepsilon)^2(4{,}5 - 3 - \varepsilon) = (9 + 6\varepsilon + \varepsilon^2)(1{,}5 - \varepsilon) = \\ &= 13{,}5 - 4{,}5\varepsilon^2 - \varepsilon^3 = 13{,}5 - \varepsilon^2(4{,}5 + \varepsilon) \end{aligned}$$

$\varepsilon \geqq -3 \quad\Longrightarrow\quad 4{,}5 + \varepsilon > 0 \quad\Longrightarrow\quad \varepsilon^2(4{,}5+\varepsilon) \geqq 0 \quad\Longrightarrow\quad V(x) \leqq 3{,}5$

5. (a) $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned}
(0|39) \in f \Longrightarrow &\quad a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 39 \quad\Longrightarrow\quad c = 39 && (2.1)\\
(-30|0) \in f \Longrightarrow &\quad 900\,a - 30\,b + 39 = 0 && (2.2)\\
(30|60) \in f \Longrightarrow &\quad 900\,a + 30\,b + 39 = 60 && (2.3)\\
\hline
(3) - (2): &\quad 60\,b = 60 \quad\Longrightarrow\quad b = 1 && (2.4)\\
\text{in } (2): &\quad 900\,a + 9 = 0 \quad\Longrightarrow\quad a = -0{,}01 &&\\
&\quad f(x) = -0{,}01\,x^2 + x + 39 &&
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} f(x) &= -0{,}01\,x^2 + x + 39 = \\ &= -0{,}01\left[x^2 - 100x\right] + 39 = \\ &= -0{,}01\left[(x-50)^2 - 2500\right] + 39 = \\ &= -0{,}01(x-50)^2 + 25 + 39 = \\ &= -0{,}01(x-50)^2 + 64 \end{aligned}$$



Höchster Punkt: H (50|64)

$f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-50)^2 = 6400 \quad \Longrightarrow \quad x = 50 \pm 80, \quad x_1 = -30, \quad x_2 = 130$

Auftreffpunkt: T (130|0)

6. (a) $\frac{1}{2}(15+3) \cdot 8 = 72$
   (b) $P(2|12)$, $A = 2 \cdot 12 = 24$
   (c) $F(x) = x \cdot (-1,5x + 15)$
   (d) Maximum am Scheitel der nach unten geöffneten Parabel $F(x)$, der in der Mitte der Nullstellen $N_1(0|0)$ und $N_2(10|0)$ liegt $\Rightarrow x = 5$, $F(5) = 37,5$

7. (a) $103 \frac{km}{h}$
   (b) $\tan\alpha = 0,63$ ergibt $\alpha \approx 32°$
   (c) 32%

8. 1000
9. $L = \{-8; 8\}$
10. $5\,cm, 7\,cm, 9\,cm$
11. Gleichung $2 - 4\sqrt{2}x + 2x^2 = 0$, Ergebnis $\sqrt{2} - 1$
12. 72
13. 484
14. Die Zahl 132 im Sechsersystem; die Zahl 543 im Fünfersystem
15. 4 %
16. $72,0\,cm$
17. $28\,cm; 45\,cm; 53\,cm$
18. 450 bzw. 600 Umdrehungen
19. $225 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Vorsicht, Einheiten beachten.
20. $n_1 = 6 \quad ; \quad n_2 = 10$
21. $n_1 = 4 \quad ; \quad n_2 = 10$
22. 12 Tage

23. 24 Schüler

24. Max: $3,6\,\frac{km}{h}$; Start um 7.40 Uhr
Hans: $4,8\,\frac{km}{h}$; Start um 8.30 Uhr

2.2.2. Extremalwertaufgaben

1.

2. Für $x = 4\,\text{cm}$ ist $A = 8\,\text{cm}^2$

3. Weil alle Werte von g positiv sind, wird die Fläche beim Scheitel von G_g minimal, dies ist der Punkt $P(2|4)$. Der Abstand der Nullstellen von f ist $0,5$, der minimale Flächeninhalt ist also $0,5 \cdot 0,5 \cdot 4 = 1$.

4. $l = 35\,\text{cm}$; $b = 25\,\text{cm}$; $A = 875\,\text{cm}^2$

5. (a) $y = 100 - x$
   (b) $A = (100 - x)x = -(x - 50)^2 + 50^2$
   (c) Maximalwert $A = 2500\text{mm}^2$ bei $x = 50\text{mm}$.

2.2.3. lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten

1. (a) $x = 0$, $y = 2$, $z = 1$
   (b) $x = y = z = 1$

2. (a) $l = m = n = 0$
   (b) $l = \frac{1}{2}$, $m = -\frac{1}{2}$, $n = 5$
   (c) $n = 5$, $m = -6$, $l = -7$

3. (a) $x = y = z = 1$
   (b) keine Lösung

4. Quelle: www.a-paulitsch.de/website/rundumsdreieck.doc
Dreieck 1:
Es wird angegeben: $I: c = 8 \quad II: a + b = 10 \quad III: b = a + 3$
Lösung: $a = 3,5 \quad b = 6,5 \quad c = 8$

Dreieck 2:
Es wird angegeben: $I: \beta = 90°\,(da\ h_c = a) \quad II: a = 4 \quad III: 4b = 7a$
Lösung: $a = 4 \quad b = 7 \quad \beta = 90°$

Dreieck 3:
Es wird angegeben: $I: a + 3 = b \quad II: a + 6 = c \quad III: 2a = c$
Lösung: $a = 6 \quad b = 9 \quad c = 12$

Dreieck 4:
Es wird angegeben: $I: a + b + c = 20 \quad II: c = b + 4 \quad III: 3b = 2c + 2$
Lösung: $a = -4 \quad b = 10 \quad c = 14$
Dieses Dreieck kann nicht konstruiert werden!

Dreieck 5:
Es wird angegeben: $I: a = b\,(da\ \alpha = \beta) \quad II: 2a = 3c \quad III: a + b + c = 16$
Lösung: $a = 6 \quad b = 6 \quad c = 4$

Dreieck 6:
Es wird angegeben: $I: \alpha = 60° \quad II: 6h_c = 3c \quad III: c - h_c = 4$
Lösung: $\alpha = 60° \quad h_c = 4 \quad c = 8$

Dreieck 7:
Es wird angegeben: $I: a + b = 21 \quad II: b = 0,75a \quad III: c^2 = 4a + 1$
Lösung: $a = 12 \quad b = 9 \quad c = 7$

Dreieck 8:
Es wird angegeben: $I: a + b + c = 12 \quad II: c = 0,80b \quad III: a + b = 2c$
Lösung: $a = 3 \quad b = 5 \quad c = 4$

5. Man benötigt 383,33 kg Äpfel, 300,33 kg Birnen und 216,33 kg Kirschen.

2.2.4. gemeinsame Punkte von Funktionsgraphen

1. (a) 500 m
   (b) 1,57 m

2.2.5. Bruchgleichungen

Definitionsmenge

1. $D_1 = \mathbb{Q}\backslash\{-2,5\}; \quad D_2 = \mathbb{Q}\backslash\{3\}$
2. $D_1 = \mathbb{Q}\backslash\{1,5\}; \quad D_2 = \mathbb{Q}\backslash\{2\}$
3. $D_1 = \mathbb{Q}\backslash\{-1\}; \quad D_2 = \mathbb{Q}\backslash\{-3;3\}$
4. $D_1 = \mathbb{Q}\backslash\{-2;2\}; \quad D_2 = \mathbb{Q}\backslash\{-1\}$
5. (a): $D = \mathbb{Q} \setminus \{\pm\frac{1}{5}\}$ (b): $D = \mathbb{Q} \setminus \{0;1\}$ (c): $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1;1;2\}$

Multipikation und Division

1. $\frac{1-x}{6(x+1)}$
2. $\dfrac{2x+1}{(x^2+1)\cdot(-1)}$
3. $\dfrac{x-2}{6\cdot(x+2)}$

Addition und Subtraktion

1. $-\frac{8}{a}$
2. $-\frac{5b}{2(a+4b)}$
3. 1
4. $\frac{1}{x-y}$
5. $\frac{3m}{2(m-x)}$
6. -1
7. $\dfrac{-1}{2\,(2\,x-1)^2}$; $D_0 = \mathbb{Q}\setminus\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$; $D_1 = \mathbb{Q}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$
8. $\dfrac{10x}{(3y+2x)\cdot(4x-9y)}$
9. $\dfrac{a+4}{2(a-4)^2}$

Bruchterme vereinfachen

Bruchterme zusammenfassen

1. $3(5x+2y)$

2. $\frac{-1}{x}$

3. $y - x$

4. $\frac{y^2(x-1)}{8x+3y}$

5. $-\dfrac{x^2 + y^2}{x^2\,y^2}$

6. $\frac{4(x-y)}{x+y)}$

7. $\frac{y}{z(y+z)}$

8. (a): $\dfrac{a+b}{4ab}$ (b): 0

9. $\dfrac{5x + 4y + 2}{2x \cdot (x+2)}$

10. $\dfrac{y - x}{y - 1}$

11. (a) $y - 5x$

    (b) $-\dfrac{1}{7(a+1)}$

12. (a) $-\dfrac{1}{x+1}$

    (b) $\dfrac{12a(5x+3y)}{5b(5x-3y)}$

13. (a) $\dfrac{1}{a+1}$

    (b) $\dfrac{5y(4b-5a)}{12x(4b+5a)}$

14. Bedingungen: $a, b \neq 0$, $b \neq 5a$, $b \neq -5a$
    Term: -1

15. $b - 4a$

Bruchgleichungen lösen

1.

2. $D = \mathbb{Q} \setminus \{-3; 3\}$; $L = \{-\frac{11}{3}\}$

3. $D = \mathbb{Q}\setminus\{-\frac{9}{2}\,;\,\frac{9}{2}\}$ $\quad ; \quad$ $x = \frac{9}{2} \notin D \quad \Longrightarrow \quad L = \{\}$

4. $G = \mathbb{Q} \setminus \{\pm\frac{3}{2}\}$, $L = \{-10\}$

5. $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$, $L = \{-2\}$

6. $D = \mathbb{Q} \setminus \{-3; 3\}$, $L = \{\}$

7. $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$, $L = \{\}$

8. $r \neq 0$ und $r \neq -\frac{1}{2}$: $L = \{r + 1\}$, $r = 0$: $L = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $r = -\frac{1}{2}$: $L = \{\}$

9. (a) $D = \mathbb{Q}\setminus\{0; a\} \quad L_{a=0} = D; \quad L_{a\neq 0} = \{\frac{3}{4}a\}$
   (b) $D = \mathbb{Q}\setminus\{0\},\ a, b \neq 0; \quad L_{a=-b} = \{\}; \quad L_{a\neq -b} = \{\frac{ab}{a+b}\}$

10. $D = \mathbb{Q}\setminus\{a; b\}$;
    $L_{a\neq b} = \{\frac{7a+7b-2ab}{a-b}\}; \quad L_{a=b=0} = L_{a=b=7} = D; \quad L_{sonst} = \{\}$

11. $D = \mathbb{Q}\setminus\{-\frac{5}{2}\,;\,\frac{5}{2}\}$
    Der Lösungsterm ist nicht definiert für $b = 5$; für $b = 0$ ist $x = \frac{5}{2} \notin D$
    $$\Longrightarrow \quad L = \begin{cases} \{\} & \text{für} \quad b = 0 \text{ oder } b = 5 \\ \left\{\frac{5\,(5+b)}{2\,(5-b)}\right\} & \text{sonst} \end{cases}$$

12. $$T_2 = \frac{QT_1}{Q - ST_1} \qquad \text{für} Q \neq ST_1$$

13. $$m = \frac{nR}{R - nf} \quad \text{mit} \quad R \neq nf$$

14. $D = \mathbb{Q} \setminus \{a\}$, $L = \left\{\dfrac{b^2}{b - 2a^2}\right\}$, für $b \neq 2a^2$

3. Erweiterung des Potenzbegriffs

3.1. allgemeine Wurzeln

1. (a) $L = \left\{\pm a^{\frac{1}{4}}\right\}$ (b) $L = \{\}$ (c) $L = \left\{a^{\frac{1}{7}}\right\}$ (d) $L = \left\{-|b|^{\frac{1}{5}}\right\}$
2. (a) 196 (b) 23 (c) 43
   (d) 62 (e) 721

3.2. Rechenregeln für Potenzen mit rationalen Exponenten

3.2.1. Rechengesetze - Herleitung und Illustration

1. 6 Reihenfolgen, 4 Möglichkeiten: $\left(a^b\right)^c$; a^{b^c} ; ab^c und a^{bc}
   (ab und bc sind zweiziffrige Zahlen, keine Produkte!)
   $\Longrightarrow \quad 4 \cdot 6 = 24$ verschieden aussehende Möglichkeiten.
   $2^{3^4} = 2^{81} \approx 2{,}42 \cdot 10^{24}$; $3^{42} \approx 1{,}09 \cdot 10^{20}$; $34^2 = 1156$
2. Wähle etwa $a = 1,\ b = 64$; Ersetze „ $+$ “ durch „ $\cdot$ “!
3. Die binomische Formel zeigt im ersten Fall, dass $a = 0$ oder $b = 0$ sein muss. Im zweiten Fall genügt $a = -b$.
4. (a) für $x \geqq 0$
   (b) für n gerade und $x \in \mathbb{R}$ bzw. für n ungerade und $x \geqq 0$
5.
6.
7. $(-\frac{1}{4})^{201} < 4^{-210} < (\frac{1}{4})^{203} < (\frac{1}{2})^{403} < (\frac{1}{8})^{120} < (-2)^{360} < 16^{102}$
8. $5^{-4,1} < 5^{-3,1} < 4^{-3,1} < 0{,}25^{2,8}$

3.2.2. Nur Multiplikation und Division

Exponenten ganzzahlig

1. $x = (26^{10})^{100} = (1{,}41167 \cdot 10^{14})^{100} = 1{,}41167^{100} \cdot 10^{1400} = 9{,}40 \cdot 10^{1414}$
2. $5{,}1473$
3. $a^{-8}c^{-11}$
4. $2^7 \cdot 3^4 \cdot u^8 \cdot v^{-4}$
5. $2{,}4a^5b^{-8}c^5$
6. $-\dfrac{8c}{21ab^2}$
7. $-(3a - 7b)^{4n+2}$
8. $r^{m+4}a^{-1}$
9. $-y^{19m}x^{-12n+7}$
10. $\dfrac{x^5}{y^5 \cdot z^5}$
11. 10^6
12. $2^5 \cdot 3 \cdot a^6c^{n-3}$
13. $a^{-4k}b^{-2n}c^{-8m}$
14. $25r^{-4n-2}s^{18}$
15. $-1{,}5a^{m+n}b^{-m-n}cd^7$
16. $\frac{81c^3}{2ab^5d^4}$
17. $-\dfrac{1}{(50^3 \cdot y)^{10}}$
18. -32

Exponenten rational oder reell

1. $\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{8mE}{h^2} \implies \frac{3N}{\pi V} = \left(\frac{8mE}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \implies V = \frac{3N}{\pi}\left(\frac{h^2}{8mE}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3N}{\pi}\left(\frac{h}{\sqrt{8mE}}\right)^{3}$

   $V = a^3 \quad \implies \quad a = V^{\frac{1}{3}} = \frac{h}{\sqrt{8mE}} \cdot \left(\frac{3N}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{h}{\sqrt{8mE}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3N}{\pi}}$

2. (a) $a^{2\sqrt{2}+\sqrt{2}} = a^{3\sqrt{2}}$
   (b) $a^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}} = a^{\frac{5}{6}}$
   (c) $x = \pm 16^{\frac{1}{8}} = \pm 2^{\frac{4}{8}} = \pm\sqrt{2}; \quad L = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
   (d) $2^{3x} = 2^4; \quad x = \frac{4}{3}$

3. $\frac{1}{b}$
4. $\sqrt{a}$
5. $0{,}0016 \cdot u \cdot x^{\frac{1}{6}}$
6. $\sqrt[9]{36}$
7. $a^{\frac{1}{8}} b^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{4}}$
8. $\frac{xz^4}{4y}$
9. $3x^{-\frac{3}{8}} y^{\frac{1}{4}}$
10. $2a^{-\frac{3}{8}} b^{\frac{1}{4}}$
11. $\frac{\sqrt[7]{a^3}}{a}$
12. $\frac{\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[3]{b^2}}{b^2}$
13. $a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$
14. $a^{\frac{39}{10}} \cdot b^{-\frac{53}{24}} \cdot c^{-\frac{11}{4}}$
15. $\sqrt[4]{a^3 \cdot b^{-1}}$
16. $\sqrt[10]{c}$
17. $u^{\frac{4m}{n}}$
18. $\sqrt[m]{aby^{-1}}$

19. $ab\sqrt[24]{b}$
20. $-117x^2y^2$
21. $18a^2b$

3.2.3. Alle Grundrechnungsarten treten auf

Alle Grundrechnungsarten - Faktorzerlegung

1. $3v^3(6u-v)(6u+v)$
2. $4z^{k-2}\cdot(2z^2-1)^2$
3. $(10x^3)^2$
4. $s-t$
5. $-\dfrac{3a^n+1}{a}$
6. $-a(1+a^m)^{-1}$
7. $\frac{b^m-a^n}{b^m+a^n}$
8. $-(a+3)^{2m+1}$
9. $\frac{3x^p+4}{3x^p-4}$; Binomische Formeln!
10. $\dfrac{x^m-y^s}{x^{m+3}+x^3y^s}$
11. $\dfrac{u^{\frac{1}{3}}-v^{\frac{1}{3}}}{u^{\frac{1}{3}}+v^{\frac{1}{3}}}$
12. $\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}$
13. $\frac{a^{\frac{1}{5}}-1}{a^{\frac{1}{5}}+1}$
14. $\frac{a}{2}(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})$
15. $\sqrt{b}\cdot\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)$
16. $a^{\frac{1}{2}}(x^4-y^3)$
17. $\frac{1}{x^2+y^3}$ für $y\geqq 0$ bzw $\frac{1}{x^2-y^3}$ für $y\leqq 0$ (und nicht $x^2=\pm y^3$).

18. $\frac{1}{x^2-y^3}$ für $y \geqq 0$ bzw $\frac{1}{x^2+y^3}$ für $y \leqq 0$ (und nicht $x^2 = \pm y^3$).

19. $\dfrac{a^{2n}-1}{a^4 \cdot (a^{2n}+1)}$

20. $\sqrt[2n]{b^2 \cdot (a+b)}$

Alle Grundrechnungsarten - Bruchrechnung

1. $\dfrac{y^{n-2}}{1-y^2}$
2. $2 \cdot x^{2-n}$
3. $\frac{17}{72}$
4. $2x$
5. $b^{-5n+4} - b^{n-2}$
6. b^n
7. $\dfrac{1}{2x^{n+2}}$
8. $\dfrac{a^n(a^2+b^2)}{(a-b)^n}$
9. $-b^{-2}(a+b)(a-b)^{-2n-1}$
10. $\dfrac{a^{2q}+a^{2p}}{a^{2q}-a^{2p}}$
11. $\dfrac{1}{x^{2a}-x^{2b}}$
12. 0
13. $2^n(x-2a)^n$ für n gerade; $(2^n+2)(x-2a)^n$ für n ungerade

Teil II.

Stochastik

4. Zusammengesetzte Zufallsexperimente

4.1. elementare zusammengesetzte Zufallsexperimente

1. (a) Für jede Ente beträgt die Wahlscheinlichkeit $\frac{1}{n}$.
   (b) Bei einer geraden Anzahl von Streichhölzern ist es egal wer anfängt. Bei einer ungeraden Anzahl sollte Trick nicht anfangen. Derjenige, der den ersten Zug macht, muss einmal mehr ziehen, wobei er bei jedem Zug mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{n}$ das kurze Streichholz bekommt.

2. $0,51^8 = 0,005 = 0,5\%$

3. (a)
   (b)
   (c) $p_1 = 1 - (\frac{5}{6})^4 \approx 52\%$
   (d) $p_2 = 1 - (1 - (\frac{1}{6})^2)^{24} \approx 49\%$

4.

Anzahl der Personen	Wahrscheinlichkeit p_n
2	$p_2 \approx 0,27\%$
3	$p_3 \approx 0,82\%$
4	$p_4 \approx 1,6\%$
6	$p_6 \approx 4,0\%$
8	$p_8 \approx 7,4\%$
10	$p_{10} \approx 12\%$
12	$p_{12} \approx 17\%$
14	$p_{14} \approx 22\%$
16	$p_{16} \approx 18\%$
18	$p_{18} \approx 35\%$
20	$p_{20} \approx 41\%$
25	$p_{25} \approx 57\%$
30	$p_{30} \approx 71\%$
40	$p_{40} \approx 89\%$
50	$p_{50} \approx 97\%$
60	$p_{60} \approx 99\%$
80	$p_{80} \approx 100\%$

5. (a) $p(A \cup B) = 0,21$

	A	$\overline{A}$	
B	0,21	0,02	0,23
$\overline{B}$	0,25	0,52	0,77
	0,46	0,54	1

(b) $p(\overline{A} \cap B) = 0,25$

	A	$\overline{A}$	
B	0,20	0,25	0,55
$\overline{B}$	0,13	0,32	0,45
	0,33	0,57	1

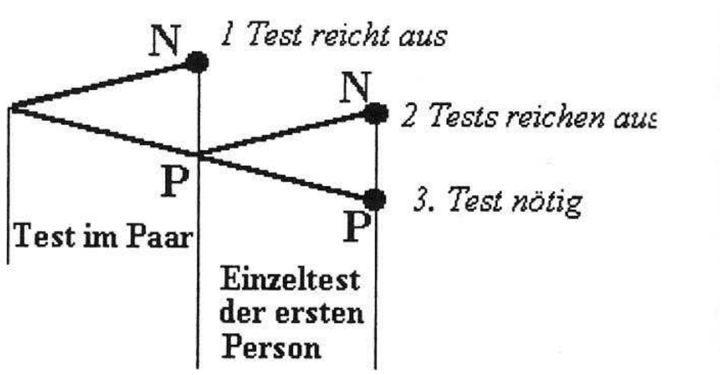
$p(\overline{A} \cap B)$

6. (a) $p(A) = 0,35$

	A	$\overline{A}$	
B	0,22	0,33	0,55
$\overline{B}$	0,13	0,32	0,45
	0,35	0,65	1

(b) $p(A \cap \overline{B}) \cup p(\overline{A} \cap B) = 0,13 + 0,25 = 0,38$

7. Quelle: ISTRON 6, S. 124/125

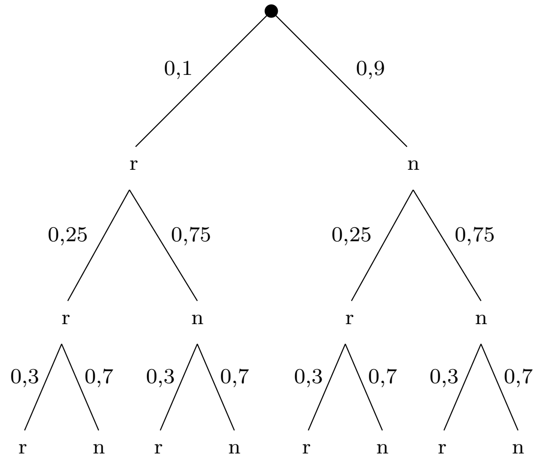


Entweder ist nur ein Test pro Paar erforderlich (wenn kein Doping nachgewiesen)
oder zwei Tests (wenn Doping nachgewiesen und erster Nachtest negativ)
oder drei Tests (wenn Doping nachgewiesen und erster Nachtest positiv)
Also:
Bei Einzeltests sind bei n Teilnehmern n Tests erforderlich, bei „Doppeltests“ dagegen abhängig von Dopingquote: min. $\frac{n}{2}$ Tests und max. $1,5 \cdot n$ Tests.

8. Insgesamt $80 + 30 + 10 = 120$ Testpaare, also 240 Sportler
Statt 240 Einzeltests hier nur $80 + 30 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 150$ Tests
Abschätzung der Dopingfälle: min. $30 + 10 = 40$, max. $30 + 20 = 50$ Dopingfälle

4.2. Pfadregeln

1.



(a) $|\Omega| = 8$

(b) $p_0 = 0{,}9 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}7 = 47{,}25\,\%$

(c) $E_1 = \{\text{nnn,rnn,nrn,nnr}\}$

$$\begin{aligned} P(E_1) &= p_0 + 0{,}1 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}7+ \\ &\quad + 0{,}9 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}7+ \\ &\quad + 0{,}9 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}3 = \\ &= 0{,}4725 + 0{,}0525+ \\ &\quad + 0{,}1575 + 0{,}2025 = 88{,}5\,\% \end{aligned}$$

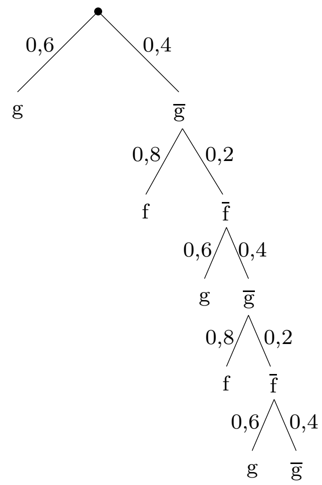
(d) E_2 : „mindestens 2 Regentage“
$P(E_2) = 1 - P(E_1) = 11{,}5\,\%$

2. Die „Pannenwahrscheinlichkeit pro 100 km“ ist $p = 0{,}1$, die Wahrscheinlichkeit, auf einer 100 km langen Strecke keine Panne zu haben, ist also $\overline{p} = 1 - p = 0{,}9$.

E : „keine Panne auf 1000 km“, $\overline{E}$: „mindestens eine Panne auf 1000 km“

$P(E) = \overline{p}^{10} = 0{,}9^{10} = 0{,}34868, \quad P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 0{,}6513 = 65{,}13\,\%$

3.



(a) $\Omega = \{g, \overline{g}f, \overline{g}\overline{f}g, \overline{g}\overline{f}\overline{g}f, \overline{g}\overline{f}\overline{g}\overline{f}g, \overline{g}\overline{f}\overline{g}\overline{f}\overline{g}\}$

$|\Omega| = 6$

$P(\text{„Gams überlebt“}) =$

$= P(\overline{g}\overline{f}\overline{g}\overline{f}\overline{g}) = 0{,}4^3 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}00256 = 0{,}256\,\%$

(b) $E = \{\overline{g}f, \overline{g}\overline{f}\overline{g}f\}$

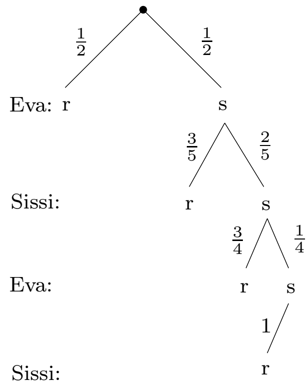
$$\begin{aligned} P(E) &= 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 = \\ &= 0{,}32 \cdot (1 + 0{,}08) = 34{,}56\,\% \end{aligned}$$

$p_{\text{g}} = 1 - P(E) - p_0 = 1 - 0{,}3456 - 0{,}00256 = 65{,}184\,\%$

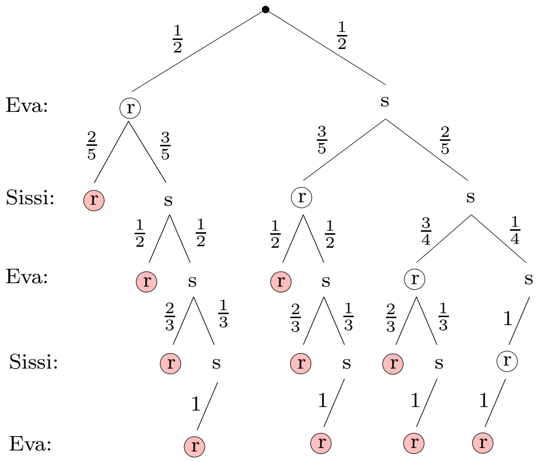
4. (a) $\Omega = \{r, sr, ssr, sssr\}, \quad |\Omega| = 4$

$E = \{r, ssr\},\ P(E) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{13}{20} = 65\,\%$

$S = \overline{E} = \{sr, sssr\},\ P(S) = 1 - P(E) = 35\,\%$



(b) $\Omega = \{rr, rsr, rssr, rsssr, srr, srsr, srssr, ssrr, ssrsr, sssrr\}, \quad |\Omega| = 10$



$E = \{rsr, rsssr, srr, srssr, ssrsr, sssrr\},\ S = \overline{E} = \{rr, rssr, srsr, ssrr\}$

$$P(S) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}}_{\frac{2}{10}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}_{\frac{1}{10}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}_{\frac{1}{10}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}}_{\frac{1}{10}} = \frac{5}{10} = 50\,\%$$

$P(S) = 1 - P(E) = 50\,\%$

5. (a) $E_1 = \{rrr\}\,, \quad E_2 = \{rrw, rwr, wrr\}$

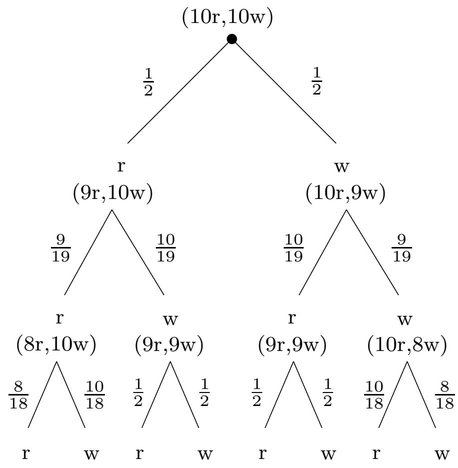
$E_3 = \{rww, wrw, wwr\}\,, \quad E_4 = \{www\}$

$$P(E_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18} = \frac{2}{19} \approx 10{,}5\%$$

$$P(E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{10}{18} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= 3 \cdot \frac{5}{38} = \frac{15}{38} \approx 39{,}5\%$$

Aus Symmetriegründen gilt:

$P(E_3) = P(E_2)$ und $P(E_4) = P(E_1)$.



(b) $P(\text{„nie weiß“}) = P(E_1)^5 = \left(\frac{2}{19}\right)^5 = \frac{32}{2\,476\,099} \approx 1{,}29 \cdot 10^{-5}$

(c) x rote und $20 - x$ weiße Kugeln zu Beginn des Experiments:

$$P(E_1) = \frac{x}{20} \cdot \frac{x-1}{19} \cdot \frac{x-2}{18}, \qquad P(E_1)^5 > 0{,}1 \quad \Longrightarrow \quad P(E_1) > 0{,}1^{\frac{1}{5}} \approx 0{,}63$$

$x(x-1)(x-2) > 0{,}63 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 = 4316$

$17 \cdot 16 \cdot 15 = 4080, \quad 18 \cdot 17 \cdot 16 = 4896 \quad \Longrightarrow$ mindestens 18 rote Kugeln.

6. (a) $\frac{8}{15}$

(b) ohne Zurücklegen, da sich Wahrscheinlichkeiten verändern

7. (a) $29 \cdot 0,034 = 98,6\%$

(b) $(1 - 0,034)^{29} = 37\%$

8. (a) $\frac{1}{365} \approx 0,27\%$

(b) $\frac{1}{12} \approx 8,3\%$

9. (a) 162 Schüler haben weder Mofa noch Fahrrad

	F	$\overline{F}$	
M	72	18	90
$\overline{M}$	648	162	810
	720	180	900

(b) $\frac{250 \cdot 249 \cdot 248 \cdot 247 \cdot 246 \cdot 245 \cdot 244 \cdot 243 \cdot 242}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9,1 \cdot 10^{15}$

10. (a) $3 \cdot 0,22^2 \cdot 0,78 = 11\%$
    (b) $0,95^{30} = 21\%$
    (c) $1 - 0,95^{30} = 79\%$
    (d) $1 - 0,8^n \geq 0,5 \Rightarrow$ Ben muss mindestens 4 Riegel kaufen.

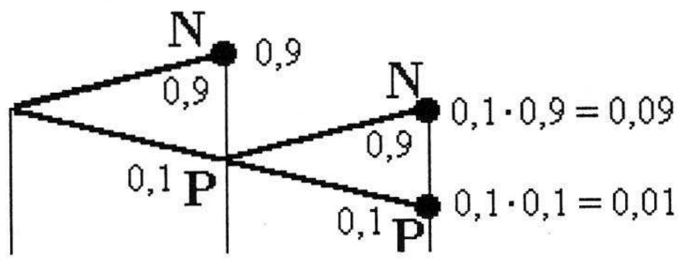
11. $p = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^3 = 88\%$

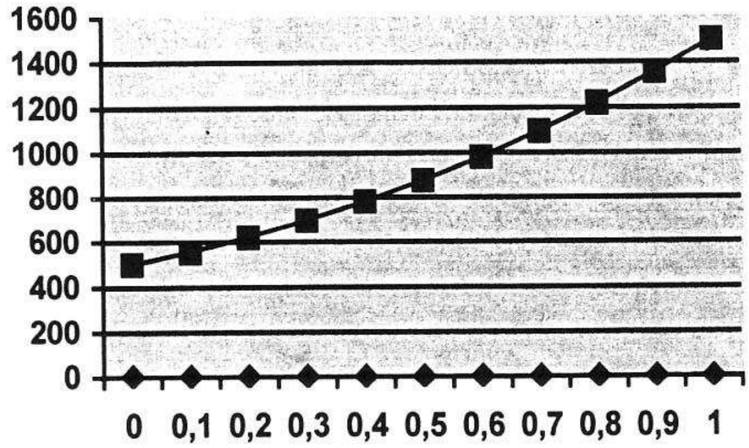
12. (a) $1 - p(\text{fünf män. Ferkel}) = 1 - 0,45^5 = 98\%$
    (b) $1 - p(\text{fünf män. Ferkel}) - p(\text{fünf weibl. Ferkel}) = 1 - 0,45^5 - 0,55^5 - 0, = 93\%$
    (c) $p = 10 \cdot 0,55^3 \cdot 0,45^2 = 34\%$
    (d) $p(\text{mind. drei weibl. Ferkel}) =$

    $p(\text{drei weibl. Ferkel}) + p(\text{vier weibl. Ferkel}) + p(\text{fünf weibl. Ferkel}) =$

    $10 \cdot 0,55^3 \cdot 0,45^2 + 5 \cdot 0,55^4 \cdot 0,45^3 + 0,55^5 = 59\%$

13. Zur Wahrscheinlichkeit von 10% Baumdiagramm aus Aufgabe 1!!! mit Pfadwahrscheinlichkeiten:





Man hat also für die 1000 Personen in 500 Testpaaren $(0,9\cdot 1+0,09\cdot 2+0,01\cdot 3)\cdot 500 = 555$ Tests zu erwarten, im Vergleich zu Einzeltests also eine deutliche Ersparnis
Verallgemeinerung (für 20%, 30%, ...) :
Berechnung liefert das neben stehende Ergebnis. Die Vermutung eines quadratischen Zusammenhangs lässt sich bestätigen:
Zu erwarten sind $[(1-p)\cdot 1 + p\cdot(1-p)\cdot 2 + p^2\cdot 3]\cdot 500 = (p^2+p+1)\cdot 500$ Tests
(im Vergleich zu 1000 Einzeltests)

14. (a) Für jede Ente beträgt die Wahlscheinlichkeit $\frac{1}{n}$.

    (b) Bei einer geraden Anzahl von Streichhölzern ist es egal wer anfängt. Bei einer ungeraden Anzahl sollte Trick nicht anfangen. Derjenige, der den ersten Zug macht, muss einmal mehr ziehen, wobei er bei jedem Zug mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{n}$ das kurze Streichholz bekommt.

Teil III.

Geometrie

5. Satzgruppe des Pythagoras

5.1. Konstruktionsaufgaben

5.1.1. Wurzelkonstruktionen

1.

2. $19 = 4^2 + (\sqrt{3})^2;\ 3 = (\sqrt{2})^2 + 1^2;\ 10 = 3^2 + 1^2$
   Wiederholte Anwendung des Hypotenusensatzes!

3. $74 = 8^2 + (\sqrt{10})^2;\ 10 = 3^2 + 1^2;\ 15 = 4^2 - 1^2$
   Wiederholte Anwendung des Hypotenusensatzes!

4. Es gilt $(\sqrt{39})^2 = 6^2 + (\sqrt{3})^2$ sowie $(\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$. Dreimalige Anwendung des Hypotenusensatzes liefert zunächst die Streckenlänge $\sqrt{39}$ cm. Mit Hilfe des Strahlensatzes wird schließlich die geforderte Streckenlänge $\frac{2}{3}\sqrt{39}\,cm$ konstruiert.

5.1.2. Flächenverwandlungen

1.

2.

3.

4. Quadratseitenlänge $s_q = \sqrt{5^2 + 2^2}\,cm$ (Hypotenusensatz)
   $s_q^2 = p \cdot q$ mit $p + q = 14\,cm$ (Höhensatz)

5.1.3. Sonstige Konstruktionsaufgaben

1. Z.B. Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks mit einer Hypotenuse der Länge 7 cm und einer Kathete der Länge 4 cm.

5.2. Mathematische Anwendungen

5.2.1. Berechnungen am Dreieck

1. Pythagoras in $\triangle$OBA: $\quad a^2 + b^2 = c^2 \quad \Longrightarrow \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$

$$\text{Fläche von } \triangle\text{OBA:} \quad \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}hc \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

$$\text{Kathetensatz in } \triangle\text{OBA:} \quad pc = a^2 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{a^2}{c} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{9}{5} = 1{,}8$$

$$\text{Kathetensatz in } \triangle\text{OBA:} \quad qc = b^2 \quad \Longrightarrow \quad q = \frac{b^2}{c} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{16}{5} = 3{,}2$$

$$\text{Fläche von } \triangle\text{OBH:} \quad \frac{1}{2}by = \frac{1}{2}hq \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{hq}{b} = \frac{ab^2}{a^2+b^2} = \frac{48}{25} = 1{,}92$$

$$\text{Kathetensatz in } \triangle\text{OBH:} \quad xb = h^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{h^2}{b} = \frac{a^2b}{a^2+b^2} = \frac{36}{25} = 1{,}44$$

2. (a) Z. B. $\frac{1{,}5}{2{,}6} \neq 0,2\frac{25}{100}$
   (b) $\sqrt{400^2 + 100^2}$

3. (a) Z. B. Das Dreieck $\triangle ABC$ ist gleichschenklig. Die Fläche des Dreiecks halbiert die Fläche des Quadrats. Im Dreieck $\triangle ABC$ gilt $\alpha = \beta$. h ist Symmetrieachse von $\triangle ABC$ und vom Quadrat. Das Quadrat hat 4 Symmetrieachsen.
   (b)
   - Das Dreieck ist gleichseitig, also sind alle Winkel 60° und es gilt $\tan 60° = \frac{2h'}{a}$. Wegen $\tan 60° = \sqrt{3}$ folgt: $h' = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.
   - Eine weitere Lösungsmöglichkeit: Die Kantenlänge des Quadrats ist a. Dann soll für das Dreieck laut Pythagoras gelten: $(\frac{1}{2}a)^2 + h'^2 = a^2$. Daraus folgt dann die Lösung für h'.

   (c) $A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow 43\%$

4. $t^2 = s^2 + r^2$, $u^2 = v^2 + w^2$, $a^2 = b^2 + c^2$, $y^2 = x^2 + z^2$, $b^2 = a^2 + c^2$

5. (a) $x \approx 9,43\,\text{cm}$
   (b) $y \approx 9,22\,\text{cm}$
   (c) $z \approx 11,18\,\text{cm}$
   (d) $u \approx 35,23\,\text{cm}$
   (e) $v \approx 8,94\,\text{cm}$

6. Diagonale $= 13\,\text{cm}$

7. Quelle: Mathematik heute 9 (1996)
   Höhe im Dreieck: $h = \sqrt{2^2 + 1,5^2}\,\text{m} = 2,5\,\text{m}$
   Fläche des Zeltstoffes: $A = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\,\text{m} \cdot 2,5\,\text{m} = 15\,\text{m}^2$

8. Quelle: MUED

   Variationen:

   (a) Selbst Schnur hestellen, Schüler Tripel finden lassen.
   (b) Alle 15 Dreiecke finden lassen, die man mit weniger als 12 Knoten legen kann.
   (c) Streichhölzer statt Schnur verwenden.

   (a) Neueinteilung der Felder nach der jährlichen Nilschwemme. Maurer nutzen oft eine analoge Lattenkonstruktion.
   (b) 12 verschiedene Tripel.

9. $U \approx 17633,26$
   Mit Verschnitt $\approx 20278,25$
10. Strecke (min.) $\approx 11,69\,\mathrm{m}$
11. Sparrenlängen
    (a) $= 5,4\,\mathrm{m}$
    (b) $\approx 9,05\,\mathrm{m}$
    (c) $\approx 9,67\,\mathrm{m}$

12. Schrankhöhe (max.) $\approx 2,32\,\mathrm{m}$
13. Entfernung Brunnen - Turm $= 64\,\mathrm{m}$ bzw. $36\,\mathrm{m}$
14. Handlungsvorstellung: Küchenpapierrolle längs aufschneiden; Schnur $= 20\,\mathrm{cm}$
15. $h \approx 5,00\,\mathrm{cm}$
16. $a = 20\,\mathrm{cm}$, $c = 25\,\mathrm{cm}$, $p = 16\,\mathrm{cm}$, $h = 12\,\mathrm{cm}$
17. $b = 4\,\mathrm{cm}$; $q = 3,2\,\mathrm{cm}$; $h = 2,4\,\mathrm{cm}$
18. $q = 1\,\mathrm{cm}$; $c = 5\,\mathrm{cm}$; $p = 4\,\mathrm{cm}$; $a = 2\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$; $A = 5\,\mathrm{cm}^2$
19. $q = 2,0\,\mathrm{cm}$; $b \approx 6,3\,\mathrm{cm}$; $s \approx 2,1\,\mathrm{cm}$; $r \approx 6,7\,\mathrm{cm}$
20. $a^2 + b^2 = c^2$; $A = 20$
21. $q = 10,8\,\mathrm{cm}$; $p = 19,2\,\mathrm{cm}$; $h = 14,4\,\mathrm{cm}$;
22. (a): $5\sqrt{2}\,cm$ (b): $\frac{5}{2}\sqrt{10}\,cm$

23. $y = -0,25 \cdot (x-3)^2 + 1\,;\qquad d = 3,75\,cm$

24.

25. $\overline{CG} = \frac{6}{13}\sqrt{26}\,mm$

26. (a): $A(6-3\sqrt{2}|\sqrt{3}),\ B(4+3\sqrt{2}|\sqrt{3})$
    (b): $A_{ABC} = 19\sqrt{3} - 6\sqrt{6}$

27. $(\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 = (\overline{BC})^2$

28. $a = \sqrt{1105}$, $b = \sqrt{657}$ (oder umgekehrt). Es ist $a^2 + b^2 = 1762 \neq 32^2 = 1024$.

29. Die Berechnung der Seitenlängen liefert den Nachweis der Ähnlichkeit.

30. Basis: $10\,cm$; Höhe: $12\,cm$; Schenkel: $13\,cm$;
    Die Lösungsansätze führen auf eine quadratische Gleichung!

31. $\frac{3}{8}a^2$

5.2.2. Berechnungen am Kreis

1. Gesucht ist die halbe Länge der Berührsehne der
   Tangenten von S aus an den „Erdkreis“.
   $r \approx 1670\,km$

2. $r = 7{,}25\,cm$

3. $r = \frac{5}{3}\sqrt{6}\,cm$

4. $\overline{CP} = \frac{4}{3}\sqrt{3}\,cm$

5. 14 cm

6. $r = 1{,}0000\,cm$

7. (a) $A_{AK} = \frac{3}{4}a^2\pi$ (b) $U_{IK} : U_{UK} : U_{AK} = 1 : 2 : 3$

8. $U_{AK} = a\pi \cdot (2+\sqrt{2})$ $A_{AK} = \frac{a^2}{2}\pi \cdot (3 + 2\sqrt{2})$

5.2.3. Anwendungen auf räumliche Situationen

1.
2. $A \approx 86{,}6\,\mathrm{cm}^2$
3.
4. $4{,}25\,\mathrm{cm}$
5. Ja, wenn die Maße Innenmaße sind, dann mißt die Raumdiagonale $150{,}7\,\mathrm{mm}$.
6. (c): $\frac{1}{2}\sqrt{77}\,cm$
7. (a): $d = \frac{1}{7}\sqrt{4410\,cm^2 + 16h^2}$
   (b): $h = \frac{7}{4}\sqrt{10}\,cm^2$
   (c): $\overline{KC} = 3\,cm$

5.2.4. Herleitungen geometrischer Aussagen

1.
2.
3.
4.
5. (a) Eine Skizze, in der die Schnittebene projizierend liegt, liefert die Behauptung mit Hilfe des Strahlensatzes.
   (b) Ansatz: $(\frac{h}{2})^2 + \overline{BC}^2 = 4^2$
   (c) $\overline{AC'} = \overline{BD'} = \sqrt{48}$
   (d) Die Dreiecke ABC' und $BC'D$ stimmen in drei Seitenlängen überein, daher sind die Innenwinkel des Sechsecks bei B und C' kongruent. Diese Überlegungen gelten analog für alle Innenwinkel.

5.3. Anwendungen in anderen Gebieten

1. Nein, da die Diagonale des Fensters nur ca. $1{,}84\,\mathrm{m}$ groß ist.
2. ca. $160\,m$
3. (b): $\approx 180\,\mathrm{km}$
4. (a) $17{,}8\,\mathrm{km}$ (b) $37{,}4\,\mathrm{km}$

5.4. Goldener Schnitt

5.4.1. Konstruktionen

1.

2.

5.4.2. rein rechnerische Aufgaben

1.

2. Strecke: $5 \cdot (\sqrt{5}+2)\,cm$; Abschnitte: $\frac{5}{2} \cdot (\sqrt{5}+3)\,cm$, $\frac{5}{2} \cdot (\sqrt{5}+1)\,cm$

3. Es ist $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$ also $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

4. (a) (i) Umfangswinkelsatz für Sehnen gleicher Länge. (ii) Aus der Regularität des Fünfecks ergibt sich z. B., daß $EAD \cong BCA$, deswegen ist ADC gleichschenklig. AQC ist wegen der Identität aus (i) „gleichwinklig “. (iii) Übereinstimmung in drei Winkeln. (iv) Folge der Ähnlichkeit.

   (b) Ersetze in der Proportion $\overline{DC}$ und $\overline{CQ}$ durch $\overline{AQ}$.

5. (a) Weil Q die Strecke $[AB]$ im goldenen Schnitt teilt und wegen der Gleichheiten $\overline{AQ} = \overline{CQ} = \overline{BC}$ ergibt sich $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{CQ} : \overline{QB}$. Also sind ABC und CQB ähnlich. Daraus ergibt sich $\sphericalangle\alpha = 36^0$ und $\sphericalangle\beta = \sphericalangle\gamma = 72^0$.

   (b) Das Fünfeck erhält man z. B. durch Antragen der 72^0-Winkel im Mittelpunkt eines Kreises.

5.4.3. Kombinierte Aufgaben (Zeichnung/Rechnung)

1. (b) $\overline{AB} : \overline{BC} = 5 : 4$ (c) $T(0|-3)$

2. (d) $a = 2\sqrt{17}$ (e) folgt aus $\overline{AT} = \frac{a}{\phi}$

3. (b) Seitenlängen des Dreiecks ABC berechnen; Pythagoras
   (c) $x_D = 4$ (e) $\overline{AE} = 5,9$

4. (a): $\overline{BC} = \frac{7}{2} \cdot (\sqrt{5}-1)$

6. Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck

6.1. Sinus, Kosinus, Tangens am rechtwinkligen Dreieck

1. Quelle: RAAbits Reihe 5 Material S. 5
   (a) $\approx 28,67\%$
   (b) $\tan 13° \approx 23,09\%$

2. (a) Höhenunterschied $= 91,5\,\text{m}$ Länge der Anlaufbahn $= 145,4\,\text{m}$
   (b) Höhenunterschied $= 88,4\,\text{m}$

3. Breite des Flusses $= 62,5\,\text{m}$

4. Die Kette muss mindestens $11,7\,\text{m}$ lang sein.

5. (a) 60% Steigung
   (b) 119% Steigung

6. Die Regentropfen fallen mit einer Geschwindigkeit von $14,15\,\frac{m}{s}$ oder $50,96\,\frac{km}{h}$.

7.

8.

9. 1

10. (a) $\frac{1}{sin\alpha}$ (b) $\frac{1}{sin\alpha}$ (c) $|cos\alpha|$ (d) $(cos\alpha)^2$

11. $D =]0°; 90°[$, $\cos^3\alpha$

12. $D =]0°; 90°[$, $\frac{1}{2}$

13. $D =]0°; 90°[$, $\dfrac{1}{1+\tan^2 x} + \dfrac{1}{1+\frac{1}{\tan^2 x}} = 1$

14. $\tan\alpha$

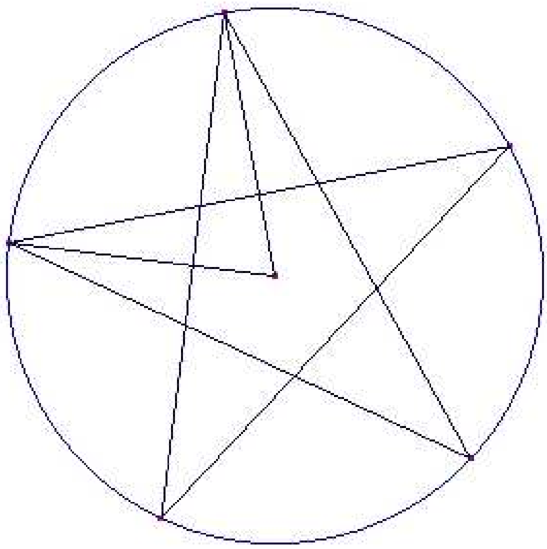
15. $\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{(\tan\alpha)^2+1}}$

16.

6.2. Berechnungen am Dreieck

1. Quelle: Fich, O.: Mathelogik

   Von jeder Sternspitze gehen zwei Linien aus. Wenn man sich vorstellt, dass der Stern von einem Kreis umgeben ist, bei dem die fünf Sternspitzen genau auf dem Kreisrand liegen, wird deutlich, dass der Winkel zwischen den beiden Linien der Sternspitze 36 Grad betragen muss (Umfangswinkelsatz oder Winkelsumme). Zeichnet man eine Linie von einer Sternspitze zum Mittelpunkt des Sterns und eine Linie vom Zentrum des Sterns rechtwinklig zu einer der beiden Linien von der Sternspitze, erhält man ein rechtwinkliges Dreieck, bei dem man den Abstand von einer Sternspitze zum Mittelpunkt folgendermaßen berechnen kann: $s = \frac{1000\,\mathrm{mm}}{cos 18°} = 105\,\mathrm{mm}$.



2. Quelle: Fich, O.: Mathelogik

   (a) i. Ausgehend vom Satz des Pythagoras muss die Länge der Diagonalen $\sqrt{125}$ cm betragen. Das Doppelte hiervon ist $\sqrt{500}$ cm. Die Länge der senkrechten Linie ist unverändert 10 cm und damit 100, wenn sie quadriert wird. Die Breite zum Quadrat muss daher 400 sein, wenn die Summe 500 betragen soll. Die Quadratwurzel aus 400 ist 20, d.h. die neue Breite ist also 15 cm größer als vorher.

   ii. Die Verdopplung entspricht in diesem Fall einer schrägen Linie mit der Länge $\sqrt{2000}\,\text{cm}$, und da die Länge der senkrechten Linie unverändert ist, muss die Breite des Buchstabens $\sqrt{900}\,\text{cm} = 43,6\,\text{cm}$ sein, was einer Vergrößerung um ca. $23,6\,\text{cm}$ entspricht.

(b) i. Wenn wir die Länge der senkrechten Linie als 1 definieren, muss die Fläche des großen Dreiecks (das ganze A) sein: A (großes Dreieck) $= \frac{1}{2} \cdot \tan 15° \cdot 1 \cdot 2 = \tan 15°$. Der Querstrich soll nun entsprechend der Hälfte der Fläche des As platziert werden. Wenn wir die Länge der Linie, die von der Spitze des As rechtwinklig zum Querstrich verläuft, b nennen, ist die Fläche des Dreiecks über dem Querstrich: A (kleines Dreieck) $= \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot \tan 15° \cdot 2 = b^2 \tan 15°$. Dies soll gleich $\frac{1}{2} \cdot \tan 15°$ sein, weshalb $b = \sqrt{0,5} \approx 0,707$ entsprechend 70,7% ist, oder 29,3%, von unten nach oben gemessen.

   ii. Die Länge der Querlinie beträgt: $L = 2 \cdot \sqrt{0,5} \cdot \tan 15° \approx 0,379$.

3. 37,54cm, 0,41%
4. $12{,}3° \leqq \alpha \leqq 25{,}2°$
5. 6403 m; $38{,}66^o$
6. 28,82 m
7. $\approx 111\,m$
8. $\overline{BC} \approx 7{,}6\,cm$; $\overline{BD} \approx 6{,}0\,cm$; $\gamma \approx 46°$
9. (a): $5{,}6\,cm$ $(b):\ 4{,}2\,cm$ $(c):\ 60°$ $(d):\ 6{,}5\,cm$
10. $\approx 270\,\text{m}$ *bzw.* $\approx 508\,\text{m}$
11. (c) Wegen $0° < \alpha < 90°$ folgt $a < \overline{AC} < a \cdot \sqrt{5}$
12. 4000 km
13. 2000 km
14. $\overline{WP} = \frac{\tan\beta + \tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha} \cdot h \approx 1190\,m$
15. 26,7m
16. (a) $\overline{AC}^2 = (a-c)^2 + b^2$ ergibt $\overline{AC} = 170\text{cm}$. $\tan(\sphericalangle OAC) = 1$ also $\sphericalangle OAC = 45^o$.
    (b) $\sin(\sphericalangle BAC) = \dfrac{d}{\overline{AC}}$ ergibt $\sphericalangle BAC = 10{,}2^o$. Daraus folgt $\varphi = 34.8^o$.
17. $\overline{DH} = \overline{BH} \cdot \sin\gamma = 14{,}5\,cm$;
    $\overline{AB} = \overline{BH} \cdot \cos\gamma \cdot \cos\varepsilon = 13{,}0\,cm$;
    $\overline{AD} = \overline{BH} \cdot \cos\gamma \cdot \sin\varepsilon = 9{,}1\,cm$

6.3. Vermessungsaufgaben

1. $v_{\mathrm{H}} = 400\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad ; \quad v_{\mathrm{s}} = 100\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad ; \quad v = 412\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

2. (a) $h = \overline{AB} \cdot \dfrac{\tan\alpha\ \tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha} = 500\,\mathrm{m} \cdot (\sqrt{3} - 1) \approx 1366\,\mathrm{m}$

   (b) $h_{\mathrm{min}} = 1000\,\mathrm{m} \cdot \dfrac{\tan 29^\circ\ \tan 46^\circ}{\tan 46^\circ - \tan 29^\circ} \approx 1193\,\mathrm{m}$

   $h_{\mathrm{max}} = 1000\,\mathrm{m} \cdot \dfrac{\tan 31^\circ\ \tan 44^\circ}{\tan 44^\circ - \tan 31^\circ} \approx 1590\,\mathrm{m}$

3. $\tan\alpha = \dfrac{h + s\sin\beta}{s\cos\beta}$
   liefert $\alpha = 49{,}3^\circ$

4. $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{h + 2\,h\ \sin\beta}{2\,h\ \cos\beta} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \alpha \approx 19{,}1^\circ$

5. (a) $h = \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)} \cdot \overline{AB} = 205{,}8\mathrm{m}$

   (b) Fehler: ca. 4m, $h = 206\mathrm{m}$

7. Fortführung der Raumgeometrie

7.1. Schrägbilder

7.2. Körper

7.2.1. gerades Prisma

1. (a) $1320\,\text{cm}^2$ (b) $1260\,\text{cm}^3$ (c) $42{,}5\,\text{cm}$
2. (a) BC (b) $260cm^2$ (c) $\frac{1}{4}$
3. $\text{G} = 126\,\text{cm}^2$; $\text{M} = 270\,\text{cm}^2$; $\text{u} = 30\,\text{cm}$
4. $h = 6\,\text{cm}$; $M = 144\,\text{cm}^2$; $u = 24\,\text{cm}$
5. $G = 25\,\text{cm}^2$; $M = 108\,\text{cm}^2$; $u = 18\,\text{cm}$
6. Pythagoras, $O = 60\,\text{cm}^2$, $V = 27\,\text{cm}^2$
7. (a) Gleichseitiges Prisma mit 3 Seiten (b) $s = 2{,}5\,\text{cm}$
8. $h = 7\,cm$
9. (b) $O = 100\,\text{cm}^2$; $V = 60\,\text{cm}^3$ (c) $h = 5\,\text{cm}$
10. (a) $V = 56\,\text{cm}^3$; $u = 35\,\text{cm}$; $O = 126\,\text{cm}^2$
11. (a) $V = 33\,\text{cm}^3$; $u = 27,5\,\text{cm}$; $O = 85,25\,\text{cm}^2$
12. (a) $1050000\,\text{m}^3$
    (b) $8{,}4\,\text{m}^3$
13.
14. 34 Ecken, 19 Flächen, 51 Kanten
15.
16.

7.2.2. gerader Zylinder

1. (a) Der abgewickelte Mantel ist ein Rechteck mit den Seiten h und $2\pi r$ (Umfang der Grundfläche).

   (b) $h = \frac{O-2\pi r^2}{2\pi r}$

2. Quelle: Herget, W. et al.: Produktive Aufgaben

   (a) Es gilt 1 Kubikliter $= 1\,\mathrm{l}^3 = 1\,(\mathrm{dm}^3)^3 = 1\,\mathrm{dm}^9$. Die Einheit „Kubikliter“ entspricht einer Längeneinheit in neunter Potenz und ist damit keine Volumeneinheit (Längeneinheit in dritter Potenz).

   (b) Gegeben sind die Größe (gemeint ist die Höhe) $h = 30\,\mathrm{m}$ und die Breite (gemeint ist der Durchmesser) $d = 7\,\mathrm{m}$, womit für den Radius $r = 3,5\,\mathrm{m}$ folgt. Für die Stirnfläche A der Tanks gilt $A = \pi r^2$, somit für das Volumen V eines Tanks $V = \pi r^2 \cdot h \approx 1150\,\mathrm{m}^3$. Aufgrund der Dicke der Wände, des Bodens und der Decke der Tanks ist ihr Fassungsvermögen sicherlich jeweils kleiner als $1150\,\mathrm{m}^3$. In der Zeitung sollte es also vermutlich „und fassen 900 Kubikmeter Flüssigkeit“ heißen.

3. (a) Es müssen $77\mathrm{m}^3$ (Kontrolle: $77,09$) Erdreich ausgeschachtet werden.

   (b) Zum Ausmauern des Brunnens werden ca. 14000 (Kontrolle:14063) Steine benötigt.

   (c) Im Brunnen stehen ca. 29000 (Kontrolle: $28747,93$) l Wasser

4. i) $M = O - 2\pi r^2 = 336\ \mathrm{cm}^2$

   ii) $h = \frac{O-2\pi r^2}{2\pi r} = 21.4\ \mathrm{cm}$

   iii) $V = \frac{r}{2}(O - 2\pi r^2) = 420\mathrm{cm}^3$

5. $r = 6{,}9\,cm;\ h = 10{,}4\,cm;\ V = 1555{,}5\,cm^3$

6. (a): $440\,cm^2$ $(b):\ 1{,}6\,cm$

7. (a) $m = \pi\varrho l d(2r - d)$ (b) $m = 3103{,}6g \approx 3{,}1kg$

8. (a) $r = \sqrt[3]{\frac{V}{k\,\pi}}$

   (c) A_0 minimal für $k = 2$, d.h. $h = 2\,r$; $A_{0min} = 1{,}889881575\,\mathrm{m}^2$

9. $r = \sqrt{\frac{\varrho_W - \varrho_K}{(\varrho_{Al} - \varrho_K)\cdot\pi}} \cdot a = 9{,}6\,cm$; Auftriebsgesetz von Archimedes verwenden!

10. $0{,}63\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

11. $\frac{45}{8}\pi\,cm^3$

12. (a) $V = \frac{\pi}{4} \cdot l \cdot (d_a^2 - d_i^2)$ (c) $S \approx 4{,}6\,m^2$

13. $V_{Zylinder} : V_{Prisma} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \pi \approx 90{,}7\%$

14. ca. 20 g

15. $V_1 : V_2 = 1 : 10$; $O_1 : O_2 = (5 + a\pi) : (5 + 100a\pi)$

16. $V_{Zyl} : V_{Pyr} = 3\pi : 2$

17. 12,2 cm

7.2.3. Pyramide

Grundlegendes zur Pyramide als räuml. Körper

1. Z. B.:
   4 Bälle übereinander in Zylinder:
   $V = 8\pi r^3 \approx 25,13r^3$, $A = 18\pi r^2 \approx 56,55r^2$
   2×2 Bälle in Quader: $V = 32r^3$, $A = 64r^2$
   gleichseitige Pyramide/Tetraeder: drei Bälle in Dreieck am Boden, darüber zentrisch der 4. Ball: Seitenlänge der Pyramide $a = 2(1 + \sqrt{3})r$
   $V = \frac{2}{3}\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})^3 r^3 \approx 19,23r^3$, $A = 4\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})^2 r^2 \approx 51,71r^2$
   Die gleichseitige Pyramide hat die effizienteste Raumnutzen (Anteil Volumen Bälle/Volumen Packung) und den geringsten Verbrauch an Verpackungsmaterial. In den Geschäften hat die Form jedoch Nachteile (schlecht stapelbar).

2. (a) 18 Magnete, 10 Kugeln
   (b) a = Kugelradius + Magnetlänge + Kugeldurchmesser + Magnetlänge + Kugelradius
   (c) $V = \frac{1}{3}G_\triangle \cdot h_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_\triangle) \cdot h_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3}) \cdot 8\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 60\text{cm}^3$
   (d) 6 kleine Dreiecke, 3 Parallelogramme
   (e) 18 Magnete, 9 Kugeln
   (f) Spitze und drei weitere Etagen, Kantenlänge der Pyramide: 16 cm
   (g) n: Etage (Spitze: n=0);
   Anzahl Magnete: $M(n) = (n + 1) \cdot 6$ $(n \geqq 0)$;
   Anzahl Kugeln: $K(n) = (n + 1) \cdot 3$ $(n > 0)$

3. $k = 100$, $e = 51$, $f = 51$; $k = 2 \cdot n$ (n: Seitenzahl)

Konstruktionsaufgaben

1.

2. Platzbedarf im wesentlichen durch die Koordinaten gegeben.

3.

4.

5.

6. (a) Platzbedarf für das Netz vom Höhenfußpunkt aus 7 cm in jeder Richtung.
   (b) $\overline{AS} = 5,75\,\mathrm{cm}$

1. (b),(α): M sei der Mittelpunkt von $[AD]$. $\sphericalangle FMS$ ist dann der gesuchte Winkel.

   (b),(β): Man konstruiere das bei F rechtwinklige Dreieck FMS in wahrer Größe!

   (c),(α): Das Lot von P auf die Grundflächenebene treffe $[BD]$ im Punkt Q. $\sphericalangle PCQ$ ist dann der gesuchte Winkel.

   (c),(β): Man konstruiere das bei Q rechtwinklige Dreieck CQP in wahrer Größe, wobei $\overline{PQ}$ aus dem Dreieck FBS und $\overline{CQ}$ dann aus dem Dreieck BCF gewonnen werden.

2. (b) $\overline{AS} \approx 5,9\,\mathrm{cm}$; $\overline{BS} \approx 5,8\,\mathrm{cm}$; $\overline{CS} \approx 5,5\,\mathrm{cm}$; $\sphericalangle FBS \approx 59°$
   (c) $\varphi \approx 78°$

3. $M = 2\sqrt{3}r^2$, $h = r$, 45^0, 54.7^0

4. (a) Der Höhenfußpunkt ist der Mittelpunkt des Umkreises, hier also die Mitte der Seite $[AB]$.
   (b) $\alpha = 71^0$
   (c) $\overline{AB} = 50\,\mathrm{mm}$, $h = 4,33\,\mathrm{cm}$ mit Hilfe der Höhe $h_S = \sqrt{2100}\,\mathrm{mm}$ im Dreieck BSC.

1. $h = 5 + \sqrt{5}\,\mathrm{cm}$

2. (b): $h = 15\,cm$
   (c): $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 10\,cm$;
   $\overline{CS} = \overline{AS} = 17\,cm$; $\overline{BS} = \overline{DS} = 3\sqrt{29}\,cm$
   (d): $O \approx 410\,cm^2$

3. $O = 16\sqrt{3}\,\text{cm}^2$; $h = \frac{4}{3}\sqrt{6}\,\text{cm}$

4. $O = 16\,\text{cm}^2$; $s = \sqrt{10}\,\text{cm}$; $h = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$

5.

Pyramidenvolumen

1. Z. B.:
   4 Bälle übereinander in Zylinder:
   $V = 8\pi r^3 \approx 25,13r^3$, $A = 18\pi r^2 \approx 56,55r^2$
   2×2 Bälle in Quader: $V = 32r^3$, $A = 64r^2$
   gleichseitige Pyramide/Tetraeder: drei Bälle in Dreieck am Boden, darüber zentrisch der 4. Ball: Seitenlänge der Pyramide $a = 2(1+\sqrt{3})r$
   $V = \frac{2}{3}\sqrt{2}(1+\sqrt{3})^3r^3 \approx 19,23r^3$, $A = 4\sqrt{3}(1+\sqrt{3})^2r^2 \approx 51,71r^2$
   Die gleichseitige Pyramide hat die effizienteste Raumnutzen (Anteil Volumen Bälle/Volumen Packung) und den geringsten Verbrauch an Verpackungsmaterial. In den Geschäften hat die Form jedoch Nachteile (schlecht stapelbar).

2. (a) $144\,\text{m}^2$, Höhe der Pyramide: $\frac{1}{\sqrt{2}}12\,\text{m}$, Volumen $V = \frac{1}{\sqrt{2}}12 \cdot 12^3\,\text{m}^3 = 1,2 \cdot 10^3\text{m}^3$
   (b) $6\,\text{m}$

3. (a) $b = \overline{\text{BC}} = \overline{\text{BS}} = \overline{\text{CS}} = a\sqrt{2}$

$$h_\text{s} = \frac{b}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{2}\sqrt{6}$$

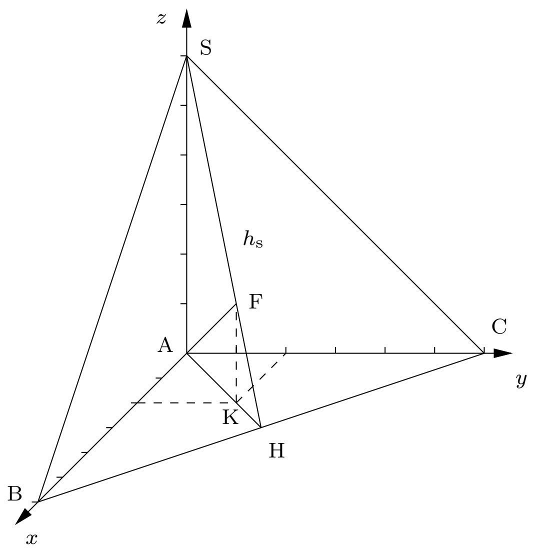
$$A_\text{D} = \frac{1}{2}bh_\text{s} = \frac{a^2}{2}\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot a = \frac{a^3}{6}$$

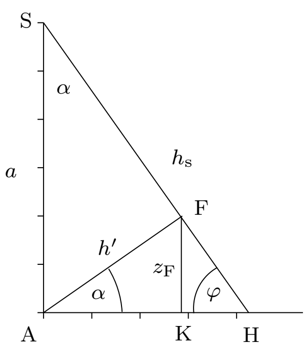
$$A = 3\cdot\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{2}(3+\sqrt{3})$$

$$\tan\varphi = \frac{\overline{\text{AS}}}{\overline{\text{AH}}} = \frac{a}{\frac{a}{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi = 54{,}7356^\circ = 54^\circ 44' 8''$$



(b) $V = \dfrac{a^3}{6} = \dfrac{1}{3} A_{\mathrm{D}} h' \quad \Longrightarrow \quad h' = \dfrac{3a^3}{6\frac{a^2}{2}\sqrt{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{a}{3}\sqrt{3}$



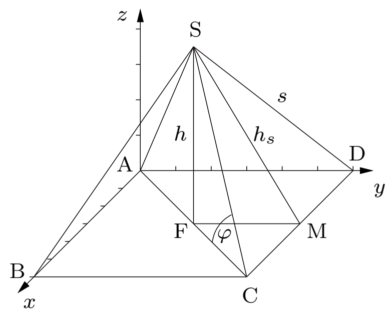
$\triangle\mathrm{AFS} \sim \triangle\mathrm{FKA} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{z_{\mathrm{F}}}{h'} = \dfrac{h'}{a}$

$z_{\mathrm{F}} = \dfrac{h'^2}{a} = \dfrac{a}{3}$

$\overline{\mathrm{AK}} = \sqrt{h'^2 - z_{\mathrm{F}}^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} - \dfrac{a^2}{9}} = \dfrac{a}{3}\sqrt{2}$

$x_{\mathrm{F}} = y_{\mathrm{F}} = \dfrac{\overline{\mathrm{AK}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{3} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{F}\left(\dfrac{a}{3}\middle|\dfrac{a}{3}\middle|\dfrac{a}{3}\right)$

4. (a) $h_{\mathrm{s}} = \sqrt{h^2 + \dfrac{a^2}{4}}$



$s = \sqrt{h_s^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \sqrt{h^2 + \dfrac{a^2}{2}}$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$

$A = a^2 + 4 \cdot \dfrac{a}{2} h_{\mathrm{s}} = a^2 + 2a\sqrt{h^2 + \dfrac{a^2}{4}}$

(b) $g = 7a = 4a + 4s = 4a + 4\sqrt{h^2 + \dfrac{a^2}{2}} \quad \Longrightarrow \quad \left(\dfrac{3a}{4}\right)^2 = h^2 + \dfrac{a^2}{2}$

$h^2 = \dfrac{9a^2}{16} - \dfrac{8a^2}{16} = \dfrac{a^2}{16} \quad \Longrightarrow \quad h = \dfrac{a}{4}$

$h_{\mathrm{s}} = \sqrt{\dfrac{a^2}{16} + \dfrac{a^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{5a^2}{16}} = \dfrac{a}{4}\sqrt{5}, \quad s = \sqrt{\dfrac{5a^2}{16} + \dfrac{a^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{9a^2}{16}} = \dfrac{3a}{4}$

$V = \dfrac{a^3}{12}, \quad A = a^2 + 2a \cdot \dfrac{a}{4}\sqrt{5} = a^2\left(1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{5}\right)$

$\sin\varphi = \dfrac{h}{s} = \dfrac{\frac{a}{4}}{\frac{3a}{4}} = \dfrac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 19{,}47122^\circ = 19^\circ 28' 16''$

5. (a) $V = \frac{1}{3}Gh \quad \Longrightarrow \quad G = \frac{3V}{h} = 26\,\mathrm{cm}^2$

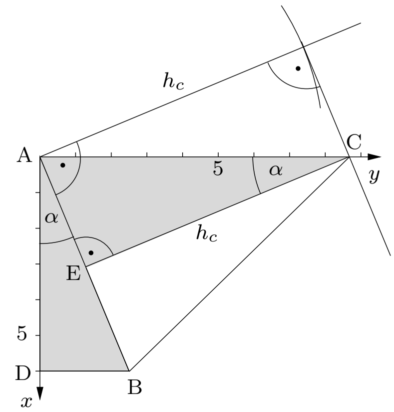
$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{6^2\,\mathrm{cm}^2 + 2{,}5^2\,\mathrm{cm}^2} = 6{,}5\,\mathrm{cm}$

$G = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}h_c \quad \Longrightarrow \quad h_c = \frac{2G}{\overline{\mathrm{AB}}} = 8\,\mathrm{cm}$

C liegt also auf der Parallelen zu AB im Abstand 8 cm.

$\triangle\mathrm{ADB} \sim \triangle\mathrm{CEA} \quad \Longrightarrow \quad \frac{y_c}{h_c} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AD}}}$

$y_c = \frac{\overline{\mathrm{AB}} \cdot h_c}{\overline{\mathrm{AD}}} = \frac{6{,}5 \cdot 8}{6}\,\mathrm{cm} = 8\frac{2}{3}\,\mathrm{cm} \approx 8{,}67\,\mathrm{cm}$

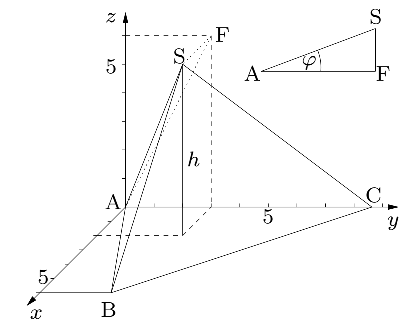


Alternative: $\tan\alpha = \frac{2{,}5}{6} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 22{,}62^\circ \quad y_c = \frac{h_c}{\cos\alpha} \approx 8{,}67\,\mathrm{cm}$

(b) F(0|3 cm|6 cm) ist der Fußpunkt des Lotes von S auf die yz-Ebene:

$\overline{\mathrm{AF}} = \sqrt{6^2\,\mathrm{cm}^2 + 3^2\,\mathrm{cm}^2} = \sqrt{45}\,\mathrm{cm}$

$\tan\varphi = \frac{\overline{\mathrm{SF}}}{\overline{\mathrm{AF}}} = \frac{2}{\sqrt{45}} = 0{,}298 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 16{,}6^\circ$



6.

7.

8. (a) $g = \sqrt{\frac{3V}{h}}$
(b) 45°
(c)
(d) $\frac{1}{4}$
(e) $\frac{1}{8}$

9. (a) Volumen $= 645577{,}1\,\mathrm{m}^3$, Oberfläche $= 52456{,}1\,\mathrm{m}^2$
(b) Volumen $= 42157{,}8\,\mathrm{m}^3$, Oberfläche $= 9195{,}9\,\mathrm{m}^2$
(c) Volumen $= 2736217{,}5\,\mathrm{m}^3$, Oberfläche $= 129399{,}6\,\mathrm{m}^2$

10. $h = 21{,}6\,\mathrm{cm}$, $V = 1935\,\mathrm{cm}^3$

11. $O = \frac{3}{2}a^2(\sqrt{3} + \sqrt{19})$; $V = \sqrt{3}a^3$
12. $O = 128\,\text{cm}^2$; $V = 85\frac{1}{3}\,\text{cm}^3$
13. $\sqrt{2} : \sqrt{\sqrt{3}}$
14. Oberflächeninhalt in cm^2: $36\sqrt{3} + 162\sqrt{2}$
15. $V = 8,0\,cm^3$
16. (a) ca. $2,36 \cdot 10^6\,\text{m}^3$ (b) $87,5\%$
17. (a) $100\,\text{cm}^2$
    (b) $h = \frac{\sqrt{2}}{2}7,60\,\text{cm} = 5,37\,\text{cm}$, $V = 103\,\text{cm}^3$.
18. $V = 100{,}1\,m^3$

7.2.4. Kegel

Kegel - Volumen und Oberfläche

1. Quelle: mathematik lehren (1999)

   Der „unbefangene“ Betrachter der Grafik assoziiert nahe liegender Weise das Volumen der dargestellten Kegel als Maß für die CO_2-Menge und stellt fest: Bei Erdgasheizung wird die CO_2-Emission um rund 60% reduziert. Rechnet man dagegen mit den angegebenen Zahlen, so erhält man eine Reduktion um rund 15%, was weit weniger eindrucksvoll ist.

2. Die Dachfläche beträgt ca. 153 (Kontrolle: 153, 07) m^2, aber es müssen ca. 176 (Kontrolle: 176, 03) m^2 Material bestellt werden. Das Amt für Denkmalschutz übernimmt von den Gesamtkosten (66011, 25 €) 36306, 19 €

3. Die folgende Lösung gilt nur für Sektgläser, die die Form von Kreiskegeln haben.
   Zunächst muss dann geklärt werden, was „halb gefüllt“ bedeutet. Meint man damit, dass die Füllhöhe halbiert wird, so können mit einer üblichen Sektflasche 56 Sektgläser halb gefüllt werden.
   Dies kann insbesondere mit rein funktionalen Argumenten begründet werden (Halber Radius und halbe Höhe; Radius tritt quadratisch auf, also Volumen nur $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ des ursprünglichen.

4. (a) $r = 3,03\,\text{cm}$; $h = 10,39\,\text{cm}$; Abstand vom oberen Rand $= 1,61\,\text{cm}$
   (b) $h' = 9,39\,\text{cm}$; $r' = 2,74\,\text{cm}$; $V' = 73,82\,\text{cm}^3$; $26,18\%$
   (1) ca. 80% der Höhe: $9,6\,\text{cm}$

5. 33°

6. $O = 62{,}8\,\mathrm{cm}^2; \mathrm{V} = 32{,}4\,\mathrm{cm}^3$

7. $\sqrt{3}\,\pi$ *bzw.* $311{,}8^\circ$

8. $\alpha = 288^o$

9. (a) $56{,}1^0$
   (b) $169{,}4^0$

Zylinder und Kegel - Volumen und Oberfläche

1.

2. (a) $6,53$
   (b) $0,094$l; 16
   (c) $2r^2\pi + 2r\pi h = A \Rightarrow r = -h \pm \sqrt{h^2 + \frac{2A}{\pi}} \Rightarrow r \approx 7,62cm$
   $\Rightarrow V = r^2\pi h = 463cm^3$

3. $O = (75 + 3\sqrt{10}) \cdot \pi$

4. (a): $\frac{5}{3}a$ $(b):$ 216° $(c):$ $\frac{\pi}{16}a^3$

5. $r = 6\,\mathrm{cm}$; $V_K = 324\,\pi\,\mathrm{cm}^2$; $V_Z = 432\,\pi\,\mathrm{cm}^2$
   Gesamtzahl der Kegel $= 12\,000 \cdot \dfrac{V_Z}{V_K} = 16\,000$
   $\Longrightarrow$ 4000 Kegel nachbestellen

6. $V = 54{,}6\,\pi\,\mathrm{cm}^3$
   $A = 56\,\pi\,\mathrm{cm}^2$

7. $1393\,\mathrm{cm}^3$ und $15{,}86\,\mathrm{cm}$

8. $V_Z : V_K = \sqrt{6} : 2$

9. $V_{Ke} : V_{Zy} = (2r + h)^3 : 6rh^2$

10. $\varrho = \frac{r}{2}$

11. $335\,\mathrm{mm}^3$; $4{,}4\,\mathrm{cm}$; $664\,\mathrm{g}$

Kegelstumpf - Volumen und Oberfläche

1. $V = 160{,}0\,\text{cm}^3, \text{O} = 216{,}8\,\text{cm}^2$

2. (a) Bezeichnet man die Höhe des ursprünglichen Kegels mit H, so gilt $H = \frac{hr_1}{r_1 - r_2}$ und man erhält:
   $V = \frac{1}{3}\pi r_1^2 H - \frac{1}{3}\pi r_2^2(H-h) - \frac{1}{3}\pi r_2^2 h = \frac{1}{3}\pi(r_1 + r_2)hr_1.$
   (b) $A = \frac{1}{2}2\pi 2r_2 \cdot 2 \cdot \sqrt{h^2 + r_2^2} - \frac{1}{2}2\pi r_2 \cdot \sqrt{h^2 + r_2^2}$ und $I = \frac{1}{2}2\pi r_2 \cdot \sqrt{h^2 + r_2^2}$ ergibt $\frac{A}{I} = 3$

3. (a) $\frac{\sqrt{5}\pi 5^2}{4}\text{cm}^2$
   (b) $h = \sqrt[3]{141}\text{cm}$
   (c) Ein Viertel des Glasvolumens:$\frac{250}{12}\pi\text{cm}^3$

4. $h \approx 2{,}9\,\text{cm}$

5. $h \approx 2{,}1\,\text{cm}$

6. (a): $288\,cm$ (b): $85\,cm$

7. $33°$

7.2.5. verschiedene Körper

1. $a = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}}}\,\text{m} \approx 0,76\,\text{m}$

2. (a) $5 + 5 + 8 = 18$ Quadrate, $8 \cdot 3 = 24$ Dreiecke
   (b) $18 \cdot (4\,\text{cm})^2 + 24 \cdot \left(\frac{4\,\text{cm}}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 288\,\text{cm}^2 + 96\,\text{cm}^2 = 384\,\text{cm}^2$
   (c) Volumen der Verpackung:
   $$V_{\text{Verpack}} = \left[4^3 + 6 \cdot 4^2 \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} + 12 \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\right]\,\text{cm}^3 = 527{,}53\,\text{cm}^3$$
   (d) Volumen der 4 Dosen: $V_{\text{Dosen}} = 4 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 3{,}1\,\text{cm}\right)^2 \pi\right] \cdot 5{,}2\,\text{cm} \approx 157\,\text{cm}^3$
   Also werden 30% der Verpackung ausgefüllt.
   (e) $14,3\%$
   (f) $33,6\%$

3. $1393\,\text{cm}^3$ und $15{,}86\,\text{cm}$

4. $O = (75 + 3\sqrt{10}) \cdot \pi$
5. (a): $\frac{5}{3}a$ $(b):$ $216°$ $(c):$ $\frac{\pi}{16}a^3$
6. $r = 6\,\text{cm}$; $V_K = 324\,\pi\,\text{cm}^2$; $V_Z = 432\,\pi\,\text{cm}^2$

   Gesamtzahl der Kegel $= 12\,000 \cdot \dfrac{V_Z}{V_K} = 16\,000$

   $\Longrightarrow$ 4000 Kegel nachbestellen
7. $V = 54{,}6\,\pi\,\text{cm}^3$
   $A = 56\,\pi\,\text{cm}^2$
8. $1393\,\text{cm}^3$ und $15{,}86\,\text{cm}$
9. $V_Z : V_K = \sqrt{6} : 2$
10. $V_{Ke} : V_{Zy} = (2r + h)^3 : 6rh^2$
11. $\varrho = \frac{r}{2}$
12. $335\,\text{mm}^3$; $4{,}4\,\text{cm}$; $664\,\text{g}$

7.2.6. Streckenlängen und Winkelgrößen an Körpern

7.3. Raumvorstellungsvermögen

1. $\sphericalangle CMG \approx 41^o$
2. $\sphericalangle HMD \approx 33^o$
3. z.B. AE und AF
4. Schnittgerade BT
5. Schnittgerade RP
6. Nein, sonst würden beide Geraden in dieser Ebene liegen, sie wären dann nicht windschief.
7. Schnittgerade BS
8. Schnittgerade BC

9. Schnittgerade BC

10. Schnittgerade AM

11. (a) Zwei Paare sich schneidender Geraden, von denen je zwei parallel sind, legen parallele (oder gleiche) Ebenen fest.
    (b) Sie sind windschief.

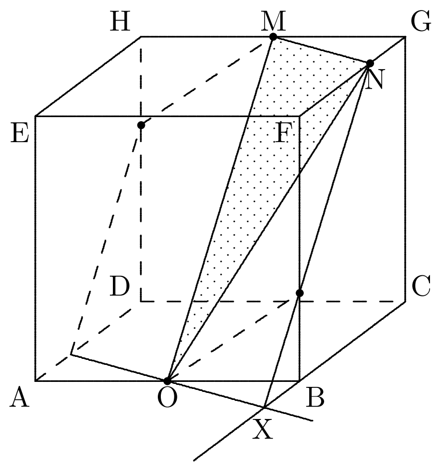
12.

13.

14. MN steht senkrecht auf der Seitenfläche $BCGF$, deswegen ist diese eine Lotebene zu MNO.

15. a, c, und d sind falsch.

16. Man zeichnet die Parallele zu MN durch O und schneidet sie mit BC. Dieser Schnittpunkt X liegt in $E(MNO)$ und der rechten Seitenebene des Würfels. Also schneiden sich XN und FB in einem Punkt der Ebene $E(MNO)$. Die übrigen Randlinien der Schnittfigur ergeben sich durch Parallelenziehen.



17.