SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Jahrgangsstufe 9 (Gymnasium)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

5. Juni 2012

Inhaltsverzeichnis

I. Algebra 3

1. Die reellen Zahlen 4

1.1. Quadratwurzel 4
1.2. Menge der reellen Zahlen 15
1.3. Intervallschachtelungen 16
1.4. numerische Berechnungen von Wurzeln 20
1.5. Umformen und Vereinfachen von Wurzeltermen 25
1.5.1. Wurzeln zusammenfassen 25
1.5.2. Radizieren 28
1.5.3. Rationalmachen des Nenners 33
1.5.4. Kombinierte Aufgaben umfangreicherer Art 36

2. Funktionale Zusammenhänge 42

2.1. Graphen quadratischer Funktionen und deren Nullstellen 42
2.1.1. binomische Formeln 42
2.1.2. Parabeln als Graphen quadratischer Funktionen 42
2.1.3. Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen 77
2.2. Quadratische Funktionen in Anwendungen 92
2.2.1. Textaufgaben, die auf quadratische Gleichungen führen 92
2.2.2. Extremalwertaufgaben 102
2.2.3. lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten 104
2.2.4. gemeinsame Punkte von Funktionsgraphen 107
2.2.5. Bruchgleichungen 109

3. Erweiterung des Potenzbegriffs 119

3.1. allgemeine Wurzeln 119
3.2. Rechenregeln für Potenzen mit rationalen Exponenten 119
3.2.1. Rechengesetze - Herleitung und Illustration 119
3.2.2. Nur Multiplikation und Division 121
3.2.3. Alle Grundrechnungsarten treten auf 129

II. Stochastik 136

4. Zusammengesetzte Zufallsexperimente 137
4.1. elementare zusammengesetzte Zufallsexperimente 137
4.2. Pfadregeln 141

III. Geometrie 150

5. Satzgruppe des Pythagoras 151
5.1. Konstruktionsaufgaben 151
5.1.1. Wurzelkonstruktionen 151
5.1.2. Flächenverwandlungen 151
5.1.3. Sonstige Konstruktionsaufgaben 152
5.2. Mathematische Anwendungen 152
5.2.1. Berechnungen am Dreieck 152
5.2.2. Berechnungen am Kreis 164
5.2.3. Anwendungen auf räumliche Situationen 166
5.2.4. Herleitungen geometrischer Aussagen 168
5.3. Anwendungen in anderen Gebieten 170
5.4. Goldener Schnitt 171
5.4.1. Konstruktionen 171
5.4.2. rein rechnerische Aufgaben 172
5.4.3. Kombinierte Aufgaben (Zeichnung/Rechnung) 174

6. Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck 176
6.1. Sinus, Kosinus, Tangens am rechtwinkligen Dreieck 176
6.2. Berechnungen am Dreieck 183
6.3. Vermessungsaufgaben 190

7. Fortführung der Raumgeometrie 193
7.1. Schrägbilder 193
7.2. Körper 193
7.2.1. gerades Prisma 193
7.2.2. gerader Zylinder 197
7.2.3. Pyramide 203
7.2.4. Kegel 217
7.2.5. verschiedene Körper 228
7.2.6. Streckenlängen und Winkelgrößen an Körpern 233
7.3. Raumvorstellungsvermögen 233

Teil I.

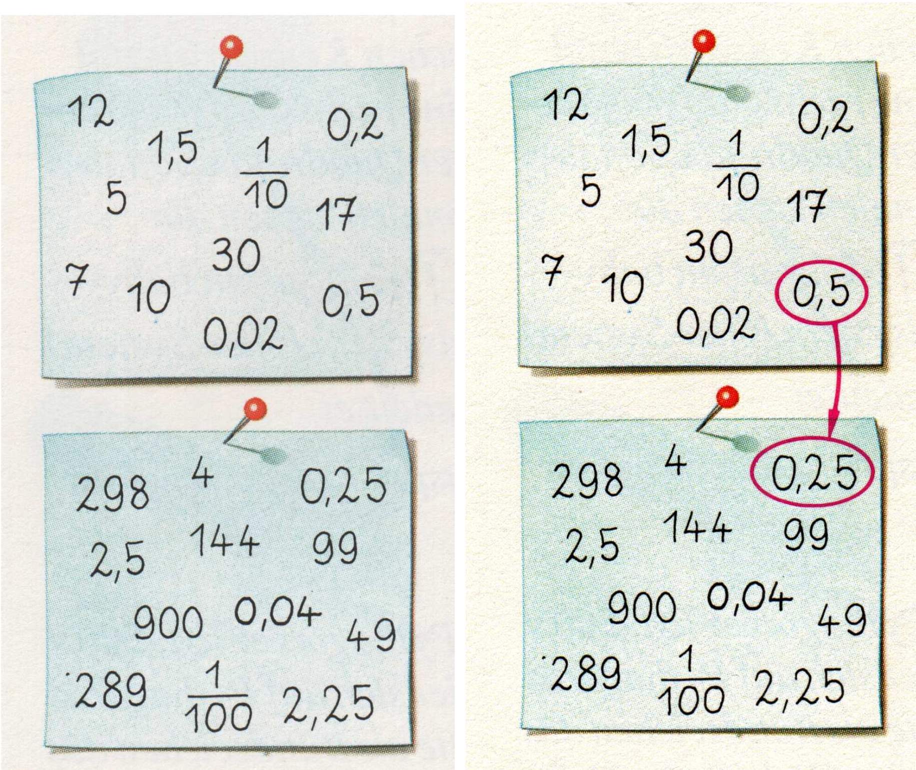
Algebra

1. Die reellen Zahlen

1.1. Quadratwurzel

1. **Zahlenpartner**

   Wie lassen sich die Zahlen auf dem oberen und unteren Notizzettel einander sinnvoll zuordnen?



Quelle: Schnittpunkt 9 (1995)

Variationen:

(a) einfachere Zahlen

(b) ein weiteres offensichtliches Beispiel einfügen

(c) weiteren Pfeil einzeichnen

(d) Pfeile ganz weglassen

(e) Zahlen betrachten, die keinen Partner haben

(f) Zuordnungstabelle

Lösung:

- $12 \to 144$; $0,2 \to 0,04$; $1,5 \to 2,25$; $\frac{1}{10} \to \frac{1}{100}$; $12 \to 144$; $17 \to 289$; $7 \to 49$; $30 \to 900$
- Zahlen, die keinen (rationalen) Partner haben: 298; 2,5; 99
- Fehlende Zahlenpartner: $5 \to 25$; $0,02 \to 0,0004$; $2 \to 4$; $10 \to 100$

2. **Vermischtes zum Thema Wurzeln**

Ziehe die Wurzeln:

(a) $\sqrt{8100}$

(b) $\sqrt{81}$

(c) $\sqrt{0,81}$

(d) $\sqrt{0,0081}$

(e) $\sqrt{\frac{25}{16}}$

(f) $\sqrt{0,000009}$

(g) $\sqrt{x^2}$ für $x = -3$

(h) $\sqrt{\frac{125}{245}}$

Quelle: mathematik lehren 70 (1995)

Lösung:

3. **Übungen zu Wurzeln und Potenzen**

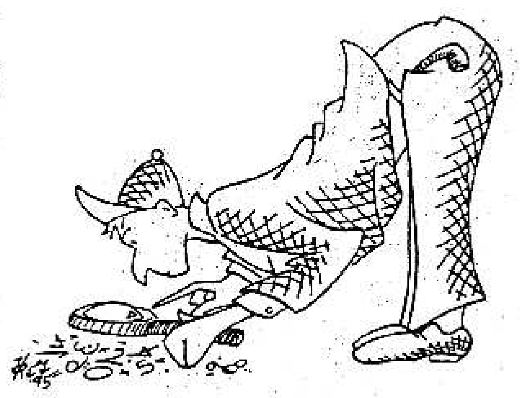
Wie heißt der Geheimagent?

$2^3 \cdot 2^4$	2^{12}	T	0^{-2}	0	K
	2^7	B		n.l.	H
	4^7	M		1	M
$\sqrt[3]{0}$	n.l.	O	$a^7 \cdot a^{-3} \cdot a^2$	a^{12}	B
	0	I		a^{-42}	A
	1	A		a^6	L
$\sqrt[2]{\sqrt[4]{16}}$	1	N	$\sqrt[4]{64\,z^4}$	$64\,z$	T
	$\sqrt[2]{2}$	L		$\sqrt[4]{64}z$	A
	$\sqrt[6]{16}$	M		$4\,z$	V
$\dfrac{11^5}{11^{-2}}$	11^3	N	$\sqrt[3]{27\,x^3\,y^9}$	$27\,x\,y^3$	E
	11^{-3}	M		$\sqrt{27}\,x\,y^3$	R
	11^7	L		$3\,x\,y^3$	U
$\sqrt[6]{1}$	1	Y	$\dfrac{4^{-2}}{4^2} : 4^{-2}$	4^{-2}	E
	6	I		4^2	G
	n.l.	E		$\frac{1}{4^{-2}}$	R
$(\sqrt[2]{4})^2$	2	S			
	16	A			
	4	D			
$\sqrt{-9}$	3	U			
	-3	V			
	n.l.	E			
3^0	0	P			
	1	R			
	3	S			
$\dfrac{1^3}{4}$	$\frac{1}{48}$	H			
	$\frac{1}{4}$	S			
	$\frac{3}{48}$	E			
2^{-3}	$\frac{1}{8}$	C			
	8	A			
	n.l.	R			

_ _ _ _ _

_ _ _

_ _ _ _ _ _ _



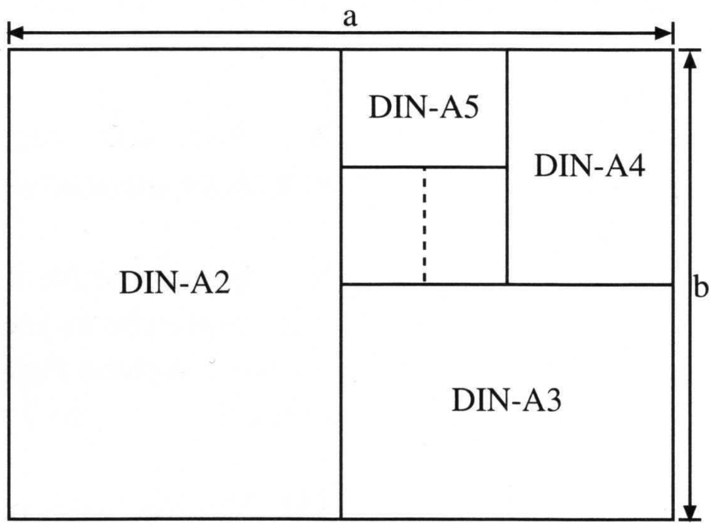
Quelle: Westermann

Lösung: Billy der Schlaue

4. **Kartonformen**

In Deutschland werden bestimmte Papiergrößen nach der DeutschenIndustrieNorm (DIN) bezeichnet. Für DIN-A Formate von Papier gelten folgende Bedingungen:

- Die Rechtecke sind einander ähnlich.
- Durch Halbieren der längeren Seite erhält man das nächstkleinere DIN-A Format.
- Ein Rechteck des Formats DIN-A 0 ist $1\,\mathrm{m}^2$ groß.

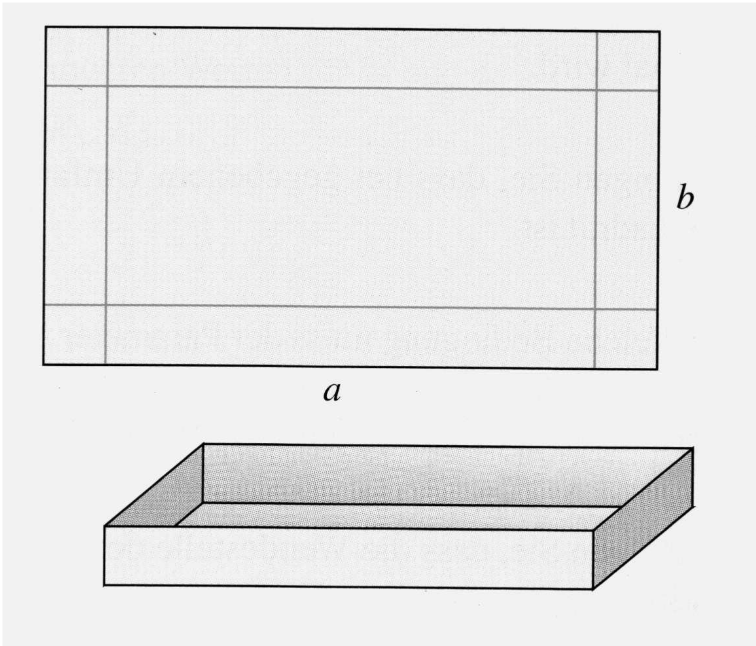


DIN-A1-Blatt

(a) Bestimme den Verkleinerungsfaktor, den man am Fotokopierer einstellen muss, um ein DIN-A4 Blatt auf DIN-A5 zu verkleinern.

(b) Wie ist das beim Verkleinern von DIN-A2 auf DIN-A3?

(c) Eine Fabrik stellt aus DIN-A4 Pappstücken oben offene quaderförmige Pappkästen mit maximalem Volumen her (siehe Abbildung). Dabei wird an jeder Ecke ein Quadrat als Klebefalz benutzt. Den wie vielfachen Rauminhalt hätte ein solcher Kasten aus DIN-A3 Papier?



Lösung: (a) Für das DIN-A4 Blatt beträgt das Seitenverhältnis $a : b$, für das Blatt DIN-A5 beträgt es $b : \frac{a}{2}$. Also gilt: $\frac{a}{b} = \frac{2 \cdot b}{a} \Rightarrow a^2 = 2b^2$. Das Seitenverhältnis $a : b$ beträgt also $\sqrt{2} : 1$. Der Flächeninhalt wird halbiert, also wird jede Seitenlänge (und darauf bezieht sich die eingestellte Zahl) um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 70,71\%$ gekürzt.

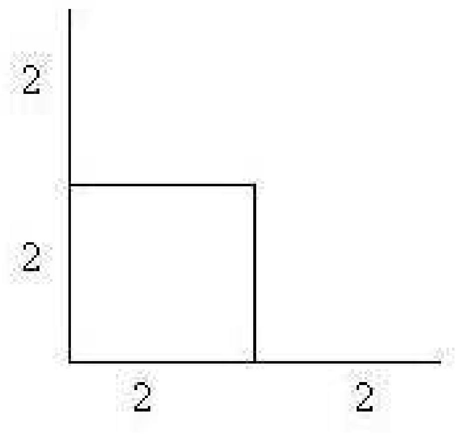
(b)

(c) Auf anschaulichem Niveau: Klar, die Schachteln sind ähnlich zueinander. Jede Seitenlänge wird mit dem Faktor $\sqrt{2}$ gestreckt, also vervielfacht sich das Volumen um den Faktor $\sqrt{8}$.

5. **Sokrates und der Sklave Menon**

Lies den folgenden Dialog. In der unten stehenden Skizze kannst du den Gedankengang nachzeichnen, so kannst du ihn besser nachvollziehen. Der Dialog ist nicht vollständig abgedruckt. Versetze dich in die Lage des Sklaven Menon und versuche, das Problem zu lösen.
Kommst du alleine nicht weiter, darfst du dir Hilfen holen (Hilfe 1, Hilfe 2) - hier wird der Dialog fortgesetzt.

Dialog zwischen Sokrates und dem Sklaven Menon


2
2
2
2

Sokrates:	(zum Sklaven) Sage, siehst du dieser viereckigen Fläche an, dass sie ein Quadrat ist?
Menon:	Ja.
Sokrates:	Nehmen wir einmal an, diese Seite ist zwei Fuß lang und diese Seite ebenfalls. Wie viel Quadratfuß wäre die ganze Fläche?
Menon:	Vier, mein Sokrates.
Sokrates:	Ließe sich nun nicht ein zweites, doppelt so großes Quadrat herstellen?
Menon:	Ja.
Sokrates:	Wie viel Fuß wird es also enthalten?
Menon:	Acht.
Sokrates:	Wohlan denn, versuche mir zu sagen, wie lang jede Seite sein wird. Die Seite unseres Quadrates hier ist zwei Fuß lang; wie lang wird also nun die Seite des doppelten sein?
Menon:	Offenbar doppelt so lang.
Sokrates:	Sage mir: Die doppelte Seite soll deiner Behauptung zufolge das doppelte Quadrat ergeben?
Menon:	Ich bleibe dabei.
Sokrates:	Erhält nun nicht diese Seite die doppelte Länge, wenn wir ihr eine gleich große Strecke anfügen?
Menon:	Gewiss.
Sokrates:	Diese verdoppelte Strecke also, behauptest du, soll das achtfüßige Quadrat ergeben, wenn man vier gleich große Seiten bildet?
Menon:	Ja.
Sokrates:	Lass uns also auf ihr ein Quadrat mit lauter gleichen Seiten konstruieren. Dann muss doch wohl dies hier das Quadrat sein, welches du für ein achtfüßiges ausgibst?
Menon:	Allerdings.
Sokrates:	Sind in ihm nicht alle vier Quadrate enthalten, deren jedes diesem vierfüßigen gleich ist?
Menon:	Ja.
Sokrates:	Wie groß also muss es sein? Nicht viermal so groß?
Menon:	Du hast Recht.
Sokrates:	Denn viermal vier ist sechzehn. Nicht wahr?
Menon:	Ja.
Sokrates:	Welche Linie aber ergibt das achtfüßige? Diese ergibt doch das vierfache?
Menon:	Ja.

Sokrates:	Es muss also doch die Seite des achtfüßigen Quadrates größer sein als diese zweifüßige hier, kleiner aber als die vierfüßige?
Menon:	Notwendigerweise.
Sokrates:	Versuche also zu sagen, wie lang sie nach deiner Meinung sein muss.
Menon:	Drei Fuß lang.
Sokrates:	Wenn sie also drei Fuß lang sein soll, so müssen wir doch die Hälfte von dieser anfügen, um sie dreifüßig zu machen? Denn diese Seite beträgt zwei, diese da einen Fuß. Und ebenso an dieser Seite hier. Dies hier sind zwei, dies ist ein Fuß. Und so ergibt sich denn dies von dir gemeinte Quadrat.
Menon:	Ja.
Sokrates:	Wenn es nun auf dieser Seite drei Fuß lang ist und auf dieser auch, so muss die ganze Fläche doch dreimal drei Fuß groß sein?
Menon:	Offenbar.
Sokrates:	Dreimal drei macht aber wie viel Fuß?
Menon:	Neun.
Sokrates:	Das doppelte aber müsste wie viel Fuß sein?
Menon:	Acht.
Sokrates:	Also auch die dreifüßige Seite ergibt noch nicht das achtfüßige Quadrat.
Menon:	Aber beim Zeus, mein Sokrates, ich weiß es nicht.

... Versuche vorerst das Problem selbständig zu lösen. Benutze Hilfe 1 *erst, wenn du nicht mehr weiter weißt. Setze dann den Dialog fort. Versetze dich dabei in die Lage von Sokrates und erkläre deine Lösung möglichst gut.*

Hilfe 1

Sokrates:	Ist dies nicht unser vierfüßiges Quadrat?
Menon:	Ja.
Sokrates:	Wir können ihm doch daneben und drüber ein zweites und drittes anfügen.
Menon:	Ja.
Sokrates:	Und ein viertes hinzufügen, sodass wieder ein Quadrat entsteht?
Menon:	Ja.
Sokrates:	So wären das also vier gleiche Quadrate?
Menon:	Ja.
Sokrates:	Wie viel mal so groß ist nun also dies Ganze als das ursprüngliche hier?
Menon:	Viermal so groß.
Sokrates:	Es sollte aber nur doppelt so groß sein.
Menon:	Ja, gewiss.
Sokrates:	Lässt sich nicht jedes der vier Quadrate in zwei gleichgroße Hälften teilen?
Menon:	Ja.
Sokrates:	Es ließen sich doch vier gleich lange Diagonalen ziehen, die ihrerseits wieder ein Quadrat ergeben?
Menon:	So ist es.
Sokrates:	Überlege also: Wie groß ist dieses Quadrat?

. . . Stelle vorerst eigene Überlegungen an. Danach darfst du Hilfe 2 *heranziehen.*

Hilfe 2

Menon:	Ich kann nicht darauf kommen.
Sokrates:	Sind dies nicht vier Quadrate und umschließen nicht die vier Diagonalen von jedem Quadrat die Hälfte?
Menon:	Gewiss.
Sokrates:	Wie viele solcher Hälften sind nun in dem neuen Quadrat enthalten?
Menon:	Vier.
Sokrates:	Wie viele aber in dem ursprünglichen Quadrat?
Menon:	Zwei.
Sokrates:	Vier aber sind im Verhältnis zu den zwei?
Menon:	Das Doppelte.
Sokrates:	Ist dies aber der Fall, so muss die Diagonale die Seite des doppelten Quadrats bilden.
Menon:	Ohne Zweifel, Sokrates!

Quelle: Curriculum Geschichte I: Altertum. Diesterweg (1975), S.79ff

Lösung:

6. Welche Gleichung der Form $x^2 = a$ hat als Lösung

   (a) -2 ? (b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$?

Lösung: (a): $x^2 = 4$ (b): $x^2 = \frac{1}{5}$

7. Schreibe als Quadratwurzel und gib an den Stellen „ ..... “ jeweils an, wann dies möglich ist:

   0,02; $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2$; a^3, falls .... ;

   $a - 2b$, falls .... ; $-x^3$, falls .... ; $x \cdot |x|$, falls ....

Lösung: $\sqrt{0,0004}$; $\sqrt{\frac{16}{81}}$; $\sqrt{a^6}$, falls $a \geqq 0$;
$\sqrt{(a-2b)^2}$, falls $a \geqq 2b$; $\sqrt{x^6}$, falls $x \leqq 0$; $\sqrt{x^4}$, falls $x \geqq 0$

8. Schreibe folgende Terme jeweils als Wurzel, falls dies möglich ist:

   (a) xz, wobei $x, z \in \mathbb{Q}^-$
   (b) p^2, wobei $p \in \mathbb{Q}^-$
   (c) yz^2, wobei $y \in \mathbb{Q}^+, z \in \mathbb{Q}^-$
   (d) $|q| \cdot p^3$, wobei $p, q \in \mathbb{Q}^-$
   (e) $-rs$, wobei $r, s \in \mathbb{Q}^-$

Lösung: (a): $\sqrt{x^2z^2}$ (b): $\sqrt{p^4}$ (c): $\sqrt{y^2z^4}$ (d), (e): nicht möglich

9. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Gib gegebenenfalls an, was zusätzlich vorausgesetzt werden muß, damit die Aussagen wahr werden.

   (a) Ist $0 < x < y$, so ist $\sqrt{x} < \sqrt{y}$
   (b) Es gilt stets $\sqrt{x} < x$.
   (c) $\left(\sqrt{-x}\right)^2 = \sqrt{x^2}$

Lösung: (a) wahr
(b) nur wahr, falls $x > 1$
(c) nur wahr, falls $x \leqq 0$

10. Zeige, daß die positive Lösung der Gleichung $x^2 = 3$ eine irrationale Zahl ist. Gehe dazu von der Annahme $x = \frac{p}{q}$ $p, q \in \mathbb{N}$, p, q teilerfremd, aus und führe dies zu einem Widerspruch.

Lösung:

11. Ist eine positive Zahl irrational, so ist auch ihre Quadratwurzel irrational.
    (a) Beweise diesen Satz!
    (b) Prüfe, ob auch die Umkehrung richtig ist! Begründe deine Antwort!

Lösung: (a): Widerspruchsbeweis (Quadrieren liefert Widerspruch!)
(b): Die Umkehrung ist falsch.

12. Bestimme die Definitionsmenge von:
    (a) $\sqrt{c+4}$ (b) $\sqrt{-c^2}$ (c) $\sqrt{(-c)^2}$ (d) $\sqrt{c^3}$

Lösung: (a) $D = [-4; \infty[$ (b) $D = \{0\}$ (c) $D = \mathbb{R}$ (d) $D = \mathbb{R}_0^+$

13. Bestimme die Definitionsmenge des folgenden Terms:

$$\sqrt{\frac{-2}{x \cdot (x-4)}}$$

Lösung: $D =]0; 4[$

14. Bestimme ausführlich die Definitionsmenge ($G = \mathbb{R}$):

$$\sqrt{\frac{-7}{(5+x) \cdot (3-x)}}$$

Lösung: $D = \mathbb{R} \setminus [-5; 3]$

15. Bestimme die Definitionsmenge für den folgenden Term!
Grundmenge ist $\mathbb{R}$. Eine Vereinfachung des Terms ist *nicht* verlangt!

$$\frac{5x}{2-\sqrt{x}} - \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+3}}$$

Lösung: $D =]2; \infty[\setminus \{4\}$

1.2. Menge der reellen Zahlen

1. a sei eine positive, nicht ganze rationale Zahl, d.h. $a \in \mathbb{Q}^+$ und $a \notin \mathbb{N}$. Die Bruchdarstellung $a = \dfrac{Z}{N}$ sei vollständig gekürzt, d.h. die Primfaktorzerlegungen

$$Z = p_1 \cdot p_2 \cdot \ ... \ \cdot p_n \quad \text{und} \quad N = q_1 \cdot q_2 \cdot \ ... \ \cdot q_m$$

enthalten keinen gemeinsamen Faktor.

(a) Beweise, dass auch a^2 keine natürliche Zahl ist ($a^2 \notin \mathbb{N}$) und formuliere das Ergebnis in einem prägnanten Satz.

(b) Gibt es eine rationale Zahl, deren Quadrat 10 ist?

(c) Gibt es eine rationale Zahl, deren Quadrat 1000 ist?

(d) Gibt es eine rationale Zahl, deren Quadrat 10^n ($n \in \mathbb{N}$) ist?

Lösung: (a) $a^2 = \dfrac{Z^2}{N^2} = \dfrac{p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot \ ... \ \cdot p_n^2}{q_1^2 \cdot q_2^2 \cdot \ ... \ \cdot q_m^2}$ kann nicht gekürzt werden, da $q_i \neq p_k$. a^2 wäre nur dann eine natürliche Zahl, wenn sich alle Faktoren im Nenner wegkürzen ließen.

$\boxed{\text{Das Quadrat einer nicht ganzen rationalen Zahl ist nicht ganz.}}$

(b) Wegen $3^2 = 9 < 10$ und $4^2 = 16 > 10$ gibt es keine natürliche Zahl mit dem Quadrat 10. Da es auch keine nicht ganze rationale Zahl mit dem Quadrat 10 gibt, gibt es überhaupt keine rationale Zahl, deren Quadrat 10 ist.

(c) Wegen $31^2 = 961 < 1000$ und $32^2 = 1024 > 1000$ gibt es keine natürliche Zahl mit dem Quadrat 10 $\Longrightarrow$ nein

(d) $x^2 = 10^n = 2^n \cdot 5^n$. x muss also $\frac{n}{2}$-mal den Faktor 2 und $\frac{n}{2}$-mal den Faktor 5 enthalten. Das geht nur für n gerade.

2. **Konstruktion irrationaler Zahlen**

Konstruiere eine Zahl, die nicht abbricht und nicht periodisch ist.

Lösung:

- $1,112123123412345123456\ldots$
- $1,1010010001000100000100000001\ldots$

3. Untersuche, ob x rational ist! Schreibe zu jeder Antwort eine kurze, aber logisch einwandfreie Begründung! Falls x rational ist, ist x als vollständig gekürzter Bruch darzustellen!

(a) $x = 2,314113111411113111114$.......

(b) $x = -0,0545454$.......

(c) $x = 0,12636363$.......

(d) $x^2 = 21$

(e) $x^2 = -4$

Lösung: (a) irrational, da unendlicher, nichtperiodischer Dezimalbruch

(b) $x = -\dfrac{3}{55}$ (c) $x = \dfrac{139}{1100}$

(d) $x \notin \mathbb{Z} \wedge x^2 \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad x$ irrational

(e) existiert nicht

1.3. Intervallschachtelungen

1. **Intervallschachtelung mit Telefonnummern**

   Wie kann die (sechsstellige) Telefonnummer von Sabine 'erraten' werden, wenn Sabine nur mit 'Höher' oder 'Niedriger' antwortet?

   Variationen:

   (a) Tel-Nr. eines Schülers verwenden

   (b) Wie oft muss man bei einer sechsstelligen Zahl höchstens nachfragen? Antwort: Zwanzig Mal

Lösung:

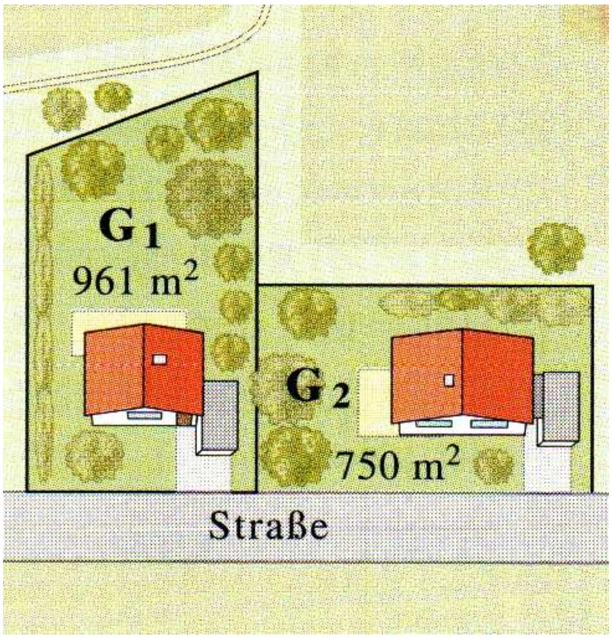
2. **Straßenreinigungsgebühr**

   Denke dir die beiden Grundstücke G_1 und G_2 aus dem nebenstehenden Beispiel jeweils in ein flächeninhaltsgleiches Quadrat mit den Seitenlängen a_1 bzw. a_2 verwandelt.

   (a) Gib die Seitenlänge a_1 an.

   (b) Zwischen welchen Werten (in vollen Metern) liegt die Seitenlänge a_2?

   (c) Gib die Seitenlänge a_2 auf volle Meter gerundet an. Ermittle dazu zunächst eine Dezimalstelle mehr.



Zur Öffnung bieten sich insbesondere die folgenden Artikel aus der Lokalpresse an:

Von Gerechtigkeit keine Rede

„Straßenreinigung - ‚Wollen keine Gebühren schinden'" (18.2.)

Der erschreckende Bericht über die Stellungnahme des Herrn Bürgermeisters Gehb zu der Berechnung der Straßenreinigungsgebühren - nach der Quadratmeter-Wurzel - kann nicht unwidersprochen bleiben. Ist doch schon die Quadratwurzel unzutreffend; Grundstücke sind keine Quadrate.

Von Gerechtigkeit kann keine Rede sein. Wieso wurde eine Ungerechtigkeit beseitigt, wo 20 000 mehr und 12 000 weniger bezahlen müssen. Bei den Frontmetern seien nie die Grundstücksgrößen berücksichtigt worden. Was hat die Grundstücksgröße mit dem Dreck auf der Straße zu tun? Übersehen ist doch ihre Wichtigkeit zur Frischluftbildung. Die Quadratmeter-Wurzel bringt erneut Ungerechtigkeit. Ist es gerecht, die großen unbebauten Grundstücke für die kleinen bebauten - und von vielen bewohnt - (Dreckverursacher) zahlen zu lassen?

Das 900 Quadratmeter Grundstück als Beispiel bestätigt doch eingehend die Ungerechtigkeit. Wenn das Fehlen der Grundstücksgröße bei den Frontmetern Anlaß einer Beanstandung war, müßte diese Größe umsomehr bei Anwendung der Quadratmeterwurzel beachtet werden. Die Größe darf doch an keiner Stelle verdoppelt werden, auch nicht bei Eckgrundstücken. Selbst bei verschiedenen Reinigungsstufen der beiden Straßen muß dies entfallen. Bei dem 900 Quadratmeter Grundstück - 90.10 m - sind die Quadratmeter den Seiten entsprechend aufzuteilen 9:1 (= 0,9 x 900 = 810 Quadratmeter und 0,1 x 900 = 90 Quadratmeter) und zu verrechnen.

Die Beanstandungen von SPD, CDU und FDP sind berechtigt. Grundstücke werden nur von einer Seite erschlossen; es gibt nur einen Zugang! Diese Regelung gehört abgeschafft. Falsche Veranlagungen haben Geldschinden als Folge! 500 statt 2 500 Widersprüche sind doch kein Sturm im Wasserglas aber ein Beweis, daß viele den Widerspruch unterlassen haben. Ein Widerspruch ist längst keine Kuriosität, wenn der Einlegende weniger zu zahlen hat. Als gerecht Denkender - dem es nicht nur um das Geld geht - hält er solches für notwenig, wenn die Gerechtigkeit auf der Strecke geblieben ist.

Es sind nicht die Grundstücke, sondern die Menschen zur Zahlung heranzuziehen; diese veranlassen die Verschmutzungen. Da bei der Stadt das Geld knapp ist und noch lange bleien wird, ist die Reinigung zu privatisieren. Ein Weg wäre, die Eigentümer übernehmen die Arbeiten selbst (wie bei Streupflicht, Schneebeseitigung). Wer sie nicht ausführen kann oder will, schließt mit Firmen Verträge ab. Beträge bleiben umlagepflichtig.

Sollte die Reinigung bei der Stadt bleiben, müßten die Kosten auf alle Bürger umgelegt werden; Kinder ab Forderung auf Kindergartenplatz. Ständig Bettlägerige wären befreit! Einzug der Gebühren über die Hauswirte, wie die Telekom ihre Kabelgebühren einzieht.

Karl Liese
Mittelbing 12 A
Kassel

HNA 1.3.91

Extra Tip

ales — 22 August 1999 — 0561 7070-0

Wurzel des Übels

Straßenreinigungsgebühr läßt Kasseler Rentner keine Ruhe

Von CHRISTIAN WOLTERS

■ KASSEL – Gleiches Recht für alle. Daran liegt dem Kasseler Rentner Karl Burghardt (78) so viel, daß er sich schon seit 13 Jahren freiwillig mit Quadratwurzeln, Hinterliegern, Eckgrundstücken und der Straßenreinigungs-Gebührensatzung herumschlägt. Noch immer sagt er: „In Kassel wird nicht jeder Grundstückseigner gleich behandelt."

Jaja, diese Satzung ist schon kompliziert. Und doch erklärt Karl Burghard gern noch einmal, wie „das mit der Straßenreinigungsgebühr" funktioniert: „Die Quadratwurzel aus der Grundstücksfläche mal Zahl der Seiten, an denen ihr Grundstück erschlossen ist. Und das mal 6,36 Mark."

Just die sogenannten mehrfach erschlossenen Grundstücke sind es, die dem streitbaren Rentner keine Ruhe lassen: „Die einen werden dreifach veranlagt, weil ein Fahrradweg ihr Grundstück umschließt, die anderen liegen zwischen zwei Straßen und zahlen nur den einfachen Betrag." Willkür sieht der Rentner hier am Werk. Er will von Hunderten von Kasseler Grundstücken wissen, die nicht satzungsgemäß veranlagt werden.

Sein einziges Problem: aufgrund des Steuergeheimnisses erhält er keine Auskünfte seitens der Stadt. Nur die Grundstückseigner selbst konnten Auskünfte einholen und sich zu einer Klage entschließen.

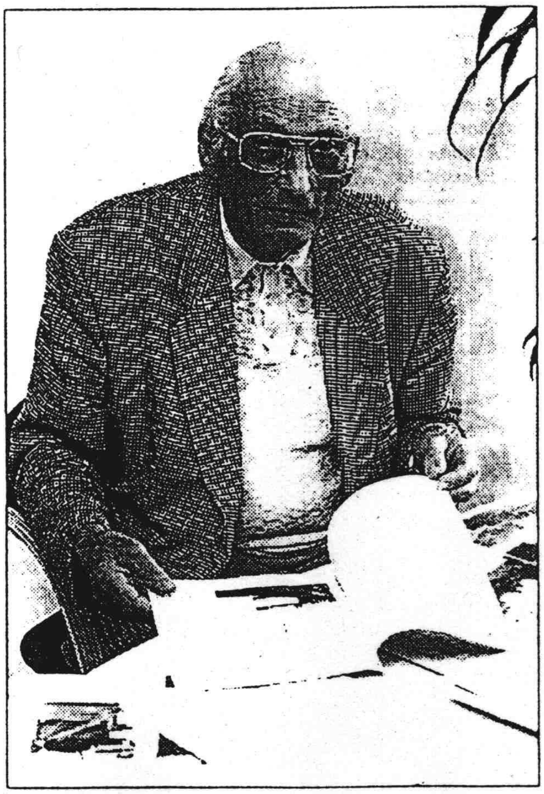
Daß nach der Beschwerdewelle 1994 kein Kasseler diese Möglichkeit wahrnimmt, hat für Rolf Hedderich, Amtsleiter Kämmerei und Steuern bei der Stadt Kassel, einen guten Grund: „Wir wenden unsere Satzung ordnungsgemäß an", versicherte er auf Anfrage des EXTRA TIP. Bisher habe man in keinem einzigen Fall einen Veranschlagungsfehler festgestellt. „Die Bürger haben die neue Satzung akzeptiert."

Nur die Wurzel

Rentner Burghardt will Hedderich da nicht folgen: „Manche haben doch noch gar nicht begriffen, daß sie seit 1994 doppelt oder dreifach zahlen", sagt er und rät allen Kasselern: „Schauen sie sich ruhig mal ihren Festsetzungsbescheid genauer an."

Bei Kassels Kommunalpolitikern will Burghardt nun dafür sorgen, daß die ungeliebte Satzung doch noch geändert wird. „Gerecht wäre es, wenn nur noch die Quadratwurzel zur Berechnung der Gebühren herangezogen würde", sagt er. Sein Traum: „Schluß mit der Mehrfach-Veranlagung."

Amtsleiter Hedderich macht ihm allerdings wenig Hoffnung. Zur Zeit sei die Straßenreinigungssatzung kein Thema bei den politischen Entscheidungsträgern. Und obendrein: Folge die Kämmerei Burghardts Vorschlägen, führte dies zu erheblichen Steuerausfällen. „Und das wird das Regierungspräsidium kaum genehmigen."



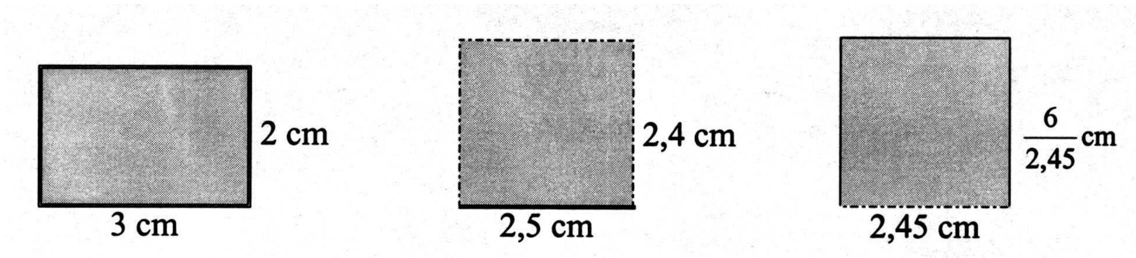
Karl Burghardt scheut keine noch so komplizierte Rechnung: Er will gerechte Gebühren.

Foto: Schachtschneider

Quelle: Elemente der Mathematik 9 (1995)

Lösung: offen

3. **Heron-Algorithmus**



Bestimme die Seitenlängen des nächsten Rechtecks in der Reihe.
Was fällt dir auf?

Quelle: Lambacher Schweizer (1997)

Lösung:

1.4. numerische Berechnungen von Wurzeln

1. (a) Berechne $x = \sqrt{17}$ mit dem Newtonverfahren und dem Startwert $x_1 = 4$. Mache die Probe nach jedem Iterationsschritt.

   (b) h sei eine kleine Zahl, d.h. $|h| \ll 1$. Wir suchen einen Näherungswert für $x = \sqrt{1+h}$. Beginne mit $x_1 = 1$ und berechne mit dem Newtonverfahren den verbesserten Wert x_2. Vereinfache das Ergebnis.

   Berechne mit der gefundenen Formel einen Näherungswert für $a = \sqrt{1{,}005}$. Um wieviel Prozent weicht dieser Näherungswert vom Taschenrechnerwert für a ab?

Lösung: (a) $x_{n+1} = \left(x_n + \dfrac{17}{x_n}\right) : 2$

$$x_2 = \left(4 + \frac{17}{4}\right) : 2 = 4{,}125, \qquad x_2^2 = 17{,}015\,625$$

$$x_3 = \left(x_2 + \frac{17}{x_2}\right) : 2 = 4{,}1231060606, \qquad x_3^2 = 17{,}000\,003\,587$$

$$x_4 = \left(x_3 + \frac{17}{x_3}\right) : 2 = 4{,}12310562562, \qquad x_3^2 = 17{,}000\,000\,000$$

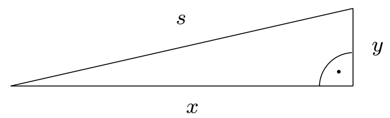
(b) $x_{n+1} = \left(x_n + \dfrac{1+h}{x_n}\right) : 2$

$$x_2 = \left(1 + \frac{1+h}{1}\right) : 2 = 1 + \frac{h}{2}$$

$$a = \sqrt{1 + 0{,}005} \approx 1 + \frac{0{,}005}{2} = 1{,}0025 = x_2, \quad a = 1{,}00249688279$$

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{x_2 - a}{a} = \frac{3{,}1172 \cdot 10^{-6}}{1{,}00249688279} = 3{,}1094 \cdot 10^{-6} = 0{,}00031094\,\%$$

2. Die Strecke s in nebenstehender Abbildung ist um



$$\delta = s - x = x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} - 1\right)$$

länger als x. Berechne δ mit Hilfe der linearen Näherung für $x = 10\,\text{km}$ und $y = 1\,\text{mm}$.

Lösung: $x = 1 \cdot 10^7\,\text{mm} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{y^2}{x^2} = 10^{-14}$

$$\delta \approx x \cdot \left(1 + \frac{y^2}{2x^2} - 1\right) = \frac{y^2}{2x} = \frac{1\,\text{mm}^2}{2 \cdot 10^7\,\text{mm}} = 5 \cdot 10^{-8}\,\text{mm}$$

3. (a) Berechne mit dem Taschenrechner:

$$\sqrt{1,0000001 \cdot 0,9999999}$$

(b) Zeige, daß für zwei positive, verschiedene Zahlen p und q gilt

$$pq < \left(\frac{p+q}{2}\right)^2$$

und begründe damit, daß ihr geometrisches Mittel strikt kleiner sein muß als ihr arithmetisches Mittel.

(c) Begründe, daß das Ergebnis der ersten Teilaufgabe nicht 1 sein kann.

Lösung: Die Stellenzahl in der Aufgabe a) muß gegebenenfalls an die zur Verfügung stehenden Taschenrechner angepaßt werden. Da die Abweichung von 1 ca. $5 \cdot 10^{-15}$ beträgt, werden gängige Geräte 1 anzeigen.

4. Bestimme mit dem Heron-Verfahren den Wert von $\sqrt{7}$ auf 6 Dezimalen genau.Wähle dazu als Startwert $x = 1$.

Lösung: Man erhält die Folge der Werte: $4, 2,875, 2,6548913, 2,645767, 2,6457513$. Danach ändern sich die erforderlichen Dezimalen nicht mehr.

5. Ein Rechteck hat die Breite 2 cm und die Länge 5 cm. Bestimme mit dem Heronverfahren die Maße eines flächengleichen Rechtecks, bei dem sich die Längen der Seiten höchstens um $0,01$ cm unterscheiden. Halte dazu deine Zwischenergebnisse in einer Tabelle fest, die jeweils Länge und Breite enthält.

Lösung:

Schritt	1	2	3	4
1.Seite	2	3,5	3,179	3,162
2.Seite	5	2,857	3,146	3,162

6. Beim Heronschen Verfahren zur Bestimmung der Wurzel aus a kann man Startwerte $x_0 = a$ und $y_0 = 1$ wählen und $\sqrt{a}$ mit Hilfe der Iteration

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad \text{sowie} \quad y_{n+1} = \frac{a}{x_{n+1}} \quad , n \in \mathbb{N}_0$$

berechnen.

   (a) Begründe: Das arithmetische Mittel aus den Werten x_n und y_n ist jeweils x_{n+1}, das geometrische Mittel ist immer $\sqrt{a}$.

   (b) Für beliebige positive Zahlen p und q ist das arithmetische Mittel immer größer oder gleich dem geometrischen Mittel. Überprüfe zum Nachweis zunächst die Ungleichung:

$$\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - pq \geqq 0$$

   und beweise damit die Behauptung.

   (c) Begründe mit Hilfe der letzten Teilaufgabe, daß x_n für $n \geqq 1$ immer größer und y_n immer kleiner als $\sqrt{a}$ ist.

Lösung:

7. **Das Newton-Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel**

   Um die Wurzel aus einer Zahl $a > 0$ zu berechnen, starten wir mit einem möglichst genauen Näherungswert $x_1 \approx \sqrt{a}$. x_1 unterscheidet sich vom wahren Wert der Wurzel um die kleine Zahl ε, d. h.

$$\sqrt{a} = x_1 + \varepsilon \qquad \text{(I)}$$

   Um den ungefähren Wert von ε zu erhalten, quadriert man zunächst (I). Unter der Voraussetzung, daß $|\varepsilon|$ sehr klein gegen x_1 ist, kann man ε^2 vernachlässigen und die so entstandene Gleichung nach ε auflösen. Damit erhält man dann die bessere Näherung $x_2 = x_1 + \varepsilon$ für $\sqrt{a}$.

(a) Beweise:

$$\boxed{x_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_1 + \frac{a}{x_1} \right)} \qquad \text{(II)}$$

Das Newton-Verfahren besteht nun darin, Gleichung (II) immer wieder auf den verbesserten Näherungswert anzuwenden, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist: $x_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_2 + \frac{a}{x_2} \right)$, $x_4 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_3 + \frac{a}{x_3} \right)$ usw.

(b) Berechne $\sqrt{10}$ mit dem Startwert $x_1 = 3$. Rechne solange, bis sich das Ergebnis auf dem Taschenrechner nicht mehr ändert! Berechne auch den relativen Fehler der einzelnen Näherungswerte. Verwende den Speicher deines Taschenrechners.

(c) Berechne $\sqrt{2}$ mit dem Startwert $x_1 = 1$.

Lösung: (b)

$x_2 = 3,1\overline{6}$ $\qquad \delta_2 = 1,39 \cdot 10^{-3}$
$x_3 = 3,162280701754386$ $\qquad \delta_3 = 9,62 \cdot 10^{-7}$
$x_4 = 3,162277660169842$ $\qquad \delta_4 = 4,63 \cdot 10^{-13}$
$x_5 = 3,162277660168379$ $\qquad \delta_5 \approx 0 \quad (1,07 \cdot 10^{-25})$

(c)

$x_2 = 1,5$ $\qquad \delta_2 = 6,07 \cdot 10^{-2}$
$x_3 = 1,41\overline{6}$ $\qquad \delta_3 = 1,73 \cdot 10^{-3}$
$x_4 = 1,414215686627451$ $\qquad \delta_4 = 1,50 \cdot 10^{-6}$
$x_5 = 1,414213562374690$ $\qquad \delta_5 = 1,13 \cdot 10^{-12}$
$x_6 = 1,414213562373095$ $\qquad \delta_5 \approx 0 \quad (6,36 \cdot 10^{-25})$

8. **Die lineare Näherung**

Um die Wurzel einer nahe bei Eins gelegenen Zahl $1 + x$ mit $|x| \ll 1$ zu berechnen, gibt es eine einfache Näherungsformel der Form

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + a\,x \quad \text{(I)}$$

(a) Quadriere (I) und vernachlässige den wegen $|x| \ll 1$ sicher sehr kleinen Summanden, der x^2 enthält! Vergleiche die linke und die rechte Gleichungsseite und bestimme dann a!

(b) Berechne mit der gefundenen Näherungsformel $\sqrt{1,002}$ und $\sqrt{0,99996}$ und vergleiche mit den Taschenrechnerergebnissen! Berechne die relativen Fehler der Näherungswerte!

(c) Die lineare Näherung liefert oft viel genauere Ergebnisse als die direkte Rechnung mit dem Taschenrechner. Als Beispiel sei folgender Ausdruck einmal mit dem Taschenrechner und einmal mit der linearen Näherung berechnet :

$$y = \left(1 - \sqrt{1 - 10^{-16}} \right) \cdot 10^{20}$$

Das auf 24 Dezimalstellen genaue Ergebnis lautet übrigens

$$y = 5000,000000000000125000000000\ .$$

(d) Eine Atomuhr wird mit der Geschwindigkeit v über eine Strecke s transportiert. Dabei mißt eine relativ zur Erde ruhende zweite Atomuhr die Transportzeit $t = \frac{s}{v}$. Die Relativitätstheorie Einsteins lehrt, daß die von der bewegten Uhr für den gleichen Vorgang gemessene Zeit durch

$$\boxed{t' = t \cdot \sqrt{1-\beta^2}}$$

mit $\beta = \frac{v}{c}$ und $c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (Lichtgeschwindigkeit) gegeben ist.
Berechne den Unterschied $\Delta t = t - t'$ der von beiden Uhren gemessenen Zeiten für $s = 300\,\mathrm{km}$ mit $v = 108\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und für $s = 40000\,\mathrm{km}$ mit $v = 432\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$!

Lösung: (a) $a = \frac{1}{2}$, d. h. $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$

(b) $\sqrt{1,002} \approx 1,001$, $\delta = 5 \cdot 10^{-7}$; $\sqrt{0,99996} \approx 0,99998$, $\delta = 2 \cdot 10^{-10}$

(c) Taschenrechner: $y = 0$; lineare Näherung: $y = 5000$

(d) $\Delta t \approx \dfrac{s\,\beta^2}{2\,v} = 5 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s}\ (2,7 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s})$

9. **Die quadratische Näherung**

Um die Wurzel einer nahe bei Eins gelegenen Zahl $1 + x$ mit $|x| \ll 1$ zu berechnen, kann man neben der linearen Näherung auch mit der genaueren quadratischen Näherung arbeiten:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + a\,x + b\,x^2 \quad \text{(I)}$$

(a) Quadriere (I) und vernachlässige die wegen $|x| \ll 1$ sicher sehr kleinen Summanden, die x^3 oder x^4 enthalten! Vergleiche die linke und die rechte Gleichungsseite und bestimme dann a und b!

(b) Berechne mit der gefundenen Näherungsformel $\sqrt{1,02}$ und $\sqrt{0,996}$ und vergleiche mit den Taschenrechnerergebnissen! Berechne die relativen Fehler der Näherungswerte!

(c) Mit der linearen und quadratischen Näherung für $\sqrt{1+x}$ lassen sich auch die Wurzeln beliebiger Zahlen näherungsweise berechnen, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = \sqrt{9\left(1+\frac{1}{9}\right)} = 3 \cdot \sqrt{1+\frac{1}{9}} \approx 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 9} - \frac{1}{8 \cdot 9^2}\right) = 3,162037$$

Dieses Ergebnis stimmt auf vier geltende Ziffern mit dem exakten Wert überein. Berechne mit der gleichen Methode Näherungen für $\sqrt{17}$ und $\sqrt{99}$ und vergleiche mit den Taschenrechnerergebnissen!

(d) Leite nach dem obigen Muster eine quadratische Näherungsformel für den Bruch

$$\frac{1}{1+x} \quad \text{mit} \quad |x| \ll 1$$

her! Berechne damit $\dfrac{1}{1,005}$ und $\dfrac{1}{0,94}$ und vergleiche mit den exakten Ergebnissen!

Lösung: (a) $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{8}$ d.h. $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$

(b) $\sqrt{1,02} \approx 1,00995$, $\delta_{rel} = -4,9 \cdot 10^{-7}$
$\sqrt{0,996} \approx 0,997998$, $\delta_{rel} = 4,0 \cdot 10^{-9}$

(c) $\sqrt{17} \approx 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{32} - \frac{1}{2048}\right) = 4,1230469$; $\delta_{rel} = -1,4 \cdot 10^{-5}$
$\sqrt{99} \approx 10 \cdot \left(1 - \frac{1}{200} - \frac{1}{80000}\right) = 9,949875$; $\delta_{rel} = 6,3 \cdot 10^{-8}$

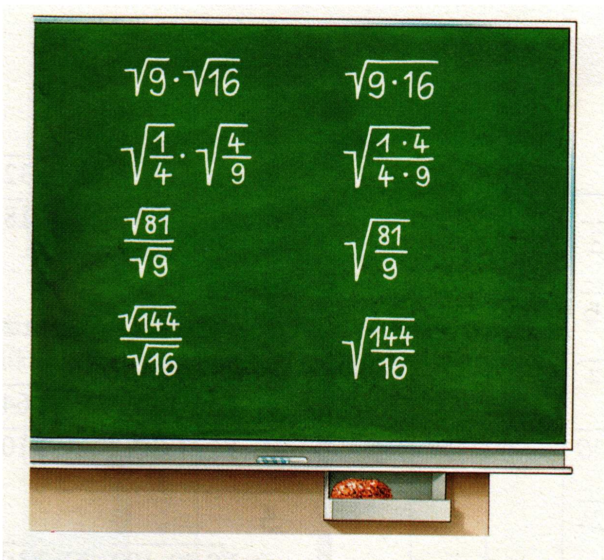
(d) $\dfrac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2$
$\frac{1}{1,005} \approx 0,995025$; $\delta_{rel} = 1,25 \cdot 10^{-7}$
$\frac{1}{0,94} \approx 1,0636$; $\delta_{rel} = -2,2 \cdot 10^{-4}$

1.5. Umformen und Vereinfachen von Wurzeltermen

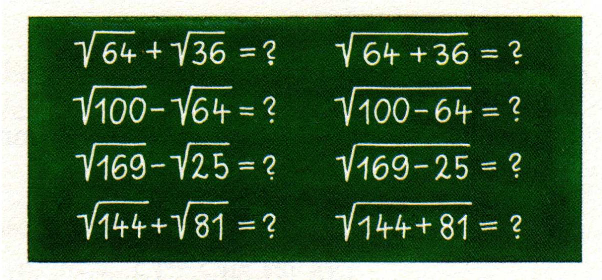
1.5.1. Wurzeln zusammenfassen

1. **Wurzelregeln**

   Vergleiche die Terme der linken und rechten Tafelhälfte miteinander.
   Was vermutest du?



Vergleiche die Terme der linken und rechten Tafelhälfte miteinander.
Was vermutest du?



Quelle: Schnittpunkt 9 (1995)

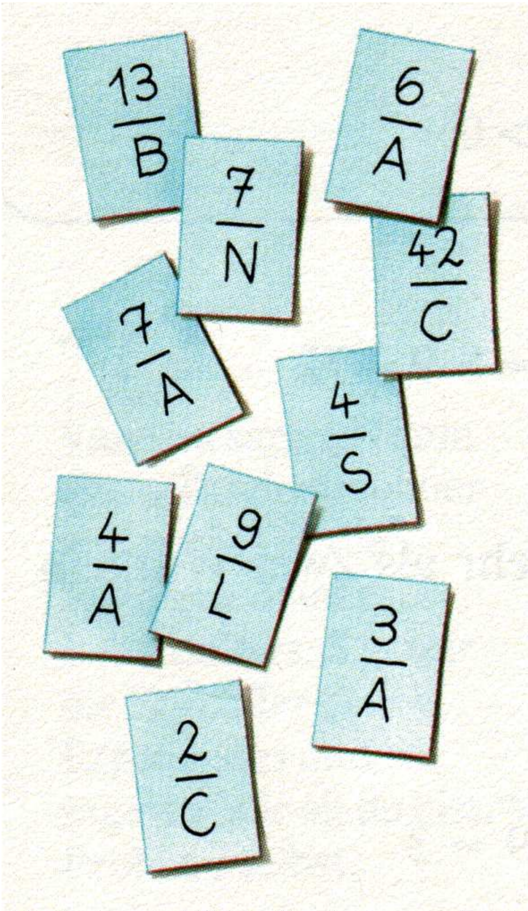
Lösung:

2. **Übungen zur Multiplikation und Division von Wurzeln**

Welcher Film läuft im Kino?

(a) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{126} = \square$
(b) $\sqrt{396} : \sqrt{11} = \square$
(c) $\square \cdot \sqrt{289} = 34$
(d) $\sqrt{675} : \sqrt{\square} = 15$
(e) $\sqrt{117} \cdot \sqrt{\square} = 39$
(f) $\sqrt{\square 80} : \sqrt{5} = 14$
(g) $\sqrt{14\square} \cdot \sqrt{3} = 21$
(h) $\sqrt{50\square} : \sqrt{3} = 13$
(i) $\sqrt{92} \cdot \sqrt{\square 3} = 46$
(j) $\sqrt{396} : \sqrt{\square 4} = 3$

Wenn du richtig gerechnet hast, verraten es dir die Lösungsbuchstaben!



Quelle: Schnittpunkt 9 (1995)

Lösung: CASABLANCA

3. Wo liegt der Fehler? Begründe deine Antwort kurz.

$$(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{7} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2\cdot 7} = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2\cdot 7} = (1-\sqrt{2})\cdot\sqrt{7}$$

Deswegen ist

$$\sqrt{2}-1 = 1-\sqrt{2},$$

also

$$2\sqrt{2} = 2$$

und daher

$$\sqrt{2} = 1$$

Lösung:

4. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\sqrt{(9-x)^2} = (\sqrt{9-x})^2$$
Begründe deine Antwort kurz.

Lösung: $L =]-\infty; 9]$

5. Ziehe unter die Wurzel und gib mit Begründung an, ob das Ergebnis eine rationale Zahl ist!
$$(5+2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Lösung: $\sqrt{14+3\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$, da sonst $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ wäre!

1.5.2. Radizieren

1. (a) Lösung der Gleichung $\sqrt[4]{x} = \sqrt{14}$ über $G = \mathbb{R}_0^+$
   (b) Diskriminante der Gleichung $x^2 - 5x + 0,5 = 0$
   (c) $\sqrt[3]{79507}$
   (d) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} + \sqrt{\sqrt[3]{10^{12}}} - \sqrt{1600} =$
   (e) $6! + 1!$

   Quelle: Kreuzzahlrätsel von Ulrike Schätz

Lösung: (a) 196 (b) 23 (c) 43
(d) 62 (e) 721

2. Vereinfache soweit wie möglich, wenn nötig mit Fallunterscheidung.
$$-\sqrt{(-9x^3)^2}$$

Lösung: $-9|x|^3$

3. Vereinfache und radiziere soweit wie möglich:
   (a) $\sqrt{16x^2 + 56x + 49}$
   (b) $\sqrt{\sqrt{81c^2}}$
   (c) $\sqrt{0,00000175}$

(d) $\left(\sqrt{\frac{1}{a^3}} \cdot \sqrt{\frac{b^6}{c}}\right) : \sqrt{\frac{bc}{a^4}}$

(e) $3\sqrt{75} + \sqrt{147} - 4\sqrt{27} - \sqrt{3}$

Lösung: (a) $|4x+7|$ (b) $3\sqrt{|c|}$ (c) $\frac{5}{10^4}\sqrt{7}$ (d) $\frac{b^2}{c}\sqrt{ab}$ (e) $9\sqrt{3}$

4. Ergänze jeweils den Radikanden um <u>einen</u> Term zu einem vollständigen Quadrat, radiziere dann und stelle das Ergebnis ohne Betrag dar:
   $\sqrt{x^4 + x^2 \cdot y^2 + \ldots} \quad ; \qquad \sqrt{9x^2 + 4,5x + \ldots} \qquad (x, y \in \mathbb{Q})$

Lösung: $\sqrt{x^4 + x^2y^2 + 0,25y^4} \;=\; x^2 + 0,5y^2\,;$

$$\sqrt{9x^2 + 4,5x + 0,75^2} = \begin{cases} 3x + 0,75 & \text{für} \quad x \geqq -0,25 \\ -3x - 0,75 & \text{für} \quad x < -0,25 \end{cases}$$

5. Radiziere und vereinfache soweit wie möglich:

$$\sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} - \sqrt{x^2}, \quad x < 0$$

Lösung: $\frac{1}{2}$

6. Berechne für $x < 0$:

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{25} - \frac{2}{5}x} - \sqrt{\frac{1}{25}x^2}$$

Lösung: $\frac{1}{5}(1-4x)$

7. Radiziere und vereinfache so weit wie möglich:

$$\sqrt{4a^2} - \sqrt{a^2 - 4a + 4}, \quad (a < 0)$$

Lösung: $-a - 2$

8. Vereinfache soweit wie möglich:

$$\sqrt{(3x)^2} - \sqrt{1 - 18x + 81x^2} + |6x|; \quad x < 0$$

Lösung: -1

9. Radiziere und vereinfache soweit wie möglich:

$$\sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} - \sqrt{x^2}, \quad 0 < x < \frac{1}{2}$$

Lösung: $\frac{-2x+1}{2}$

10. Im folgenden bezeichne x stets eine negative rationale Zahl. Berechne die beiden Terme und stelle das Ergebnis möglichst einfach und ohne Betrag dar:
    (a) $\sqrt{0,01x^2 - x + 25} - \sqrt{1,44x^2} - |x - 5|$
    (b) $\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} - \sqrt{(-2x^2)^2}$

Lösung: (a): $2,1x$ (b): $1 - x^2$

11. Vereinfache:

$$\sqrt{275} + \sqrt{343} - \sqrt{112} - \sqrt{99}$$

Lösung: $2\sqrt{11} + 3\sqrt{7}$

12. Vereinfache und fasse so weit wie möglich zusammen:

$$\sqrt{300} - 4\sqrt{28} + 3\sqrt{63} - 2\sqrt{108}$$

Lösung: $\sqrt{7} - 2\sqrt{3}$

13. Radiziere und vereinfache soweit wie möglich:

$$\sqrt{\frac{27a^3 + 81a^2b}{(a + 3b)^3}}, \quad a, b > 0$$

Lösung: $\frac{3a}{a+3b}\sqrt{3}$

14. Vereinfache soweit wie möglich:

$$\sqrt{\frac{4a^2 \cdot (x-3)}{(x+3)}} \cdot \sqrt{(x^2-9) \cdot a^2}; \quad x < -3$$

Lösung: $2a^2(3-x)$

15. Ziehe unter die Wurzel und vereinfache:

$$\frac{4(b-1)}{a^2}\sqrt{\frac{a^3}{8(b^2-1)}}, \text{ für } b > 1$$

Lösung: $\sqrt{\frac{2(b-1)}{a(b+1)}}$

16. Vereinfache und führe eine Fallunterscheidung durch um das Ergebnis betragsfrei darzustellen:

$$\sqrt{\frac{x-3}{x+3}} \cdot \sqrt{x^2-9}$$

Lösung: Ergebnis $x-3$, falls $x \geqq 3$, $3-x$ falls $x \leqq -3$

17. Berechne und fasse soweit wie möglich zusammen:

$$a^2\sqrt{1,21} + 3 \cdot \left(1,1\sqrt{a^4} - 2\sqrt{0,5b^8}\right) - \sqrt{2}b^4 + 3,3\sqrt{a^4}$$

Lösung: $7,7a^2 - 4\sqrt{2}b^4$

18. Radiziere so weit wie möglich und bestimme jeweils zusätzlich die Bedingungen an die Variablen, damit der Term definiert ist:

(a) $\sqrt{(-4)^2x^{14}y^{27}z^7}$ (b) $\sqrt{a^4b^3 - a^4b^2}$

Lösung: (a) $4|x|^7y^{13}z^3\sqrt{yz}$, definiert für $yz \geqq 0$
(b) $a^2b\sqrt{b-1}$, definiert für $b \geqq 1$

19. Radiziere, gegebenenfalls mit Fallunterscheidung:

$$\sqrt{4x^2 + 64 - 32x}$$

Lösung: $2 \cdot (x-4)$ für $x \geqq 4$; $\quad 2 \cdot (4-x)$ für $x < 4$

20. Gib an, für welche Werte der Variablen die folgenden Wurzelterme definiert sind und radiziere dann so weit wie möglich:

$$\text{(a)} \ \sqrt{\frac{x^5y^2}{z^4}} \qquad\qquad \text{(b)} \ \sqrt{\frac{(a^2+2)\cdot b^3}{c^2-8c+16}}$$

Lösung: (a): $\dfrac{x^2 \cdot |y|}{z^2} \cdot \sqrt{x}$, definiert für $x \geqq 0$ und $z \neq 0$

(b): $\left|\dfrac{b}{c-4}\right| \cdot \sqrt{(a^2+2)\cdot b}$, definiert für $b \geqq 0$ und $c \neq 4$

21. Radiziere mit ausführlicher Fallunterscheidung so weit wie möglich:

$$\sqrt{64k^2 - 128k^2c + 64k^2c^2}$$

Lösung: 0 für $k = 0$ oder $c = 1$; $8k - 8kc$ für $k < 0 \wedge c > 1$ oder für $k > 0 \wedge c < 1$;
$8kc - 8k$ für $k < 0 \wedge c < 1$ oder für $k > 0 \wedge c > 1$

22. Radiziere und stelle das Ergebnis ohne Betrag dar:
   (a) $\sqrt{x^2y^4}$, $x \in \mathbb{Q}^-$
   (b) $\sqrt{4x^4 + 4x^2 + 1}$
   (c) $\sqrt{9x^4 - 6x^2y + y^2}$

Lösung: (a): $-xy^2$ $\qquad$ (b): $2x^2 + 1$
(c): $3x^2 - y$, falls $3x^2 \geqq y$; $-3x^2 + y$, falls $3x^2 < y$

23. Berechne ausführlich (keine Beträge im Ergebnis!):
   (a) $\sqrt{0,25x^2 - x + 1} - \sqrt{(-x)^2}$, $\qquad x \in \mathbb{Q}^-$
   (b) $\sqrt{x^4} + \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}$, $\qquad x \in \mathbb{Q}$ und $|x| < 1$

Lösung: (a): $0,5x + 1$ $\qquad$ (b): 1

24. Berechne und fasse soweit wie möglich zusammen:

$$\sqrt{(-3x)^2} - \sqrt{1 - 18x + 81x^2} + |12x|; \quad x < 0$$

Lösung: $-6x - 1$

1.5.3. Rationalmachen des Nenners

1. Stelle rationale Nenner her und vereinfache soweit wie möglich:

$$\text{(a)} \quad \frac{240}{\sqrt{180}} \qquad \text{(b)} \quad \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{98} + \sqrt{72}}$$

Lösung: (a) $8\sqrt{5}$ (b) $\frac{9}{13}$

2. Mache den Nenner rational und vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

Lösung: $\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$

3. Stelle einen rationalen Nenner her und vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{16 - 12\sqrt{8}}{4\sqrt{18} - \sqrt{128}}$$

Lösung: $2\sqrt{2} - 6$

4. Stelle einen wurzelfreien Nenner her und vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b\sqrt{a} - a\sqrt{b}}$$

Lösung: $\frac{\sqrt{ab}}{ab}$

5. Mache den Nenner rational und vereinfache:

$$\frac{\sqrt{11}-3}{3+\sqrt{11}}$$

Lösung: $10-3\sqrt{11}$

6. Stelle einen wurzelfreien Nenner her und vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{x^2-x\sqrt{y}+y}{x-\sqrt{y}}$$

Lösung: $\frac{x^3+y\sqrt{y}}{x^2-y}$

7. Stelle einen wurzelfreien Nenner her und vereinfache:

$$\frac{\sqrt{xy}+x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

Lösung: $\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$

8. Stelle einen rationalen Nenner her und vereinfache ohne zu runden:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{8}+\sqrt{6}}{\sqrt{8}-\sqrt{6}}}$$

Lösung: $2+\sqrt{3}$

9. Mache den Nenner rational und vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{x\sqrt{98}-4\sqrt{2x^2}-\sqrt{14x}}{3\sqrt{7x}-7};\ x>0$$

Lösung: $\frac{\sqrt{14x}}{7}$

10. Beseitige die Wurzeln im Nenner und vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{p\sqrt{p}+p-\sqrt{p}-1}{p+1+2\sqrt{p}} \qquad (p\in\mathbb{R}^+,\ p\neq 1)$$

Lösung: $\sqrt{p} - 1$

11. Mache den Nenner rational und vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{1}{\sqrt{3 + \sqrt{10}}}$$

Lösung: $\sqrt{\sqrt{10} - 3}$

12. Stelle einen rationalen Nenner her und stelle das Ergebnis möglichst einfach dar:

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1}$$

Lösung: $1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$

13. Stelle einen rationalen Nenner her und gib das Ergebnis in möglichst einfacher Form an:

$$\frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{5} - 2\sqrt{2} - 1}$$

Lösung: $5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{10} - 10$

14. Für Taschenrechner und Programme, die mit Wurzeln formal rechnen, ist es wichtig, jeden Term der Form

$$\frac{a + b\sqrt{r}}{c + d\sqrt{r}}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Q} \quad \text{und} \quad r \in \mathbb{Q}$$

wieder in der Form $a' + b'\sqrt{r}$, $a', b' \in \mathbb{Q}$ schreiben zu können. Drücke a' und b' mit Hilfe von a, b, c und d aus.

Lösung: $a' = \dfrac{ac - rbd}{c^2 - rd^2}$, $b' = \dfrac{bc - ad}{c^2 - rd^2}$

1.5.4. Kombinierte Aufgaben umfangreicherer Art

1. Vereinfache und schreibe das Ergebnis betragsfrei:

   (a) $(x-3)\cdot\sqrt{\frac{1}{x-3}}$ (b) $(x-3)\cdot\sqrt{\frac{1}{(x-3)^2}}$ (c) $(x^2-4)\cdot\sqrt{\frac{1}{(x-2)^2}}$

Lösung: (a) $D =]3,+\infty[\implies x-3>0 \implies (x-3)\sqrt{\frac{1}{x-3}} = \sqrt{\frac{(x-3)^2}{x-3}} = \sqrt{x-3}$

(b) $D = \mathbb{R}\setminus\{3\} \implies (x-3)\sqrt{\frac{1}{(x-3)^2}} = \frac{x-3}{|x-3|} = \operatorname{sgn}(x-3) = \begin{cases} 1 & \text{für } x>3 \\ -1 & \text{für } x<3 \end{cases}$

(c) $D = \mathbb{R}\setminus\{2\} \implies (x^2-4)\cdot\sqrt{\frac{1}{(x-2)^2}} = \frac{(x-2)(x+2)}{|x-2|} = \begin{cases} x+2 & \text{für } x>2 \\ -x-2 & \text{für } x<2 \end{cases}$

2. (a) Bestimme die Definitionsmenge, vereinfache und schreibe das Ergebnis betragsfrei:

   $$f(x) = x - \sqrt{x^2}$$

   (b) Für welche Werte der Variablen ist folgender Term definiert? Radiziere teilweise und schreibe das Ergebnis ohne unnötige Betragsstriche:

   $$T = \sqrt{75x^7y^{10}}$$

   (c) Schreibe ohne Wurzeln im Nenner:

   $$a = \sqrt{7} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{8}}$$

Lösung: (a) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x^2} = x - |x| = \begin{cases} 0 & \text{für } x \geqq 0 \\ 2x & \text{für } x<0 \end{cases}$

(b) $x \in \mathbb{R}_0^+$, $y \in \mathbb{R}$, $T = \sqrt{3\cdot 25x\cdot x^6y^{10}} = 5x^3|y^5|\sqrt{3x}$

(c) $a = \sqrt{7} + \frac{\sqrt{7}+\sqrt{8}}{7-8} = \sqrt{7} - \sqrt{7} - \sqrt{8} = -\sqrt{8}$

3. Bringe unter <u>eine</u> Wurzel:

   (a) $(\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}$

   (b) $(3+\sqrt{5})\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(5+3\sqrt{5})}$

Lösung: (a): $\sqrt{8}$ (b): $\sqrt{80+36\sqrt{5}}$

4. Berechne und fasse soweit wie möglich zusammen:

$$\left(\sqrt{27p} - 2\sqrt{12p}\right) : \sqrt{3p}$$

Lösung: -1

5. Fasse soweit wie möglich zusammen:

$$(3\sqrt{5} - \sqrt{8})^2 - (2\sqrt{5} - \sqrt{2})(2\sqrt{5} + \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{10})^2$$

Lösung: $46 - 10\sqrt{10}$

6. Multipliziere aus und vereinfache soweit wie möglich:

$$\left(3\sqrt{6} - 2\sqrt{14}\right)^2 - \sqrt{7}\left(3\sqrt{28} - 8\sqrt{27} + \sqrt{175}\right)$$

Lösung: 33

7. (a) Vereinfache so weit wie möglich:

$$(2\sqrt{12} + 5\sqrt{3}) \cdot (3\sqrt{8} - 4\sqrt{27})$$

   (b) Gegeben ist der Term $\sqrt{\dfrac{pq}{3r}} : \sqrt{\dfrac{27p}{qr}}$, wobei $p < 0$ und $q < 0$.

   (α) Für welche Werte von r ist der Term definiert?

   (β) Vereinfache den Term so weit wie möglich und stelle das Ergebnis ohne Betrag dar!

Lösung: (a): $54\sqrt{6} - 324$ (b): definiert für $r > 0$; $\frac{1}{9} \cdot (-q)$

8. Bestimme die Lösungsmenge (rationale Nenner herstellen!):

$$(2\sqrt{5} + \sqrt{10}) : \sqrt{0,5} = 2\sqrt{10} : x$$

Lösung: $L = \{2 - \sqrt{2}\}$

9. Berechne folgenden Term und gib das Ergebnis in möglichst einfacher Form an:

$$\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{64}}\cdot\frac{a^2b^2}{18}\sqrt{\frac{81x^2y^2}{a^2b^2}}$$

Lösung: $\frac{5}{48}\cdot|abxy|$

10. Vereinfache soweit wie möglich. Welche Einschränkungen müssen für die Vorzeichen der Variablen x, y, z gemacht werden?

$$\sqrt{\frac{xy^2z}{16}}\cdot(\sqrt{\frac{4x}{5z}}:\sqrt{\frac{5}{x}})$$

Lösung: $\frac{x|y|\sqrt{x}}{10}$, $x>0$, $z>0$

11. Ziehe unter die Wurzel und vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{\sqrt{15}-4}{0,2x^3y^2z}:\sqrt{\frac{155-40\sqrt{15}}{0,4xy^3z^5}}\qquad(x,y,z>0)$$

Lösung: $-\sqrt{\frac{2z^3}{x^5y}}$

12. Stelle rationale Nenner her und fasse zusammen:
    (a) $10\sqrt{24}-14\sqrt{\frac{32}{147}}-7\sqrt{32\frac{2}{3}}$
    (b) $\frac{12+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-6\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}-1}$

Lösung: (a): $\sqrt{6}$ (b): $4\sqrt{3}+8$

13. Stelle rationale Nenner her, kürze und fasse zusammen:

$$\frac{18+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+6\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{3}-1}$$

Lösung: $5\sqrt{3}-6$

14. Stelle rationale Nenner her und vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}-1}+10\sqrt{\frac{1}{5}}-\frac{20+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

Lösung: $3-\sqrt{5}$

15. Stelle rationale Nenner her und fasse weitmöglichst zusammen:

$$\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}-\frac{6-2\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{6}}$$

Lösung: Hauptnenner 6, Ergebnis -3

16. Mache den Nenner rational und vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{3+\sqrt{10}}{3-\sqrt{10}}+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+\sqrt{160}$$

Lösung: $-19-\sqrt{10}$

17. Gib die Definitionsmenge des Terms an und vereinfache ihn soweit wie möglich:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$$

Lösung: $D=\mathbb{R}_0^+\setminus\{4\}$, Ergebnis $\frac{2x}{x-4}$

18. Gib die Definitionsmenge des Terms an und vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{\sqrt{x-9}}{\sqrt{x}-3}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x-9}}$$

Lösung: $D=]9;+\infty[$, Ergebnis $\frac{1}{\sqrt{x-9}}$

19. Vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{-\sqrt{320}}{6+2\cdot\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{125}-25}{\sqrt{5}}-10\cdot\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{20}}$$

Lösung: 0

20. In einem kartesischen Koordinatensystem ist der Graph einer quadratischen Funktion symmetrisch zur Geraden $x = 4$ und schneidet die x-Achse im Punkt (1|0). Erstelle eine saubere Überlegungsskizze und gib die Funktionsgleichung in Abhängigkeit von der y-Koordinate y_S des Scheitelpunktes an!

Lösung: $y=-\frac{y_S}{9}\cdot(x-4)^2+y_S$

21. Berechne und gib das Ergebnis mit rationalem Nenner an:

$$\frac{10+5\sqrt{10}}{2\sqrt{5}+5\sqrt{2}}-\frac{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{5\sqrt{10}}$$

Lösung: $\frac{4\sqrt{5}+\sqrt{2}}{5}$

22. Stelle zunächst wurzelfreie Nenner her und fasse dann zusammen:

$$\frac{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}}{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}+\frac{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}}$$

Lösung: $\frac{5\sqrt{6}+6}{3}$

23. Stelle zunächst wurzelfreie Nenner her und fasse dann zusammen:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{b}}}{\sqrt{a}-\sqrt{\sqrt{b}}}-\frac{\sqrt{a\sqrt{b}}}{a-\sqrt{b}}-\frac{a\sqrt{b}}{a^2-b}$$

Lösung: $\frac{b}{a^2-b}$

24. Berechne folgenden Term und stelle das Ergebnis möglichst einfach und mit wurzelfreiem Nenner dar! Zähler und Nenner des Ergebnisterms sollen dabei als Produkte erscheinen!

$$\frac{\sqrt{ab}-\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{ab}-a\sqrt{b}}{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}$$

Lösung: $\dfrac{(b-\sqrt{b})\cdot(b\sqrt{a}-1)}{b\cdot(b-1)}$

25. Stelle zunächst wurzelfreie Nenner her, fasse dann zusammen und gib das Ergebnis in möglichst einfacher Form an:

$$\frac{5\sqrt{a}+a}{\sqrt{ab}} - b\cdot(\sqrt{a}+1)\cdot\sqrt{\frac{1}{b^3}}$$

Lösung: $\dfrac{4\sqrt{b}}{b}$

26. Stelle zunächst wurzelfreie Nenner her und fasse dann zusammen:

$$\frac{\sqrt{c}+\sqrt{cd}}{cd\cdot(2\sqrt{c}-\sqrt{d})} - \frac{\sqrt{d}+1}{(4c-d)\cdot\sqrt{cd}}$$

Lösung: $\dfrac{2\cdot(1+\sqrt{d})}{d\cdot(4c-d)}$

27. Gegeben ist folgender Term:

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \qquad a,b\in\mathbb{R}$$

   (a) Welchen Bedingungen müssen a, b genügen, damit der Term überhaupt definiert ist?

   (b) Berechne den Term und stelle das Ergebnis ohne Wurzeln im Nenner dar!

Lösung: (a) $a,b\in\mathbb{R}^+, a\neq b$
(b) $\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{b\cdot(a-b)}$

2. Funktionale Zusammenhänge

2.1. Graphen quadratischer Funktionen und deren Nullstellen

2.1.1. binomische Formeln

2.1.2. Parabeln als Graphen quadratischer Funktionen

Funktionsgraphen

1. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm für die Funktion f bzw. g an, die die jeweils angegebene Eigenschaft haben soll. Eine Definitionsmenge braucht nicht angegeben zu werden; es wird die für den jeweiligen Term maximal mögliche vorausgesetzt.

   (a) Die Funktion f hat genau die zwei Nullstellen 3 und 0.

   (b) Die Funktion g ist bei x = 2 nicht definiert.

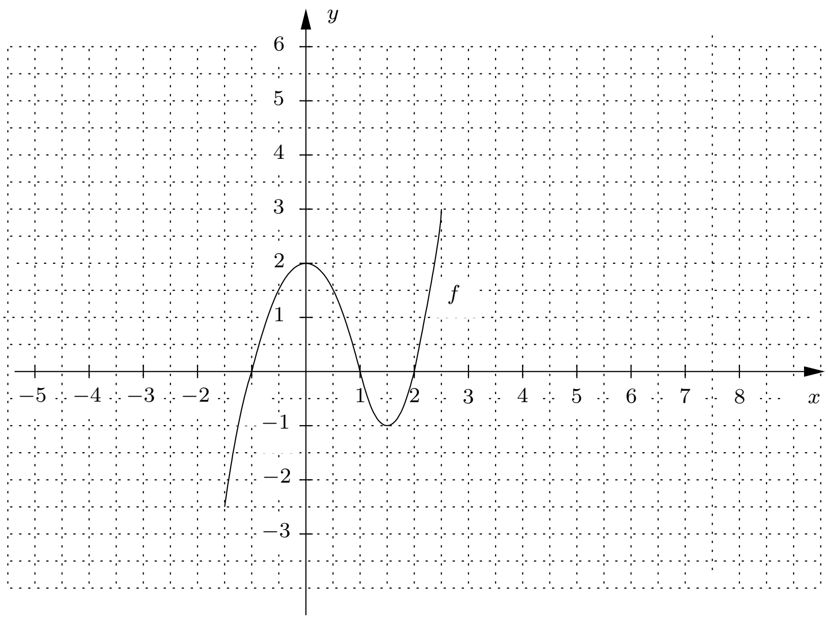
   Quelle: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 10 der Gymnasien 2008

Lösung: (a) Z. B. $x(x-3)$

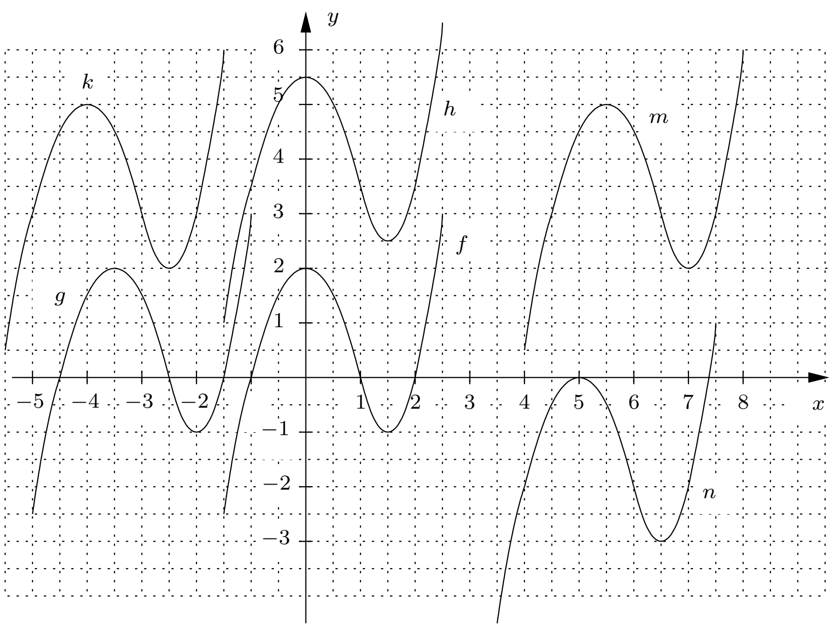
(b) Z. B. $\frac{1}{x-2}$

2. Zeichne die Grafen der Funktionen g, h, k, m und n mit den Termen

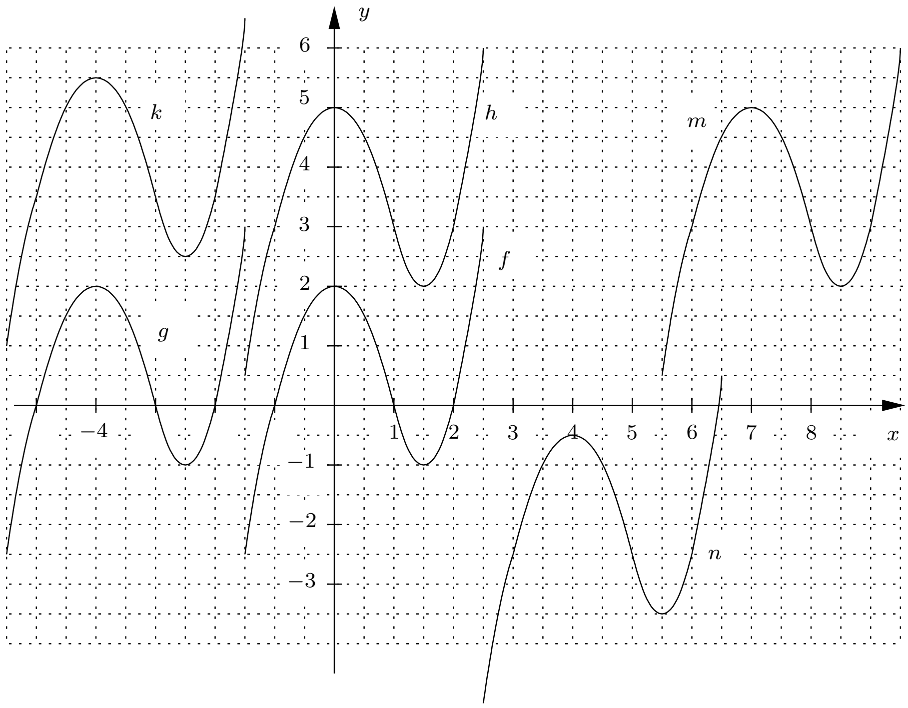
$$g(x) = f(x+3{,}5) \qquad h(x) = f(x) + 3{,}5 \qquad k(x) = f(x+4) + 3$$
$$m(x) = f(x-5{,}5) + 5 \qquad n(x) = f(x-5) - 2$$



Lösung:



3. Drücke die Terme der Funktionen g, h, k, m und n durch f aus:



Lösung:

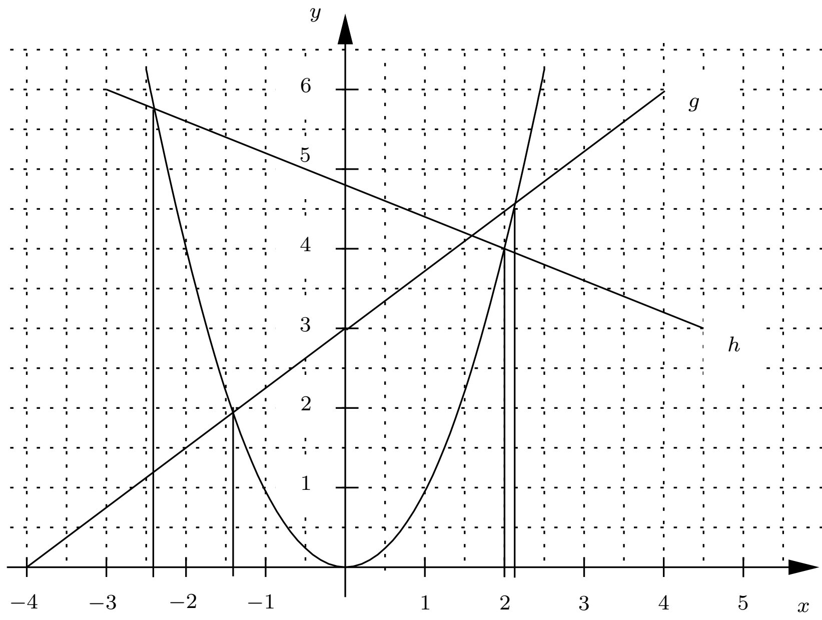
$$g(x) = f(x+4) \qquad h(x) = f(x)+3 \qquad k(x) = f(x+4)+3{,}5$$
$$m(x) = f(x-7)+3 \qquad n(x) = f(x-4)-2{,}5$$

4. Zeichne die Normalparabel und löse damit näherungsweise die Gleichungen

$$x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{24}{5} = 0 \quad \text{und} \quad x^2 - \frac{3}{4}x - 3 = 0.$$

Überprüfe die grafisch gefundenen Lösungen durch Rechnung.

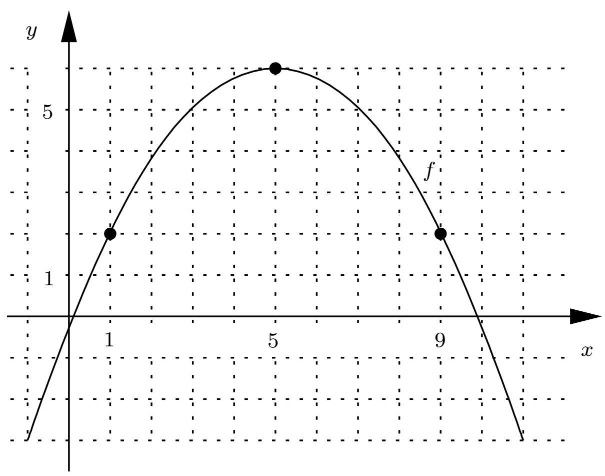
Lösung: $x^2 = -\frac{2}{5}x + \frac{24}{5} = g(x), \qquad x^2 = \frac{3}{4}x + 3 = h(x)$



$$x^2 + \frac{2}{5}x = \frac{24}{5}$$
$$x^2 + 2 \cdot \frac{1}{5}x + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{5} + \frac{1}{25}$$
$$\left(x + \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{121}{25}$$
$$x = -\frac{1}{5} \pm \frac{11}{5}$$
$$x_1 = 2 \quad x_2 = -2{,}4$$

$$x^2 - \frac{3}{4}x = 3$$
$$x^2 - 2 \cdot \frac{3}{8}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = 3 + \frac{9}{64}$$
$$\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{201}{64}$$
$$x = \frac{3}{8} \pm \frac{\sqrt{201}}{8}$$
$$x_1 \approx 2{,}15 \quad x_2 = -1{,}40$$

5. Nebenstehend ist der Graf der quadratischen Funktion f gezeichnet.
   (a) Ermittle die Gleichung von f in der Scheitelform.
   (b) Berechne die Nullstellen von f exakt und auf Tausendstel gerundet.



Lösung: (a) $f(x) = -\frac{1}{4}(x-5)^2 + 6$

(b) $f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-5)^2 = 24, \quad x_1 = 5 - \sqrt{24} \approx 0{,}101, \quad x_2 = 5 + \sqrt{24} \approx 9{,}899$

6. Wir betrachten die quadratische Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2}$$

(a) Ermittle die Gleichung von f in der Scheitelform und gib die Scheitelkoordinaten an.

(b) Berechne die Nullstellen von f und schreibe die Gleichung von f in der faktorisierten Form hin.

(c) Zeichne den Grafen von f in der Einheit 1 cm.

Lösung:

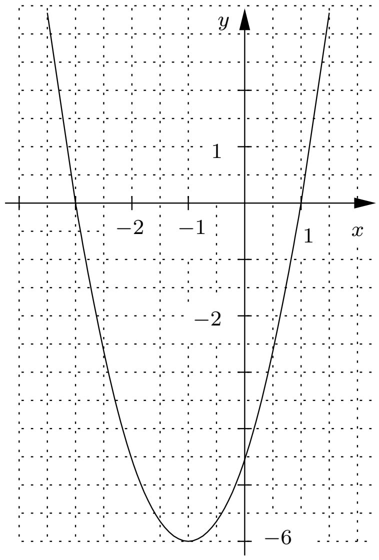
(a) $f(x) = \frac{3}{2}\left[x^2 + 2x + 1 - 1\right] - \frac{9}{2}$

$f(x) = \frac{3}{2}(x+1)^2 - 6 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{S}(-1| -6)$

(b) $f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x+1)^2 = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$

$x = -1 \pm 2 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 1$

$f(x) = \frac{3}{2}(x+3)(x-1)$



7. **Die Fehmarnsundbrücke - der größte Kleiderbügel der Welt**

Die Fehmarnsundbrücke verbindet die Insel Fehmarn mit dem deutschen Festland. Technische Angaben:

Brückenlänge insgesamt: 963,4 m

Scheitelhöhe des Bogens über dem Meeresspiegel: 68 m

Durchfahrtshöhe für Schiffe: 23 m

Spannweite des Bogens: 248 m

Höhe des Bogens über der Fahrbahn: 45 m

Der Brückenbogen hat die Form einer Parabel. Bestimme eine Funktionsgleichung, die den Brückenbogen beschreibt.

Quelle: Werner Blum u. a. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret, Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen; mit CD-Rom / IQB, Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (www.IQB.hu-berlin.de), 1. Auflage, Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor, 2006

Lösung: Z. B.: Scheitelpunkt der Parabel auf $(0|45)$, weiter liegen dann die Punkte $(124|0)$ und $(-124|0)$ auf der Parabel $\Rightarrow y = -0,003x^2 + 45$

8. Betrachte die beiden linearen Funktionen $f(x) = x + 2$ und $g(x) = x - 3$ und die quadratische Funktion $p(x) = f(x) \cdot g(x)$
   (a) Zeichne die Graphen der Funktionen in ein Koordinatensystem.
   (b) Welche Zusammenhänge zwischen den Graphen gibt es?

Lösung: Z. B.:

Die Geraden G_f und G_g sind parallel.

Nullstellen der Parabel G_p sind die Nullstellen der Geraden G_f und G_g.

y-Wert zu einem x-Wert von h erhält mann, indem man die y-Werte von f und g multipliziert.

9. Betrachte die Gerade $g(x) = 4x - 1$ und die Parabel $p(x)y = x^2 - 2x + 5$.
   (a) Für welche Werte von x ist die Differenz der Funktionswerte von $g(x)$ und $p(x)$ am kleinsten?
   (b) Wie verändert sich das Ergebnis, wenn man den Graphen von $g(x)$ um a in y-Richtung verschiebt?
   (c) Wie verändert sich das Ergebnis, wenn man den Graphen von $g(x)$ um b in x-Richtung verschiebt?

Lösung: (a) Z. B.: $g(x) - p(x) = (x - 3)^2 - 3 \Rightarrow$ Differenz am kleinsten für $x = 3$
(b) Verschiebung um $a \Rightarrow g(x) - p(x) = (x - 3)^2 - 3 + a \Rightarrow$ Differenz am kleinsten für $x = 3$; Differenz der Funktionswerte verändert sich: g(3)-p(3)=-3+a
(c) Differenz am kleinsten für $x = 3$; Differenz der Funktionswerte verändert sich: g(3)-p(3)=-3+4b

10. **Lagebeziehungen von Parabeln**

    Betrachtet die Parabel $p(x) = 0,5x^2 - 3$ und die Gerade $g(x) = 0,5x + 2$.
   (a) Zeichne die Parabel $p(x)$ und die Gerade $g(x)$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.
   (b) Gib die Gleichung einer anderen Gerade an, die die Parabel p ebenfalls in zwei Punkten schneidet und parallel zu g ist. Gib jeweils die Gleichung einer Geraden an, die die Parabel p in keinem bzw. in genau einem Punkt schneidet und parallel zu p ist.
   (c) Gib den Funktionsterm einer Parabel an, die vollständig oberhalb der Parabel p verläuft.
   (d) Entscheide in jedem Fall, ob die Aussage wahr oder falsch ist:
      - Eine Parabel, die nach unten geöffnet ist und deren Scheitel unterhalb des Scheitels von p liegt, hat sicher keinen Schnittpunkt mit p.
      - Eine Parabel, die nach oben geöffnet ist und eine größere Öffnungsweite als p hat, hat sicher einen Schnittpunkt mit p.
      - Eine Parabel, die die gleiche Öffnungsweite hat wie p und nach unten geöffnet ist, kann Schnittpunkte mit p besitzen, muss aber nicht.

Lösung: (a) .

(b) Z. B.: zwei Punkten $g(x) = 0,5x + 3$, kein Punkt $g(x) = 0,5x - 5$, genau ein Punkt $g(x) = 0,5x - 3$

(c) Z. B.: $y = 0,5x^2$ oder $y = x^2 + 7$

(d) wahr, falsch, wahr

11. Parabel als Ortskurve

(a) Zeichne die Parabel $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ in ein Koordinatensystem

(b) Berechne den Abstand von fünf Punkten der Parabel vom Punkt $A(0|1)$. Was fällt auf? Interpretiere die Vermutung aus (b) geometrisch.

(c) Berechne allgemein den Abstand eines Punktes der Parabel $p(x)$ vom Punkt A und zeige die Vermutung aus (b).

Lösung: (a) .

(b) Z. B. $P_1(0|\frac{1}{2}) : \overline{P_1A} = \frac{1}{2}$
$P_2(1|1) : \overline{P_2A} = 1$
$P_3(2|2\frac{1}{2}) : \overline{P_3A} = \sqrt{2^2 + \frac{3}{2}^2} = 2\frac{1}{2}$
$P_4(-2|2\frac{1}{2}) : \overline{P_4A} = \sqrt{(-2)^2 + \frac{3}{2}^2} = 2\frac{1}{2}$
$P_5(4|8\frac{1}{2}) : \overline{P_5A} = \sqrt{4^2 + (7\frac{1}{2})^2} = 8\frac{1}{2}$
Vermutung: Der Abstand ist die y-Koordinate von P_i. Die Punkte der Parabel haben von A und von der x-Achse gleichen Abstand

(c) $P(x|y)$; $\overline{PA}^2 = x^2 + (y-1)^2 = x^2 - 2y + 1 + y^2$;
$d = y$: Abstand des Punktes P von der x-Achse Bedingung für gleichen Abstand von A und der x-Achse: $y^2 = x^2 - 2y + 1 + y^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

12. **Graphen und Schnittpunkte gesucht**
Bestimme für folgende Funktionen die Definitionsmengen. Skizziere die Graphen und berechne die Koordinaten der Schnittpunkte.

(a) $a_1(x) = x^2 - 1$, $a_2(x) = (x-1)^2$

(b) $b_1(x) = \frac{1}{x-1}$, $b_2(x) = (x-1)^2$

(c) $c_1(x) = \frac{2}{x-1}$, $c_2(x) = \frac{1}{x+3} + 2$

(d) $d_1(x) = (x-3)(x+1)$, $d_2(x) = -2x + 6$

Lösung: (a) $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$, $A(1|0)$

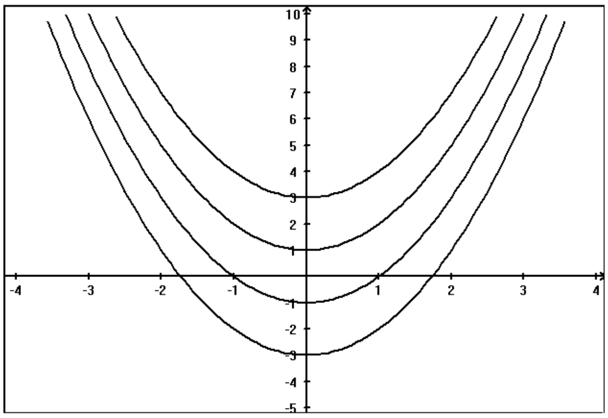
(b) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $D_2 = \mathbb{R}$, $B(2|1)$

(c) $D_1 = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $D_2 = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$, $C_1(\frac{1}{4}(-3+\sqrt{104})|\frac{8}{-7+\sqrt{104}})$, $C_2(\frac{1}{4}(-3-\sqrt{104})|\frac{8}{-7-\sqrt{104}})$

(d) $D_1 = \mathbb{R}$, $D_2 = \mathbb{R}$, $D_1(3|0)$, $D_2(-3|12)$

13. (a) Zeichne folgende Parabeln mit einem Funktionsplotprogramm:
    $p_1(x) = x^2 - 3$, $p_2(x) = x^2 - 1$, $p_3(x) = x^2 + 1$, $p_4(x) = x^2 + 3$
    (b) Wie entstehen die jeweiligen Parabeln aus der Normalparabel?
    (c) Wo liegt der Scheitel der Parabel $p(x) = x^2 + c$?
    (d) Auf welcher Kurve wandert der Scheitel der Parabeln, wenn man c verändert?

Lösung: (a) .



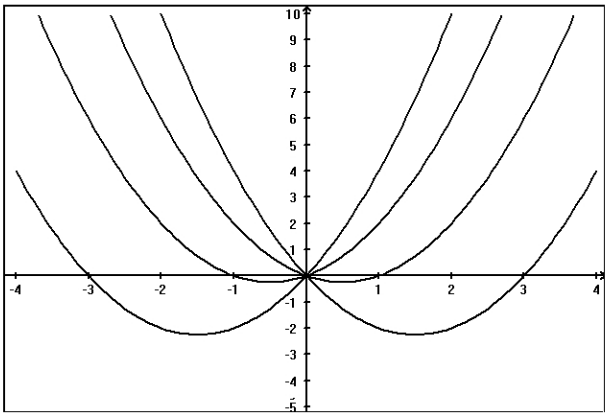
(b) Verschiebung entlang der y-Achse um -3, -1, 1, 3

(c) $S(0|c)$

(d) Der Scheitel wandert auf der y-Achse.

14. (a) Zeichne folgende Parabeln mit einem Funktionsplotprogramm:
    $p_1(x) = x^2 - 3x$, $p_2(x) = x^2 - 1x$, $p_3(x) = x^2 + 1x$, $p_4(x) = x^2 + 3x$
    (b) Wie entstehen die jeweiligen Parabeln aus der Normalparabel?
    (c) Wo liegt der Scheitel der Parabel $p(x) = x^2 + bx$?
    (d) Auf welcher Kurve wandert der Scheitel der Parabeln, wenn man b verändert?

Lösung: (a) .



.

(b) Verschiebung entlang der x-Achse um $1,5$; $0,5$; $-0,5$; $-1,5$

(c) $S(-\frac{b}{2}|-\frac{b^2}{4})$

(d) $x = -\frac{b}{2} \Rightarrow b = -2x$; $y = -\frac{b^2}{4} = -\frac{(-2x)^2}{4} = -x^2$. Der Scheitel wandert auf der Parabel $s(x) = -x^2$

15. (a) Zeichne folgende Parabeln mit einem Funktionsplotprogramm:

i. $p_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$, $p_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$, $p_3(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1x$, $p_4(x) = \frac{1}{2}x^2x$, $p_5(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1x$, $p_6(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$, $p_7(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x$

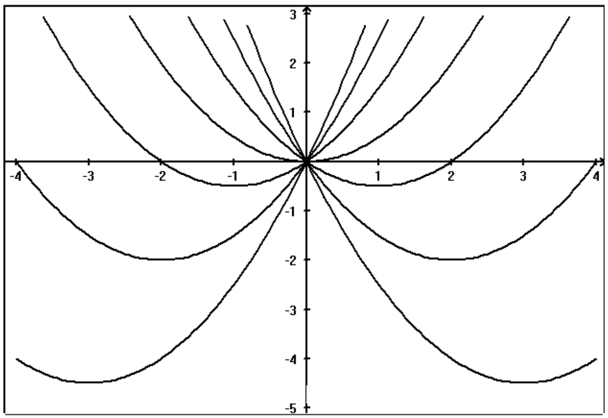
ii. $p_8(x) = 3x^2 + 2x$, $p_9(x) = 2x^2 + 2x$, $p_{10}(x) = 1x^2 + 2x$, $p_{11}(x) = 2x$, $p_{12}(x) = -1x^2 + 2x$, $p_{13}(x) = -2x^2 + 2x$, $p_{14}(x) = -3x^2 + 2x$

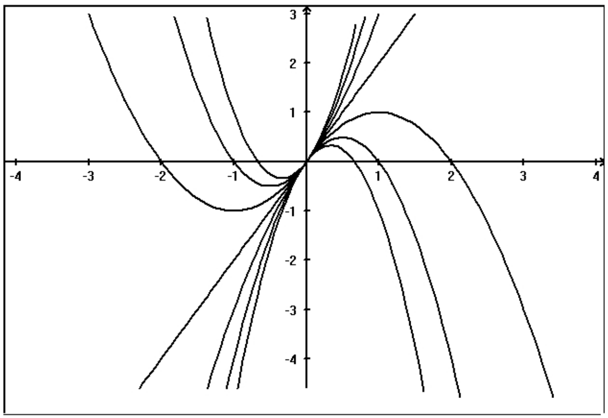
(b) Wo liegt der Scheitel der Parabel $p(x) = ax^2 + bx$?

(c) Auf welcher Kurve wandert der Scheitel der Parabeln, wenn man b verändert?

(d) Auf welcher Kurve wandert der Scheitel der Parabeln, wenn man a verändert?

Lösung: (a) .





(b) $S(-\frac{b}{2a}|-\frac{b^2}{4a})$

(c) Der Scheitel wandert auf der Parabel $s_a(x) = -ax^2$

(d) Der Scheitel wandert auf der Gerade $s_b(x) = \frac{b}{2}x$

16. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = x^2 - 9$ und der Definitionsmenge $\mathbb{R}$. Entscheide, ob folgende Aussagen über den Graphen von f jeweils richtig oder falsch sind.

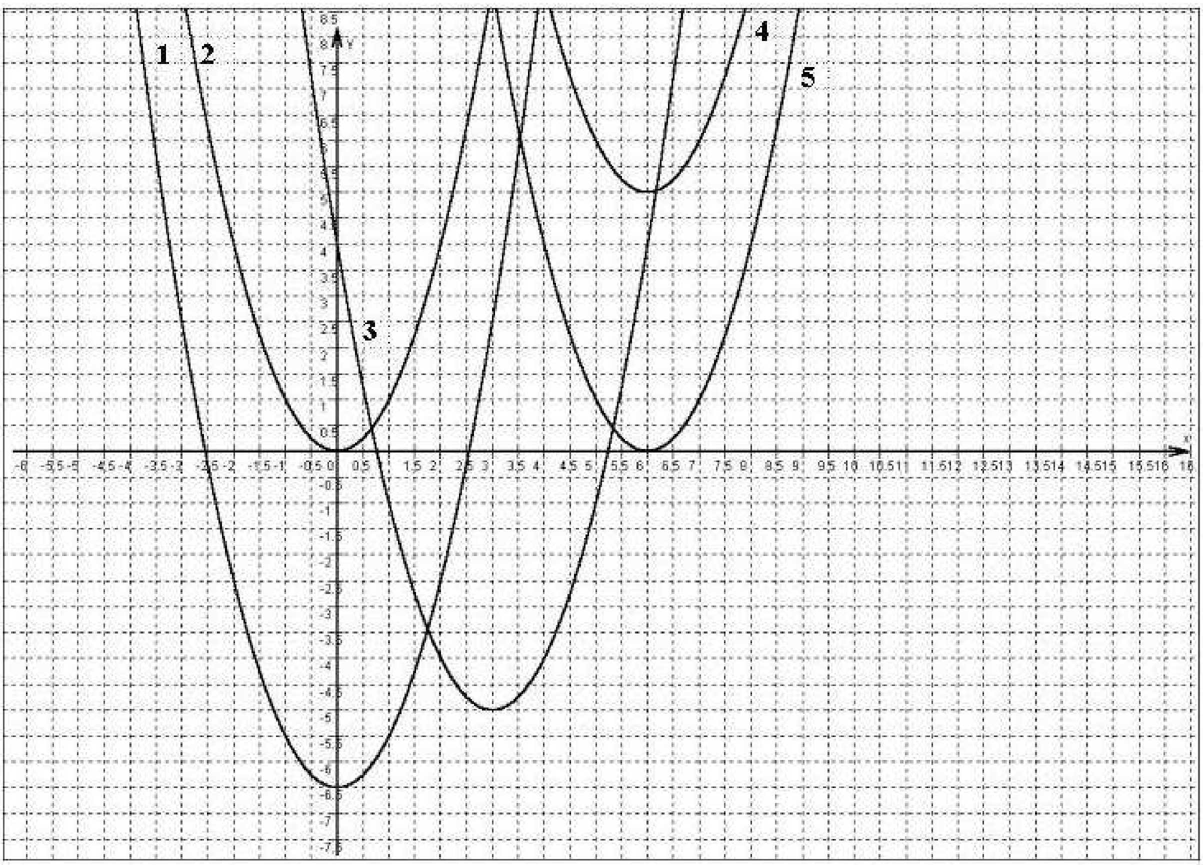
	richtig	falsch
Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt. (0|9)	[ ]	[ ]
Der Punkt (4|6) liegt auf dem Graphen.	[ ]	[ ]
Für $x \in]-3;3[$ verläuft der Graph unterhalb der x-Achse.	[ ]	[ ]
Der Graph ist zur y-Achse symmetrisch.	[ ]	[ ]

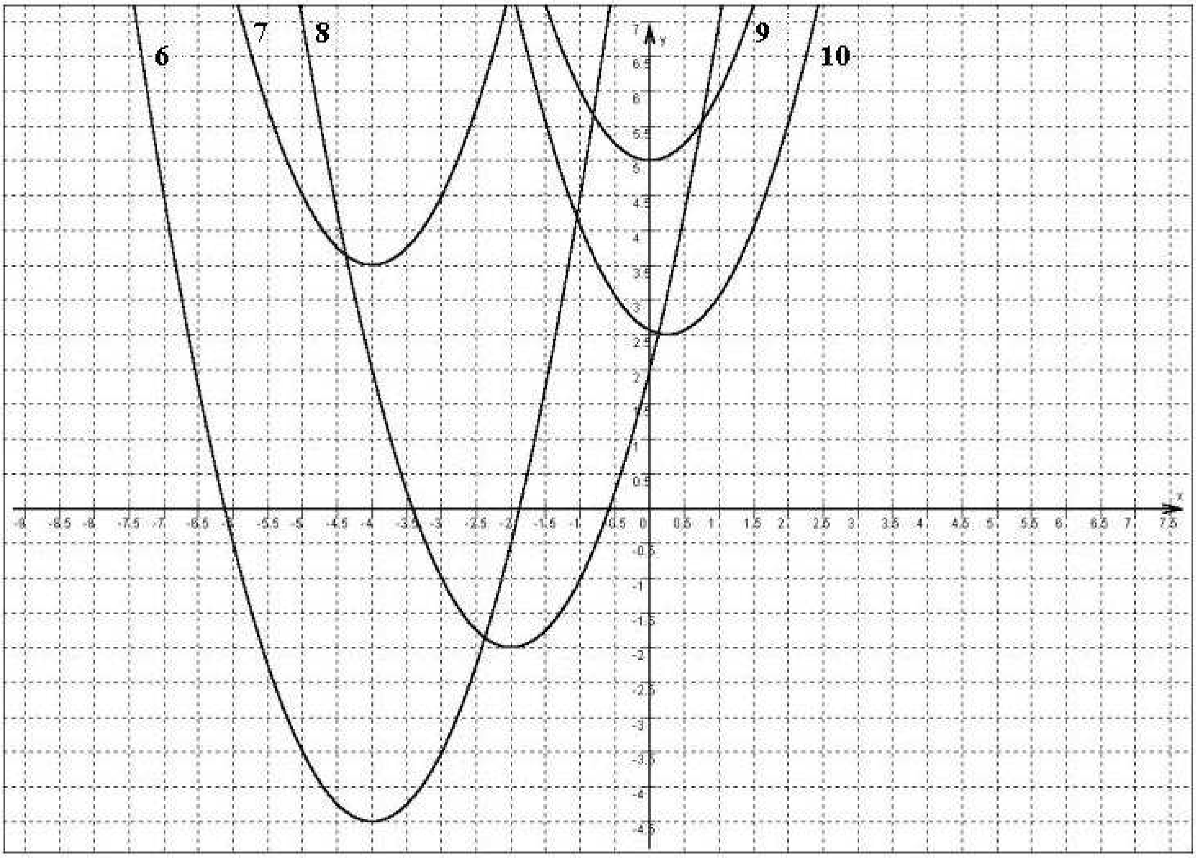
Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 10 der Gymnasien 2005

Lösung: falsch, falsch, richtig, richtig

17. **Zusammenhang zwischen Funktionsterm und Graph**

Finde die Funktionsgleichungen $f_1(x); f_2(x); \ldots; f_{10}(x)$ zu den gezeichneten Parabeln $1 - 10$.



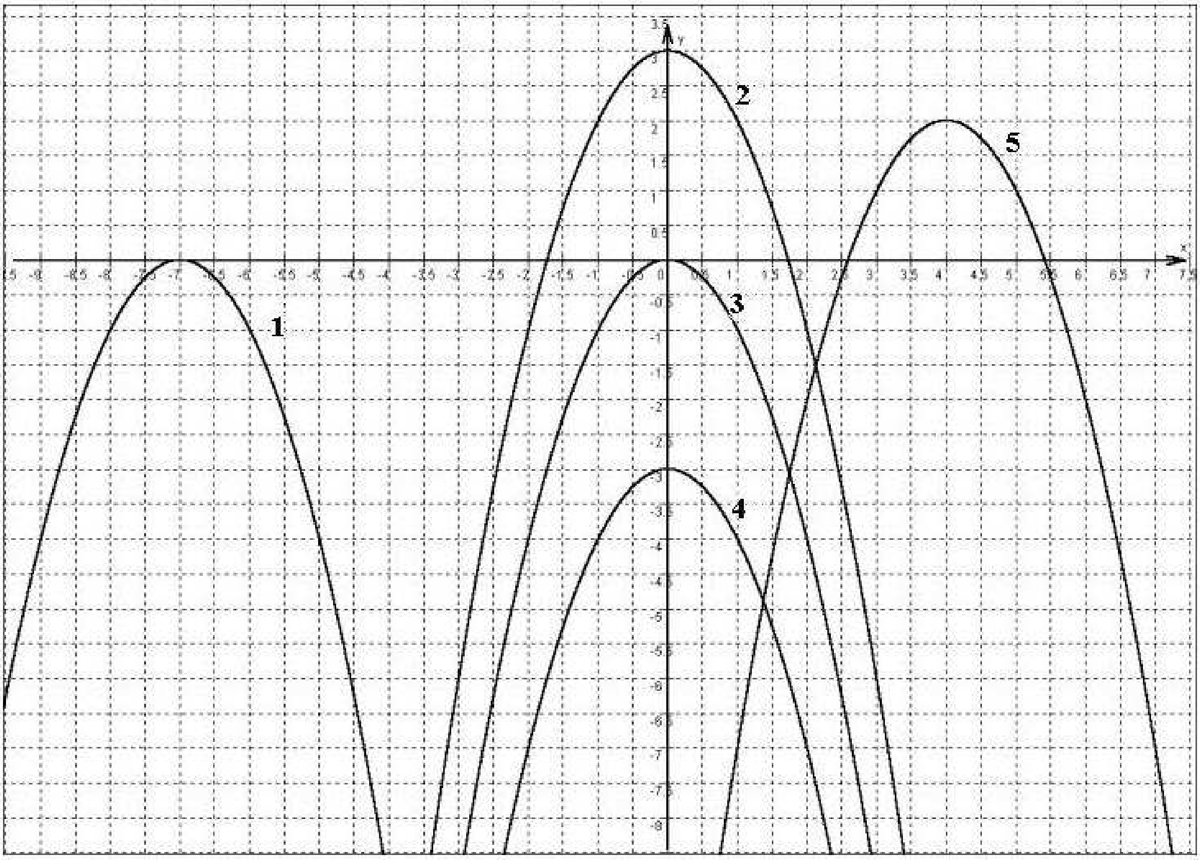


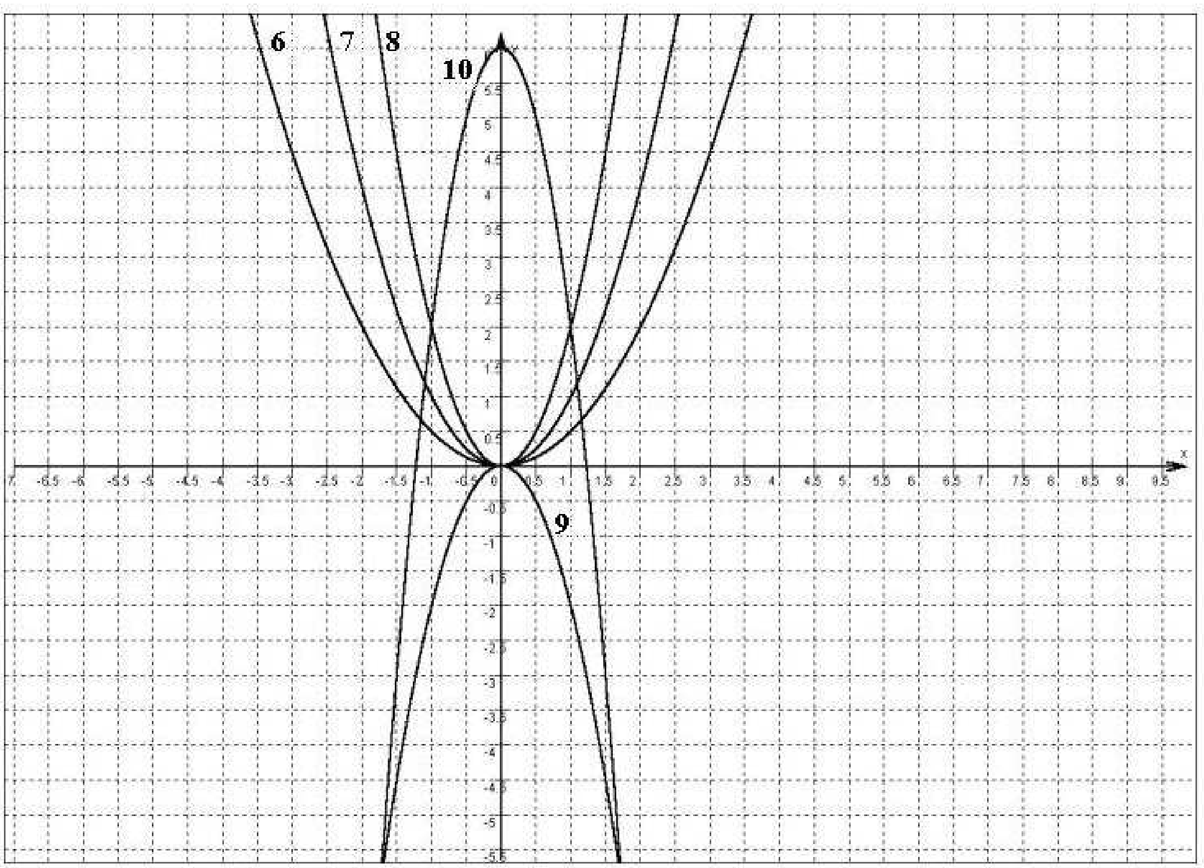
Lösung:

1. $f(x) = x^2 - 6,5$
2. $f(x) = x^2$
3. $f(x) = (x-3)^2 - 5$
4. $f(x) = (x-6)^2 + 5$
5. $f(x) = (x-6)^2$
6. $f(x) = (x+4)^2 - 4,5$
7. $f(x) = (x+4)^2 + 3,5$
8. $f(x) = (x+2)^2 - 2$
9. $f(x) = x^2 + 5$
10. $f(x) = (x - \frac{1}{4})^2 + 2,5$

18. **Zusammenhang zwischen Funktionsterm und Graph**

    Finde die Funktionsgleichungen $f_1(x); f_2(x); \ldots; f_{10}(x)$ zu den gezeichneten Parabeln $1 - 10$.


1
2
3
4
5

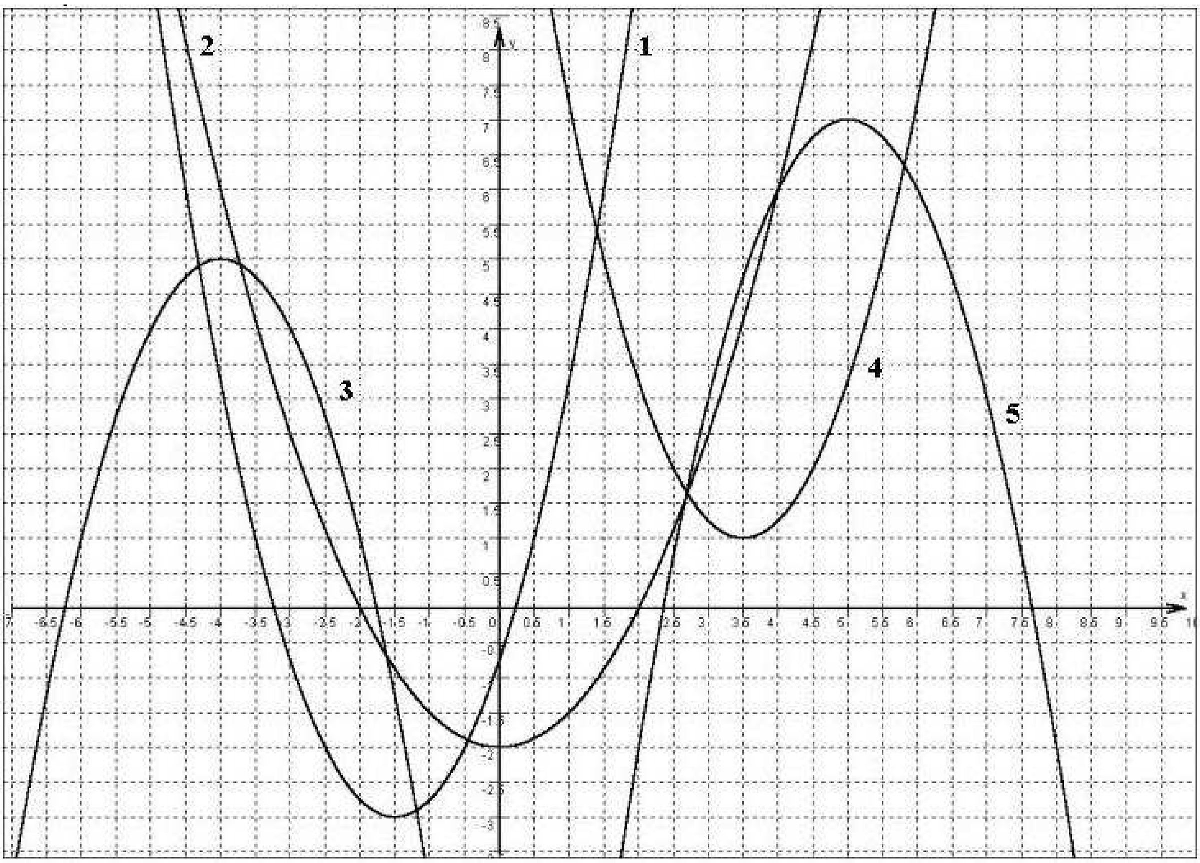


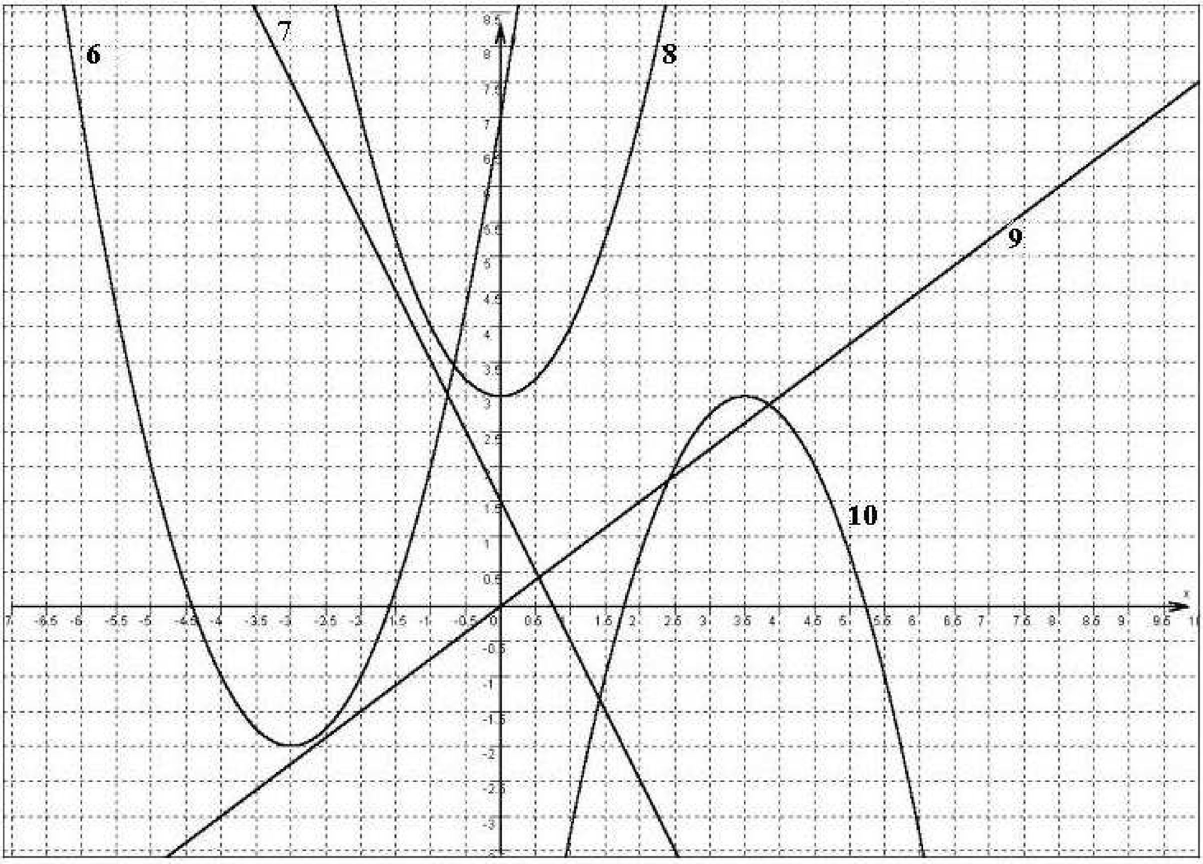
Lösung:

1. $f(x) = -(x+7)^2$
2. $f(x) = -x^2 + 3$
3. $f(x) = -x^2$
4. $f(x) = -x^2 - 3$
5. $f(x) = -(x-4)^2 + 2$
6. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
7. $f(x) = x^2$
8. $f(x) = 2x^2$
9. $f(x) = -2x^2$
10. $f(x) = -4x^2 + 6$

19. **Zusammenhang zwischen Funktionsterm und Graph**

    Finde die Funktionsgleichungen $f_1(x); f_2(x); \ldots; f_{10}(x)$ zu den gezeichneten Parabeln $1 - 10$.

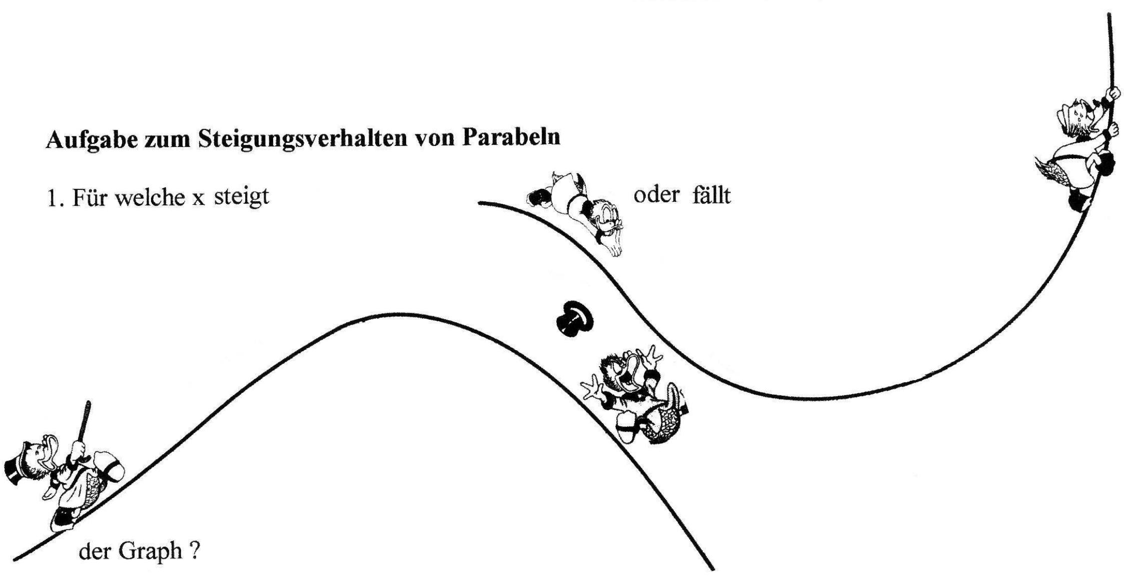

1
2
3
4
5
x
y



Lösung:

1. $f(x) = (x + 1,5)^2 - 3$
2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$
3. $f(x) = -(x + 4)^2 + 5$
4. $f(x) = (x - 3,5)^2 + 1$
5. $f(x) = -(x - 5)^2 + 7$
6. $f(x) = (x + 3)^2 - 2$
7. $f(x) = -2x + 1,5$
8. $f(x) = x^2 + 3$
9. $f(x) = \frac{3}{4}x$
10. $f(x) = -(x - 3,5)^2 + 3$

20. **Steigungsverhalten quadratischer Funktionen**



(a)

Beschreibung der Funktion	**fällt**	**steigt**
(a) $f(x) = x^2$		
(a) $f(x) = x^2$		
(b) $f(x) = x^2 + 2$		
(c) $f(x) = (x-3)^2$		
(d) $f(x) = (x-3)^2 + 1$		
(e) $f(x) = x^2 + 2x - 8$		
(f) Hochpunkt der Parabel: $H(7\|4,5)$		
(g) Tiefpunkt der Parabel: $T(-2,5\|3)$		
(h) Schnittpunkte mit der 1.Achse: $S_1(-2\|0)$ und $S_2(10\|0)$		
(i)		
(j)		

(b) Gib mehrere Funktionsgleichungen an, für die folgende Aussagen zutreffen:

Steigungsverhalten	**Funktionsgleichungen**
(a) Der Graph fällt für $x < -4$ und steigt für $x > -4$	
(b) Der Graph steigt für $x < 2$ und fällt für $x > 2$	
(c)	

Lösung: (a) jeweils nur Bereich in dem der Graph fällt:

(a) $x \leq 0$

(b) $x \leq 0$

(c) $x \leq 3$

(d) $x \leq 3$

(e) $x \leq -1$

(f) $x \geq 7$

(g) $x \leq -2,5$

(h) $x \leq 4$ oder $x \geq 4$

(b) (a) z.B. $f(x) = (x+4)^2 + c$

(b) z.B. $f(x) = -(x-2)^2 + c$

21. **Quadratische Funktionen und deren Graphen (Parabeln)**

Funktionsgleichung	Lage des Scheitelpunktes	Steigungsverhalten: Die Parabel…		Verschiebung der Normalparabel
		…fällt	…steigt	
$f(x) = x^2$	$T(0\|0)$	für $x < 0$	für $x > 0$	keine
$f(x) = x^2 + 1$				
$f(x) = x^2 - 2$				
$f(x) = (x+2)^2$				
$f(x) = (x-3)^2$				
$f(x) = (x-2)^2 + 1$				
$f(x) = (x-3)^2 - 2$				
$f(x) = (x+4)^2 + 3$				
	$T(1\|3)$			
	$T(-2\|-5)$			
		$x < 2$	$x > 2$	
				um 2 nach links und um 3 nach unten
$f(x) = x^2 + 6x + 9$				
$f(x) = x^2 - 3x + 2,25$				
$f(x) = x^2 - 4x - 5$				
$f(x) = x^2 + 6x + 5$				
	$H(0\|0)$			
		$x > 1$	$x < 1$	

Lösung:

22. **Quadratische Funktionen und deren Graphen (Parabeln)**

Funktionsgleichung	Lage des Scheitelpunktes	Steigungsverhalten: Die Parabel…		Verschiebung der Normalparabel
		…fällt	…steigt	
$f(x) = -x^2$	$H(0\|0)$	für $x > 0$	für $x < 0$	Spiegelung an der 1.Achse
$f(x) = -(x^2 + 1)$				
$f(x) = -x^2 + 1$				
$f(x) = -(x - 2)^2$				
$f(x) = -(x + 3)^2$				
$f(x) = -(x - 2)^2 + 1$				
$f(x) = -((x - 3)^2 - 2)$				
	$H(1\| - 2)$			
	$T(1\| - 2)$			
	$T(-2\| - 5)$			
		$x > 2$	$x < 2$	
				an der 1.Achse gespiegelt, um 4 nach rechts verschoben
				um 2 nach links verschoben, an der 1.Achse gespiegelt
				an der 1. Achse gespiegelt, um 3 nach unten verschoben
				um $2,5$ nach unten verschoben, an der 1. Achse gespiegelt

Lösung:

23. **Silbenrätsel für Mathe Profis**

In dem folgenden Text über lineare und quadratische Funktionen sind einige wichtige Begriffe verlorengegangen. Glücklicherweise sind die Silben der fehlenden Wörter bekannt. Viel Spaß beim Ausfüllen!
a - bel - bel - ben - de - dra - ga - ge - ge - gen - gung - le - ler - li - mal - ne - ne - nor - null - o - pa - pa - po - punkt - qua - ra - ra - ra - re - recht - sche - schei - si - stei - stei - stel - tan - te - tel - ten - ti - tiv - tiv - un - waa

Bei den folgenden Sätzen geht es stets um eine Funktion f mit $f(x) = mx + b$.

(a) Eine solche Funktion heißt eine .... Funktion.

(b) Der Graph einer solchen Funktion ersten Grades ist eine ....

(c) Den x-Wert des Schnittpunktes eines Graphen mit der x-Achse nennt man ....

(d) Die Konstante m in der Funktionsgleichung $f(x) = mx+b$ gibt die .... des Graphen an.

(e) Wenn der Funktionsgraph von links nach rechts fallend verläuft, dann ist m ....

(f) Je größer der Betrag von m ist, desto .... verläuft der Funktionsgraph.

(g) Wenn $m = 0$ ist, dann verläuft der Funktionsgraph ....

Bei den folgenden Sätzen geht es stets um eine Funktion g mit $g(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.

(h) Eine solche Funktion heißt eine .... Funktion.

(i) Der Graph einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades ist eine ....
Der höchste bzw. tiefste Punkt eines solchen Funktionsgraphen heißt ....

(j) Wenn $a_2 < 0$ ist, ist der Funktionsgraph nach .... geöffnet.

(k) Wenn $a_2 > 0$ ist, ist der Funktionsgraph nach .... geöffnet.

(l) Wenn $a_2 = 1$ und $a_1 = a_0 = 0$ sind, nennt man den Graphen dieser Funktion eine ....

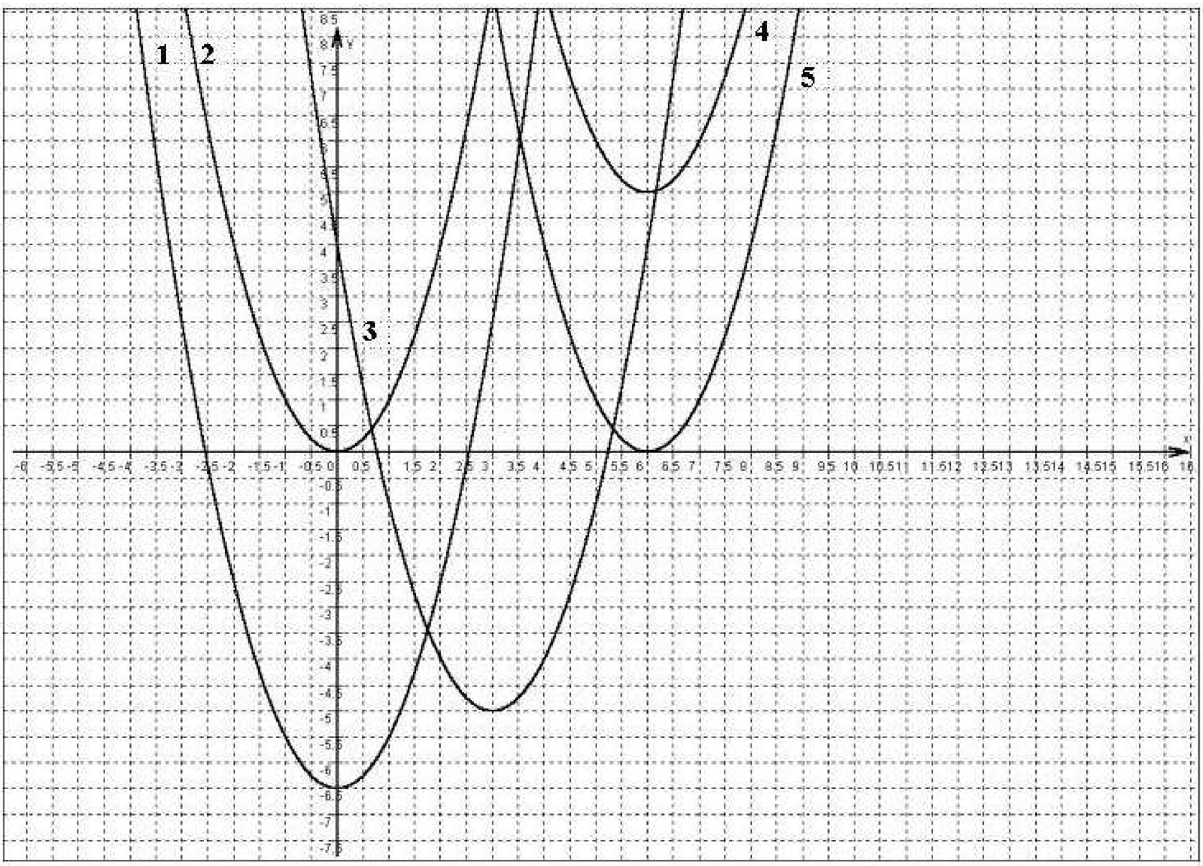
(m) Eine quadratische Funktion besitzt keine Nullstelle, wenn der Scheitelpunkt oberhalb der x-Achse liegt und a_2 .... ist.

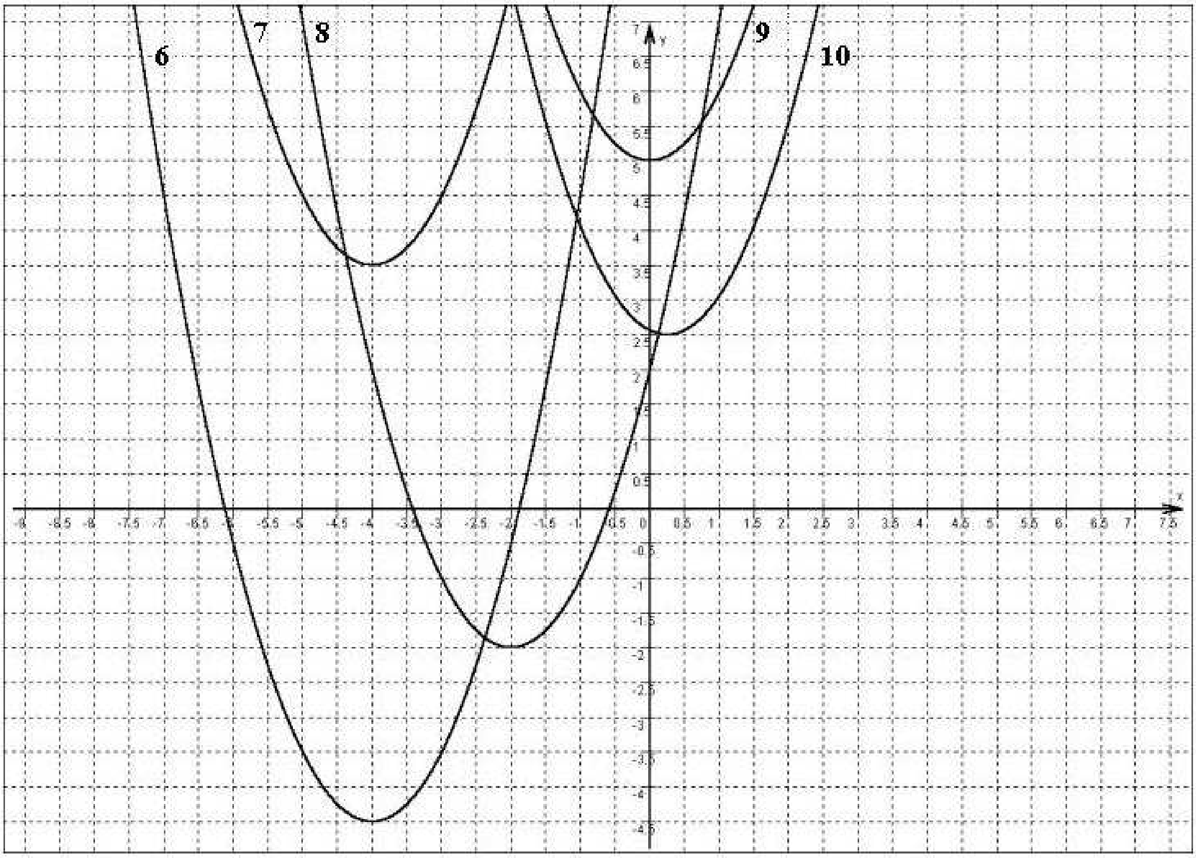
(n) Erhält man bei der Berechnung der Schnittpunkte einer linearen Funktion und einer Parabel nur einen einzigen Schnittpunkt, so ist die Gerade in diesem Punkt eine .... der Parabel.

Lösung:

24. **Zusammenhang zwischen Funktionsterm und Graph**

Finde die Funktionsgleichungen $f_1(x); f_2(x); \ldots; f_{10}(x)$ zu den gezeichneten Parabeln $1 - 10$.


1
2
3
4
5



Lösung:

1. $f(x) = x^2 - 6,5$
2. $f(x) = x^2$
3. $f(x) = (x-3)^2 - 5$
4. $f(x) = (x-6)^2 + 5$
5. $f(x) = (x-6)^2$
6. $f(x) = (x+4)^2 - 4,5$
7. $f(x) = (x+4)^2 + 3,5$
8. $f(x) = (x+2)^2 - 2$
9. $f(x) = x^2 + 5$
10. $f(x) = (x - \frac{1}{4})^2 + 2,5$

25. **Anwendungen der quadratischen Funktionen und Gleichungen**

Der Brückenbogen der Fuldabrücke bei Guntershausen (Fig. 2) hat ebenfalls die Form einer Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$.

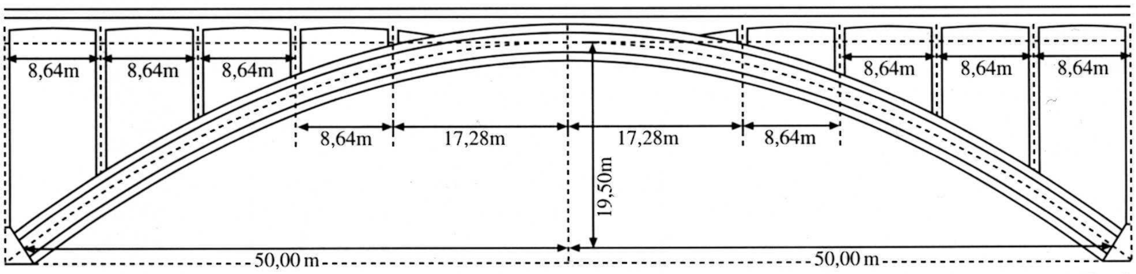


Fig. 2

Bestimme a und berechne die fehlenden Pfeilerhöhen.

Lösung:

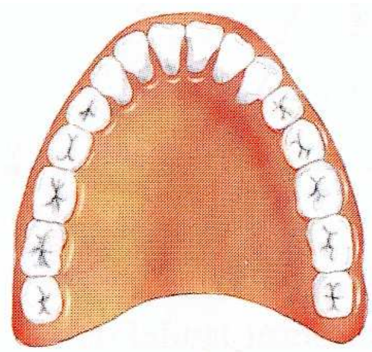
26. **Anwendungen der quadratischen Funktionen und Gleichungen**

Eine Normalparabel wird um 1 nach links, um 4 nach oben verschoben, dann an der 1. Achse gespiegelt und schließlich parallel zur 2. Achse mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ gestreckt. Zeichne schrittweise den Graphen, gib Lage und Art des Scheitels an.

Lösung: $y = \frac{1}{2}(x + 1)^2 + 4$

27. **Anwendungen der quadratischen Funktionen und Gleichungen**

Ein regelmäßiges Gebiss hat näherungsweise die Form einer Parabel. Versuche für das rechts abgebildete eine Funktion zu finden, die die ungefähre Lage der Zähne beschreibt.



Lösung: $y = -1,04x^2$

28. **Anwendungen der quadratischen Funktionen und Gleichungen**

Beim Schießen einer Kugel senkrecht nach oben wird die Zuordnung Zeit t nach Abschuss (in s) $\rightarrow$ Höhe h über der Abschussstelle (in m) durch die Gleichung $h = 51,2t - 5t^2$ beschrieben.

(a) In welcher Höhe befindet sich die Kugel nach 4 Sekunden? Wann erreicht sie die gleiche Höhe beim Zurückfallen?

(b) Nach welcher Zeit erreicht die Kugel ihren höchsten Punkt? In welcher Höhe befindet sie sich dann?

(c) Zu welchen Zeiten beträgt die Höhe 50 m?

Lösung: (a) 124 m

(b) $5,12\,\mathrm{s}$; $131,4\,\mathrm{m}$

(c) $1,1\,\mathrm{s}$ und $9,4\,\mathrm{s}$

29. **Multiple-Choice-Test zu quadratischen Gleichungen und Funktionen**

Kreuze alle richtigen Aussagen an. Je Teilaufgabe können keine bis alle Aussagen richtig sein.

(a) Eine Gleichung der Form $x^2 = e$ hat

i. keine Lösung für $e < 0$

ii. keine Lösung für $e = 0$

iii. zwei Lösungen für $e > 0$

iv. eine einzige Lösung für $e \neq 0$

v. mindestens eine Lösung

vi. nie die Lösung 0

(b) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 4x - 1$

i. ist nach oben geöffnet

ii. geht durch den Ursprung

iii. schneidet die erste Achse zwei Mal

iv. ist symmetrisch zur 2. Achse

v. hat seinen Scheitel bei $(11|-6)$

vi. hat ein Maximum

(c) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = (x-2)^2 - 3$

i. ist eine verschobene Normalparabel

ii. hat seinen Scheitel bei $(2|-3)$

iii. geht durch den Punkt $(-10|-15)$

iv. geht nicht durch den Ursprung

v. ist identisch mit $g(x) = x^2 + 4x - 1$

vi. hat kein Maximum

(d) Die Nullstellen jeder quadratischen Funktion mit zwei Nullstellen

i. sind symmetrisch zur ersten Achse

ii. sind symmetrisch zur zweiten Achse

iii. liegen vom Scheitelpunkt gleich weit entfernt

iv. lassen sich durch zwei Bruchzahlen angeben

v. lassen sich durch zwei reelle Zahlen angeben

(e) Die verschobene Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S(-2|1)$

i. hat den Funktionsterm $(x-2)^2-1$

ii. hat den Funktionsterm $(x+2)^2-1$

iii. hat den Funktionsterm $(x+2)^2+1$

iv. hat den Funktionsterm x^2+4x+5

v. hat den Funktionsterm $-x^2+x+5+3x+2x^2$

vi. hat den Funktionsterm $2x^2+8x+10$

(f) Der Scheitel einer verschobenen Normalparabel liegt auf der Parallelen zur y-Achse, die durch den Punkt $P(3|0)$ geht. Der Punkt $Q(7|18)$ liegt auch auf dieser Parabel. Welche der unten angegebenen Punkte liegen noch auf dieser Parabel?

i. $A(2|3)$

ii. $B(3|2)$

iii. $C(4|3)$

iv. $D(7|7)$

v. $F(-1|18)$

vi. $G(0|0)$

(g) Für jede quadratische Funktion f mit $f(x)=ax^2+bx+c$ und $a \neq 0$ gilt

i. ihr Graph ist nach unten geöffnet für alle $a<1$

ii. ihr Graph ist nach oben geöffnet für alle $a>1$

iii. ihr Graph ist eine Parabel

iv. sie hat genau einen Schnittpunkt mit der 2. Achse

v. ihre Symmetrieachse ist eine Parallele zur 1. Achse

vi. sie schneidet die 2. Achse bei c

(h) Welcher Funktionsterm gehört *nicht* zu einem der untenstehenden Graphen

i. x^2-5

ii. $(x+2)^2-3$

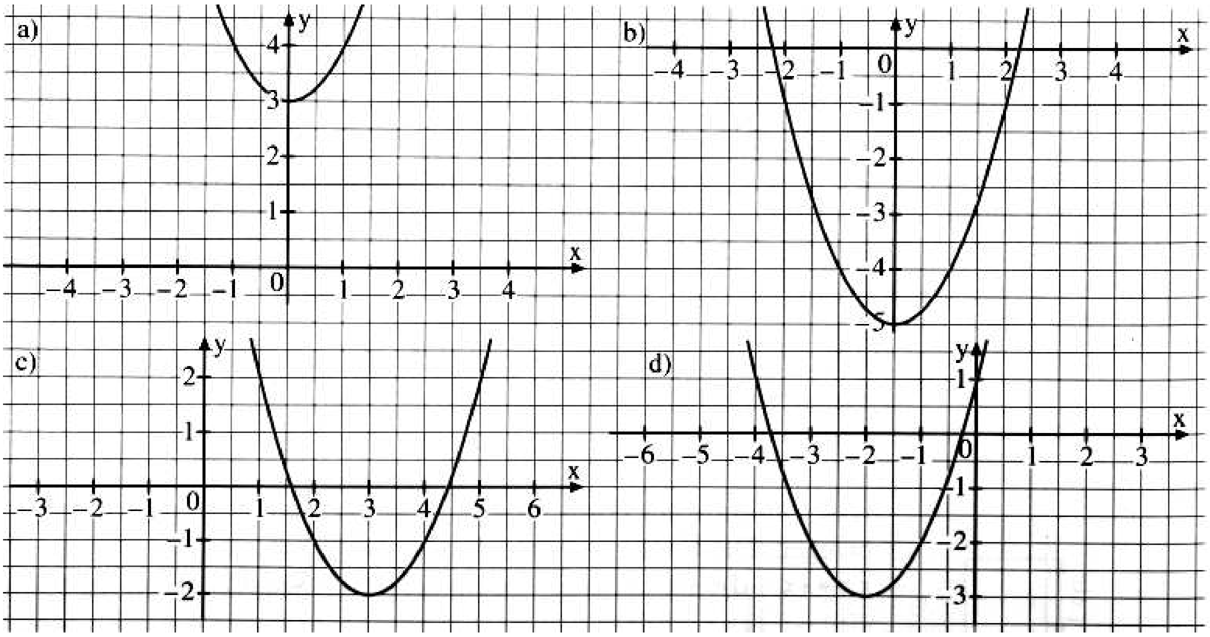
iii. x^2+3

iv. $x^2 - 6x + 7$

v. $x^2 - 5$

vi. $(x-3)^2 - 2$

vii. $x^2 + 4x + 1$

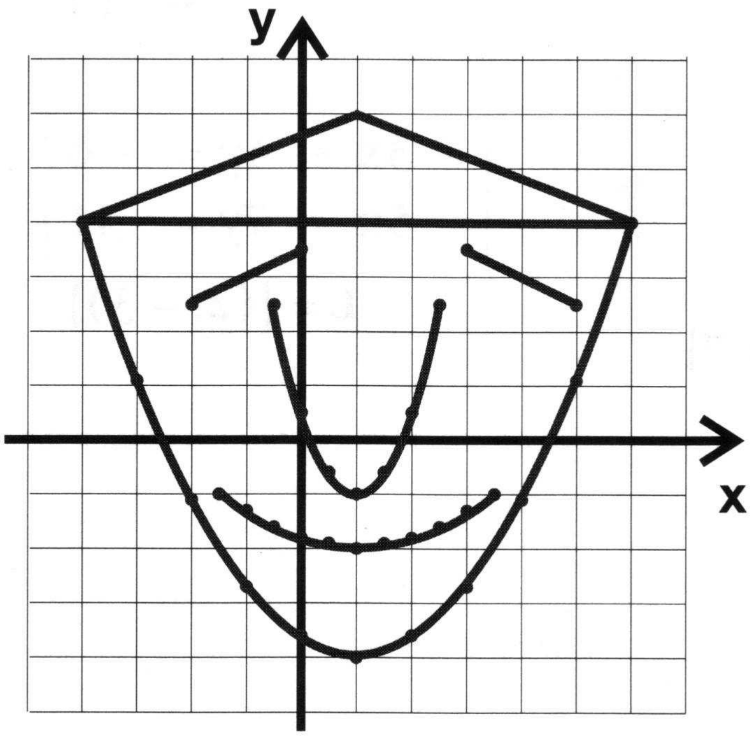


Lösung:

30. **Mit Graphen zeichnen**

Zeichne die Graphen der folgenden Funktionen im angegebenen Definitionsbereich:

$f_1(x) = 4$	$-4 \le x \le 6$
$f_2(x) = 6 - \frac{2}{5}\lvert x-1\rvert$	$-4 \le x \le 6$
$f_3(x) = -\frac{1}{2}x + 5$	$3 \le x \le 5$
$f_4(x) = \frac{1}{2}x + 3,5$	$-3 \le x \le -1$
$f_5(x) = \frac{1}{25}(4x^2 - 8x - 6)$	$-1,5 \le x \le 3,5$
$f_6(x) = \frac{1}{25}(8x^2 - 6x - 92)$	$-4 \le x \le 6$
$f_7(x) = \frac{1}{9}(14x^2 - 28x + 5)$	$-0,5 \le x \le 2,5$



Lösung:

31. Der Graph einer quadratischen Funktion ist kongruent zur Normalparabel und enthält die Punkte $A(-6|1)$ und $B(-1|1)$ eines kartesischen Koordinatensystems (Längeneinheit: 1 cm).
    (a) Fertige ohne größere Rechnung eine saubere Zeichnung der möglichen Graphen an! Beschreibe kurz dein Vorgehen!
    (b) Wie lauten die (möglichen) Funktionsgleichungen?

Lösung: (a): 2 mögliche Scheitelpunkte, welche auf der Mittelsenkrechten zur Strecke $[AB]$ liegen und von $M(-3,5|1)$ die Entfernung 6, 25 Längeneinheiten haben.

(b): $y = (x + 3,5)^2 - 5,25$; $\quad y = -(x + 3,5)^2 + 7,25$

32. In einem kartesischen Koordinatensystem hat der Graph einer quadratischen Funktion seinen Scheitel im Punkt $S(3|4)$ und enthält ferner die Punkte $A(1|3)$ und $B(5|3)$. Erstelle eine übersichtliche Zeichnung und gib die Funktionsgleichung an!

Lösung: $y = -\frac{1}{4} \cdot (x - 3)^2 + 4$

33. In einem kartesischen Koordinatensystem ist der Graph einer quadratischen Funktion symmetrisch zur Geraden $x = 4$ und schneidet die x-Achse im Punkt $(1|0)$. Erstelle

eine saubere Überlegungsskizze und gib die Funktionsgleichung in Abhängigkeit von der y-Koordinate y_S des Scheitelpunktes an!

Lösung: $y = -\frac{y_S}{9} \cdot (x-4)^2 + y_S$

34. In einem kartesischen Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) ist folgende Punktmenge mit Farbe sauber und eindeutig zu kennzeichnen:

$$\left\{ (x|y) \,\middle|\, -2 < x \leqq 8\,;\quad 0 \leqq y = \left|0,25 \cdot (x-3)^2 - 4\right| \ \wedge\ y \leqq 3 \right\}$$

Lösung:

Ausschließlich rechnerische Aufgaben

1. Ermittle den Funktionsterm, die Scheitelkoordinaten und die Nullstellen einer Parabel durch die Punkte A(0|11,5), B(10|31,5) und C(20|47,5).

Lösung: $f(x) = ax^2 + bx + c,$

$$\begin{aligned} \mathrm{A} \in f &\implies c = 11{,}5 \\ \mathrm{B} \in f &\implies 100a + 10b + 11{,}5 = 31{,}5 \implies 10a + b = 2 \\ \mathrm{C} \in f &\implies 400a + 20b + 11{,}5 = 47{,}5 \implies 20a + b = 1{,}8 \end{aligned}$$

$$\implies \quad a = -0{,}02, \quad b = 2{,}2 \quad \implies \quad f(x) = -0{,}02x^2 + 2{,}2x + 11{,}5$$

$$f(x) = -0{,}02(x^2 - 110x) + 11{,}5 = -0{,}02(x-55)^2 + 72 \quad \implies \quad \mathrm{S}(55|72)$$

$$f(x) = 0 \quad \implies \quad (x-55)^2 = 3600 \quad \implies \quad x = 55 \pm 60, \quad x_1 = -5, \quad x_2 = 115$$

2. Berechne die Schnittpunkte der Graphen folgender Funktionen
   (a) $a_1(x) = 5x^2 + 3x + 1$, $a_2(x) = 4x^2 + x$
   (b) $b_1(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - 2$, $b_2(x) = x^2 - \frac{1}{4}x + 2$
   (c) $c_1(x) = -2x^2 - x + 8$, $c_2(x) = 0,5x^2 - 0,25x - 0,5$
   (d) $d_1(x) = 2x^2 + \frac{17}{20}x + 12$, $d_2(x) = x^2 + 0,85x - 5$

Lösung: (a) $A(-1|3)$
(b) $B_1(2|5,5)$, $B_2(-4|19)$
(c) $C_1(-2|2)$, $C_2(1,7|0,52)$
(d) Die Graphen schneiden sich nicht.

3. Berechne die Schnittpunkte der Graphen folgender Funktionen
   (a) $a_1(x) = 2x + 0,7$, $a_2(x) = -5x + 12$

(b) $b_1(x) = 9x^2 + 26x - 100$, $b_2(x) = -10x + 89$

(c) $c_1(x) = x^2 + 2x + 1$, $c_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3$

(d) $d_1(x) = 2x - 3$, $d_2(x) = \frac{1}{x} + 2$

Lösung: (a) $A(1\frac{43}{70}|3\frac{13}{14})$

(b) $B_1(3|59)$, $B_2(-7|159)$

(c) Die Graphen schneiden sich nicht.

(d) $D_1(\frac{5+\sqrt{33}}{4}|\frac{\sqrt{33}-1}{2})$, $D_2(\frac{5-\sqrt{33}}{4}|\frac{-\sqrt{33}-1}{2})$

4. **Parabel gesucht**
   Berechne die Gleichung einer Parabel, von der folgendes bekannt ist.
   (a) Scheitel $S(1|-2)$, Punkt $A(0|3)$ liegt auf der Parabel
   (b) Punkte $B(-2|-3)$, $C(0|3)$ und $D(5|-5)$ liegen auf der Parabel
   (c) Parabel schneidet die x-Achse in den Punkte $N_1(3|0)$ und $N_2(1|0)$; Punkt $E(0|6)$ liegt auf der Parabel
   (d) Parabel berührt die x-Achse, Punkt $F(0|-2)$ liegt auf der Parabel
   (e) Parabel ist nach oben geöffnet und entsteht aus der Normalparabel durch Verschiebung um 2 nach rechts und 3 nach unten

Lösung: (a) $p_a(x) = 5(x-1)^2 - 2$

(b) $p_b(x) = \frac{1}{35}(-23x^2 + 59x + 105)$

(c) $p_c(x) = 2(x-1)(x-3)$

(d) unendlich viele Lösungen der Form $p_d(x) = a(x-b)^2; ab^2 = -2$

(e) $p_e(x) = (x-2)^2 - 3$

5. Bestimme die Scheitelpunktsform folgender Funktionen und gib jeweils die Koordinaten des Scheitels an:
   (a) $x \mapsto 3x^2 - 6x - 3$
   (b) $x \mapsto 2x^2 + 4x - 3$

Lösung: (a) $S(1|-6)$ (b) $S(-1|-5)$

6. Eine quadratische Funktion ($D = \mathbb{R}$) ist gegeben durch die Zuordnung:

$$x \longmapsto -1,5x^2 + 9x - 12$$

   Bestimme den Scheitel der zugehörigen Parabel und beschreibe die Parabel.

Lösung: $S(3|1,5)$; die Parabel ist nach unten geöffnet und schmaler als die Normalparabel

7. Von einer Parabel ist der Scheitel $S(2|3)$ gegeben sowie ein Punkt $A(3|0)$ auf der Parabel. Bestimme die zu dieser Parabel gehörende Funktionsgleichung!

Lösung: $y = -3x^2 + 12x - 9$

8. Der Graph einer Funktion $y = ax^2 + bx + c$ hat den Scheitel $S(10|-1)$ und geht durch den Punkt $P(9|2)$.
   (a) Bestimme a, b und c.
   (b) Der Graph wird nun an der x-Achse gespiegelt.
   Wie lautet die neue Funktionsgleichung?

Lösung: $a = 3$; $b = -60$; $c = 299$; $y = -3x^2 + 60x - 299$

9. Hat die Funktion $y = -0,8x^2 + 0,2x + 4$ einen größten oder kleinsten Funktionswert? Begründung! Bestimme diesen Wert und gib an, für welchen x-Wert sie ihn annimmt. In welchem Bereich (der x-Werte) steigt, in welchem fällt der Graph der Funktion?

Lösung: Maximum in $(0,125|4,0125)$; steigend für $x < 0,125$; fallend für $x > 0,125$

10. (a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 2x - 1$.

    Bestimme die Scheitelkoordinaten und beantworte folgende Fragen:
    Handelt es sich um ein Maximum oder ein Minimum?
    Ist der Graph enger oder weiter als die Normalparabel?
    In welchen Bereichen steigt bzw. fällt der Graph?

    (b) <u>Berechne</u> die Koordinaten des Schnittpunktes der Graphen der Funktionen $f_1(x) = 5x^2 - 4$ und $f_2(x) = 5x^2 - 10x + 2$.

    (c) Der Graph der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ hat den Scheitel $S(-2|9)$ und geht durch den Punkt $P(-7|-41)$. Berechne a, b und c!

Lösung: (a) $S(1,5|-2,5)$, Minimum, weiter, steigt für $x > 1,5$, fällt für $x < 1,5$
(b) $P(0,6|-2,2)$ (c) $f(x) = -2x^2 - 8x + 1$

11. (a) Der Graph der Funktion $x \mapsto ax^2 + bx + c$ berührt die x-Achse im Punkt $P(7|0)$ und geht durch den Punkt $Q(2|-75)$.
    Bestimme a, b und c und gib diese Funktion an!

(b) Gegeben ist die Funktion $f(x) = -1,5x^2 + 9x - 12$.
Bestimme die Koordinaten des Scheitels sowie die Bereiche auf der x-Achse, in denen die Funktion steigt bzw. fällt.

Lösung: (a) $f(x) = -3x^2 + 42x - 147$
(b) $S(3|1,5)$; Graph steigt für $x < 3$, fällt für $x > 3$

12. Gegeben sind die Parabeln $p_1: \; y = 0,5x^2 + x + 1,5$ und $p_2: \; y = -x^2 + 4x$
Untersuche rechnerisch, ob sich die Parabeln schneiden.
Gib gegebenenfalls die Koordinaten gemeinsamer Punkte an.

Lösung: $S(1|3)$

13. Bilde ein Produkt, dessen erster Faktor um 1 größer als x und dessen zweiter Faktor um 3 kleiner als x ist. Für welche Zahl x ist der Wert dieses Produkts am kleinsten?

Lösung: $x = 1$

14. Für jede Zahl $t \in \mathbb{R}$ ist eine quadratische Funktion $y = tx^2 - 2tx$ gegeben.
(a) Bestimme für $t = -2$ die Nullstellen und den größten Funktionswert der Funktion.
(b) Für welchen Wert von t hat die Funktion den größten Funktionswert 3?

Lösung: (a) $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $S(1|2)$
(b) $t = -3$

Umfangreichere Aufgaben

1. **Kinokrieg**

Kassel besitzt inzwischen zwei große Kinocenter mit zahlreiche Kinosälen.
Da bangen die kleinen Kinos um ihre Einnahmen.
Eines dieser kleinen Kinos hat bei einem Eintrittspreis von 8 € durchschnittlich 95 Besucher pro Vorstellung.

Eine Marktstudie ergibt folgendes:
Würde der Besitzer den Eintrittspreis um 0,50 €; 1 €; 2 € usw. erhöhen, so ginge die Besucherzahl um 10 Personen; 20 Personen; 40 Personen usw. zurück.

Welche Preiserhöhung bringt die höchsten Einnahmen?

Lösung: $E(x) = (95 + y)(8 + x) = -20(x + 1,625)^2 + 812,81$
Theoretisch maximale Einnahme bei Preisreduzierung auf 6,375. Dies ist aber wohl kein guter Preis...

2. Gegeben ist die Funktion $f: y = x^2 + x - 3,75$.
   (a) Bestimme die maximale Definitions- und Wertemenge der Funktion.
   (b) Gib die Koordinaten des Scheitelpunktes $S(s_1|s_2)$ an.
   (c) Zeichne den Graphen der Funktion im Intervall $[s_1 - 3; s_1 + 3]$.
   (1 Längeneinheit = 1 cm)
   (d) Bestimme rechnerisch die Nullstellen der Funktion f.

Lösung: $D = \mathbb{R}$; $W = [-4; \infty[$; $S(-0,5|-4)$; $N_1(1,5|0)$ $N_2(-2,5|0)$

3. Gegeben ist die Funktion $p: y = -0,5x^2 + x + 1,5$.
   (a) Zeige, daß der Punkt $S(1|2)$ Scheitel der zu p gehörenden Parabel ist.
   (b) Bestimme die Symmetrieachse, Wertemenge und die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen.
   (c) Zeichne den Graphen der Funktion im Intervall $[-3; 5]$ ohne Verwendung einer Wertetabelle. (1 Längeneinheit = 1 cm)

Lösung: $s: x = 1$; $W =]-\infty; 2]$; $S_1(0|1,5)$; $S_2(3|0)$; $S_3(-1|0)$

4. (a) Bestimme c so, daß der Graph der Funktion $f(x) = x^2 + c$ durch den Punkt $P(-2|3)$ verläuft!
   (b) Zeichne die Graphen der Funktionen $f_1(x) = x^2 - 3$, $f_2(x) = x^2 + 6x + 9$ und $f_3(x) = -x + 3$ in ein Koordinatensystem!
   (Platzbedarf: $-6 \leq x \leq 6$; $-4 \leq y \leq 8$)
   (c) Berechne den x-Wert, für den f_1 und f_2 den gleichen Funktionswert annehmen!
   (d) Ermittle graphisch die Menge der x-Werte, für die f_3 kleinere Funktionswerte hat als f_1!

Lösung: (a) $c = -1$ (c) Für $x = -2$ (d) $f_3(x) < f_1(x)$ für $x < -3$ und $x > 2$

5. (a) Bestimme c so, daß der Punkt $P(8|c)$ auf dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2 - 7x + 12,25$ liegt!
   (b) Zeichne die Graphen der Funktionen $f_1(x) = x^2 - 4$, $f_2(x) = x^2 - 8x + 16$ und $f_3(x) = -2x - 1$ in ein Koordinatensystem!
   (Platzbedarf: $-5 \leq x \leq 7$; $-5 \leq y \leq 8$)
   (c) Berechne den x-Wert, für den f_1 und f_2 den gleichen Funktionswert annehmen!

(d) Ermittle graphisch die Menge der x-Werte, für die f_3 kleinere Funktionswerte hat als f_1!

Lösung: (a) $c = 20,25$ (c) Für $x = 2,5$ (d) $f_3(x) < f_1(x)$ für $x < -3$ und $x > 1$

6. Gegeben ist die quadratische Funktion
$y = -\dfrac{2}{3}x^2 - 3x + \dfrac{13}{8}$ mit der Definitionsmenge $D = [-6; 0]$.
   (a) Zeichne den Graphen nach Berechnung der Scheitelkoordinaten sowie der Randpunkte sauber in ein Koordinatensystem ein!
   (b) Gib die Wertemenge W an!
   (c) Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{7}{3}$ schneidet den Funktionsgraphen in zwei verschiedenen Punkten P und Q.
   Trage P und Q in die Zeichnung ein und <u>berechne</u> die Koordinaten dieser Punkte!

Lösung: (a): $S\left(-\frac{9}{4} | 5\right)$; $R_1\left(-6 \,|\, -\frac{35}{8}\right)$; $R_2\left(0 \,|\, \frac{13}{8}\right)$
(b): $W = \left[-\frac{35}{8}; 5\right]$
(c): $\left(-\frac{1}{4} \,|\, \frac{7}{3}\right)$ *bzw.* $\left(-\frac{17}{4} \,|\, \frac{7}{3}\right)$

7. (a) Wie lautet die Gleichung der quadratischen Funktion $f(x) = x^2 + px + q$, deren Graph den Punkt $S(-\frac{5}{3}| - \frac{7}{18})$ als Scheitel besitzt?
   (b) Bestimme für die quadratische Funktion $f(x) = x^2 + 6x + \frac{23}{2}$ die Scheitelkoordinaten und zeichne den Graphen in ein Koordinatensystem!
   (Platzbedarf: $-5 \leq x \leq 5$; $-2 \leq y \leq 10$)
   (c) Ermittle für die Funktion $f(x) = x^2 - 4x - 5$ im Intervall $I = [-1; 3]$ den kleinsten und den größten Funktionswert und gib die Teilintervalle von I an, in denen die Funktion monoton wachsend bzw. abnehmend ist!

Lösung: (a) $f(x) = x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{43}{18}$
(b) $S(-3|2,5)$
(c) MIN$(2| - 9)$; MAX$(-1|0)$; fallend in $I_1 = [-1; 2]$; steigend in $I_2 = [2; 3]$

8. Die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion lautet
$y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 1$.
   (a) Bestimme die Scheitelkoordinaten der zugehörigen Parabel, berechne deren Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und zeichne die Parabel dann im Intervall $-2 \leqq x \leqq 8$ mit Hilfe weiterer geeigneter Parabelpunkte (Wertetabelle!) in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) ein!

(b) Für welche Werte von $t (t \in \mathbb{R})$ ist die Gerade $y = x + t$ Tangente an die Parabel? Berechne die Koordinaten des Berührpunktes B und trage die Tangente in die bereits angelegte Zeichnung ein!

(c) Wie lautet die Gleichung derjenigen Kurve, die entsteht, wenn man die gegebene Parabel

(α) an der x-Achse spiegelt?

(β) an der y-Achse spiegelt?

(γ) an der Geraden $y = 2$ spiegelt?

Lösung: (a) $S(3|-2)$, $N_{1/2}(3 \pm \sqrt{6}|0), N_3(0|1)$
(b) $t = -5,75$; $B(4,5|-1,25)$
(c) (α) $y = -\frac{1}{3} \cdot (x-3)^2 + 2$
(β) $y = \frac{1}{3} \cdot (x+3)^2 - 2$
(γ) $y = -\frac{1}{3} \cdot (x-3)^2 + 6$

9. Die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion lautet
$y = x^2 + 5x + 4,75$.

(a) Berechne die Koordinaten des Scheitelpunktes der zugehörigen Parabel und zeichne diese sauber und genau in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) ein.

(b) Berechne die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse des Koordinatensystems!

Durch die Gleichung $y = -2x + t \, (t \in \mathbb{R})$ ist eine Schar paralleler Geraden gegeben.

(c) Zeichne <u>eine</u> solche Gerade in das angelegte Koordinatensystem ein!
Für welche Werte von t schneidet eine Schargerade die Parabel aus Teilaufgabe (a) in genau 2 verschiedenen Punkten?

Lösung: (a): $S(-2,5|-1,5)$
(b): $N_{1/2}\left(\frac{1}{2} \cdot (-5 \pm \sqrt{6})|0\right)$
(c): $t > -7,5$

10. (a) Bestimme ausführlich die Gleichung derjenigen Parabel, welche durch die Punkte $P(-1|2)$, $Q(3|-22)$, $R(-7|-7)$ verläuft!

(Ergebnis: $y = -\dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{9}{2}x - \dfrac{7}{4}$)

(b) Zeichne die Parabel aus Aufgabe (a) nach Berechnung der Scheitelkoordinaten sauber und genau in ein Koordinatensystem ein (Längeneinheit 1 cm auf beiden Achsen!)

(c) Gib ohne weitere Rechnung jeweils eine Gleichung derjenigen Parabel an, welche aus der obigen Parabel durch Spiegelung

(α) an der x-Achse, (β) an der y-Achse

des Koordinatensystems hervorgeht!

Lösung: (b): $S(-3|5)$
(c): $(\alpha): \; y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{7}{4}$; $(\beta): \; y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{7}{4}$

11. (a) Bestimme die Gleichung $y = ax^2+bx+c$ der Parabel, die den Scheitel $S(-\frac{3}{2}| -\frac{7}{4})$ besitzt und durch den Punkt $P(-\frac{5}{2}|\frac{21}{4})$ verläuft!

    (b) Bestimme für die Funktion $f(x) = x^2+9x+\frac{73}{4}$ den Scheitel und die Nullstellen. Zeichne den Graphen dann in ein Koordinatensystem.
    (Platzbedarf: $-8 \leq x \leq 4$; $-4 \leq y \leq 7$)

Lösung: (a) $f(x) = 7x^2 + 21x + 14$
(b) $S(-4,5| -2)$; $NST_1(-4,5 + \sqrt{2}|0)$; $NST_2(-4,5 - \sqrt{2}|0)$

12. Gegeben ist die Parabelschar $P_k: \; y = (x + k)^2 + k + 2 \qquad (k \in \mathbb{R})$.

    (a) Welche gemeinsamen Eigenschaften haben alle Parabeln dieser Schar?

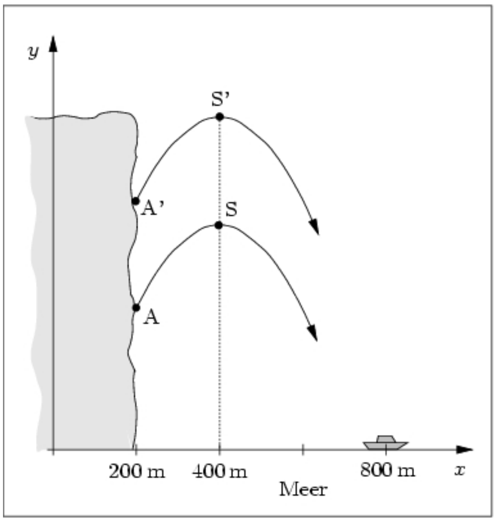
    (b) Wo liegen alle Scheitelpunkte dieser Parabelschar?

    (c) Bestimme k so, daß die Parabel $y = -x^2 + 6x - 6$ eine Scharparabel berührt!

    (d) Berechne die Berührpunkte und fertige in einem Koordinatensystem eine saubere Zeichnung an (Längeneinheit 1 cm)!

Lösung: (a): Kongruenz zur Normalparabel und Öffnung nach oben
(b): Ortslinie für die Parabelscheitel: $y = -x + 2$
(c): $k_1 = -1$; $k_2 = -7$
(d): $B_1(2|2)$, $B_2(5| -1)$

13. Die Flugbahn einer Kanonenkugel ist eine Parabel. Der Scheitel der Flugbahn hat die Koordinaten S(400 m | 675 m), der Abschusspunkt liegt in einer Felswand bei A(200 m | 375 m).



(a) Berechne die Gleichung der Flugbahn in der Form $y = a\,x^2 + b\,x + c$.

(b) Bei welcher x-Koordinate fällt die Kugel ins Meer?

(c) Die Flugbahn wird parallel zur y-Achse soweit nach oben verschoben, bis der Auftreffpunkt im Meer bei $x = 800\,\mathrm{m}$ liegt.

Berechne die Höhe h' des neuen Abschusspunktes A′(200 m | h').

(d) Zeichne die beiden Flugbahnen in **ein** Koordinatensystem (1 cm $\widehat{=}$ 100 m).

Lösung: (a) $y = -0,0075\,\frac{1}{\mathrm{m}} \cdot x^2 + 6\,x - 525\,\mathrm{m}$

(b) $x = 700\,\mathrm{m}$

(c) $h' = 900\,\mathrm{m}$

(d) $y' = y + 525\,\mathrm{m}$

2.1.3. Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen

rein quadratische Gleichungen

1. Bestimme die Lösung der folgenden Gleichung

$$x - 3 = \frac{4 - 3x}{x} \qquad (G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Bayerischer Mathematik Test für die 10. Klasse, 2007

Lösung: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$

Quadratische Ergänzung

1. Löse folgende Gleichung mit Hilfe quadratischer Ergänzung:

$$x^2 + \sqrt{10} \cdot x + 0,25 = 0$$

Lösung: $L = \left\{\frac{1}{2} \cdot (-\sqrt{10} \pm 3)\right\}$

2. Löse mit quadratischer Ergänzung und mache die Probe:

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

Lösung: $L = \{\frac{1}{3}; 3\}$

3. Löse mit quadratischer Ergänzung in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{R}$:

$$x^2 + 3kx - 10k^2 = 0$$

Lösung: $L = \{2k; -5k\}$

4. Löse folgende Gleichung mit Hilfe quadratischer Ergänzung, wobei der Parameter a von Null verschieden sei:

$$a \cdot x^2 + 2x - \frac{1}{a} = 0$$

Lösung: $L = \left\{-\frac{1}{a} \cdot (1 \pm \sqrt{2})\right\}$

5. Löse zunächst die Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ mit Hilfe quadratischer Ergänzung! Entscheide dann, welche Beziehung zwischen den Koeffizienten a und b bestehen muß, damit diese Gleichung genau eine Lösung besitzt!

Lösung: $L = \{\frac{1}{2} \cdot (-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})\}$, falls $a^2 \geqq 4b$; genau eine Lösung für $a^2 = 4b$

Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen

1. Berechne die Lösungsmenge: $8x^2 + 2x - 3 = 0$

Lösung:

$$\begin{aligned} 8x^2 + 2x - 3 &= 0 \quad | : 8 \\ x^2 + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot x + \left(\frac{1}{8}\right)^2 &= \frac{3}{8} + \frac{1}{64} \\ \left(x + \frac{1}{8}\right)^2 &= \frac{25}{64} \\ x &= -\frac{1}{8} \pm \frac{5}{8} \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{3}{4}, \quad L = \left\{-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right\}$$

2. Löse mit der Lösungsformel:
   (a) $5x^2 + 6x - 8 = 0$
   (b) $-\frac{1}{6}y^2 = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{2}$

Lösung: (a) $L = \{-2; 0,8\}$ (b) $L = \{1; 3\}$

3. Bestimme die Lösungsmenge:

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 2x^2$$

Lösung: $L = \{\frac{1-\sqrt{7}}{6}; \frac{1+\sqrt{7}}{6}\}$

4. Bestimme die Lösungsmenge! Die Ergebnisse sind mit rationalem Nenner anzugeben!

$$10z = 2\sqrt{5} + \sqrt{5}z^2$$

Lösung: $L = \{\sqrt{5} - \sqrt{3}; \sqrt{5} + \sqrt{3}\}$

5. Löse folgende Gleichung (Ergebnisse mit rationalem Nenner!):

$$(\sqrt{2} - 1) \cdot x^2 - (\sqrt{2} + 1) \cdot x + 0,5 = 0$$

Lösung: $L = \left\{\frac{1}{2} \cdot \left[(\sqrt{2}+1)^2 \pm \sqrt{5} \cdot (\sqrt{2}+1)\right]\right\}$

6. Bestimme die Lösungsmenge:

$$(1 - 2x) \cdot \left(4 - \frac{8}{9}x\right) = \left(2 - \frac{5}{3}x\right)^2$$

Lösung: $L = \{0; -\frac{20}{9}\}$

7. Bestimme die Lösungen der Gleichung:

$$(3x+5)^2 - x(7x-7) = 29x + 45$$

Lösung: $L = \{-2+\sqrt{14}; -2-\sqrt{14}\}$

8. Bestimme die Lösungen der Gleichung:

$$x(2,5x-2) - 2(x-1)^2 = \frac{x}{4}(x-8) - (1,5x-8)^2 + 32$$

Lösung: $L = \{2; 6\}$

9. Gib die Definitionsmenge an und bestimme die Lösungsmenge:

$$\frac{x+21}{x-3} + \frac{16x}{6-2x} = 3x+2; \quad G = \mathbb{Q}$$

Lösung: $D = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$, $L = \{-3\}$

10. Bestimme die Lösungsmenge in der Grundmenge $\mathbb{R}$:

$$\frac{2\sqrt{2}\cdot x - x}{\sqrt{2}-x} - \frac{12 - 3\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-3x} = 1 + 2x$$

Lösung: Zunächst Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, von denen nur $-\sqrt{2}$ in der Definitionsmenge liegt.

11. Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$\frac{165}{x+10} - 5 = \frac{48}{x+3}$$

Lösung: $L = \left\{\frac{27}{5}; 5\right\}$

12. Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$\frac{3x+1}{4x-6} + \frac{7x+2}{6x+9} = \frac{8x^2-3x+2}{4x^2-9}$$

Lösung: $L = \left\{1; \frac{15}{2}\right\}$

13. Löse die folgende Bruchgleichung:

$$\frac{4x-2}{x^2-4} = \frac{7x-22}{2-x} - \frac{1-2x}{x+2}$$

Lösung: $L = \{-3,2; 3\}$

14. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{17\,x-33}{-2\,x-3} = \frac{7\,x-7}{-x-2}$$

Lösung: $L = \{-3\,;\,5\}$

15. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{85\,x-119}{15\,x-21} = \frac{7\,x+3}{65\,x-91}$$

Lösung: $L = \left\{\frac{389}{271}\right\}$, $\left(\frac{7}{5}\right.$ ist keine Lösung! Schnelle Lösung durch Faktorisieren!$\left.\right)$

16. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{6\,x-4}{15\,x-10} = \frac{x-1}{2\,x-5}$$

Lösung: $L = \{-5\}$, $\left(\frac{2}{3}\right.$ ist keine Lösung! Schnelle Lösung durch Faktorisieren!$\left.\right)$

17. Berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{7\,x-3}{6\,x-4} = \frac{3\,x+1}{15\,x-10}$$

Lösung: $L = \left\{\frac{17}{29}\right\}$, $\left(\frac{2}{3}\right.$ ist keine Lösung! Schnelle Lösung durch Faktorisieren!$\left.\right)$

18. Berechne die Lösungsmenge:
$$\frac{85\,x-119}{15\,x-21}=\frac{-10\,x+14}{65\,x-91}$$

Lösung: $L=\{\}$, $\left(\frac{7}{5}\right.$ ist keine Lösung! Schnelle Lösung durch Faktorisieren!$\left.\right)$

19. Berechne die Lösungsmenge:
$$\frac{21\,x-49}{9\,x-21}=\frac{63\,x-147}{27\,x-63}$$

Lösung: $L=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{7}{3}\right\}$, (Schnelle Lösung durch Faktorisieren!)

20. Berechne die Lösungsmenge:
$$\frac{21\,x+14}{15\,x+10}=\frac{14\,x-21}{10\,x-15}$$

Lösung: $L=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3}{2}\,;\,-\frac{2}{3}\right\}$, (Schnelle Lösung durch Faktorisieren!)

21. Berechne die Lösungsmenge:
$$\frac{21\,x+14}{15\,x+10}=\frac{6\,x-9}{4\,x-6}$$

Lösung: $L=\{\}$, $\left(\frac{3}{2}\right.$ und $-\frac{2}{3}$ sind keine Lösung! Schnelle Lösung durch Faktorisieren!$\left.\right)$

22. Berechnen Sie die Lösungsmenge über $G=\mathbb{R}$:
(a) $x^2+a\,x-6\,a^2=0 \quad , \quad a\in\mathbb{R}$ (b) $4\,x^2-7\,x-3=0$

Lösung: (a) $L=\{2a\,,\,-3a\}$, (b) $L=\{\frac{7}{8}\pm\frac{\sqrt{97}}{8}\}$

23. Berechnen Sie die Lösungsmenge über $G=\mathbb{R}$:
(a) $x^2+8\,x-9<0$ (b) $5\,x^2-16\,x>20$ (c) $x^2+8\,x+25\geqq 0$

Lösung: (a) $L =]-9\,;1\,[$ (b) $L =]-\infty\,;\frac{1}{5}(8-2\sqrt{41})\,[\cup]\,\frac{1}{5}(8+2\sqrt{41})\,;\infty\,[$
(c) $L = \mathbb{R}$

1. Löse folgende Gleichung über $G = \mathbb{R}$:

$$3b \cdot (x-2a) - 2a \cdot (3b-x) = x^2 - 6ab \;; \quad a, b \quad \text{sind Formvariablen}$$

Lösung: $L = \{2a; 3b\}$

2. Löse folgende Gleichung mit der Lösungsvariablen x und dem reellen Parameter a:

$$a^2 \cdot (x^4+1) = (a^4+1) \cdot x^2$$

Lösung: $L = \left\{\pm a; \pm\frac{1}{a}\right\}$ für $a \neq 0$; $L = \{0\}$ für $a = 0$

3. Für welche $a \in \mathbb{R}$ besitzt die Gleichung $ax^2 - x - 0,25 = 0$ genau eine Lösung? Gib diese Lösungen an!

Lösung: $a = 0: \; L = \{-0,25\}$; $a = -1: \; L = \{-0,5\}$

4. Für welche Parameterwerte $k \in \mathbb{R}$ besitzt die Gleichung $kx^2 + (k-1)x + k = 0$ genau eine Lösung? Wie lautet jeweils diese Lösung?

Lösung: $k = 0: \; L = \{0\}$; $k = -1: \; L = \{-1\}$; $k = \frac{1}{3}: \; L = \{1\}$

5. Für welche Parameterwerte $t \in \mathbb{R}$ besitzt die Gleichung $x(3x+4t) = 15 + 10tx + 18t$ genau eine Lösung? Wie lautet jeweils diese Lösung?

Lösung: $t = -1: \; L = \{-1\}$; $t = -5: \; L = \{-5\}$

6. Für welche Parameterwerte $t \in \mathbb{R}$ besitzt die Gleichung

$$(3+t) \cdot x^2 - x + \frac{t}{7} = 0$$

genau eine Lösung? Wie lautet jeweils diese Lösung?

Lösung: $t_1 = -3;\ x_1 = -\frac{3}{7};\quad t_2 = 0,5;\ x_2 = \frac{1}{7};\quad t_3 = -3,5;\ x_3 = -1$

7. Bestimme $\beta \in \mathbb{R}$ so, daß folgende quadratische Gleichung keine Lösung besitzt:

$$(2\beta - 1) \cdot x^2 - 2x + (2\beta + 1) = 0$$

Lösung: $\beta \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2}\right]$

8. Gib die Anzahl der Lösungen und die Lösungsmenge in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ an!

$$ax^2 + 2x + 2 = 0$$

Lösung: $a = 0:\ L = \{-1\}$;
$a < 0,5$ und $a \neq 0:\ L = \{\frac{-1-\sqrt{1-2a}}{a}; \frac{-1+\sqrt{1-2a}}{a}\}$;
$a = 0,5:\ L = \{-2\}$;
$a > 0,5:\ L = \{\,\}$

Der Satz von Vieta

1. Gegeben ist die Gleichung

$$0,5x^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - p\right) \cdot x + \sqrt{6} = 0.$$

Eine Lösung sei $x_1 = \sqrt{3}$. Berechne die andere Lösung sowie den Wert von p!

Lösung: $x_2 = 2\sqrt{2};\ p = -\sqrt{2}$

2. Die quadratische Gleichung $x^2 - 2x + c = 0$ hat die Lösung $s_1 = 1 + \sqrt{2}$. Bestimme die zweite Lösung s_2 und c!

Lösung: $s_2 = 1 - \sqrt{2}\,;\ c = -1$

3. Wie lautet die Normalform der quadratischen Gleichung, deren Lösungen
   (a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ sind?
   (b) 6 und -15 sind?

Lösung: (a) $x^2 - x - 1 = 0$ (b) $x^2 + 9x - 90 = 0$

4. Zerlege den Term $4x^2 - 8x + 1$ in Linearfaktoren!

Lösung: $4x^2 - 8x + 1 = (2x - 2 - \sqrt{3}) \cdot (2x - 2 + \sqrt{3})$

5. Finde die Lösungen der quadratischen Gleichung $3x^2 + 3x - 18 = 0$ mit Hilfe des Satzes von Vieta!

Lösung: $L = \{-3; 2\}$

6. Bestimme die zweite Lösung, den fehlenden Koeffizienten und gib die Ergebnisse mit rationalem Nenner an:
   (a) $x^2 - 10x + q = 0; \qquad x_1 = 5 - \sqrt{2}$
   (b) $x^2 + \sqrt{2}x + q = 0; \qquad x_1 = \sqrt{2}$
   (c) $x^2 + px + 15 = 0; \qquad x_1 = -5 - \sqrt{10}$

Lösung: (a) $x_2 = 5 + \sqrt{2}$; $q = 23$
(b) $x_2 = -2\sqrt{2}$; $q = -4$
(c) $x_2 = -5 + \sqrt{10}$; $p = 10$

7. Bestimme den fehlenden Koeffizienten b und die zweite Lösung x_2 der Gleichung $x^2 + bx - 12 = 0$, wenn $x_1 = -\frac{4}{3}$ Lösung ist.

Lösung: $x_2 = 9$; $b = -7\frac{2}{3}$

8. Bestimme den fehlenden Koeffizienten b und die zweite Lösung x_2 der Gleichung $x^2 - 14x + c = 0$, wenn $x_1 = 7 + \sqrt{2}$ Lösung ist.

Lösung: $x_2 = 7 - \sqrt{2}$; $c = 47$

9. Die Gleichung
$$x^2 + bx + c = 0, \quad b, c \in \mathbb{Q},$$
habe die Lösung $x_1 = 1 + \sqrt{2}$.
   (a) Zeige: $b = -2, \quad c = -1$.
   (b) Bestimme die zweite Lösung x_2 der Gleichung!

Lösung: $x_2 = 1 - \sqrt{2}$

10. Die eine Lösung der quadratischen Gleichung $8x^2 + 6x + 0,5r = 0$ ist doppelt so groß wie die andere. Berechne die beiden Lösungen sowie den Wert von r.

Lösung: $x_1 = -0,25$; $x_2 = -0,5$; $r = 2$

11. Bestimme m so, daß in der quadratischen Gleichung

$$3\,x^2 + 6\,x - m = 0$$

die eine Lösung die andere um 4 übertrifft!

Lösung: $m = 9$; am einfachsten mit Vieta

12. (a) Gib die Normalform der quadratischen Gleichung an, die folgende Lösungen besitzt:
$x_1 = 3 + \sqrt{6}$ und $x_2 = 2 - \sqrt{6}$
(b) Bestimme die beiden Lösungen und den fehlenden Koeffizienten der Gleichung $x^2 - 20x + q = 0$ so, daß die eine Lösung dreimal so groß wie die andere Lösung ist!

Lösung: (a) $x^2 - 5x - \sqrt{6} = 0$ (b) $x_2 = 5$; $x_3 = 15$; $q = 75$

13. An der Tafel stand die quadratische Gleichung:

$$5x^2 - \spadesuit x + 56 = 0.$$

Leider wurde der Koeffizient von x von einem Schüler verwischt. Es ist aber bekannt, daß sich die beiden Lösungen dieser Gleichung um 1,2 unterscheiden.
Berechne die Lösungen dieser Gleichung und den fehlenden Koeffizienten!

Lösung: $x_1 = 2,8$; $x_2 = 4$; Fehlender Koeffizient: 34
Man beachte, daß der fehlende Koeffizient sinnvollerweise eine positive Zahl darstellt!

14. Die quadratische Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ habe die von Null verschiedenen Lösungen x_1 und x_2.
(a) Welche Zusammenhänge bestehen zwischen a, b, x_1, x_2?
(b) Wie lautet diejenige quadratische Gleichung, welche als Lösungen die Kehrwerte der Lösungen der obigen quadratischen Gleichung hat?
(Die Koeffizienten der gesuchten quadratischen Gleichung sind durch a und b auszudrücken!)

Lösung: (a): $x_1 + x_2 = -a$; $x_1 \cdot x_2 = b$
(b): $x^2 + \frac{a}{b} \cdot x + \frac{1}{b} = 0$

Faktorzerlegung quadratischer Terme

1. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge folgender Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$:
$$\frac{2}{2x-3}+\frac{1}{1+x}=\frac{3}{2x^2-x-3}$$

Lösung: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1,5\}$; $L=\{1\}$

2. Zerlege in Linearfaktoren:
$$2x^2-4x-70$$

Lösung: $2(x-7)(x+5)$

3. Zerlege den Term $18x^2-9x+1$ in Linearfaktoren!

Lösung: $18(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{3})$

Sonstige Lösungsmethoden

1. Bestimme alle Lösungen der Gleichung
$$x^5+3x^3-40x=0$$

Lösung: $L=\{0;\pm\sqrt{5}\}$

2. Löse folgende Gleichungen:
   (a) $\frac{1}{3}x^4-\frac{5}{3}x^2=12$
   (b) $(x+1)^4-3(x+1)^2-4=0$

Lösung: (a) $L=\{-3;3\}$; (b) $L=\{-3;1\}$

3. Löse mit Hilfe einer geeigneten Substitution:
   (a) $2x^4-11x^2=-15$
   (b) $2x-5\sqrt{x}-12=0$

Lösung: (a) $L=\{-\sqrt{3};\sqrt{3};-\sqrt{\frac{5}{2}};\sqrt{\frac{5}{2}}\}$ (b) $L=\{16\}$

4. Löse mit Hilfe einer geeigneten Substitution:

$$2x - 5\sqrt{x} - 12 = 0$$

Lösung: $L = \{16\}$

5. Löse folgende Gleichung über $G = \mathbb{R}$:

$$3 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 + 6 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{7}{3} = 0$$

Lösung: $L = \left\{\pm\frac{1}{3}\sqrt{6}\right\}$

6. Löse folgende Gleichung und mache die Probe:

$$\sqrt{\frac{6x-5}{6x-4}} - \sqrt{\frac{6x-4}{6x-5}} = \frac{5}{6}$$

Lösung: $L = \left\{\frac{8}{15}\right\}$

1. Berechne die Lösungsmenge: $\sqrt{x} = x + \dfrac{4}{25}$

Lösung: $D = \mathbb{R}_0^+$

Lösung durch Quadrieren:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} &= x + \frac{4}{25} \qquad \Big|^2 \\
x &= x^2 + \frac{8}{25}x + \frac{16}{625} \\
x^2 - \frac{17}{25}x &= -\frac{16}{625} \\
x^2 - 2\cdot\frac{17}{50}x + \left(\frac{17}{50}\right)^2 &= -\frac{16}{625} + \frac{289}{2500} \\
\left(x - \frac{17}{50}\right)^2 &= \frac{289-64}{2500} = \frac{225}{2500} \\
x &= \frac{17}{50} \pm \frac{15}{50} \\
x_1 = \frac{16}{25} = 0{,}64; \quad x_2 &= \frac{1}{25} = 0{,}04
\end{aligned}$$

Oder mit Substitution: $y = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
y &= y^2 + \frac{4}{25} \\
y^2 - y &= -\frac{4}{25} \\
y^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} &= -\frac{4}{25} + \frac{1}{4} \\
\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{25-16}{100} = \frac{9}{100} \\
y &= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{10} \\
y_1 = \frac{4}{5} \quad &\Longrightarrow \quad x_1 = y_1^2 = \frac{16}{25} \\
y_2 = \frac{1}{5} \quad &\Longrightarrow \quad x_2 = y_2^2 = \frac{1}{25}
\end{aligned}$$

Probe: $\quad x_1: \quad \text{LS} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}; \quad \text{RS} = \frac{16}{25} + \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

$\quad x_1: \quad \text{LS} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}; \quad \text{RS} = \frac{1}{25} + \frac{4}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

$$L = \left\{\frac{16}{25}, \frac{1}{25}\right\} = \{0{,}64;\ 0{,}04\}$$

2. Berechne die Lösungsmenge: $\qquad \sqrt{x+1} = \sqrt{x} + \sqrt{x-1}$

Lösung: $x > 1 \quad \Longrightarrow \quad D = [1, +\infty[$

$$\begin{aligned}
x + 1 &= x + x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x} \\
2 - x &= 2\sqrt{x^2 - x} \\
4 - 4x + x^2 &= 4x^2 - 4x \\
x^2 &= \frac{4}{3} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3}, \quad \left(x_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{3} \notin D\right)
\end{aligned}$$

3. Berechne die Lösungsmenge: $\qquad \sqrt{x+5} = \sqrt{x-3} + \sqrt{x-2}$

Lösung: $x > 3 \quad \Longrightarrow \quad D = [3, +\infty[$

$$\begin{aligned}
x + 5 &= x - 3 + x - 2 + 2\sqrt{x^2 - 5x + 6} \\
10 - x &= 2\sqrt{x^2 - 5x + 6} \\
100 - 20x + x^2 &= 4x^2 - 20x + 24 \\
x^2 &= \frac{76}{3} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{2}{3}\sqrt{57} \approx 5{,}03, \quad \left(x_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{57} \notin D\right)
\end{aligned}$$

4. Berechne die Lösungsmenge: $\sqrt{x+23} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-22}$

Lösung: $x > 22 \quad \Longrightarrow \quad D = [22, +\infty[$

$$\begin{aligned} x + 23 &= x - 1 + x - 22 + 2\sqrt{x^2 - 23x + 22} \\ 46 - x &= 2\sqrt{x^2 - 23x + 22} \\ 2116 - 92x + x^2 &= 4x^2 - 92x + 88 \\ x^2 &= 676 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 26, \quad (x_2 = -26 \notin D) \end{aligned}$$

5. Berechne die Lösungsmenge: $\sqrt{x+314} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-313}$

Lösung: $x > 313 \quad \Longrightarrow \quad D = [313, +\infty[$

$$\begin{aligned} x + 314 &= x - 1 + x - 313 + 2\sqrt{x^2 - 314x + 313} \\ 628 - x &= 2\sqrt{x^2 - 314x + 313} \\ 394384 - 1256x + x^2 &= 4x^2 - 1256x + 1252 \\ x^2 &= 131044 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 362, \quad (x_2 = -362 \notin D) \end{aligned}$$

6. Bestimme Definitionsmenge und Lösungsmenge folgender Gleichung:

$$\sqrt{2x^2 - 8} : \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} = 1$$

Lösung: $D = \mathbb{R} \setminus [-2; 2], \quad L = \{-2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\}$

7. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge! (Vergiß die Probe nicht!)

$$\sqrt{2x+8} - \sqrt{5+x} = 1$$

Lösung: $D = [-4; \infty[\ ;\ L = \{4\}$

8. Berechne die beiden Zahlen, deren arithmetisches Mittel 24 und deren geometrisches Mittel $6\sqrt{15}$ beträgt.

Lösung: 18 und 30

9. Bestimme Definitionsmenge und Lösungsmenge folgender Wurzelgleichung:

$$\sqrt{2x+5} - \sqrt{8+4x} = 1$$

Lösung: $D = [-2; \infty[; \quad L = \{-2\}$

10. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge! (Vergiß die Probe nicht!)

$$\sqrt{2x+13} - \sqrt{10+x} = 1$$

Lösung: $D = [-6,5; \infty[\ ;\ L = \{6\}$

11. Gegeben ist die Wurzelgleichung

$$-\sqrt{2-x} + \frac{6}{\sqrt{4-x}} - \sqrt{4-x} = 0\ .$$

   (a) Löse die Gleichung über $G = \mathbb{R}$!
   (b) Führe eine ausführliche Probe durch!

Lösung: $L = \{0, 4\}$

12. Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge! (Probe!)

$$\sqrt{4x-5} + 7 = 0$$

Lösung: $D = [\frac{5}{4}; \infty[\ ;\ L = \{\}$

13. Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge! (Probe!)

$$5\sqrt{3x - \frac{2}{3}} + 11 = 17 + 2\sqrt{3x - \frac{2}{3}}$$

Lösung: $D = [\frac{2}{9}; \infty[\ ;\ L = \{1\frac{5}{9}\}$

14. Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge! (Probe!)

$$\sqrt{7x-14} + 5 = 5 + \sqrt{3x}$$

Lösung: $D = [2; \infty[\ ;\ L = \{3, 5\}$

15. Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge! (Probe!)

$$\sqrt{x^2 - 49} = x - 5$$

Lösung: $D =]-\infty; -7] \cup [7; \infty[\ ;\ L = \{7, 4\}$

1. Löse durch Ausklammern:

$$2x^3 - 32x = 0$$

Lösung: $L = \{-4; 0; 4\}$

2. Bestimme Definitionsmenge und Lösungsmenge folgender Gleichung:

$$\frac{4 + 4x}{5x + 6} = \frac{x}{1 - x}$$

Lösung: $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{6}{5}; 1\};\quad L = \{\frac{1}{3} \cdot (-1 \pm \sqrt{5})\}$

3. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge folgender Gleichung (Grundmenge ist $\mathbb{R}$):

$$\frac{x^2}{x^2 - x - 6} + \frac{1}{x - 3} = \frac{x}{2(x + 2)}$$

Lösung: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}\ ;\ L = \{-4; -1\}$

2.2. Quadratische Funktionen in Anwendungen

2.2.1. Textaufgaben, die auf quadratische Gleichungen führen

1. **Geizige und Snobs beim Einkaufen**

   Zur Münchner Sportmesse FITSAMA werden $k_0 = 100\,000$ Besucher erwartet. Der Autor Mike Velo stellt sein neues Buch *Fit ohne Chemie?* vor. Mike möchte den Preis x des Buches so kalkulieren, dass seine Einnahmen E maximal werden. Dazu verwendet er die Funktion $k : x \to k(x)$, die angibt, wie viele Besucher der Messe sein Buch kaufen.

(a) Zuerst nimmt Mike an, dass k bis zur Nullstelle eine lineare Funktion ist, für $x = 0$ jeder das Buch nimmt und für $x \geqq 50$ € keiner mehr sein Buch kauft. Für welches $x = x_0$ ist E maximal und wie groß sind seine maximalen Einnahmen? Zeichne die Grafen der Funktionen $k(x)$ und $E(x)$ in geeigneten Einheiten.

(b) Mikes Frau gibt zu bedenken, dass nicht nur Geiz-ist-geil-Kunden die Messe besuchen, sondern auch einige Snobs darunter sind, die eine Ware nur dann schätzen, wenn sie auch teuer genug ist. Gemeinsam entwickeln sie folgende Käuferfunktion:

$$k(x) = k_0 - ax - \frac{b}{x} \quad \text{mit} \quad a = 1200\,\frac{1}{€} \quad \text{und} \quad b = 400\,000\,€$$

Für welches $x = x_1$ ist jetzt E maximal und wie groß sind die maximalen Einnahmen? Vergleiche $E(x_1)$ mit $E(x_0)$. Zeichne die Grafen der Funktionen $k(x)$ und $E(x)$ in geeigneten Einheiten. Welche Definitionsmenge ist für k nur sinnvoll?

(c) Veruche dahinter zu kommen, welche Annahmen der Käuferfunktion aus Teilaufgabe (b) zugrunde liegen.

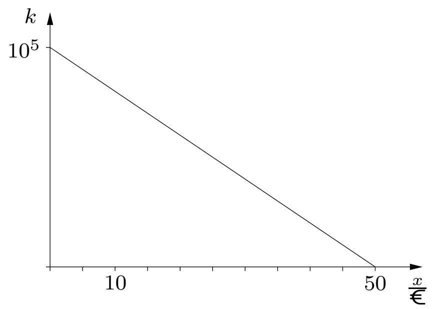
Lösung: (a) $k(x) = 100\,000 - ax$ mit $k(50\,€) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 2000\,\frac{1}{€} \quad \Longrightarrow$

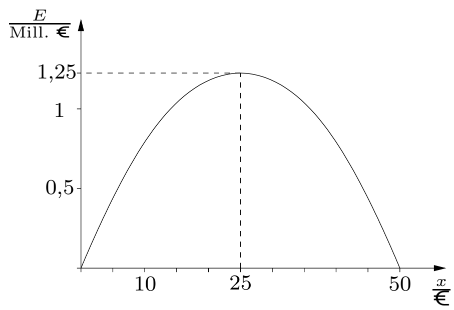
$k(x) = 100\,000 - 2000\,\frac{1}{€} \cdot x \quad \Longrightarrow$

$E(x) = x \cdot k(x) = 100\,000x - 2000\,\frac{1}{€} \cdot x^2$

E hat Nullstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 50$ €, der Scheitel liegt also bei $x_0 = 25$ €.

Maximale Einnahmen: $E(x_0) = 1\,250\,000$ €





(b) $E(x) = x \cdot k(x) = -ax^2 + k_0x - b = -a\left(x - \frac{k_0}{2a}\right)^2 + \frac{k_0^2}{4a} - b$

$x_1 = \frac{k_0}{2a} = 41\frac{2}{3}\,€ \approx 41{,}67\,€$

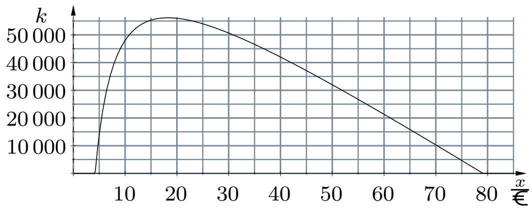
$E(x_1) = \frac{k_0^2}{4a} - b = 1\,683\,333\,€, \qquad E(x_0) = \frac{k_0^2}{4a} - b = 1\,350\,000\,€$

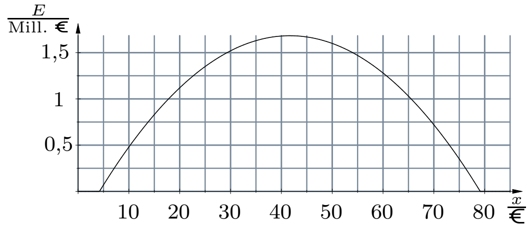
Die Wahl der richtigen Käuferfunktion bedeutet also bares Geld!

Sinnvolle Definitionsmenge: $k(x) \geqq 0$ bzw. $E(x) \geqq 0$ führt auf

$$-a\left(x-\frac{k_0}{2a}\right)^2+\frac{k_0^2}{4a}-b \geqq 0 \quad\Longrightarrow\quad \left|x-\frac{k_0}{2a}\right| \leqq \sqrt{\frac{k_0^2-4ab}{4a^2}}$$

$$\underbrace{\frac{k_0-\sqrt{k_0^2-4ab}}{2a}}_{x_{01}\approx 4{,}21\,€} \leqq x \leqq \underbrace{\frac{k_0+\sqrt{k_0^2-4ab}}{2a}}_{x_{02}\approx 79{,}12\,€}, \qquad D=[x_{01},x_{02}]$$





(c) $k(x)=k_{\mathrm{g}}(x)+k_{\mathrm{s}}(x)=\underbrace{k_{0\mathrm{g}}-ax}_{\text{Geizige}}+\underbrace{k_{0\mathrm{s}}-\frac{b}{x}}_{\text{Snobs}}$

Die Annahme eines linearen Zusammenhangs für die Gezigen führt auf

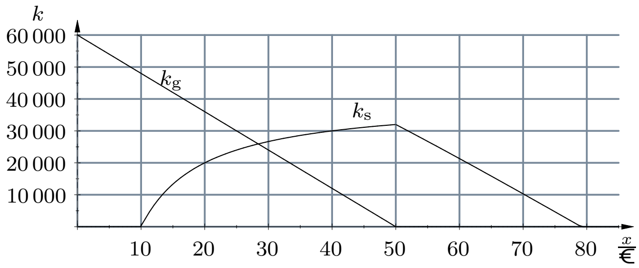
$$k_{\mathrm{g}}(50\,€)=k_{0\mathrm{g}}-a\cdot 50\,€=0 \quad\Longrightarrow\quad k_{0\mathrm{g}}=1200\,\frac{1}{€}\cdot 50\,€=60\,000$$

Mike und seine Frau gehen wohl von 60 000 Geizigen und 40 000 Snobs aus.

$$k_{\mathrm{g}}(x)=\begin{cases}60\,000-1200\,\frac{1}{€}\cdot x & \text{für } x\leqq 50\,€\\ 0 & \text{für } x>50\,€\end{cases}$$

$$k_{\mathrm{s}}(x)=k(x)-k_{\mathrm{g}}(x)=\begin{cases}40\,000-\dfrac{400\,000\,€}{x} & \text{für } 10\,€\leqq x\leqq 50\,€\\ 100\,000-1200\,\dfrac{1}{€}\cdot x-\dfrac{400\,000\,€}{x} & \text{für } 50\,€<x\leqq x_{02}\end{cases}$$

Es zeigt sich eine weitere Einschränkung der Definitionsmenge auf $x \geqq 10\,€$, da ein negatives $k_{\mathrm{s}}(x)$ keinen Sinn ergibt.



Die angenommene Käuferfunktion beschreibt also eine Abnahme der Kauffreudigkeit der Snobs für einen Preis größer als 50 €.

2. (a) Lisa und Georg unterhalten sich über den Inhalt ihrer Geldbeutel (alles in €). Lisa: „Wenn ich zu meinem Betrag seinen Kehrwert addiere, erhalte ich ...“. Georg hat die von Lisa genannte Zahl verstanden und antwortet nach kurzer Rechnung: „Komisch, obwohl ich viermal so viel besitze wie du, kommt bei mir

das gleiche Ergebnis heraus, wenn ich meinen Geldbetrag und seinen Kehrwert addiere.“ Berechne die Reichtümer der beiden.

(b) Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \text{ und } D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

i. Für welche x ist $f(nx) = \beta f(x)$ mit $n > 1$? Für welche β gibt es überhaupt Lösungen? Zeige, dass die Lösung von Teilaufgabe (a) ein Spezialfall ist.

ii. Wie viele Lösungen hat die Gleichung $f(x) = a$ in Abhängigkeit von a? Was folgt daraus für die Wertemenge von f?

iii. Zeichne den Grafen von f im Intervall $[-5, 5]$ und Veranschauliche das Ergebnis von Teilaufgabe (a).

Lösung: (a) Der Besitz von Lisa ist x: $\quad x + \frac{1}{x} = 4x + \frac{1}{4x} \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{2}$

Wenn wir annehmen, dass sie keine Schuldscheine in ihren Geldbeuteln haben, besitzt Lisa 0,5 €und Georg 2 €.

(b) i. $nx + \frac{1}{nx} = \beta x + \frac{\beta}{x} \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{\beta n - 1}{n(n-\beta)} \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{\beta n - 1}{n(n-\beta)}}$

Lösungen gibt es nur, wenn $\frac{\beta - \frac{1}{n}}{n - \beta} > 0$ (da $x \neq 0$) $\quad \Longrightarrow$

$$\left(\beta - \frac{1}{n} > 0 \wedge n - \beta > 0\right) \vee \left(\beta - \frac{1}{n} < 0 \wedge n - \beta < 0\right)$$
$$\left(\beta > \frac{1}{n} \wedge \beta < n\right) \vee \left(\beta < \frac{1}{n} \wedge \beta > n\right)$$

Da $n > 1$, fällt die zweite Möglichkeit weg und es folgt $\frac{1}{n} < \beta < n$.

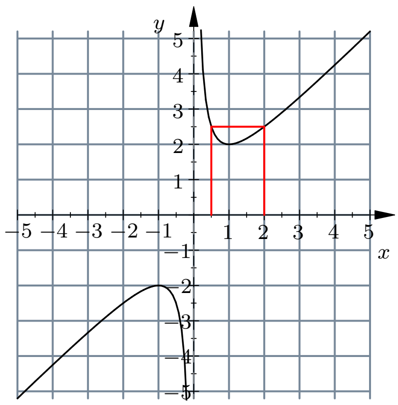
In Teilaufgabe (a) ist $\beta = 1$ und $n = 4$ und es folgt $x = \pm\sqrt{\frac{1 \cdot 4 - 1}{4(4-1)}} = \pm\frac{1}{2}$.

ii. $x + \frac{1}{x} = a \quad \Longrightarrow \quad x^2 - ax = -1 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - 1$

$$x = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2 \text{ Lösungen für } |a| > 2 \\ 1 \text{ Lösung für } a = \pm 2 \\ \text{keine Lösung für } |a| < 2 \end{cases}$$

Da die Lösungen die x-Koordinaten der Schnittpunkte von Parallelen zur x-Achse im Abstand a mit dem Funktionsgrafen sind und es für $|a| < 2$ keine Lösungen gibt, ist die Wertemenge $W_f =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

iii. Parallele zur x-Achse im Abstand 2,5 schneidet den Grafen bei $x_1 = 0{,}5$ und $x_2 = 2$.



3. Ein rechteckiges Grundstück der Fläche $1026\,\mathrm{m}^2$ hat den Umfang $130\,\mathrm{m}$. Berechne die Länge und die Breite des Grundstücks.

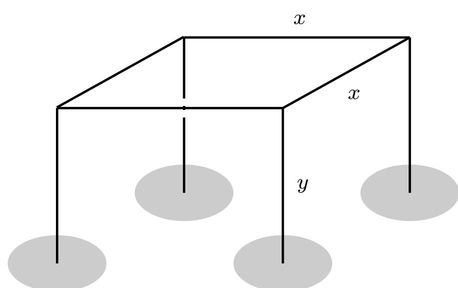
Lösung: $x + y = \dfrac{130}{2} = 65 \quad \Longrightarrow \quad y = 65 - x, \qquad xy = 1026 \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} x(65 - x) &= 1026 \\ 65x - x^2 &= 1026 \\ x^2 - 2 \cdot \frac{65}{2} \cdot x + \left(\frac{65}{2}\right)^2 &= -1026 + \frac{65^2}{4} = \frac{4225 - 4104}{4} \\ \left(x - \frac{65}{2}\right)^2 &= \frac{121}{4} \\ x &= \frac{65}{2} \pm \frac{11}{2} \end{aligned}$$

$$x_1 = 38 \quad \Longrightarrow y_1 = 65 - 38 = 27, \qquad x_2 = 27 \quad \Longrightarrow y_2 = 65 - 27 = 38$$

Das Grundstück ist 38 m lang und 27 m breit.

4. Hans hat ein $u = 18\,\mathrm{m}$ langes Kantholz und möchte daraus nebenstehend skizzierten Unterstand mit quadratischer Grundfläche (Kantenlänge x) und der Höhe y bauen. Die Seitenflächen und die Deckfläche sollen mit einer Zeltplane bespannt werden.



(a) Beweise mit *begründeten* Ansätzen für die benötigte Fläche A der Plane:

$$A(x) = xu - 3x^2$$

Welche Definitionsmenge D_A ist konstruktionsbedingt nur sinnvoll?

(b) Berechne die Werte $x = x_\mathrm{m}$ und $y = y_\mathrm{m}$, für die $A(x)$ maximal ist. Wie groß ist die maximale Fläche $A(x_\mathrm{m})$? Zeichne den Grafen von A im Definitionsbereich D_A ($x = 1\,\mathrm{m} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$, $A = 5\,\mathrm{m}^2 \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$).

(c) Drücke das von der Zeltplane und dem Boden eingeschlossene Volumen V durch x aus. Untersuche mit einer geeigneten Methode, ob $V(x_\mathrm{m})$ der maximale Wert von V ist.

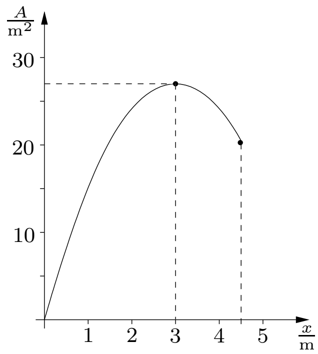
Lösung: (a) $u = 4x + 4y \quad \Longrightarrow \quad y = \dfrac{u}{4} - x$

Vier Seitenflächen und Deckfläche:

$A(x) = 4xy + x^2 = 4x\left(\dfrac{u}{4} - x\right) + x^2 = ux - 4x^2 + x^2 = ux - 3x^2$

Maximales x, wenn $y = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{\max} = \dfrac{u}{4} \quad \Longrightarrow \quad D_A = \left[0; \dfrac{u}{4}\right] = [0\,;\,4{,}5\,\mathrm{m}]$

(b) $A(x) = ux - 3x^2 = -3x\left(x - \dfrac{u}{3}\right)$



Nullstellen von A: $x_1 = 0$ und $x_2 = \dfrac{u}{3} = 6\,\mathrm{m}$

Scheitel bei $x_\mathrm{m} = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{u}{6} = 3\,\mathrm{m}$

$y_\mathrm{m} = \dfrac{u}{4} - x_\mathrm{m} = \dfrac{u}{12} = 1{,}5\,\mathrm{m}$

$A(x_\mathrm{m}) = \dfrac{u}{2}\left(\dfrac{u}{3} - \dfrac{u}{6}\right) = \dfrac{u^2}{12} = 27\,\mathrm{m}^2$

(c) $V(x) = x^2 y = x^2\left(\dfrac{u}{4} - x\right) = x^2(4{,}5\,\mathrm{m} - x), \qquad V(x_\mathrm{m}) = 9 \cdot (4{,}5 - 3)\,\mathrm{m}^2 = 13{,}5\,\mathrm{m}^2$

Berechnung von $V(x)$ mit x knapp neben x_m:

$V(2{,}99\,\mathrm{m}) = 13{,}499551\,\mathrm{m}^3 < V(x_\mathrm{m})$, $V(3{,}01\,\mathrm{m}) = 13{,}499549\,\mathrm{m}^3 < V(x_\mathrm{m}) \quad \Longrightarrow$

$V(x_\mathrm{m})$ scheint der maximale Wert von V zu sein.

Exakter Beweis (der Einfachheit halber rechnen wir ohne Benennungen):

Für $x \in D_A$ kann man schreiben $x = x_\mathrm{m} + \varepsilon = 3 + \varepsilon$ mit $-3 \leqq \varepsilon \leqq 1{,}5$

$$\begin{aligned} V(x) = V(3+\varepsilon) &= (3+\varepsilon)^2(4{,}5 - 3 - \varepsilon) = (9 + 6\varepsilon + \varepsilon^2)(1{,}5 - \varepsilon) = \\ &= 13{,}5 - 4{,}5\varepsilon^2 - \varepsilon^3 = 13{,}5 - \varepsilon^2(4{,}5 + \varepsilon) \end{aligned}$$

$\varepsilon \geqq -3 \quad \Longrightarrow \quad 4{,}5 + \varepsilon > 0 \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon^2(4{,}5 + \varepsilon) \geqq 0 \quad \Longrightarrow \quad V(x) \leqq 3{,}5$

5. (a) Von der Flugbahn der Kugel einer Spielzeugkanone kennt man den Abschusspunkt A $(-30|0)$ und weiter die Punkte B $(0|39)$ und C $(30|60)$. Alle Koordinaten verstehen sich in Zentimetern. Ermittle die Gleichung $f(x)$ der parabelförmigen Flugbahn.

(b) Berechne die Koordinaten des höchsten Punktes H der Flugbahn und des Auftreffpunktes T auf dem Boden ($y = 0$).

Zeichne die Flugbahn im Maßstab 1:20.

Lösung: (a) $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$(0|39) \in f \Longrightarrow \quad a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 39 \quad \Longrightarrow \quad c = 39 \tag{2.1}$$

$$(-30|0) \in f \Longrightarrow \quad 900\,a - 30\,b + 39 = 0 \tag{2.2}$$

$$(30|60) \in f \Longrightarrow \quad 900\,a + 30\,b + 39 = 60 \tag{2.3}$$

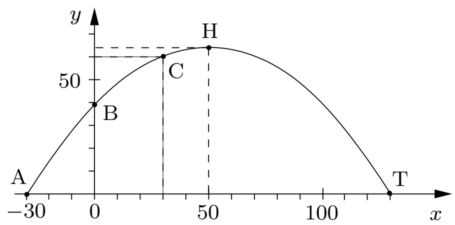
$$(3) - (2): \quad 60\,b = 60 \quad \Longrightarrow \quad b = 1 \tag{2.4}$$

$$\text{in } (2): \quad 900\,a + 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = -0{,}01$$

$$f(x) = -0{,}01\,x^2 + x + 39$$

(b)

$$\begin{aligned} f(x) &= -0{,}01\,x^2 + x + 39 = \\ &= -0{,}01\left[x^2 - 100x\right] + 39 = \\ &= -0{,}01\left[(x-50)^2 - 2500\right] + 39 = \\ &= -0{,}01(x-50)^2 + 25 + 39 = \\ &= -0{,}01(x-50)^2 + 64 \end{aligned}$$



Höchster Punkt: H $(50|64)$

$f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-50)^2 = 6400 \quad \Longrightarrow \quad x = 50 \pm 80, \quad x_1 = -30, \quad x_2 = 130$

Auftreffpunkt: T $(130|0)$

6. Die Punkte $A(0|0)$, $B(8|0)$, $C(8|3)$ und $D(0|15)$ sind Ecken eines Trapezes.

   Jeder Punkt der Trapezseite $\overline{CD}$ ist Eckpunkt eines Rechtecks, das dem Trapez einbeschrieben ist. Die Seiten der einbeschriebenen Rechtecke sind parallel zu den Koordinatenachen. Der Punkt A ist Eckpunkt eines jeden einbeschriebenen Rechtecks.

   (a) Zeichnen Sie das Trapez und berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$.

   (b) Der Punkt $P(2|y)$ liegt auf der Seite $\overline{CD}$ und ist somit Eckpunkt eines einbeschriebenen Rechtecks. Tragen Sie das zugehörige Rechteck in die Figur ein und bestimmen Sie den Flächeninhalt.

   (c) Bewegt sich der Punkt $P(x|y)$ auf der Strecke $\overline{CD}$, so ändert sich der Flächeninhalt F des zugehörigen Rechtecks. Durch welche Gleichung $F(x)$ lässt sich der Flächeninhalt F berechnen?

   (d) Bestimmen Sie das einbeschriebene Rechteck so, dass es den größtmöglichen Flächeninhalt hat.

Quelle: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss

Lösung:
(a) $\frac{1}{2}(15+3)\cdot 8 = 72$
(b) $P(2|12)$, $A = 2\cdot 12 = 24$
(c) $F(x) = x\cdot(-1,5x+15)$
(d) Maximum am Scheitel der nach unten geöffneten Parabel $F(x)$, der in der Mitte der Nullstellen $N_1(0|0)$ und $N_2(10|0)$ liegt $\Rightarrow x = 5$, $F(5) = 37,5$

7. **Skipiste**

Im italienische Bornio findet jährlich ein Abfahrtsrennen im Rahmen des Skiweltcups statt. Die Abfahrtsstrecke ist insgesamt 3270 m lang. Der Start begindet sich in 2255 m Höhe, das Ziel in einer Höhe von 1245 m. Die maximale Steigung beträgt 63%.

(a) Berechne die durchschnittliche Geschwindigkeit eines Rennläufers im $\frac{km}{h}$, der die Strecke in 1 Minute und 54,23 Sekunden bewältigte.
(b) Erläutere, was ,,Steigung 63%" bedeutet. Bestimme den Winkel, den eine Strecke der Steigung 63% mit der Horizontale Bildet.
(c) Berechne die Steigung des Abfahrtstrecke von Bormio, wenn sie mit gleicher Länge geradlinig vom Start zum Zielpunkt verliefe.

Quelle: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss

Lösung:
(a) $103\frac{km}{h}$
(b) $\tan\alpha = 0,63$ ergibt $\alpha \approx 32°$
(c) 32%

8. Wie viele Telefonanschlüsse sind in einer Ortschaft vorhanden, wenn 499 500 gegenseitige Gesprächsverbindungen möglich sind?

Lösung: 1000

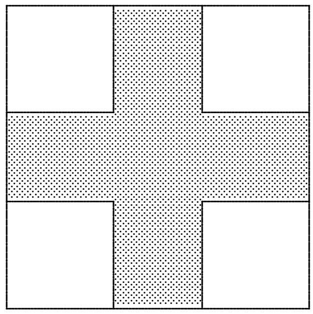
9. Welche rationale Zahl hat folgende Eigenschaft:
Das Produkt der um 1 kleineren Zahl und der um 1 größeren Zahl ist um 31 größer als das halbe Quadrat der gesuchten Zahl!
Fertige einen x-Ansatz an!

Lösung: $L = \{-8; 8\}$

10. In einem Quader mit der Oberfläche $286\,\mathrm{cm}^2$ ist die mittlere Kante $7\,\mathrm{cm}$ lang. Sie unterscheidet sich von der größten Kante ebensoviel wie von der kleinsten. Wie lang sind die Kanten dieses Quaders?

Lösung: $5\,cm, 7\,cm, 9\,cm$

11. In ein weißes Quadrat der Seitenlänge $s = \sqrt{2}\,\mathrm{m}$ ist ein schwarzes Kreuz symmetrisch eingezeichnet (vgl. Abbildung). Wie breit ist das Kreuz, wenn der Flächeninhalt des Kreuzes genauso groß ist wie der des Hintergrundes?



Lösung: Gleichung $2 - 4\sqrt{2}x + 2x^2 = 0$, Ergebnis $\sqrt{2} - 1$

12. Die Einerziffer einer zweistelligen Zahl ist um 5 kleiner als die Zehnerziffer. Multipliziert man die Zahl mit ihrer Zehnerziffer, so ergibt sich die 56fache Quersumme. Wie heißt die Zahl?

Lösung: 72

13. Bei einer dreistelligen Zahl ist die Zehnerziffer um 4 größer als die Einerziffer. Die Zahl ist gleich ihrer Spiegelzahl. Dividiert man die Zahl durch diejenige (zweistellige) Zahl, welche aus der ursprünglichen Zahl durch Streichen der Zehnerziffer hervorgeht, so erhält man um 5 weniger als die Quersumme der ursprünglichen Zahl beträgt. Wie lautet die ursprüngliche Zahl? (x-Ansatz!)

Lösung: 484

14. Im dekadischen Zahlensystem („Zehnersystem“) bedeutet beispielsweise die Zahldarstellung 475, daß $475 = 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5$ gilt.
    Im Duodezimalsystem („Zwölfersystem“) würde die Zahldarstellung 475 bedeuten, daß $475 = 4 \cdot 12^2 + 7 \cdot 12 + 5$ gilt.

    In welchem Zahlensystem hat die Zahl 132 den (dekadischen) Wert 56, in welchem Zahlensystem die Zahl 543 den (dekadischen) Wert 148?

Lösung: Die Zahl 132 im Sechsersystem; die Zahl 543 im Fünfersystem

15. Die Zinsen eines Kapitals von 800 € werden am Ende jeden Jahres zum Kapital geschlagen und dieses zusätzlich noch um 100 € vermehrt, so daß es am Anfang des dritten Jahres auf 1069,28 € angewachsen war. Wie hoch war der (über dem gesamten Zeitraum als konstant angenommene) Zinssatz?

Lösung: 4 %

16. Eine Sammellinse der Brennweite f cm entwirft von einem Körper, der g cm von ihr entfernt ist, ein Bild in der Entfernung b cm. Hierbei gilt die Gleichung $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$. Wie weit ist der Körper von der Linse entfernt, wenn deren Brennweite 14,4 cm beträgt und b um 54 cm kleiner ist als g?

Lösung: $72{,}0\,cm$

17. Zwei Körper, welche den Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks vom Scheitel des rechten Winkels aus mit den Geschwindigkeiten 8 cm bzw. 6 cm pro Sekunde in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, begegnen sich nach 9 Sekunden. Wie lang sind die Seiten des Dreiecks, wenn die eine Kathete um 17 cm länger ist als die andere?

Lösung: $28\,cm; 45\,cm; 53\,cm$

18. Um eine Strecke von 1800 m zurückzulegen, muß das Vorderrad eines Fahrzeugs, dessen Umfang um 1 m kleiner ist als der des Hinterrades, 150 Umdrehungen mehr machen als dieses. Wie oft dreht sich jedes der beiden Räder auf dieser Strecke?

Lösung: 450 bzw. 600 Umdrehungen

19. Das Verkehrsflugzeug für die Strecke von München nach Stuttgart braucht für die 150 km lange Flugstrecke bei Gegenwind der Stärke $25\frac{\text{km}}{\text{h}}$ um 5 min länger als bei Windstille. Wie groß ist die Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs? Es soll angenommen werden, daß diese immer konstant ist.

Lösung: $225\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Vorsicht, Einheiten beachten.

20. Ein Vater ist 60 Jahre, sein Sohn 15 Jahre alt. Vor n Jahren war der Vater n-mal so alt wie der Sohn. Berechne n und mache die Probe!

Lösung: $n_1 = 6 \quad ; \quad n_2 = 10$

21. Ein Vater ist 40 Jahre, sein Sohn 15 Jahre alt. In n Jahren wird der Vater n-mal so alt sein, wie es der Sohn vor n Jahren war. Berechne n und mache die Probe!

Lösung: $n_1 = 4 \quad ; \quad n_2 = 10$

22. Ein Schüler hatte für einen Ferienaufenthalt 252 € gespart. Nachdem sich die Tageskosten um 7 € erhöht hatten, mußte er seinen Aufenthalt um drei Tage verkürzen. Wie viele Tage wollte er ursprünglich bleiben?

Lösung: 12 Tage

23. Für einen Klassenausflug wurde ein Bus um 336 € gemietet. Da am Ausflugstag drei Schüler fehlen, muß der Fahrpreis pro Schüler um 2 € erhöht werden. Wie viele Schüler wollten ursprünglich an der Fahrt teilnehmen?

Lösung: 24 Schüler

24. Max wandert morgens von einer Jugendherberge ab. Sein Freund Hans verläßt die Jugendherberge 50 Minuten später und holt Max nach 12 km um 11.00 Uhr ein. 50 Minuten nach dem Einholen ist Hans seinem Freund Max bereits 1 km voraus.
Wie viele km legen beide in der Stunde zurück und wann marschierten sie von der Jugendherberge ab?

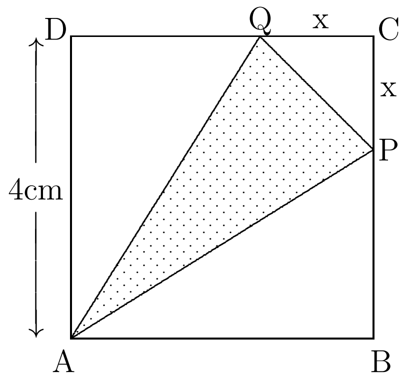
Lösung: Max: $3{,}6\,\frac{km}{h}$; Start um 7.40 Uhr
Hans: $4{,}8\,\frac{km}{h}$; Start um 8.30 Uhr

2.2.2. Extremalwertaufgaben

1. Zeige: Von allen Rechtecken mit Umfang 8 cm hat das Quadrat mit Seitenlänge 2 cm den größten Flächeninhalt.

Lösung:

2. Ein Quadrat ABCD hat die Seitenlänge 4 cm. Trägt man von der Ecke C auf beiden anliegenden Seiten jeweils x cm ab, so erhält man die Punkte P und Q.
   Für welchen x-Wert hat das Dreieck APQ den größten Flächeninhalt?
   Wie groß ist dieser?

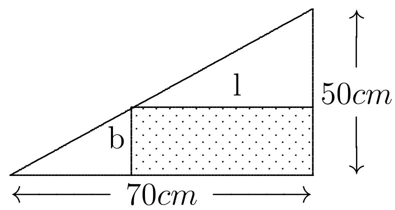


Lösung: Für $x = 4\,\text{cm}$ ist $A = 8\,\text{cm}^2$

3. Die Funktionen f und g sind durch die Terme $f(x) = x^2 + 2,5x + 1,5$ und $g(x) = 0,5 \cdot (x-2)^2 + 4$ gegeben.
   (a) Die Nullstellen von f bilden mit einem beliebigen Punkt $P(x|y)$ des Graphen G_g ein Dreieck. Gib die Koordinaten desjenigen Punktes P von G_g an, für den die Dreiecksfläche minimal wird. (Kurze Begründung!)
   (b) Berechne für diesen Fall die Dreiecksfläche.

Lösung: Weil alle Werte von g positiv sind, wird die Fläche beim Scheitel von G_g minimal, dies ist der Punkt $P(2|4)$. Der Abstand der Nullstellen von f ist $0,5$, der minimale Flächeninhalt ist also $0,5 \cdot 0,5 \cdot 4 = 1$.

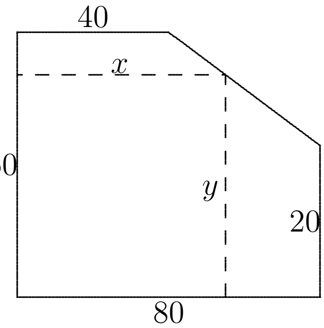
4. Aus einer dreieckigen Marmorplatte soll eine rechteckige Platte herausgesägt werden.



   (a) Zeige mit Hilfe des Strahlensatzes, daß für die Länge l und die Breite b des Rechtecks gilt: $5l + 7b = 350\,\text{cm}$.
   (b) Wie muß man Länge und Breite wählen, damit man die rechteckige Platte mit dem größten Flächeninhalt bekommt? Wie groß ist dieser?

Lösung: $l = 35\,\text{cm}$; $b = 25\,\text{cm}$; $A = 875\,\text{cm}^2$

5. Aus der abgebildeten Platte (alle Maße in mm) soll in der angedeuteten Weise ein Rechteck ausgeschnitten werden (rechte obere Ecke auf der abgeschrägten Seite).



   (a) Stelle eine Funktion $f : x \longmapsto y$ auf, die der Seitenlänge x die Höhe y des Rechtecks zuordnet.

   (b) Bestimme damit eine Funktion $g : x \longmapsto A$, die der Seitenlänge x die Fläche A des Rechtecks zuordnet.

   (c) Für welche Länge x ist die Fläche maximal?

   (d) Gib einen zur Aufgabenstellung passenden Definitionsbereich der Flächenfunktion g an und zeichne sie in diesem Bereich. (Rechtswert im Maßstab 1 : 1, Hochwert $100\text{mm}^2 \mathrel{\widehat{=}} 1\text{cm}$)

Lösung: (a) $y = 100 - x$

(b) $A = (100 - x)x = -(x - 50)^2 + 50^2$

(c) Maximalwert $A = 2500\text{mm}^2$ bei $x = 50\text{mm}$.

2.2.3. lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten

1. Bestimme die Lösung der Gleichungssysteme

   (a) $a + b + c = 3$
   $a + b = 1 + c$
   $b = 1 + a + c$

   (b) $u + 3v + 2w = 6$
   $2u = 6 - v - 3w$
   $3u + w = 6 - 2v$

Lösung: (a) $x = 0$, $y = 2$, $z = 1$

(b) $x = y = z = 1$

2. Bestimme die Lösung der Gleichungssysteme

   (a) $l = n$
   $2m + 2n = 0$
   $3l + n = 2m$

(b) $l = n - 4,5$
$2m + 2n = 9$
$3l + n = 2m + 7,5$

(c) $l = n - 12$
$2m + 2n = -2$
$3l + n = 2m - 4$

Lösung: (a) $l = m = n = 0$
(b) $l = \frac{1}{2}$, $m = -\frac{1}{2}$, $n = 5$
(c) $n = 5$, $m = -6$, $l = -7$

3. Bestimme die Lösung der Gleichungssysteme

(a) $x + 4y + 7z = 12$
$2x + 5y + 8z = 15$
$3x + 6y + 10z = 19$

(b) $x + 4y + 7z = 12$
$2x + 5y + 8z = 15$
$3x + 6y + 9z = 19$

Lösung: (a) $x = y = z = 1$
(b) keine Lösung

4. **Dreiecke mit verschlüsselten Maßangaben**

Acht Dreiecke verraten so viel von ihren Maßen, dass man sie konstruieren kann. Allerdings haben sie ihre Angaben ein wenig verschlüsselt. - Berechne die Maße und konstruiere dann die Dreiecke.
Übrigens: Eins der Dreiecke hat sich wohl geirrt. Mit seinen Maßen ist beim besten Willen kein Dreieck zu konstruieren. Welches Dreieck ist es?

Dreieck 1:
Die Seite c ist 8 cm lang. a und b sind zusammen 10 cm lang, b ist 3 cm größer als a.

Dreieck 2:
Die Höhe h_c und die Seite a sind gleich lang, und zwar 4 cm. Die vierfache Länge von b ist gleich der siebenfachen Länge von a.

Dreieck 3:
Es gilt: $a < b < c$. Je zwei Seiten unterscheiden sich jeweils um 3 cm oder um 6 cm. a ist halb so groß wie c.

Dreieck 4:
Der Umfang beträgt 20 cm. c ist 4 cm länger als b. Die dreifache Länge von b ist um 2 cm länger als die doppelte Länge von c.

Dreieck 5:
Die Winkel α und β sind gleich groß. Die doppelte Länge von a ist die dreifache Länge von c. Der Umfang des Dreiecks beträgt 16 cm.

Dreieck 6:
Der Winkel α beträgt 60°. Die sechsfache Länge von h_c ist die dreifache Länge von c. Die Differenz von h_c und c beträgt 4 cm.

Dreieck 7:
a und b sind zusammen 21 cm lang. Die Länge von b beträgt 75% der Länge von a. c^2 ist um 1 größer als das Vierfache von a.

Dreieck 8:
Der Umfang des Dreiecks beträgt 12 cm. Die Länge von c beträgt 80% der Länge von b. a und b zusammen sind doppelt so lang wie c. Quelle: www.a-paulitsch.de/website/rundumsdreie

Lösung: **Dreieck 1:**
Es wird angegeben: $I: c = 8 \quad II: a + b = 10 \quad III: b = a + 3$
Lösung: $a = 3,5 \quad b = 6,5 \quad c = 8$

Dreieck 2:
Es wird angegeben: $I: \beta = 90°\,(da\ h_c = a) \quad II: a = 4 \quad III: 4b = 7a$
Lösung: $a = 4 \quad b = 7 \quad \beta = 90°$

Dreieck 3:
Es wird angegeben: $I: a + 3 = b \quad II: a + 6 = c \quad III: 2a = c$
Lösung: $a = 6 \quad b = 9 \quad c = 12$

Dreieck 4:
Es wird angegeben: $I: a + b + c = 20 \quad II: c = b + 4 \quad III: 3b = 2c + 2$
Lösung: $a = -4 \quad b = 10 \quad c = 14$
Dieses Dreieck kann nicht konstruiert werden!

Dreieck 5:
Es wird angegeben: $I: a = b\,(da\ \alpha = \beta) \quad II: 2a = 3c \quad III: a + b + c = 16$
Lösung: $a = 6 \quad b = 6 \quad c = 4$

Dreieck 6:
Es wird angegeben: $I: \alpha = 60° \quad II: 6h_c = 3c \quad III: c - h_c = 4$
Lösung: $\alpha = 60° \quad h_c = 4 \quad c = 8$

Dreieck 7:
Es wird angegeben: $I: a + b = 21 \quad II: b = 0,75a \quad III: c^2 = 4a + 1$
Lösung: $a = 12 \quad b = 9 \quad c = 7$

Dreieck 8:
Es wird angegeben: $I: a + b + c = 12 \quad II: c = 0,80b \quad III: a + b = 2c$
Lösung: $a = 3 \quad b = 5 \quad c = 4$

5. **Aufgabe zur Anwendung**

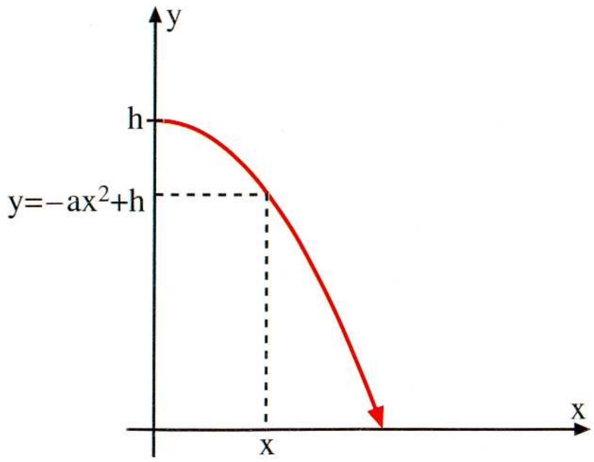
   Das *Alte Land* ist ein wichtiges Obstanbaugebiet in Norddeutschland. Hier befindet sich eine kleine Fabrik, die aus dort angebautem Obst drei Sorten von Produkten herstellt: Obstsalat, Multivitaminsaft und Marmelade.
   In der Hauptsaison sollen aus Äpfeln, Birnen und Kirschen pro Monat 100 kg Obstsalat, 500 l Saft (1 l $\cong$ 1 kg) und 200 kg Marmelade hergestellt werden. Für den Obstsalat werden zu gleichen Anteilen Äpfel, Birnen und Kirschen verwendet. Pro Liter Multivitaminsaft werden an Gewicht dreimal so viele Äpfel wie Kirschen und doppelt so viele Birnen wie Kirschen verwendet. Für die Herstellung der Marmelade kommen auf ein Kilogramm jeweils gleich viele Äpfel und Birnen.
   Welche Fruchtmengen sind für die Herstellung dieser Produkte erforderlich?

Lösung: Man benötigt 383, 33 kg Äpfel, 300, 33 kg Birnen und 216, 33 kg Kirschen.

2.2.4. gemeinsame Punkte von Funktionsgraphen

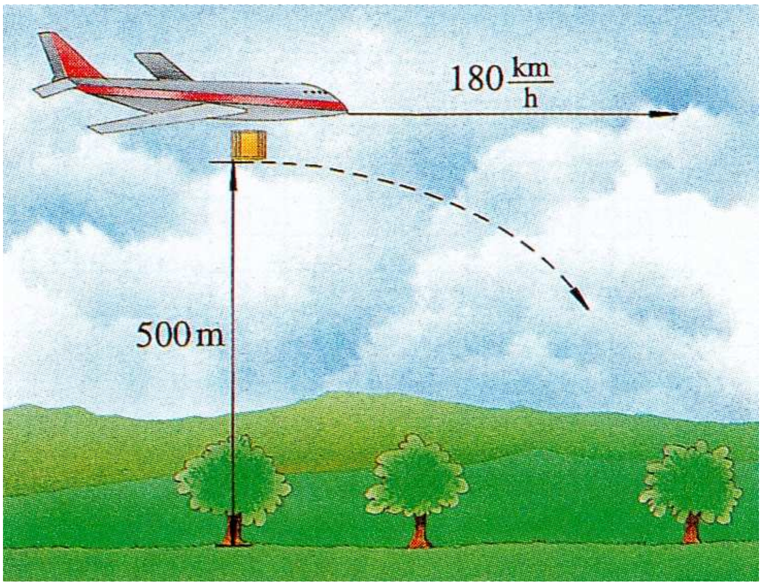
1. **Anwendungen der quadratischen Funktionen und Gleichungen**

   Wirft man einen Gegenstand parallel zur Erde, so hat seine Flugbahn die Form einer halben Parabel. Die Gleichung dieser Parabel

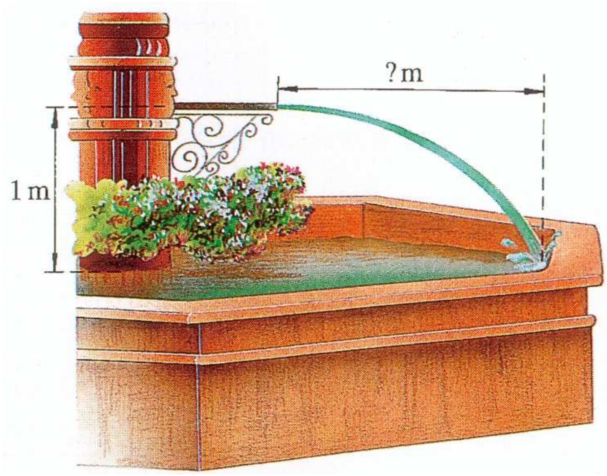


hat die Form $y = -ax^2 + h$.
Für den Wert von a gilt: $a \approx \frac{5}{v^2}$.
Dabei ist v die Abwurfgeschwindigkeit (in $\frac{m}{s}$), x die Entfernung vom Abwurfpunkt in vertikaler Richtung (in m) und y die Höhe (in m), h ist die Abwurfhöhe (in m).

(a) Ein Flugzeug, das mit der Geschwindigkeit von 180 $\frac{km}{h}$ (relativ zur Erde) fliegt, wirft ein Versorgungspaket ab. Wie weit von dem linken Baum entfernt landet das Paket?



(b) Bei dem Springbrunnen tritt das Wasser aus dem Rohr mit der Geschwindigkeit $3,5\,\frac{m}{s}$ aus.
Wie weit muss der Rand des Wasserbeckens mindestens von der Rohröffnung entfernt sein?



Lösung: (a) 500 m

(b) 1,57 m

2.2.5. Bruchgleichungen

Definitionsmenge

1. Gib jeweils die Definitionsmenge an:

$$\frac{4x-3}{2x+5} \quad ; \quad \frac{1}{-x^2+6x-9}$$

Lösung: $D_1 = \mathbb{Q}\backslash\{-2,5\}$; $D_2 = \mathbb{Q}\backslash\{3\}$

2. Gib jeweils die Definitionsmenge an:

$$\frac{5x+2}{2x-3} \quad ; \quad \frac{1}{-x^2+4x-4}$$

Lösung: $D_1 = \mathbb{Q}\backslash\{1,5\}$; $D_2 = \mathbb{Q}\backslash\{2\}$

3. Gib jeweils die Definitionsmenge an:

$$\frac{38x}{x^2-9} \quad ; \quad \frac{12b}{19+19b^2+38b}$$

Lösung: $D_1 = \mathbb{Q}\backslash\{-1\}$; $D_2 = \mathbb{Q}\backslash\{-3;3\}$

4. Gib jeweils die Definitionsmenge an:

$$\frac{83x}{x^2-4} \qquad ; \qquad \frac{12a}{18a^2+18+36a}$$

Lösung: $D_1 = \mathbb{Q}\backslash\{-2;2\}$; $\quad D_2 = \mathbb{Q}\backslash\{-1\}$

5. Bestimme jeweils ausführlich die Definitionsmenge folgender Bruchterme:

(a) $\dfrac{14x}{25x^2-1}$ (b) $\dfrac{2}{3x-6x^2+3x^3}$ (c) $\dfrac{1}{x^3-x-2x^2+2}$

Lösung: (a): $D = \mathbb{Q} \setminus \{\pm\frac{1}{5}\}$ (b): $D = \mathbb{Q} \setminus \{0;1\}$ (c): $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1;1;2\}$

Multipikation und Division

1. Vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{4x-(x+1)^2}{9y^2+x^2} : \frac{6x^2-6}{(3y+x)^2-6xy}$$

Lösung: $\frac{1-x}{6(x+1)}$

2. Fasse zusammen und vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{4x^2-4x+1}{x^4-1} \cdot \frac{(2x-1)^2+8x}{1-4x^2} : \frac{2x-1}{x^2-1}$$

Lösung: $\dfrac{2x+1}{(x^2+1)\cdot(-1)}$

3. Fasse zusammen und vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{(x+2)^2-8x}{x^2+9y^2} : \frac{24-6x^2}{6xy-(x+3y)^2}$$

Lösung: $\dfrac{x-2}{6\cdot(x+2)}$

Addition und Subtraktion

1. Fasse zusammen und gib das Ergebnis in gekürzter Form an:

$$\frac{(2a-3b)^2}{3a^2b} - \frac{(2a+3b)^2}{3a^2b}$$

Lösung: $-\frac{8}{a}$

2. Fasse zusammen und gib das Ergebnis in gekürzter Form an:

$$\frac{2a^2-12b^2}{a^2-16b^2} - \frac{2a-3b}{2a-8b} - 1$$

Lösung: $-\frac{5b}{2(a+4b)}$

3. Fasse zusammen und vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{2x+3}{6x-4} - \frac{5-4x}{9x+6} + \frac{62-12x^2-7x}{24-54x^2}$$

Lösung: 1

4. Bestimme den Hauptnenner, fasse zusammen und kürze:

$$\frac{3x}{(x-y)^2} - \frac{2}{x-y} - \frac{3y}{(y-x)^2}$$

Lösung: $\frac{1}{x-y}$

5. Bestimme den Hauptnenner, fasse zusammen und kürze soweit wie möglich:

$$\frac{-m}{2m+2x} - \frac{3m}{3x-3m} + \frac{m^2}{m^2-x^2}$$

Lösung: $\frac{3m}{2(m-x)}$

6. Bestimme den Hauptnenner und vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{2}{1-n^2} - 1$$

Lösung: -1

7. Vereinfache soweit wie möglich und gib die Definitionsmenge D_0 des ursprünglichen Terms sowie D_1 des vereinfachten Terms an:

$$\frac{2\,x}{4\,x^2-1} - \frac{x}{4\,x^2-4\,x+1} - \frac{1}{4\,x+2}$$

Lösung: $\dfrac{-1}{2\,(2\,x-1)^2}$; $D_0 = \mathbb{Q}\setminus\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$; $D_1 = \mathbb{Q}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$

8. Fasse zusammen und vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{-15y+10x}{-4x^2+9y^2} - \frac{27y-12x}{(4x-9y)^2} - \frac{6x}{-3xy-2x^2}$$

Lösung: $\dfrac{10x}{(3y+2x)\cdot(4x-9y)}$

9. Fasse zusammen und vereinfache!

$$\frac{3a-8}{a^2-8a+16} - \frac{2a+12}{a^2-16} - \frac{1}{2a+8}$$

Lösung: $\dfrac{a+4}{2(a-4)^2}$

Bruchterme vereinfachen

Bruchterme zusammenfassen

1. Vereinfache soweit wie möglich:

$$\left[\frac{5x+2y}{5x-2y} - \frac{8y^2+20xy}{25x^2-4y^2}\right] : \frac{5x+2y}{12y^2+60xy+75x^2}$$

Lösung: $3(5x+2y)$

2. Vereinfache soweit wie möoglich:

$$\left(1+\frac{y}{x+y}\right)\cdot\left(\frac{2xy-x^2}{x^3-x^2y}:\frac{x^2-4y^2}{x^2-y^2}\right)$$

Lösung: $\frac{-1}{x}$

3. Vereinfache soweit wie möglich:

$$\left[\left(\frac{a}{x}-\frac{b}{y}\right):\left(\frac{1}{ay}+\frac{1}{ax}\right)\right]\cdot\frac{x^2-y^2}{abx-a^2y}$$

Lösung: $y-x$

4. Berechne und vereinfache soweit wie möglich:

$$\left(\frac{1-x}{3y-8x}-\frac{x-1}{3y+8x}\right):\left(\frac{1}{8x^2-3xy}\cdot\frac{6x}{y}\right)$$

Lösung: $\frac{y^2(x-1)}{8x+3y}$

5. Vereinfache soweit wie möglich: $\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)\cdot\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)$

Lösung: $-\dfrac{x^2+y^2}{x^2\,y^2}$

6. Berechne und vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{(x-y)^2}{4xy}+1}$$

Lösung: $\frac{4(x-y)}{x+y)}$

7. Vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{\frac{y^3-y^2z}{z^2}}{\frac{y^3-yz^2}{z}}$$

Lösung: $\frac{y}{z(y+z)}$

8. Vereinfache möglichst weitgehend:

(a) $\dfrac{1}{6a} + \dfrac{3a^2b + ab^2}{4a + 4b} : \dfrac{3a^2b^2}{a + b}$ (b) $\dfrac{\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}}{x^2 + y^2} \cdot (x^2 - y^2) - \dfrac{(x + y)^2 - x^2 - y^2}{x^3 + xy^2}$

Lösung: (a): $\dfrac{a + b}{4ab}$ (b): 0

9. Fasse zusammen und vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{1}{2x} - \frac{x^2 + xy - x - y}{2x^3 - 8x} : \frac{x - 1}{8 - 4x}$$

Lösung: $\dfrac{5x + 4y + 2}{2x \cdot (x + 2)}$

10. Fasse zusammen und vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{\dfrac{xy + 1}{y^2 - 1} + \dfrac{x}{y^2 + y}}{\dfrac{1}{y^2 + y}} - \frac{x}{y - 1} : \frac{1}{y^2 + y}$$

Lösung: $\dfrac{y - x}{y - 1}$

11. Vereinfache soweit wie möglich!

(a) $\left(\dfrac{y - 5x}{y + 5x} + \dfrac{20xy}{y^2 - 25x^2}\right) : \dfrac{5x + y}{25x^2 - 10xy + y^2}$

(b) $\dfrac{\frac{22a}{7a^2 - 7} - \frac{3}{a - 1}}{\frac{21 - a}{a - 1}}$

Lösung: (a) $y - 5x$

(b) $-\dfrac{1}{7(a + 1)}$

12. Fasse soweit wie möglich zusammen!

(a) $\dfrac{1-x}{x^2+x} - \dfrac{2x-3}{2x-2x^2} - \dfrac{2x^2+x-5}{2x^3-2x}$

(b) $\dfrac{100x^2-36y^2}{85ab^2} : \dfrac{(3y-5x)^2}{51a^2}$

Lösung: (a) $-\dfrac{1}{x+1}$

(b) $\dfrac{12a(5x+3y)}{5b(5x-3y)}$

13. Fasse soweit wie möglich zusammen!

(a) $\dfrac{3-2a}{2a^2-2a} - \dfrac{2a^2+a-5}{2a-2a^3} + \dfrac{a-1}{a^2+a}$

(b) $\dfrac{(5a-4b)^2}{39x^2y} : \dfrac{64b^2-100a^2}{65xy^2}$

Lösung: (a) $\dfrac{1}{a+1}$

(b) $\dfrac{5y(4b-5a)}{12x(4b+5a)}$

14. Gib die Bedingungen an, die für a und b gelten müssen und vereinfache den Term soweit wie möglich!

$$\left(\frac{5a}{b} - \frac{b}{5a}\right) \cdot \left(1 + \frac{b}{b-5a} + \frac{25a^2}{b^2-25a^2}\right) : \left(1 + \frac{2b}{5a}\right)$$

Lösung: Bedingungen: $a, b \neq 0$, $b \neq 5a$, $b \neq -5a$
Term: -1

15. Vereinfache soweit wie möglich!

$$\left(\frac{b-4a}{b+4a} + \frac{16ab}{b^2-16a^2}\right) : \frac{4a+b}{16a^2-8ab+b^2}$$

Lösung: $b - 4a$

Bruchgleichungen lösen

1. Jemand behauptet, einen Bruch mit folgenden Eigenschaften gefunden zu haben:

   Der Bruch hat den Wert $\frac{1}{3}$. Vermindert man Zähler und Nenner des Bruches um 1 und subtrahiert den neu entstandenen Bruch vom doppelten Wert des ursprünglichen Bruches, so erhält man $\frac{1}{9}$ des Kehrwertes des ursprünglichen Bruches.

   Zeige mit Hilfe einer ausführlichen Rechnung, daß es einen solchen Bruch nicht geben kann!

Lösung:

2. Bestimme die Definitions- und Lösungsmenge des angegebenen Bruchterms:

$$-\frac{2}{t+3}+\frac{4t+1}{t^2-9}-\frac{2t-5}{2t-6}=-1$$

Lösung: $D=\mathbb{Q}\setminus\{-3;3\}$; $L=\{-\frac{11}{3}\}$

3. Gib die Definitionsmenge an und berechne die Lösungsmenge:

$$\frac{3}{4\,x^2-81}-\frac{14-3\,x}{6\,x-27}=\frac{2\,x-1}{4\,x+18}$$

Lösung: $D=\mathbb{Q}\backslash\{-\frac{9}{2}\,;\,\frac{9}{2}\}\quad ;\quad x=\frac{9}{2}\notin D \quad\Longrightarrow\quad L=\{\}$

4. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge über $G=\mathbb{Q}$:

$$\frac{3x}{4x-6}-\frac{x+5}{6x+9}=2-\frac{17x^2-4}{12x^2-27}$$

Lösung: $G=\mathbb{Q}\setminus\{\pm\frac{3}{2}\}$, $L=\{-10\}$

5. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge:

$$\frac{3x}{3x+2}-\frac{2-3x}{9x^2+12x+4}=1$$

Lösung: $D=\mathbb{Q}\setminus\{-\frac{2}{3}\}$, $L=\{-2\}$

6. Gib für folgende Gleichung die Definitions- und die Lösungsmenge an ($G=\mathbb{Q}$)!

$$\frac{5x+2}{36-12x}-\frac{15}{6x^2-54}=\frac{5x+20}{12x+36}-\frac{5}{6}$$

Lösung: $D = \mathbb{Q} \setminus \{-3; 3\}$, $L = \{\}$

7. Gib die Definitions- und die Lösungsmenge an ($G = \mathbb{Q}$)!

$$\frac{5x+10}{12x+18} - \frac{5}{6} = \frac{5x+1}{18-12x} - \frac{5}{8x^2-18}$$

Lösung: $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$, $L = \{\}$

8. Löse nach x auf und bestimme die Lösungsmenge in Abhängigkeit von r:

$$\frac{r-x}{x+r} - \frac{x+r}{r-x} = \frac{4(r^2+r)}{x^2-r^2}$$

Lösung: $r \neq 0$ und $r \neq -\frac{1}{2}$: $L = \{r+1\}$, $r = 0$: $L = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $r = -\frac{1}{2}$: $L = \{\}$

9. Gib jeweils die Definitions- und Lösungsmenge an. Führe Fallunterscheidungen durch, wo es nötig ist.
   (a) $\dfrac{3x-4a}{x-a} - \dfrac{2x+3a}{x} = 1$
   (b) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

Lösung: (a) $D = \mathbb{Q}\setminus\{0; a\}$ $\quad L_{a=0} = D$; $\quad L_{a\neq 0} = \{\frac{3}{4}a\}$
(b) $D = \mathbb{Q}\setminus\{0\},\ a, b \neq 0$; $\quad L_{a=-b} = \{\}$; $\quad L_{a\neq -b} = \{\frac{ab}{a+b}\}$

10. Bestimme die Definitions- und Lösungsmenge (Fallunterscheidung!):

$$\frac{x-7}{x-a} + \frac{x+7}{x+b} = 2$$

Lösung: $D = \mathbb{Q}\setminus\{a; b\}$;
$L_{a\neq b} = \{\frac{7a+7b-2ab}{a-b}\}$; $\quad L_{a=b=0} = L_{a=b=7} = D$; $\quad L_{sonst} = \{\}$

11. Wir betrachten die Gleichung: $$\frac{6\,x}{12\,x^2-75} - \frac{b}{4\,x^2-20\,x+25} = \frac{1}{2\,x+5} \qquad (1)$$
   (a) Bestimme die Definitionsmenge D der Gleichung und berechne x zunächst ohne Berücksichtigung jeglicher Fallunterscheidung! Der Rechenweg zählt, nicht das Ergebnis!

(b) Das Ergebnis von Teilaufgabe (a) lautet: $x = \dfrac{5\,b + 25}{10 - 2\,b}$

Bestimme jetzt die Lösungsmenge der Gleichung (1) mit Berücksichtigung aller Fälle für den Parameter b!

Lösung: $D = \mathbb{Q}\backslash\{-\frac{5}{2}\,;\,\frac{5}{2}\}$
Der Lösungsterm ist nicht definiert für $b = 5$; für $b = 0$ ist $x = \frac{5}{2} \notin D$

$$\Longrightarrow \quad L = \begin{cases} \{\} & \text{für} \quad b = 0 \text{ oder } b = 5 \\ \left\{\frac{5\,(5+b)}{2\,(5-b)}\right\} & \text{sonst} \end{cases}$$

12. Löse nach T_2 auf und gib die Bedingung an, unter der das Auflösen nur möglich ist!

$$S = Q\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$$

Lösung:

$$T_2 = \frac{QT_1}{Q - ST_1} \qquad \text{für} Q \neq ST_1$$

13. Löse nach m auf und gib die Bedingung an, unter der das Auflösen nur möglich ist!

$$f = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) R$$

Lösung:

$$m = \frac{nR}{R - nf} \quad \text{mit} \quad R \neq nf$$

14. Gib die Definitions- und Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ an!

$$\frac{b}{ax - a^2} - \frac{x - a}{b} = \frac{bx - a^3 - ax^2}{a(bx - ab)} \quad \text{mit } a,\, b > 0$$

Lösung: $D = \mathbb{Q} \setminus \{a\}$, $L = \left\{\dfrac{b^2}{b - 2a^2}\right\}$, für $b \neq 2a^2$

3. Erweiterung des Potenzbegriffs

3.1. allgemeine Wurzeln

1. In dieser Aufgabe ist $a > 0$ und $b < 0$. Berechne die Lösungsmenge:

   (a) $x^4 = a$ (b) $x^8 = b$ (c) $x^7 = a$ (d) $x^5 = b$

Lösung: (a) $L = \left\{\pm a^{\frac{1}{4}}\right\}$ (b) $L = \{\}$ (c) $L = \left\{a^{\frac{1}{7}}\right\}$ (d) $L = \left\{-|b|^{\frac{1}{5}}\right\}$

2. (a) Lösung der Gleichung $\sqrt[4]{x} = \sqrt{14}$ über $G = \mathbb{R}_0^+$
   (b) Diskriminante der Gleichung $x^2 - 5x + 0,5 = 0$
   (c) $\sqrt[3]{79507}$
   (d) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} + \sqrt{\sqrt[3]{10^{12}}} - \sqrt{1600} =$
   (e) $6! + 1!$

   Quelle: Kreuzzahlrätsel von Ulrike Schätz

Lösung: (a) 196 (b) 23 (c) 43
(d) 62 (e) 721

3.2. Rechenregeln für Potenzen mit rationalen Exponenten

3.2.1. Rechengesetze - Herleitung und Illustration

1. M sei die Menge aller Potenzen, die jede der drei Ziffern 4, 3 und 2 genau einmal und sonst keine Ziffer enthalten. Die Potenzen dürfen Klammern, aber keine Rechenzeichen enthalten. Die beiden Potenzen $(3^2)^4$ und 32^4 sind z.B. Elemente von M.
   (a) Wie viele verschiedene Reihenfolgen der drei Ziffern gibt es? Wie viele verschieden aussehende Potenzen mit diesen drei Ziffern sind also möglich?
   (b) Suchen Sie die beiden größten und das kleinste Element von M, wobei alle Versuche genau zu protokollieren und Strategien der Suche kurz zu erläutern sind!

Lösung: 6 Reihenfolgen, 4 Möglichkeiten: $\left(a^b\right)^c$; a^{b^c} ; ab^c und a^{bc}
(ab und bc sind zweiziffrige Zahlen, keine Produkte!)
$\Longrightarrow \quad 4 \cdot 6 = 24$ verschieden aussehende Möglichkeiten.
$2^{3^4} = 2^{81} \approx 2{,}42 \cdot 10^{24}$; $\quad 3^{42} \approx 1{,}09 \cdot 10^{20}$; $\quad 34^2 = 1156$

2. Jemand glaubt, dass $\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b} = \sqrt[6]{a+b}$ ist $(a, b \in \mathbb{R})$. Überzeugen Sie ihn durch ein einfaches Zahlenbeispiel, dass er nicht recht hat!
Nennen Sie eine Rechenregel, die so ähnlich aussieht und richtig ist!

Lösung: Wähle etwa $a = 1,\ b = 64$; Ersetze „ + “ durch „ · “!

3. Die Gleichung $3^2 + 4^2 = 7^2$ ist anscheinend falsch.
   (a) Gibt es Zahlen a und b, für die die entsprechend gebildetete Gleichung $a^2 + b^2 = (a+b)^2$ richtig ist? Begründen Sie Ihre Vermutung.
   (b) Wann gilt die Gleichung $a^3 + b^3 = (a+b)^3$

Lösung: Die binomische Formel zeigt im ersten Fall, dass $a = 0$ oder $b = 0$ sein muss. Im zweiten Fall genügt $a = -b$.

4. Unter welchen Bedingungen für $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\text{(a)} \quad \sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}} \qquad \text{(b)} \quad \sqrt[m]{x^n} = |x|^{\frac{n}{m}}$$

Lösung: (a) für $x \geqq 0$
(b) für n gerade und $x \in \mathbb{R}$ bzw. für n ungerade und $x \geqq 0$

5. Im Unterricht wurde das 1. Monotoniegesetz für Potenzen besprochen und bewiesen. Hiernach gilt für $n \in \mathbb{N}$ und beliebige Zahlen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$:
$x_1 < x_2 \Longrightarrow x_1^n < x_2^n$
Führen Sie den Beweis nochmals im Detail durch!

Lösung:

6. Im Unterricht wurde das 2. Monotoniegesetz für Potenzen besprochen und bewiesen. Hiernach gilt für $x \in \mathbb{R}^+$ und beliebige natürliche Zahlen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$:

$$n_1 < n_2 \Longrightarrow \begin{cases} x^{n_1} < x^{n_2} & \text{wenn} \quad 1 < x < \infty \\ x^{n_1} > x^{n_2} & \text{wenn} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

Führen Sie den Beweis nochmals im Detail durch!

Lösung:

7. Ordnen Sie der Größe nach und begründen Sie:
   $(\frac{1}{2})^{403}$, $(\frac{1}{4})^{203}$, $(\frac{1}{8})^{120}$, 16^{102}, $(-\frac{1}{4})^{201}$, 4^{-210}, $(-2)^{360}$

Lösung: $(-\frac{1}{4})^{201} < 4^{-210} < (\frac{1}{4})^{203} < (\frac{1}{2})^{403} < (\frac{1}{8})^{120} < (-2)^{360} < 16^{102}$

8. Ordnen Sie ohne Benutzung des Taschenrechners folgende Potenzen der Größe nach, mit kurzer Begründung:
   $$0{,}25^{2{,}8};\ 5^{-3{,}1};\ 4^{-3{,}1};\ 5^{-4{,}1}$$

Lösung: $5^{-4{,}1} < 5^{-3{,}1} < 4^{-3{,}1} < 0{,}25^{2{,}8}$

3.2.2. Nur Multiplikation und Division

Exponenten ganzzahlig

1. Es gibt $x = 26^{1000}$ verschiedene Texte mit einer Länge von 1000 Buchstaben. Nach einer geeigneten Umformung ist x mit Hilfe des Taschenrechners in der Gleitkommadarstellung ($a \cdot 10^n$ mit $1 \leqq a < 10$ und $n \in \mathbb{N}$) mit drei geltenden Ziffern hinzuschreiben.

Lösung: $x = (26^{10})^{100} = (1{,}41167 \cdot 10^{14})^{100} = 1{,}41167^{100} \cdot 10^{1400} = 9{,}40 \cdot 10^{1414}$

2. Berechne mit dem Taschenrechner (5 gültige Ziffern):
   $$\sqrt[5]{\frac{2{,}47^4 - 0{,}1662^{-2} \cdot 0{,}47^3}{0{,}21^3}}$$

Lösung: 5,1473

3. Vereinfachen Sie:
   $$\left[\frac{a^2(bc)^4}{(ab)^4c^3}\right] \cdot \left[\frac{a^5b^0c^2}{a^7c^6}\right]^3$$

Lösung: $a^{-8}c^{-11}$

4. Vereinfachen Sie möglichst weitgehend und schreiben Sie das Endergebnis ohne Bruchstrich:

$$\frac{(3u^4v^{-1})^2}{(9u^{-2}v^{-3})^{-1}} : \frac{(2u^{-6}v^3)^{-3}}{(2u^5v^{-2})^4}$$

Lösung: $2^7 \cdot 3^4 \cdot u^8 \cdot v^{-4}$

5. Vereinfachen und schreiben Sie das Ergebnis ohne Bruchstrich:

$$\frac{0{,}8a^6b^{-5}c^3}{3^{-3}a^{-3}b^4} : \frac{9b^{-1}}{a^{-4}c^2}$$

Lösung: $2{,}4a^5b^{-8}c^5$

6. Vereinfachen Sie:

$$\left[\left(\frac{2a^{-1}b^2}{3a^5c^{-3}}\right)^3 : \left(\frac{3a^6b^{-4}}{7a^{-2}c^4}\right)^{-2}\right] \cdot \left(\frac{-c^0}{7a}\right)^{-1}$$

Lösung: $-\frac{8c}{21ab^2}$

7. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$(3a-7b)^{2n+1} \cdot (7b-3a)^{2n+1}$$

Lösung: $-(3a-7b)^{4n+2}$

8. Vereinfachen Sie:

$$\frac{r^{3m+2}}{a^{m+3}} : \frac{r^{2m-2}}{a^{m+2}}$$

Lösung: $r^{m+4}a^{-1}$

9. Vereinfachen Sie:

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{-y^{2m+4}}{x^{n-2}}\right)^4 : \left[\left(\frac{y^{m-8}}{x^{n+2}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4x^{-2n+1}}{3y^{-3m}}\right)^{-3}\right]$$

Lösung: $-y^{19m}x^{-12n+7}$

10. Vereinfachen Sie so weit wie möglich ($a, b \in \mathbb{Z}$):

$$\frac{x^{2a+5}}{(-y^3)^{2b+5} \cdot [(-z)^4]^{3b+3}} : \frac{x^{2a}}{(yz)^{6b+10} \cdot [(-z)^3]^{2b-1}}$$

Lösung: $\dfrac{x^5}{y^5 \cdot z^5}$

11. Vereinfachen Sie folgenden Term so weit wie möglich:

$$(-1{,}5)^{-6} \cdot \left[(2{,}5a)^n \cdot \frac{b}{(-1)^{n-1} \cdot (x+y)^{n+1}}\right]^6 : \left[\left(a - \frac{1}{2}a\right)^{-n} \cdot \frac{(-y-x)^{n+1} \cdot b^{-1}}{15^{n-1} \cdot 3^{-n}}\right]^{-6}$$

Lösung: 10^6

12. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\left(\frac{6a^2b^{-2}}{c^{n+1}d^{2n}}\right)^3 : \left[\frac{2(cd)^n}{(ab)^{-1}} \cdot \frac{c^n d^{2n}}{3ab^{-2}}\right]^{-2}$$

Lösung: $2^5 \cdot 3 \cdot a^6 c^{n-3}$

13. Vereinfachen Sie soweit wie möglich und schreiben Sie ohne Nenner:

$$\left(-\frac{5a^k c^m}{3b^{-n}}\right)^{-4} \cdot \left[\frac{1}{(9c^{2m})^2} : \left(\frac{b^{-n}}{25}\right)^2\right]$$

Lösung: $a^{-4k}b^{-2n}c^{-8m}$

14. Vereinfachen Sie möglichst weitgehend und schreiben Sie das Ergebnis ohne Verwendung von Klammern und Brüchen:

$$\left(\frac{r^{3n}s^{-7}}{5s^{-4}}\right)^{-2} : \left(\frac{r^{1-n}}{s^6}\right)^2$$

Lösung: $25r^{-4n-2}s^{18}$

15. Geben Sie ohne Bruchstrich an:

$$\frac{-5a^m b^{-n} d^3}{8c^{-2}} : \frac{10a^{-n} b^m d^{-4}}{24c^{-1}}$$

Lösung: $-1{,}5a^{m+n}b^{-m-n}cd^7$

16. Schreiben Sie möglichst einfach mit positiven Exponenten:

$$\left\{\left[\frac{(-3)(-a)^{-2}c^{4-2m}d^0}{16b^{-3}d^{-2}}\right]^{-2} \cdot \left[\frac{-9(-c)^{-3}}{8a^{-5}b^9}\right]^3\right\} : \left[\frac{a^5 b^{-7}}{c^{5-m}}\right]^4$$

Lösung: $\frac{81c^3}{2ab^5d^4}$

17. Vereinfachen Sie folgenden Term so weit wie möglich! Im Ergebnis sollen nur positive Exponenten auftreten!

$$\left[\left(\frac{5x^0 \cdot 100}{0{,}02^{-2} \cdot (-y)^{l-3}}\right)^4 : \left(\frac{y^{5-2l}}{-(-yx^2)^0}\right)^2\right]^{-5} \cdot (-0{,}02^{-30})^{-1} \cdot (-5)^{-20}$$

Lösung: $-\dfrac{1}{(50^3 \cdot y)^{10}}$

18. Vereinfachen Sie:

$$\left[(-1)^{2n+1} - (-1)^{2n}\right]^5; \quad n \in \mathbb{N}$$

Lösung: -32

Exponenten rational oder reell

1. In einem Physikbuch findet man für die sogenannte Fermi-Energie folgende Formel (alle auftretenden Variablen sind positiv):

$$E = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Löse nach V auf und schreibe das vereinfachte Ergebnis in der Form

$$\text{Bruch} \cdot (\text{Bruch})^3 .$$

Das Volumen V ist der Rauminhalt eines Würfels mit der Kantenlänge a. Berechne einen Ausdruck für a.

Lösung: $\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{8mE}{h^2} \implies \frac{3N}{\pi V} = \left(\frac{8mE}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \implies V = \frac{3N}{\pi}\left(\frac{h^2}{8mE}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3N}{\pi}\left(\frac{h}{\sqrt{8mE}}\right)^3$

$V = a^3 \quad \implies \quad a = V^{\frac{1}{3}} = \frac{h}{\sqrt{8mE}} \cdot \left(\frac{3N}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{h}{\sqrt{8mE}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3N}{\pi}}$

2. Vereinfachen Sie ($a \in \mathbb{R}^+$): (a) $\left(a^2\right)^{\sqrt{2}} \cdot a^{\sqrt{2}}$ (b) $\left(\sqrt{a}\right)^3 : \sqrt[3]{a^2}$
   Berechnen Sie die Lösungsmenge ohne Verwendung des Taschenrechners: (c) $x^8 = 16$ (d) $8^x = 16$

Lösung: (a) $a^{2\sqrt{2}+\sqrt{2}} = a^{3\sqrt{2}}$

(b) $a^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}} = a^{\frac{5}{6}}$

(c) $x = \pm 16^{\frac{1}{8}} = \pm 2^{\frac{4}{8}} = \pm\sqrt{2}; \quad L = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

(d) $2^{3x} = 2^4; \quad x = \frac{4}{3}$

3. Vereinfachen Sie ($b \in \mathbb{R}^+$): $(b^2)^{-0{,}27} : b^{0{,}46}$

Lösung: $\frac{1}{b}$

4. Vereinfachen Sie:

$$\left[\left(\sqrt[4]{a}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$$

Lösung: $\sqrt{a}$

5. Berechnen Sie folgenden Term und schreiben Sie den Zahlenwert im Ergebnis als Dezimalzahl:

$$\left(0{,}000\,000\,512 \cdot x^{\frac{3}{8}} \cdot u^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{4}{9}}$$

Lösung: $0{,}0016 \cdot u \cdot x^{\frac{1}{6}}$

6. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und schreiben Sie das Ergebnis unter Verwendung des Wurzelzeichens:

$$\sqrt[6]{6 \cdot \sqrt[4]{6 \cdot \sqrt[3]{6}}}$$

Lösung: $\sqrt[9]{36}$

7. Vereinfachen Sie folgenden Term:

$$\frac{a^{-\frac{7}{8}} \cdot b}{c^{-\frac{1}{2}}} : \frac{b^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{3}{4}}}{a}$$

Lösung: $a^{\frac{1}{8}} b^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{4}}$

8. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und schreiben Sie das Ergebnis ohne negative Exponenten:

$$\left(\frac{4x^{-3}y^2}{z^5}\right)^{-\frac{2}{3}} : \left(\frac{16y^{-2}}{x^{-6}z^4}\right)^{\frac{1}{6}}$$

Lösung: $\dfrac{xz^4}{4y}$

9. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und schreiben Sie das Ergebnis ohne Nenner ($x, y \in \mathbb{R}^+$):

$$\frac{\left(\frac{1}{27}x^{\frac{3}{8}}y^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(81x^{-\frac{5}{6}}y\right)^{-\frac{3}{4}}}$$

Lösung: $3x^{-\frac{3}{8}}y^{\frac{1}{4}}$

10. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und schreiben Sie das Ergebnis ohne Nenner ($a, b \in \mathbb{R}^+$):

$$\frac{\left(16a^{-\frac{5}{6}}b\right)^{\frac{3}{4}}}{\left(\frac{1}{8}a^{\frac{3}{8}}b^{-\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}}$$

Lösung: $2a^{-\frac{3}{8}}b^{\frac{1}{4}}$

11. Schreiben Sie mit nur einem Wurzelzeichen und rationalem Nenner ($a > 0$):

$$\frac{\left(a : \left(\sqrt[7]{\sqrt{a}}\right)^{11}\right)^3}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[7]{a^5}}$$

Lösung: $\frac{\sqrt[7]{a^3}}{a}$

12. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und stellen Sie das Ergebnis mit rationalem Nenner dar:
$$(a^4b^{-5})^{\frac{1}{6}} \cdot \frac{(b\sqrt{b})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{a^2b^5}}$$

Lösung: $\frac{\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[3]{b^2}}{b^2}$

13. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:
$$\left(\frac{\left(a^{-\frac{1}{8}}\sqrt[5]{b^4}\right)^2}{a^{\frac{3}{4}}\sqrt{a^{-5}b^{\frac{1}{5}}}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Lösung: $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$

14. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und schreiben Sie das Ergebnis ohne Nenner ($a, b, c \in \mathbb{R}^+$):
$$\frac{\left(a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}} : \frac{\left(c^{\frac{5}{4}}a^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{3}}}{\left(b^{\frac{1}{4}}a^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Lösung: $a^{\frac{39}{10}} \cdot b^{-\frac{53}{24}} \cdot c^{-\frac{11}{4}}$

15. Schreiben Sie das Ergebnis mit nur einem Wurzelzeichen:
$$\sqrt[3]{\frac{a^2}{b} \cdot \sqrt{\frac{a^3}{b}} \cdot \sqrt[4]{\frac{b^3}{a^5}}}$$

Lösung: $\sqrt[4]{a^3 \cdot b^{-1}}$

16. Schreiben Sie das Ergebnis mit nur einem Wurzelzeichen:
$$\sqrt[5]{c^4 \cdot \sqrt[3]{c^2}} \cdot \sqrt{c \cdot \sqrt[4]{c^3}} : \sqrt[24]{c^{41}}$$

Lösung: $\sqrt[10]{c}$

17. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und geben Sie das Ergebnis nennerfrei an ($u, x \in \mathbb{R}^+$):

$$\left(\frac{u}{x}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \left(\frac{x}{u}\right)^{-\frac{m}{n}} \cdot \left(\frac{1}{ux}\right)^{-2\frac{m}{n}}$$

Lösung: $u^{\frac{4m}{n}}$

18. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und schreiben Sie das Ergebnis unter Verwendung des Wurzelzeichens:

$$\frac{x^2y^2}{ab^2} \cdot \left(\frac{a^{m+1}b^{2m+1}}{x^{2m}y^{2m+1}}\right)^{\frac{1}{m}}$$

Lösung: $\sqrt[m]{aby^{-1}}$

19. Vereinfachen Sie folgenden Term so weit wie möglich! Radizieren Sie soweit wie möglich!

$$\sqrt[4]{a\sqrt[6]{b^2 \cdot a}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[8]{a^{11} \cdot b^{-1}}} \cdot \sqrt{b^2 \cdot \sqrt[4]{a^2}}$$

Lösung: $ab\sqrt[24]{b}$

20. Vereinfachen Sie so weit wie möglich ($x, y \in \mathbb{R}^+$):

$$\frac{\sqrt{64x^{10}y^{12}}}{\left(x^{\frac{10}{2}}y^{\frac{20}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}} - \left(125x^5y^2\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(5^6xy^4\right)^{\frac{1}{3}}$$

Lösung: $-117x^2y^2$

21. Vereinfachen Sie so weit wie möglich ($a, b \in \mathbb{R}^+$):

$$\left(3^6a^2b\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(27a^4b^2\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{\sqrt{81a^8b^4}}{\left(a^{\frac{10}{3}}b^{\frac{10}{6}}\right)^{\frac{3}{5}}}$$

Lösung: $18a^2b$

3.2.3. Alle Grundrechnungsarten treten auf

Alle Grundrechnungsarten - Faktorzerlegung

1. Zerlegen Sie soweit wie möglich in Faktoren:

$$108u^2v^3 - 3v^5$$

Lösung: $3v^3(6u-v)(6u+v)$

2. Faktorisieren Sie vollständig:

$$16z^{k+2} - 16z^k + 4z^{k-2}$$

Lösung: $4z^{k-2} \cdot (2z^2-1)^2$

3. Berechnen Sie und schreiben Sie als Potenz:

$$[-9(-x^2)^3 + (-4x^3)^2] \cdot \left(\frac{1}{0{,}5}\right)^2$$

Lösung: $(10x^3)^2$

4. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und geben Sie das Ergebnis nennerfrei an ($s, t \in \mathbb{R}^+$):

$$\left(s^{\frac{1}{3}} - t^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(s^{\frac{2}{3}} + (st)^{\frac{1}{3}} + t^{\frac{2}{3}}\right)$$

Lösung: $s - t$

5. Zerlegen Sie Zähler und Nenner vollständig in Faktoren und kürzen Sie:

$$\frac{9a^{2n+1} - a}{a^2 - 3a^{n+2}}$$

Lösung: $-\frac{3a^n+1}{a}$

6. Vereinfachen Sie soweit wie möglich. Die Ergebnisse sollen vollständig gekürzt und ohne Nenner geschrieben werden.

$$\frac{a^{2m+1} - a^{m+1}}{a^m - a^{3m}}$$

Lösung: $-a(1+a^m)^{-1}$

7. Vereinfachen und kürzen Sie soweit wie möglich:

$$\frac{b^{2m} - a^{2n}}{b^{2m} + 2a^n b^m + a^{2n}}$$

Lösung: $\frac{b^m - a^n}{b^m + a^n}$

8. Vereinfachen Sie:

$$\frac{(a^2 + 6a + 9)^{2m+1}}{(-a-3)^{2m+1}}; \quad m \in \mathbb{N}$$

Lösung: $-(a+3)^{2m+1}$

9. Vereinfachen Sie folgenden Term so weit wie möglich:

$$\frac{81x^{9p} - 256x^{5p}}{(16x^{4p} - 24x^{5p} + 9x^{6p}) \cdot (9x^{3p} + 16x^p)}$$

Lösung: $\frac{3x^p + 4}{3x^p - 4}$; Binomische Formeln!

10. Zerlegen Sie Zähler und Nenner in Faktoren und kürzen Sie soweit wie möglich:

$$\frac{x^{2m+5} - 2x^{m+5}y^s + x^5 y^{2s}}{x^{2m+8} - y^{2s}x^8}$$

Lösung: $\frac{x^m - y^s}{x^{m+3} + x^3 y^s}$

11. Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$\frac{u - 2u^{\frac{2}{3}} \cdot v^{\frac{1}{3}} + u^{\frac{1}{3}} \cdot v^{\frac{2}{3}}}{u - u^{\frac{1}{3}} \cdot v^{\frac{2}{3}}}$$

Lösung: $\dfrac{u^{\frac{1}{3}} - v^{\frac{1}{3}}}{u^{\frac{1}{3}} + v^{\frac{1}{3}}}$

12. Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(\frac{a^{\frac{2}{3}} + (ab)^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a - b}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Lösung: $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}$

13. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\frac{\sqrt[5]{a^2} - \sqrt[5]{32a} + 1}{(a - a^{\frac{3}{5}}) : \sqrt[5]{a^3}}; \qquad a \in \mathbb{R}^+$$

Lösung: $\dfrac{a^{\frac{1}{5}} - 1}{a^{\frac{1}{5}} + 1}$

14. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\frac{a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} a^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{2}{3}} a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}} y^{\frac{2}{3}}}{4a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{3}} - 4y^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{2}}}$$

Lösung: $\frac{a}{2}(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})$

15. Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$\frac{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} \cdot \left[\left(2{,}7 \cdot 10^4\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{30}\right]^{\frac{6}{5}} \cdot \left(\frac{10^{-\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{3}}}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

Lösung: $\sqrt{b} \cdot \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)$

16. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\frac{a^{\frac{5}{2}} \cdot x^8 - \left[\sqrt{2} \cdot a^{\frac{5}{4}} \cdot x^2 \cdot y^{\frac{3}{2}}\right]^2 + \sqrt{a^5 \cdot y^{12}}}{(a^{-1})^{-2} \cdot (x^4 + (-y)^3)}$$

Lösung: $a^{\frac{1}{2}}(x^4 - y^3)$

17. Vereinfachen Sie und beachten Sie Fallunterscheidungen:

$$\frac{\sqrt{x^4} - \sqrt{y^6}}{x^4 - y^6}$$

Lösung: $\frac{1}{x^2+y^3}$ für $y \geqq 0$ bzw $\frac{1}{x^2-y^3}$ für $y \leqq 0$ (und nicht $x^2 = \pm y^3$).

18. Vereinfachen Sie und beachten Sie Fallunterscheidungen:

$$\frac{\sqrt{x^4} + \sqrt{y^6}}{x^4 - y^6}$$

Lösung: $\frac{1}{x^2-y^3}$ für $y \geqq 0$ bzw $\frac{1}{x^2+y^3}$ für $y \leqq 0$ (und nicht $x^2 = \pm y^3$).

19. Kürzen Sie folgenden Bruchterm so weit wie möglich:

$$\frac{(-a^4)^{2k+1} \cdot (a^{2m-2n} - 2 \cdot a^{2m} + a^{2m+2n})}{(a^{2m-2n} - a^{2m+2n}) \cdot [(-a)^{k+1}]^8}$$

Lösung: $\dfrac{a^{2n} - 1}{a^4 \cdot (a^{2n} + 1)}$

20. Man stelle das Ergebnis als <u>eine</u> Wurzel mit möglichst einfachem Radikanden dar!

$$\frac{\left[a^{\frac{3}{4}} \cdot b \cdot (b^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{n}}}{(b-a)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[(b-a)^{1-3n} \cdot a^{\frac{3}{2}}\right]^{-\frac{1}{2n}}$$

Lösung: $\sqrt[2n]{b^2 \cdot (a+b)}$

Alle Grundrechnungsarten - Bruchrechnung

1. Bringen Sie auf den kleinsten gemeinsamen Nenner und vereinfachen Sie:

$$\frac{y^{n-2}}{1-y} - \frac{y^{n-1}}{1+y} + \frac{y^n}{y^2-1}$$

Lösung: $\dfrac{y^{n-2}}{1-y^2}$

2. Bringen Sie auf einen gemeinsamen Nenner und vereinfachen Sie:

$$\frac{1}{x^{n-2}} - \frac{2x^{n+2}+5x^3}{x^{2n}} + \frac{3x^{n-1}+5}{x^{2n-3}}$$

Lösung: $2 \cdot x^{2-n}$

3. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\frac{6^{2k-1}+1}{6^{2k}} - \frac{1-6^{2k-3}}{2 \cdot 6^{2k-1}} + \frac{6^2+36^k}{3 \cdot 6^{2k+1}}$$

Lösung: $\frac{17}{72}$

4. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\frac{2-x^{k-1}}{x^{k-2}} - \frac{1}{x^{k+4}} - \frac{4-3x^k}{x^{k-1}} - \frac{2x^6-4x^5-1}{x^{k+4}}$$

Lösung: $2x$

5. Fassen Sie zusammen und kürzen Sie so weit wie möglich:

$$\frac{b^{3-3n}-1}{b^{2-n}} + \frac{1+b^{-4n+4}}{b^n} - \frac{b^{n-1}+1}{b^{2n-1}}$$

Lösung: $b^{-5n+4} - b^{n-2}$

6. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\frac{2-b}{b^{-n}} + \frac{b^2+1}{b^{-n+1}} - \frac{b+b^2}{b^{-n+2}}$$

Lösung: b^n

7. Fassen Sie zu <u>einem</u> Bruchterm zusammen und vereinfachen Sie so weit wie möglich!

$$\frac{2x^{n+1}+3x^6+2x^5+1}{2x^{n+2}} - \frac{2x^{n-4}+3}{3x^{n-3}} - \frac{2x^{n-5}+9}{6x^{n-4}}$$

Lösung: $\frac{1}{2x^{n+2}}$

8. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\frac{a^n}{(a-b)^{n-2}} - \frac{2a^{n+1}}{(a-b)^{n-1}} + \frac{2a^{n+2}}{(a-b)^n}$$

Lösung: $\frac{a^n(a^2+b^2)}{(a-b)^n}$

9. Vereinfachen Sie soweit wie möglich. Die Ergebnisse sollen vollständig gekürzt sein und ohne Nenner geschrieben werden.

$$\frac{b^{-2}}{(a-b)^{2n}} + \frac{2-2a^2b^{-2}}{(b-a)^{2n+2}} + \frac{2b^{-1}}{(a-b)^{2n+1}}$$

Lösung: $-b^{-2}(a+b)(a-b)^{-2n-1}$

10. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und geben Sie das Ergebnis ohne Minuszeichen in den Exponenten an:

$$\frac{a^{-p}-a^{-q}}{a^{-p}+a^{-q}} - \frac{a^{-2p}+a^{-2q}}{a^{-2p}-a^{-2q}} + \frac{a^{-p}+a^{-q}}{a^{-p}-a^{-q}}$$

Lösung: $\frac{a^{2q}+a^{2p}}{a^{2q}-a^{2p}}$

11. Fassen Sie zu <u>einem</u> Bruchterm zusammen und stellen Sie das Ergebnis möglichst einfach dar:

$$\frac{x^{a-b-1}}{x^{a-1}\cdot\left(x^a-x^b\right)} - \frac{1}{x^{a+b}+x^{2b}} - \frac{1}{x^{2a}-x^{2b}}$$

Lösung: $\frac{1}{x^{2a}-x^{2b}}$

12. Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$\left[\left(\frac{y^4}{b}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{y^3}{b^2}\right)^{-\frac{2}{5}}\right]^{\frac{6}{2}} - \frac{\left(y^{\frac{2}{5}}\right)^2 \cdot b^{\frac{6}{7}}}{(y^2 \cdot b)^{-\frac{1}{5}} \cdot b^{-\frac{1}{7}}}$$

Lösung: 0

13. Vereinfachen Sie mit Hilfe einer Fallunterscheidung:

$$(x - 2a)^n + (2x - 4a)^n - (2a - x)^n$$

Lösung: $2^n(x - 2a)^n$ für n gerade; $(2^n + 2)(x - 2a)^n$ für n ungerade

Teil II.

Stochastik

4. Zusammengesetzte Zufallsexperimente

4.1. elementare zusammengesetzte Zufallsexperimente

1. **Aufgaben zur Anwendung**

   Im Hause der Familie Duck halten sich n Enten zu einer Familienfeier auf. Eine muss trotz des scheußlichen Regens hinaus und den Erbonkel Dagobert mit dem Schirm abholen. Donald Duck hält n Streichhölzer in der Hand, eins davon ist gekürzt. Wer dieses zieht, muss hinaus in den Regen.

   (a) Soll Trick als erster ziehen, als letzter oder mehr so in der Mitte? Berechnet die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten und nehmt dann Stellung zu Daisys Aussage: „Die ersten und die letzten, die ziehen, haben die besten Chancen, nicht hinaus zu müssen, denn zu Beginn sind noch alle langen Hölzchen da, und bis zum Ende wird wohl kaum gezogen werden, da schon vorher jemand das kurze Streichholz gezogen haben wird. Die in der Mitte sind am schlechtesten dran, weil nur noch etwa die Hälfte der langen Hölzchen da sind und dadurch die Chancen zu verlieren viel größer sind.“

   (b) Wenn nur noch Trick und Track im Raum sind, weil alle anderen damit beschäftigt sind, den mit Wasser vollaufenden Keller zu entleeren, wird folgendes Verfahren vereinbart: Trick und Track ziehen abwechselnd eines der n Streichhölzer. Wer zuerst das kurze zieht, muss hinaus in den Regen. Soll Trick jetzt anfangen oder lieber Track den Vortritt lassen?

Lösung: (a) Für jede Ente beträgt die Wahlscheinlichkeit $\frac{1}{n}$.

(b) Bei einer geraden Anzahl von Streichhölzern ist es egal wer anfängt. Bei einer ungeraden Anzahl sollte Trick nicht anfangen. Derjenige, der den ersten Zug macht, muss einmal mehr ziehen, wobei er bei jedem Zug mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{n}$ das kurze Streichholz bekommt.

2. Wenn der ,,1. FC Hacke” nur ein kleines bisschen besser ist als die ..Borussia Grätsch 1860”, sodass für ,,Hacke” bei jedem Spiel eine Chance von 51 Prozent besteht, das Spiel zu gewinnen - wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Serie von acht Spiele der ,,1. FC Hacke” alle Spiele gewinnt?

   Quelle: G. M. Ziegler, FOCUS 23/2006

Lösung: $0,51^8 = 0,005 = 0,5\%$

3. (a) Schätze, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, bei 4 Würfen mit **einem** Würfel mindestens einmal eine Sechs zu werfen.
   (b) Schätze, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, bei 4 Würfen mit **zwei** Würfeln ein Sechserpasch zu werfen.
   (c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, bei 4 Würfen mit **einem** Würfel mindestens einmal eine Sechs zu werfen.
   (d) Berechne die Wahrscheinlichkeit, bei 4 Würfen mit **zwei** Würfeln ein Sechserpasch zu werfen.

   Quelle: Ulrike Schätz, delta 9, Mathematik für Gymnasien, C. C. Buchner Verlag, Bamberg

Lösung: (a)
(b)
(c) $p_1 = 1 - (\frac{5}{6})^4 \approx 52\%$
(d) $p_2 = 1 - (1 - (\frac{1}{6})^2)^{24} \approx 49\%$

4. Das Geburtstagsproblem
   (a) Schätze, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass unter 30 (unter 40, unter 50, ...)Personen mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben.
   (b) Berechne die Wahrscheinlichkeit p_2, dass 2 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben.
   (c) Berechne die Wahrscheinlichkeit p_3, dass 3 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben.
   (d) Berechne die Wahrscheinlichkeit p_4, dass 4 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben.
   (e) Setzte die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 25, 30, 40, 50, 60 und 80 Personen fort und veranschauliche die Wahrscheinlichkeiten in der Tabelle und graphisch.

   Quelle: Ulrike Schätz, delta 9, Mathematik für Gymnasien, C. C. Buchner Verlag, Bamberg

Lösung:

Anzahl der Personen	Wahrscheinlichkeit p_n
2	$p_2 \approx 0,27\%$
3	$p_3 \approx 0,82\%$
4	$p_4 \approx 1,6\%$
6	$p_6 \approx 4,0\%$
8	$p_8 \approx 7,4\%$
10	$p_{10} \approx 12\%$
12	$p_{12} \approx 17\%$
14	$p_{14} \approx 22\%$
16	$p_{16} \approx 18\%$
18	$p_{18} \approx 35\%$
20	$p_{20} \approx 41\%$
25	$p_{25} \approx 57\%$
30	$p_{30} \approx 71\%$
40	$p_{40} \approx 89\%$
50	$p_{50} \approx 97\%$
60	$p_{60} \approx 99\%$
80	$p_{80} \approx 100\%$

5. Vierfeldertafeln

   (a) Ergänze die Vierfeldertafel

	A	$\overline{A}$	
B	0,21		
$\overline{B}$		0,52	0,77
			1

und gib $p(A \cup B)$ an

   (b) Gib $p(\overline{A} \cap B)$ an

	A	$\overline{A}$	
B	0,20		0,55
$\overline{B}$	0,13		
			1

Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Ulrike Schätz, C. C. Buchner, 2005

Lösung: (a) $p(A \cup B) = 0,21$

	A	$\overline{A}$	
B	0,21	0,02	0,23
$\overline{B}$	0,25	0,52	0,77
	0,46	0,54	1

(b) $p(\overline{A} \cap B) = 0,25$

	A	$\overline{A}$	
B	0,20	0,25	0,55
$\overline{B}$	0,13	0,32	0,45
	0,33	0,57	1

$p(\overline{A} \cap B)$

6. Vierfeldertafeln

   (a) Ergänze die Vierfeldertafel

	A	$\overline{A}$	
B			0,55
$\overline{B}$	0,13		
		0,65	1

und gib $p(A)$ an

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt weder A noch B ein?

	A	$\overline{A}$	
B	0,22		0,55
$\overline{B}$	0,13		
			1

Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Ulrike Schätz, C. C. Buchner, 2005

Lösung: (a) $p(A) = 0,35$

	A	$\overline{A}$	
B	0,22	0,33	0,55
$\overline{B}$	0,13	0,32	0,45
	0,35	0,65	1

(b) $p(A \cap \overline{B}) \cup p(\overline{A} \cap B) = 0,13 + 0,25 = 0,38$

7. **Dopingproben**

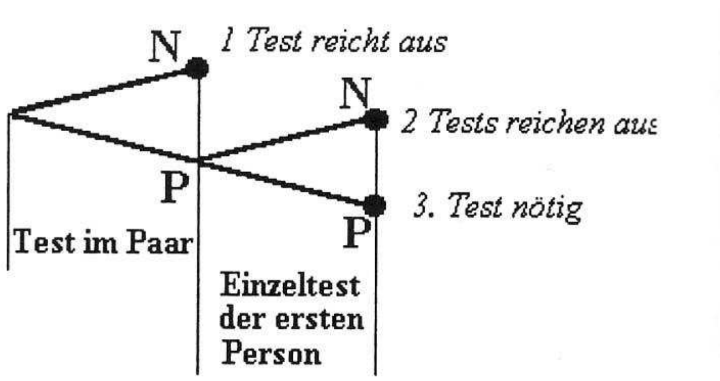
   Nach einem großen Sportfest sollen alle Sportler Urinproben abgeben, mit Hilfe derer Dopingproben durchgeführt werden sollen.
   Es werden zwei Möglichkeiten vorgeschlagen:

   (a) Jede Probe wird einzeln überprüft.

   (b) Jeweils Teile von zwei Proben werden zusammengeschüttet und das Resultat getestet. Fällt es positiv aus, testet man die Einzelproben.

   Vergleicht die beiden Vorschläge.

   Quelle: ISTRON 6, S. 124/125



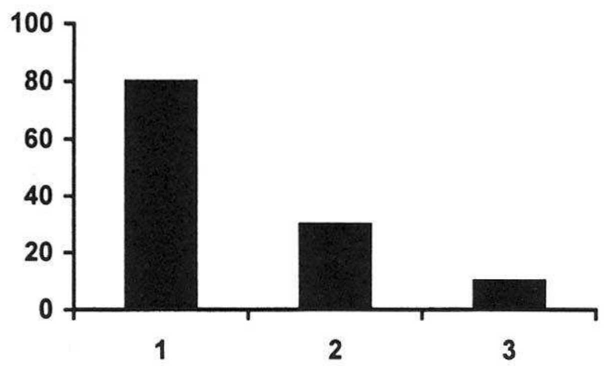
Lösung:

Entweder ist nur ein Test pro Paar erforderlich (wenn kein Doping nachgewiesen)
oder zwei Tests (wenn Doping nachgewiesen und erster Nachtest negativ)
oder drei Tests (wenn Doping nachgewiesen und erster Nachtest positiv)
Also:
Bei Einzeltests sind bei n Teilnehmern n Tests erforderlich, bei „Doppeltests" dagegen abhängig von Dopingquote: min. $\frac{n}{2}$ Tests und max. $1,5 \cdot n$ Tests.

8. **Dopingproben**

   Nach einem Sportfest werden jeweils Teile von zwei Urinproben zusammengeschüttet und das Resultat getestet. Fällt der Test positiv aus, testet man die Einzelproben.

   In folgendem Diagramm ist dargestellt, wie viele Tests für die zwei Proben eines Paares notwendig sind.



   Was kann man alles aus diesem Diagramm entnehmen?

Lösung: Insgesamt $80 + 30 + 10 = 120$ Testpaare, also 240 Sportler
Statt 240 Einzeltests hier nur $80 + 30 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 150$ Tests
Abschätzung der Dopingfälle: min. $30 + 10 = 40$, max. $30 + 20 = 50$ Dopingfälle

4.2. Pfadregeln

1. Lisa fährt drei Tage in die Berge zu einem Kurzurlaub. Die Wetterprognose sieht folgende Regenwahrscheinlichkeiten für die Urlaubstage vor:

Wochentag:	Mo	Di	Mi
Regenwahrscheinlichkeit:	10 %	25 %	30 %

   (a) Verwende die Symbole r für „Regentag" und n für „Nichtregentag" und erstelle ein Baumdiagramm des dreistufigen Zufallsexperimets „Urlaubswetter". Welche Mächtigkeit hat der zum Experiment gehörige Ergebnisraum Ω?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_0 bleibt es den ganzen Urlaub über trocken?

(c) Schreibe das Ereignis E_1 : „höchstens ein Regentag“ als Menge hin und berechne seine Wahrscheinlichkeit.

(d) Charakterisiere das Gegenereignis E_2 von E_1 in Worten und berechne dann $P(E_2)$.

Lösung:

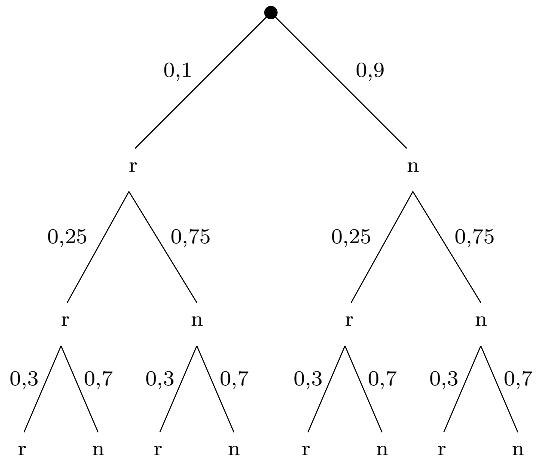
(a) $|\Omega| = 8$

(b) $p_0 = 0{,}9 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}7 = 47{,}25\,\%$

(c) $E_1 = \{\text{nnn,rnn,nrn,nnr}\}$

$$\begin{aligned} P(E_1) &= p_0 + 0{,}1 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}7 + \\ &\quad + 0{,}9 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}7 + \\ &\quad + 0{,}9 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}3 = \\ &= 0{,}4725 + 0{,}0525 + \\ &\quad + 0{,}1575 + 0{,}2025 = 88{,}5\,\% \end{aligned}$$

(d) E_2 : „mindestens 2 Regentage“
$P(E_2) = 1 - P(E_1) = 11{,}5\,\%$



2. Alfons kauft sich einen klapprigen Gebrauchtwagen, der im Mittel bei zehn Fahrten über je 100 km genau einmal mindestens eine Panne hat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Alfons auf der 1000 km langen Fahrt von Garmisch nach Flensburg mindestens eine Panne? Erläutere deine Ansätze!

Lösung: Die „Pannenwahrscheinlichkeit pro 100 km“ ist $p = 0{,}1$, die Wahrscheinlichkeit, auf einer 100 km langen Strecke keine Panne zu haben, ist also $\overline{p} = 1 - p = 0{,}9$.

E : „keine Panne auf 1000 km“, $\overline{E}$: „mindestens eine Panne auf 1000 km“

$P(E) = \overline{p}^{10} = 0{,}9^{10} = 0{,}34868, \quad P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 0,6513 = 65{,}13\,\%$

3. Der Girgl und der Fex sind leidenschaftliche Wilderer. Der Girgl trifft eine Gams mit der Wahrscheinlichkeit 60 %, der Fex mit 80 %. Die beiden Freunde gehen gemeinsam auf die Jagd, der Girgl hat drei, der Fex zwei Patronen dabei. Als sie einen Gamsbock sehen, beginnen sie abwechselnd auf ihn zu schießen, der Girgl beginnt. Nach einem Treffer ist die Gams tot und das Schießen beendet.

(a) Erstelle ein Baumdiagramm für das Zufallsexperiment „Gamsschießen“. Verwende die Symbole g, f, $\overline{g}$ und $\overline{f}$ für das Treffen bzw. Nichttreffen des jeweiligen Schützen und schreibe den kompletten Ergebnisraum Ω hin. Gib auch die Mächtigkeit von Ω an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_0 überlebt die Gams?

(b) Schreibe das Ereignis E: „Die Gams wird vom Fex erlegt.“ in der Mengenschreibweise hin und berechne seine Wahrscheinlichkeit. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_{g} wird die Gams dann vom Girgl geschossen?

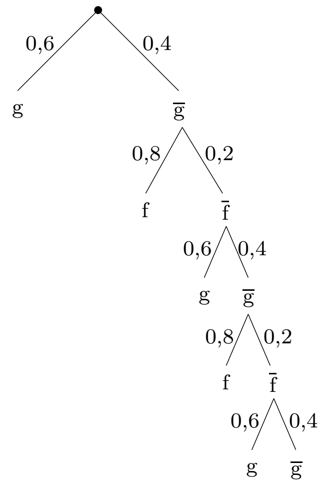
Lösung:

(a) $\Omega = \{g, \overline{g}f, \overline{g}\overline{f}g, \overline{g}\overline{f}\overline{g}f, \overline{g}\overline{f}\overline{g}\overline{f}g, \overline{g}\overline{f}\overline{g}\overline{f}\overline{g}\}$

$|\Omega| = 6$

$P(\text{„Gams überlebt"}) =$

$= P(\overline{g}\overline{f}\overline{g}\overline{f}\overline{g}) = 0{,}4^3 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}00256 = 0{,}256\,\%$



(b) $E = \{\overline{g}f, \overline{g}\overline{f}\overline{g}f\}$

$$P(E) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 = \\ = 0{,}32 \cdot (1 + 0{,}08) = 34{,}56\,\%$$

$p_\text{g} = 1 - P(E) - p_0 = 1 - 0{,}3456 - 0{,}00256 = 65{,}184\,\%$

4. Eva und Sissi gehen zum Essen. Als es ans Bezahlen geht, zieht Sissi ein Kartenspiel hervor. Sie nimmt drei rote und drei schwarze Karten, mischt sie gut durcheinander und legt den Stapel mit dem Rücken nach oben auf den Tisch. Sissi klärt Eva auf: „Wir ziehen abwechselnd je eine Karte, bis eine rote Karte auftaucht. Die Zieherin der ersten roten Karte bezahlt das Essen. Du beginnst."

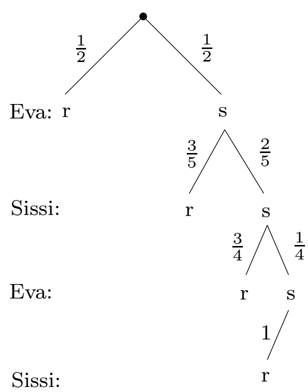
   (a) Verwende die Symbole r und s für das Ziehen einer roten bzw. schwarzen Karte und erstelle ein Baumdiagramm für das Zufallsexperiment „Kartenziehen". Schreibe den kompletten Ergebnisraum Ω hin und gib seine Mächtigkeit an. Schreibe die Ereignisse $E =$ „Eva bezahlt" und $S =$ „Sissi bezahlt" in der Mengenschreibweise hin und berechne ihre Wahrscheinlichkeiten.

   (b) Einige Mahlzeiten später merkt Eva, dass sie öfter bezahlt als Sissi und schlägt eine Variante des Spiels vor: „Wer die zweite rote Karte zieht, bezahlt, unabhängig davon, wer die erste rote Karte gezogen hat." Löse Teilaufgabe (a) noch einmal für die neue Spielvariante.

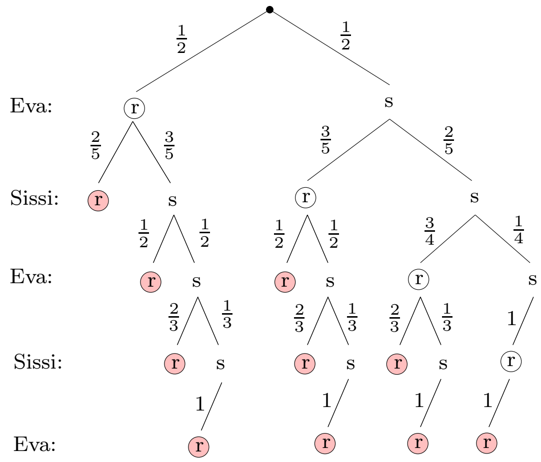
Lösung: (a) $\Omega = \{r, sr, ssr, sssr\}, \quad |\Omega| = 4$

$E = \{r, ssr\},\ P(E) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{13}{20} = 65\,\%$

$S = \overline{E} = \{sr, sssr\},\ P(S) = 1 - P(E) = 35\,\%$



(b) $\Omega = \{rr, rsr, rssr, rsssr, srr, srsr, srssr, ssrr, ssrsr, sssrr\}, \quad |\Omega| = 10$



$E = \{rsr, rsssr, srr, srssr, ssrsr, sssrr\}$, $S = \overline{E} = \{rr, rssr, srsr, ssrr\}$

$$P(S) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}}_{\frac{2}{10}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}_{\frac{1}{10}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}_{\frac{1}{10}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}}_{\frac{1}{10}} = \frac{5}{10} = 50\,\%$$

$P(S) = 1 - P(E) = 50\,\%$

5. In einer Schüssel befinden sich zehn rote und zehn weiße Kugeln. Es werden zufällig drei Kugeln aus der Schüssel gezogen und in ein Glas gelegt.
   (a) Berechne mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse. Schreibe die Ereignisse auch in der Mengenschreibweise hin.

   E_1 : „Im Glas sind drei rote Kugeln."
   E_2 : „Im Glas sind zwei rote und eine weiße Kugel."
   E_3 : „Im Glas sind eine rote und zwei weiße Kugeln."
   E_4 : „Im Glas sind drei weiße Kugeln."

   (b) Das beschriebene Zufallsexperiment wird fünf mal ausgeführt, wobei die drei Kugeln im Glas vor jedem Experiment wieder in die Schüssel gegeben werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist nie eine weiße Kugel im Glas?
   (c) Wie viele rote Kugeln müssen sich vor jedem Experiment mindestens in der Schüssel befinden (Gesamtzahl der Kugeln immer noch zwanzig), damit die gesuchte Wahrscheinlichkeit aus Teilaufgabe (b) größer als zehn Prozent ist?

Lösung: (a) $E_1 = \{rrr\}$, $\quad E_2 = \{rrw, rwr, wrr\}$

$E_3 = \{rww, wrw, wwr\}$, $\quad E_4 = \{www\}$

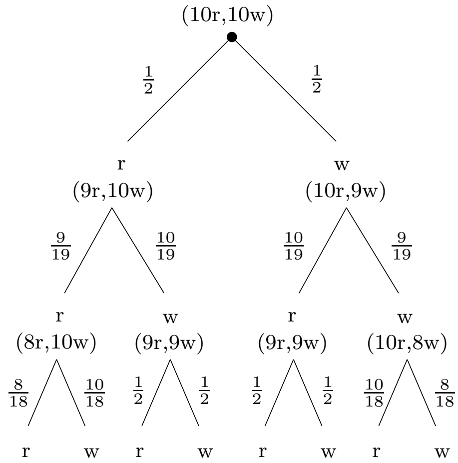
$P(E_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18} = \frac{2}{19} \approx 10{,}5\%$

$P(E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{10}{18} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{1}{2} =$

$= 3 \cdot \frac{5}{38} = \frac{15}{38} \approx 39{,}5\%$

Aus Symmetriegründen gilt:

$P(E_3) = P(E_2)$ und $P(E_4) = P(E_1)$.



(b) $P(\text{„nie weiß“}) = P(E_1)^5 = \left(\frac{2}{19}\right)^5 = \frac{32}{2\,476\,099} \approx 1{,}29 \cdot 10^{-5}$

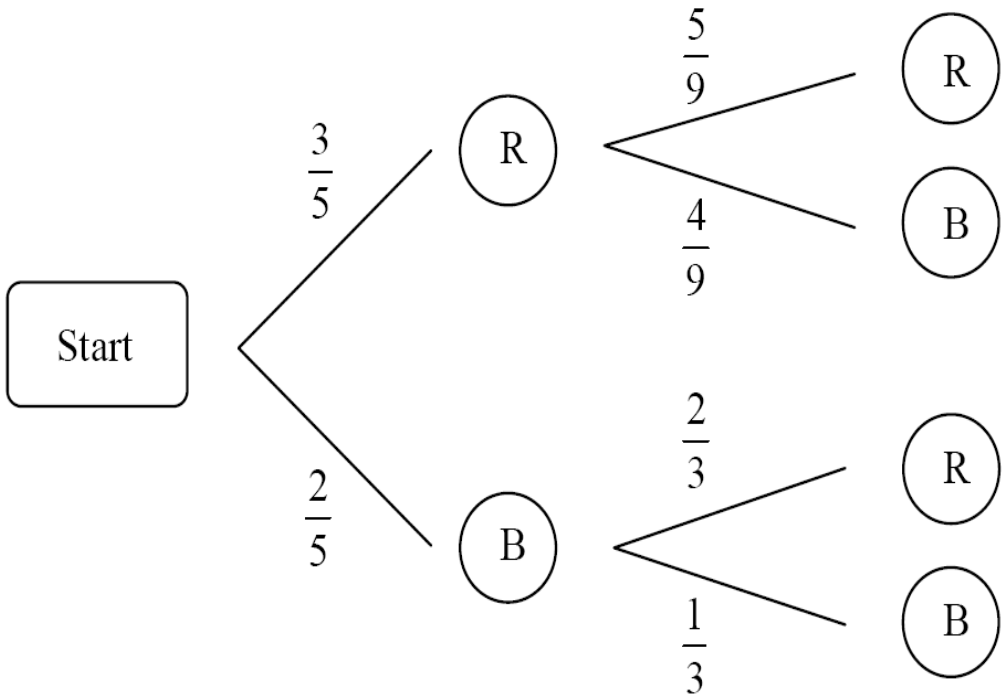
(c) x rote und $20 - x$ weiße Kugeln zu Beginn des Experiments:

$P(E_1) = \frac{x}{20} \cdot \frac{x-1}{19} \cdot \frac{x-2}{18}, \qquad P(E_1)^5 > 0{,}1 \quad \Longrightarrow \quad P(E_1) > 0{,}1^{\frac{1}{5}} \approx 0{,}63$

$x(x-1)(x-2) > 0{,}63 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 = 4316$

$17 \cdot 16 \cdot 15 = 4080, \quad 18 \cdot 17 \cdot 16 = 4896 \quad \Longrightarrow \quad$ mindestens 18 rote Kugeln.

6. Aus einer Urne mit 6 roten und 4 blauen Kugeln werden nacheinander 2 Kugeln gezogen. Zu diesem Zufallsexperiment gehört das nachstehende Baumdiagramm.



(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der zwei verschiedenfarbige Kugeln gezogen werden.

(b) Wurde in diesem Zufallsexperiment mit oder ohne Zurücklegen gezogen? Begründen Sie Ihre Entscheidung anhand des Baumdiagramms.

Quelle: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 10 der Gymnasien 2008

Lösung: (a) $\frac{8}{15}$

(b) ohne Zurücklegen, da sich Wahrscheinlichkeiten verändern

7. Über den berühmten Bergsteiger Wolfgang Bergfried stand unter der Überschrift „Überlebte - Alle 14 Achttausender" vor einigen Jahren in der Zeitung:

Wenn man bedenkt, dass die Todesquote bei den Achttausender-Bergsteigern $3,4\%$ *beträgt, hätte Wolgang Bergfried bei seinen bisher* 29 *Expeditionen zu den höchsten Bergen der Welt mit* 99% *Wahrscheinlicheit umkommen müssen"*

(a) Wie kommt der Reporter zu dieser Aussage.

(b) Berechnen Sie den richtigen Wert für die Wahrscheinlichkeit nach 29 Expeditionen umgekommen zu sein.

EPA Mathematik. 2002

Lösung: (a) $29 \cdot 0,034 = 98,6\%$

(b) $(1 - 0,034)^{29} = 37\%$

8. (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben zwei zufällig ausgewählte Personen am selben Tag Geburtstag?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben zwei zufällig ausgewählte Personen im selben Monat Geburtstag?

Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Ulrike Schätz, C. C. Buchner, 2005

Lösung: (a) $\frac{1}{365} \approx 0,27\%$

(b) $\frac{1}{12} \approx 8,3\%$

9. (a) In einer Schule haben 10% der 900 Schüler ein Mofa, 80% ein Fahrrad; 90% der Fahrradbesitzer haben kein Mofa. Wie viele Schüler haben weder ein Mofa noch ein Fahrrad?

(b) In einem Flugzeug mit 250 Plätzen sind 241 Plätzebelegt. Wie viele verschiedene Möglichkeiten für die Lage der neun freien Plätze gibt es?

Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Ulrike Schätz, C. C. Buchner, 2005

Lösung: (a) 162 Schüler haben weder Mofa noch Fahrrad

	F	$\overline{F}$	
M	72	18	90
$\overline{M}$	648	162	810
	720	180	900

(b) $\frac{250\cdot249\cdot248\cdot247\cdot246\cdot245\cdot244\cdot243\cdot242}{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 9,1\cdot10^{15}$

10. (a) 22% der in Deutschland geprägten 2 €Münzen werden in München hergestellt. Alex hat drei deutsche 2 €Münzen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind davon zwei in München geprägt?

    (b) In der Bevölkerung gibt es etwa 5% Linkshänder. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse mit 30 Schülern kein Linkshänder ist?

    (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse mit 30 Schülern mindestens ein Linkshänder ist?

    (d) Jedem fünften Fitnessriegel liegt ein Sammelbild bei. Wie viele Riegel muss Ben mindestens kaufen, um mit mindestens 50% Wahrscheinlichkeit mindestens ein Bild zu erhalten?

    Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Ulrike Schätz, C. C. Buchner, 2005

Lösung: (a) $3\cdot0,22^2\cdot0,78 = 11\%$

(b) $0,95^{30} = 21\%$

(c) $1-0,95^{30} = 79\%$

(d) $1-0,8^n \geq 0,5 \Rightarrow$ Ben muss mindestens 4 Riegel kaufen.

11. Ein Laplace-Würfel wird solange geworfen, bis entweder eine 6 erscheint oder viermal nacheinander keine 6 erscheint. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Würfel 1, 2, 3, bzw. 4 mal geworfen wird.

Lösung: $p = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^2\cdot\frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^3 = 88\%$

12. „ Ein unmöglicher Saustall"

    In einem großen Saustall wirft jede Sau zweimal im Jahr 5 Ferkel. Die Wahrscheinlichkeit für ein männliches Ferkel beträgt 0,45.

    (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in *einem* Fünferwurf mindestens ein weibliches Ferkel ist?

    (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in *einem* Fünferwurf mindestens ein weibliches Ferkel **und** mindestens ein männliches Ferkel ist?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in *einem* Fünferwurf drei weibliche und zwei männliche Ferkel sind?

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in *einem* Fünferwurf mindestens drei weibliche Ferkel sind?

Lösung: (a) $1 - p(\text{fünf män. Ferkel}) = 1 - 0,45^5 = 98\%$

(b) $1 - p(\text{fünf män. Ferkel}) - p(\text{fünf weibl. Ferkel}) = 1 - 0,45^5 - 0,55^5 - 0, = 93\%$

(c) $p = 10 \cdot 0,55^3 \cdot 0,45^2 = 34\%$

(d) $p(\text{mind. drei weibl. Ferkel}) =$

$p(\text{drei weibl. Ferkel}) + p(\text{vier weibl. Ferkel}) + p(\text{fünf weibl. Ferkel}) =$

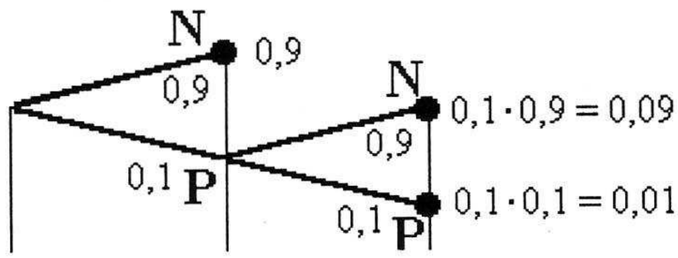
$10 \cdot 0,55^3 \cdot 0,45^2 + 5 \cdot 0,55^4 \cdot 0,45^3 + 0,55^5 = 59\%$

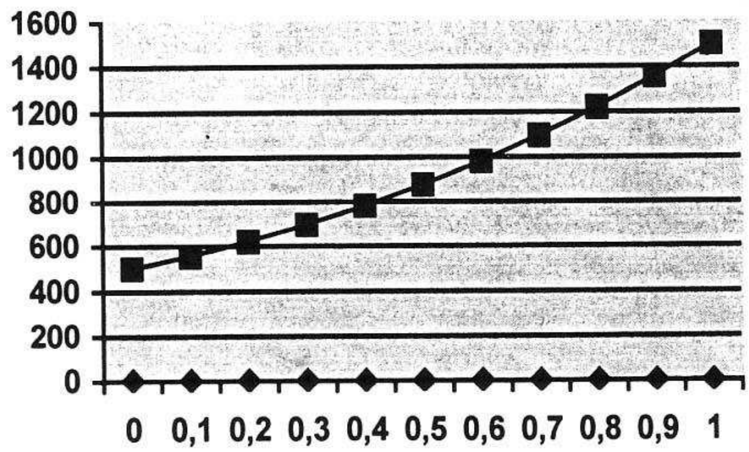
13. **Dopingproben**

Nach einem Sportfest werden jeweils Teile von zwei Urinproben zusammengeschüttet und das Resultat getestet. Fällt der Test positiv aus, testet man die Einzelproben.

Wie viele Proben sind bei 1000 Sportlern zu erwarten, wenn man aus langjähriger Erfahrung weiß, dass 10% (20%, 30%, ...) aller Sportler Doping betreiben?

Lösung: Zur Wahrscheinlichkeit von 10% Baumdiagramm aus Aufgabe 1!!! mit Pfadwahrscheinlichkeiten:





Man hat also für die 1000 Personen in 500 Testpaaren $(0,9 \cdot 1 + 0,09 \cdot 2 + 0,01 \cdot 3) \cdot 500 = 555$ Tests zu erwarten, im Vergleich zu Einzeltests also eine deutliche Ersparnis
Verallgemeinerung (für 20%, 30%, ...) :
Berechnung liefert das neben stehende Ergebnis. Die Vermutung eines quadratischen Zusammenhangs lässt sich bestätigen:
Zu erwarten sind $[(1-p) \cdot 1 + p \cdot (1-p) \cdot 2 + p^2 \cdot 3] \cdot 500 = (p^2 + p + 1) \cdot 500$ Tests
(im Vergleich zu 1000 Einzeltests)

14. **Aufgaben zur Anwendung**

Im Hause der Familie Duck halten sich n Enten zu einer Familienfeier auf. Eine muss trotz des scheußlichen Regens hinaus und den Erbonkel Dagobert mit dem Schirm abholen. Donald Duck hält n Streichhölzer in der Hand, eins davon ist gekürzt. Wer dieses zieht, muss hinaus in den Regen.

(a) Soll Trick als erster ziehen, als letzter oder mehr so in der Mitte? Berechnet die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten und nehmt dann Stellung zu Daisys Aussage: „Die ersten und die letzten, die ziehen, haben die besten Chancen, nicht hinaus zu müssen, denn zu Beginn sind noch alle langen Hölzchen da, und bis zum Ende wird wohl kaum gezogen werden, da schon vorher jemand das kurze Streichholz gezogen haben wird. Die in der Mitte sind am schlechtesten dran, weil nur noch etwa die Hälfte der langen Hölzchen da sind und dadurch die Chancen zu verlieren viel größer sind.“

(b) Wenn nur noch Trick und Track im Raum sind, weil alle anderen damit beschäftigt sind, den mit Wasser vollaufenden Keller zu entleeren, wird folgendes Verfahren vereinbart: Trick und Track ziehen abwechselnd eines der n Streichhölzer. Wer zuerst das kurze zieht, muss hinaus in den Regen. Soll Trick jetzt anfangen oder lieber Track den Vortritt lassen?

Lösung: (a) Für jede Ente beträgt die Wahlscheinlichkeit $\frac{1}{n}$.

(b) Bei einer geraden Anzahl von Streichhölzern ist es egal wer anfängt. Bei einer ungeraden Anzahl sollte Trick nicht anfangen. Derjenige, der den ersten Zug macht, muss einmal mehr ziehen, wobei er bei jedem Zug mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{n}$ das kurze Streichholz bekommt.

Teil III.

Geometrie

5. Satzgruppe des Pythagoras

5.1. Konstruktionsaufgaben

5.1.1. Wurzelkonstruktionen

1. Konstruiere eine Strecke der Länge $\sqrt{40}\,\text{cm}$ auf zwei verschiedene Arten.

Lösung:

2. Konstruiere eine Strecke der Länge $(\sqrt{19} + \sqrt{10})\,\text{cm}$.
   Die einzelnen Konstruktionsschritte sind knapp zu beschreiben!

Lösung: $19 = 4^2 + (\sqrt{3})^2;\ 3 = (\sqrt{2})^2 + 1^2;\ 10 = 3^2 + 1^2$
Wiederholte Anwendung des Hypotenusensatzes!

3. Konstruiere eine Strecke der Länge $(\sqrt{74} - \sqrt{15})\,\text{cm}$.
   Die einzelnen Konstruktionsschritte sind knapp zu beschreiben!

Lösung: $74 = 8^2 + (\sqrt{10})^2;\ 10 = 3^2 + 1^2;\ 15 = 4^2 - 1^2$
Wiederholte Anwendung des Hypotenusensatzes!

4. Konstruiere eine Strecke der Länge $\frac{2}{3}\sqrt{39}\,\text{cm}$.
   Die einzelnen Konstruktionsschritte sind knapp zu beschreiben!

Lösung: Es gilt $(\sqrt{39})^2 = 6^2 + (\sqrt{3})^2$ sowie $(\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$. Dreimalige Anwendung des Hypotenusensatzes liefert zunächst die Streckenlänge $\sqrt{39}\,\text{cm}$. Mit Hilfe des Strahlensatzes wird schließlich die geforderte Streckenlänge $\frac{2}{3}\sqrt{39}\,cm$ konstruiert.

5.1.2. Flächenverwandlungen

1. Verwandle ein Quadrat der Seitenlänge 7,5 cm in ein inhaltsgleiches Rechteck, dessen eine Seite 5,5 cm lang ist. Erläutere kurz dein Vorgehen!

Lösung:

2. Gegeben ist das Dreieck ABC durch $c = 10\,\text{cm}$, $b = 9\,\text{cm}$, $a = 8,5\,\text{cm}$. Verwandle das Dreick ABC in ein inhaltsgleiches Quadrat! Die einzelnen Verwandlungsschritte sind dabei stichpunktartig anzugeben!

Lösung:

3. Die Fläche eines Quadrates ist $25\,\text{cm}^2$. Konstruiere mit Hilfe des Höhensatzes ein flächengleiches Rechteck mit dem Umfang 22 cm.

Lösung:

4. Gegeben ist ein Quadrat vom Inhalt $A_Q = 29\,\text{cm}^2$.
   Verwandle das Quadrat in ein inhaltsgleiches Rechteck vom Umfang $U_R = 28\,\text{cm}$.
   Eine genaue und nachvollziehbare Konstruktion ist verlangt! Keine Konstruktionsbeschreibung!

Lösung: Quadratseitenlänge $s_q = \sqrt{5^2 + 2^2}\,cm$ (Hypotenusensatz)
$s_q^2 = p \cdot q$ mit $p + q = 14\,cm$ (Höhensatz)

5.1.3. Sonstige Konstruktionsaufgaben

1. Konstruiere ein Quadrat, das der Differenz der Quadrate mit den Seitenlängen 4 cm und 7 cm flächengleich ist.

Lösung: Z.B. Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks mit einer Hypotenuse der Länge 7 cm und einer Kathete der Länge 4 cm.

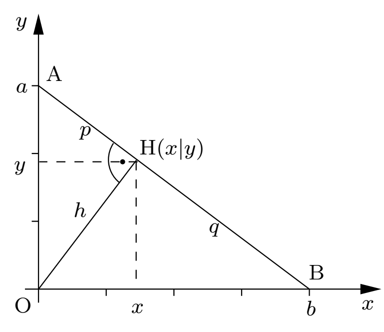
5.2. Mathematische Anwendungen

5.2.1. Berechnungen am Dreieck

1. Im Dreieck $\triangle$OBA mit O $(0|0)$, B $(b|0)$ und A $(0|a)$ ist H $(x|y)$ der Fußpunkt der Höhe von O auf AB. Weitere Bezeichnungen:

$$h = \overline{\text{OH}},\ p = \overline{\text{AH}},\ q = \overline{\text{HB}} \text{ und } c = \overline{\text{AB}}.$$

Drücke c, h, p, q und die Koordinaten von H durch a und b aus. Jeder Ansatz ist durch Nennung des Satzes und des Dreiecks, auf das er sich bezieht, kurz zu begründen. Vereinfache die Ergebnisse! Berechne c, h, p, q und die Koordinaten von H für $a = 3$ und $b = 4$.



Lösung: Pythagoras in $\triangle$OBA: $a^2+b^2=c^2 \quad\Longrightarrow\quad c=\sqrt{a^2+b^2}=5$

Fläche von $\triangle$OBA: $\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}hc \quad\Longrightarrow\quad h=\frac{ab}{c}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{12}{5}=2{,}4$

Kathetensatz in $\triangle$OBA: $pc=a^2 \quad\Longrightarrow\quad p=\frac{a^2}{c}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{9}{5}=1{,}8$

Kathetensatz in $\triangle$OBA: $qc=b^2 \quad\Longrightarrow\quad q=\frac{b^2}{c}=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{16}{5}=3{,}2$

Fläche von $\triangle$OBH: $\frac{1}{2}by=\frac{1}{2}hq \quad\Longrightarrow\quad y=\frac{hq}{b}=\frac{ab^2}{a^2+b^2}=\frac{48}{25}=1{,}92$

Kathetensatz in $\triangle$OBH: $xb=h^2 \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{h^2}{b}=\frac{a^2b}{a^2+b^2}=\frac{36}{25}=1{,}44$

2. Im unteren Teil hat die Straße von Berchtesgaden zum Rossfeld eine Steigung von 25%.

   (a) Zeigen Sie, dass die Steigung von 25% im abgebildeten Verkehrsschild nicht richtig dargestellt ist. Messen Sie dazu geeignete Strecken in einem Steigungsdreieck. Machen Sie im Bild kenntlich, welche Strecken Sie abgemessen haben.

   (b) Welcher der folgenden Terme gibt an, wie viele Meter man auf der unteren Rossfeldstraße zurücklegen müsste, um einen Höhenunterschied von 100 m zu erzielen?

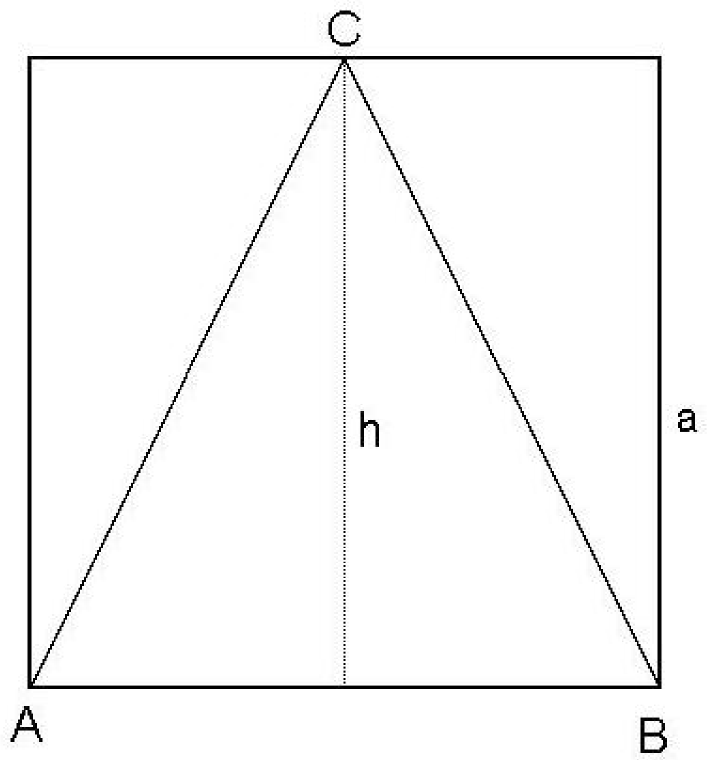
   $4\cdot 100m \qquad 0,25\cdot 100m \qquad \sqrt{400^2\cdot 100^2} \qquad \sqrt{400^2+100^2} \qquad \sqrt{400^2-100^2}$

   Quelle: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 10 der Gymnasien 2008

Lösung: (a) Z. B. $\frac{1{,}5}{2{,}6}\neq 0,2\frac{25}{100}$

(b) $\sqrt{400^2+100^2}$

3. **Dreiecke im Quadrat**



Oben abgebildet siehst du ein Dreieck, dass in ein Quadrat „eingepasst“ wurde.

(a) Mache möglichst viele (mindestens 5) mathematische Aussagen über die Figuren (z.B. über Flächeninhalte, Winkel,...).

(b) Verschiebe den Punkt C auf der Höhenlinie h so, dass das entstehende Dreieck $\triangle ABC'$ gleichseitig ist. Wie groß ist dann h'? Beantworte die Frage mit und ohne Trigonometrie!

(c) Wie viel Prozent der Gesamtfläche nimmt das neue Dreieck ein?

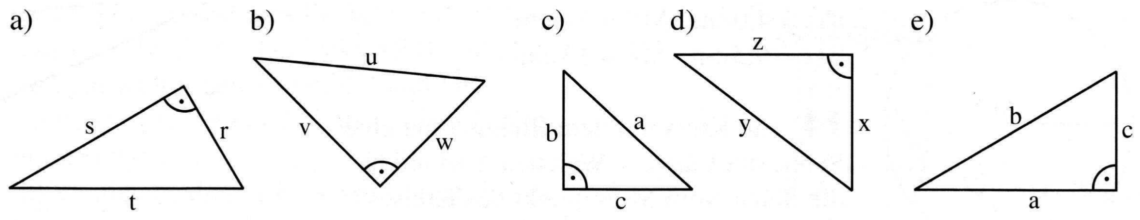
Lösung: (a) Z. B. Das Dreieck $\triangle ABC$ ist gleichschenklig. Die Fläche des Dreiecks halbiert die Fläche des Quadrats. Im Dreieck $\triangle ABC$ gilt $\alpha = \beta$. h ist Symmetrieachse von $\triangle ABC$ und vom Quadrat. Das Quadrat hat 4 Symmetrieachsen.

(b)
- Das Dreieck ist gleichseitig, also sind alle Winkel $60°$ und es gilt $\tan 60° = \frac{2h'}{a}$. Wegen $\tan 60° = \sqrt{3}$ folgt: $h' = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.
- Eine weitere Lösungsmöglichkeit: Die Kantenlänge des Quadrats ist a. Dann soll für das Dreieck laut Pythagoras gelten: $(\frac{1}{2}a)^2 + h'^2 = a^2$. Daraus folgt dann die Lösung für h'.

(c) $A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow 43\%$

4. **Anwendungen des Satzes des Pythagoras**

Gib für die rechtwinkligen Dreiecke jeweils die Gleichung nach dem Satz des Pythagoras an.

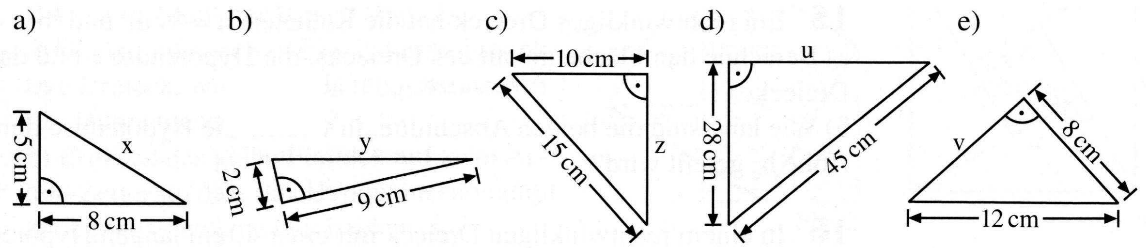


Quellen: Welt der Mathematik 9 (1990), Mathematik heute 9 (1996), Lambacher Schweizer 9 (1997), Schnittpunkt 9 (1995), MUED

Lösung: $t^2 = s^2 + r^2$, $u^2 = v^2 + w^2$, $a^2 = b^2 + c^2$, $y^2 = x^2 + z^2$, $b^2 = a^2 + c^2$

5. **Anwendungen des Satzes des Pythagoras**

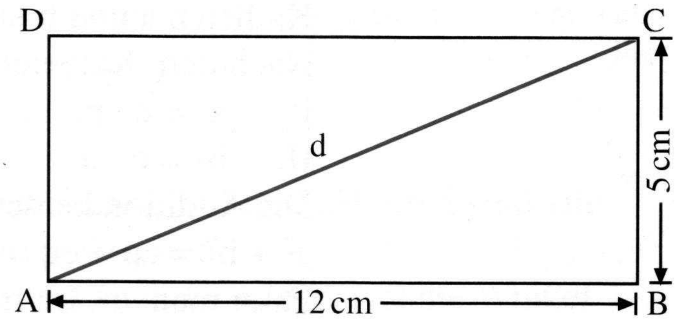
   Berechne bei den rechtwinkligen Dreiecken die fehlenden Seitenlängen.



Lösung:
(a) $x \approx 9,43\,\text{cm}$
(b) $y \approx 9,22\,\text{cm}$
(c) $z \approx 11,18\,\text{cm}$
(d) $u \approx 35,23\,\text{cm}$
(e) $v \approx 8,94\,\text{cm}$

6. **Anwendungen des Satzes des Pythagoras**

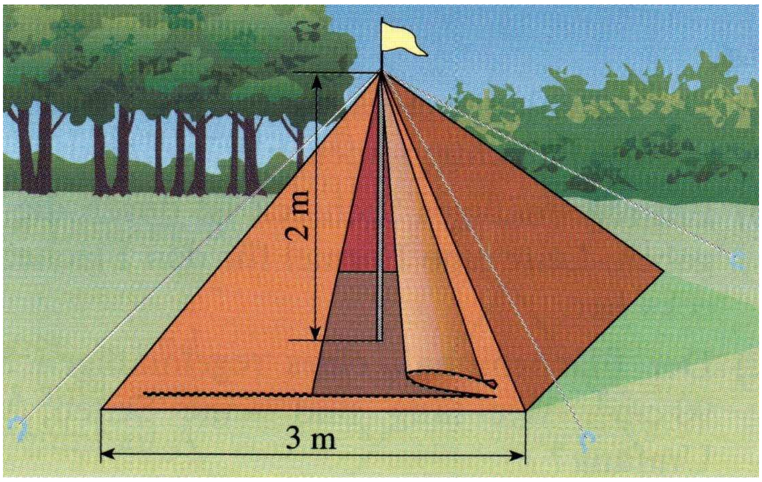
   Berechne die Länge der Diagonalen des Rechtecks $ABCD$.



Lösung: Diagonale = 13 cm

7. **Pyramiden**

Wie viel Zeltstoff benötigt man für die Herstellung des Zeltes?



Quelle: Mathematik heute 9 (1996)

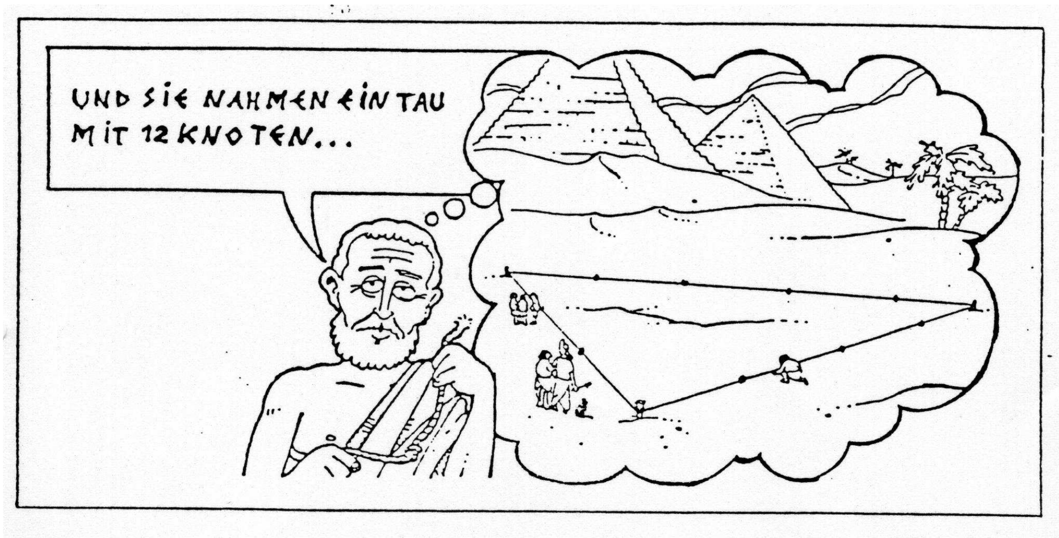
Lösung: Höhe im Dreieck: $h = \sqrt{2^2 + 1,5^2}\,\text{m} = 2,5\,\text{m}$

Fläche des Zeltstoffes: $A = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\,\text{m} \cdot 2,5\,\text{m} = 15\,\text{m}^2$

8. **Die ägyptischen Seilspanner**

Lies die folgenden Zeitungsartikel.
Erkläre,worum es geht. Ein Artikel enthält Fehler.

Die ägyptischen Seilspanner (um 2000 v. Chr.) hatten eine sehr genaue Methode um rechte Winkel zu konstruieren. Sie benutzten dazu ein Seil mit Knoten in gleichen Abständen.



(a) Warum soll es wichtig sein, genau rechte Winkel konstruieren zu können? Hast du eine Idee, wie das heute die Maurer machen?

(b) Nimm ein langes Stück Bindfaden und markiere darauf 12 gleich große Abschnitte. Finde möglichst viele Dreiecke, so dass jeder der drei Eckpunkte genau bei einem Knoten liegt. Welches haben wohl die ägyptischen Seilspanner benutzt und warum gerade dieses?

Quelle: MUED

Variationen:

(a) Selbst Schnur hestellen, Schüler Tripel finden lassen.

(b) Alle 15 Dreiecke finden lassen, die man mit weniger als 12 Knoten legen kann.

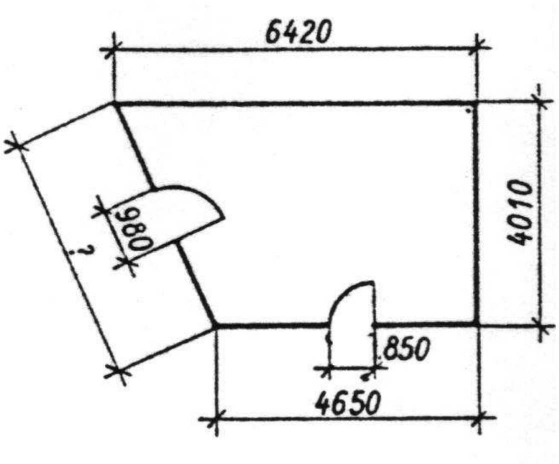
(c) Streichhölzer statt Schnur verwenden.

Lösung: (a) Neueinteilung der Felder nach der jährlichen Nilschwemme. Maurer nutzen oft eine analoge Lattenkonstruktion.

(b) 12 verschiedene Tripel.

9. **Anwendungen des Satzes des Pythagoras**

In einem Wohnraum werden Fußsockelleisten montiert. Wie viele Meter dieser Leisten werden in der Kalkulation verrechnet, wenn die beiden Türen ausgespart werden und ein Verschnittzuschlag von 15% einbezogen wird?



Lösung: $U \approx 17633,26$
Mit Verschnitt $\approx 20278,25$

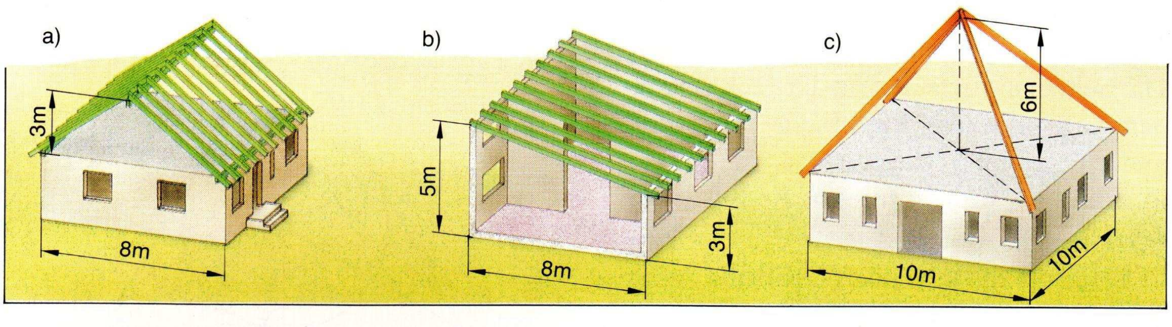
10. **Anwendungen des Satzes des Pythagoras**

    Elfmeter! Olaf knallt den Ball in einer Höhe von $1,50\,\text{m}$ an den Pfosten. Welche Strecke legt der Ball dabei mindestens zurück?
    Das Tor ist $7,32,\text{m}$ breit und $2,44,\text{m}$ hoch.

Lösung: Strecke (min.) $\approx 11,69\,\text{m}$

11. **Anwendungen des Satzes des Pythagoras**

    Berechne für jedes abgebildete Gebäude die Länge eines Dachsparren. Jeder Dachsparren soll dabei $40\,\text{cm}$ überstehen.



Lösung: Sparrenlängen

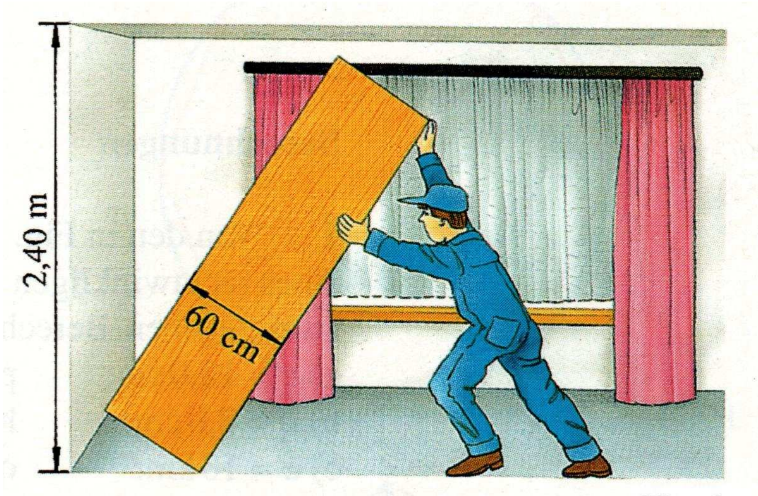
(a) $= 5,4\,\text{m}$

(b) $\approx 9,05\,\text{m}$

(c) $\approx 9,67\,\mathrm{m}$

12. **Anwendungen des Satzes des Pythagoras**

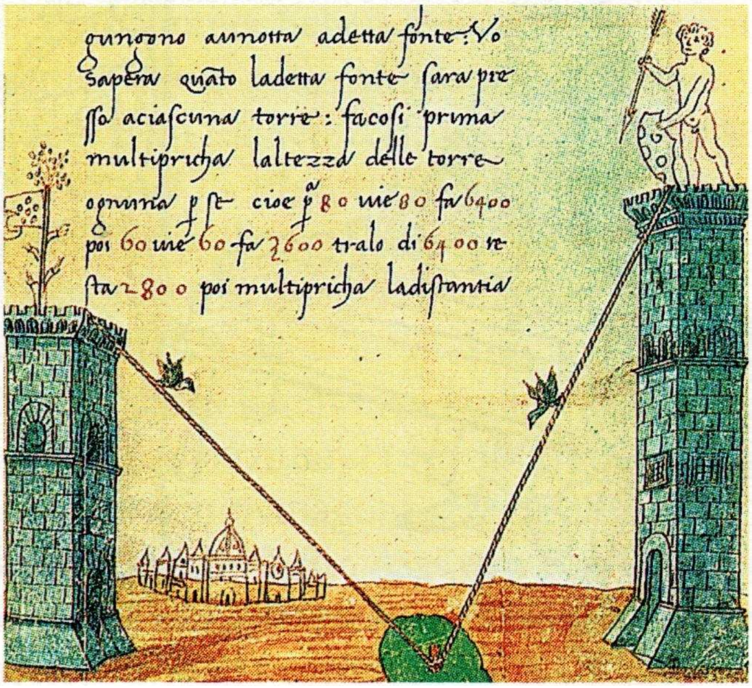
Wie hoch darf der Schrank höchstens sein, damit man ihn wie angegeben aufstellen kann?



Lösung: Schrankhöhe (max.) $\approx 2,32\,\mathrm{m}$

13. **Anwendungen des Satzes des Pythagoras**

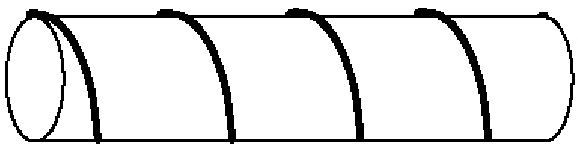
Auf einem ebenen Feld stehen zwei Türme, einer 60 Fuß hoch, der andere 80 Fuß hoch. Ihr Abstand beträgt 100 Fuß. Für die beiden Vögel ist der Weg von der Turmspitze bis zu einem Brunnen zwischen den Türmen gleich weit. Wie weit ist der Brunnen von den Türmen entfernt?



Lösung: Entfernung Brunnen - Turm = 64 m bzw. 36 m

14. **Anwendungen des Satzes des Pythagoras**

    Eine Schnur ist symmetrisch um einen Stab gewickelt. Die Schnur windet sich genau 4 mal um den Stab. Der Umfang des Stabes ist 4 cm und die Länge des Stabes ist 12 cm.
    Wie lang ist die Schnur?



Lösung: Handlungsvorstellung: Küchenpapierrolle längs aufschneiden; Schnur = 20 cm

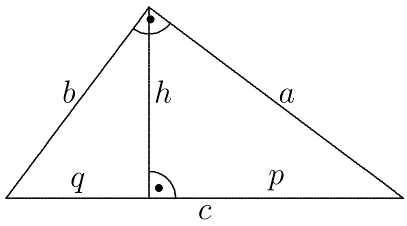
15. Wie groß ist die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit dem Flächeninhalt $14,43\,\mathrm{m}^2$?

Lösung: $h \approx 5,00\,\mathrm{cm}$

16. In einem rechtwinkligen Dreieck (siehe Zeichnung) gelte

$$q = 9\,\text{cm}, \quad b = 15\,\text{cm}.$$

Berechne a, c, p und h!



Lösung: $a = 20\,\text{cm}$, $c = 25\,\text{cm}$, $p = 16\,\text{cm}$, $h = 12\,\text{cm}$

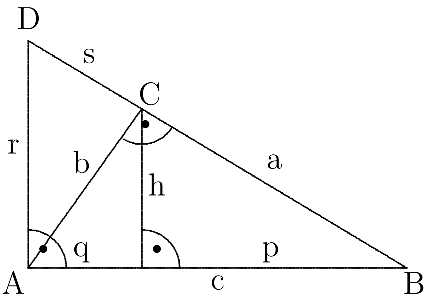
17. Ein Dreieck ABC besitzt bei C einen rechten Winkel.
Es gilt: $a = 3\,\text{cm}$ und $c = 5\,\text{cm}$.
Berechne die Kathetenlänge b und die Länge q des zugehörigen Hypotenusenabschnittes sowie die Hypotenusenhöhe h!

Lösung: $b = 4\,\text{cm}$; $q = 3{,}2\,\text{cm}$; $h = 2{,}4\,\text{cm}$

18. In einem bei C rechtwinkligen Dreieck gilt $h = 2\,\text{cm}$ und $b = \sqrt{5}\,\text{cm}$. Berechne die fehlenden Seiten, die Hypotenusenabschnitte und den Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösung: $q = 1\,\text{cm}$; $c = 5\,\text{cm}$; $p = 4\,\text{cm}$; $a = 2\sqrt{5}\,\text{cm}$; $A = 5\,\text{cm}^2$

19. In der nebenstehenden, nicht maßstabsgetreuen Figur sind bekannt:
$h = 6{,}0\,\text{cm}$ und $p = 18{,}0\,\text{cm}$.
Berechne q, b, s und r.



Lösung: $q = 2{,}0\,\text{cm}$; $b \approx 6{,}3\,\text{cm}$; $s \approx 2{,}1\,\text{cm}$; $r \approx 6{,}7\,\text{cm}$

20. Überprüfe durch Rechnung, ob das Dreieck ABC mit $A(2|1)$, $B(1|10)$ und $C(6|5)$ rechtwinklig ist und gib den Flächeninhalt an! (<u>Keine</u> Zeichnung!)

Lösung: $a^2 + b^2 = c^2$; $A = 20$

21. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die kleinere Kathete 18 cm lang. Die Hypotenusenabschnitte unterscheiden sich um $8{,}4\,\text{cm}$. Berechne die Hypotenusenabschnitte und die Höhe.

Lösung: $q = 10{,}8\,\text{cm}$; $p = 19{,}2\,\text{cm}$; $h = 14{,}4\,\text{cm}$;

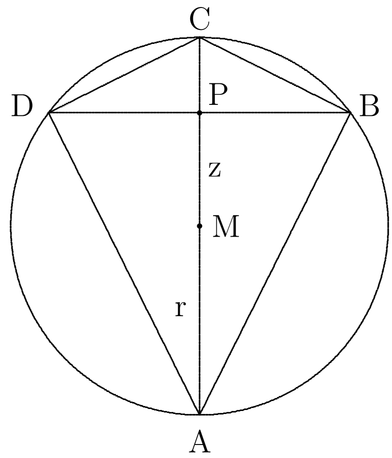
22. In einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ist die Länge der Basishöhe $h = 5\,\text{cm}$ gegeben. Erstelle zunächst eine saubere, maßstabsgetreue Zeichnung und berechne anschließend die exakten Längen
    (a) der Schenkel,
    (b) der Seitenhalbierenden der Schenkel.

Lösung: (a): $5\sqrt{2}\,cm$ (b): $\frac{5}{2}\sqrt{10}\,cm$

23. Im folgenden wird ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm zugrunde gelegt. Auf einer Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(3|1)$ liegt der Punkt $Q(-2|-5,25)$. Bestimme die Funktionsgleichung der Parabel und berechne dann die Entfernung d zwischen S und dem Parabelschnittpunkt mit der y-Achse.

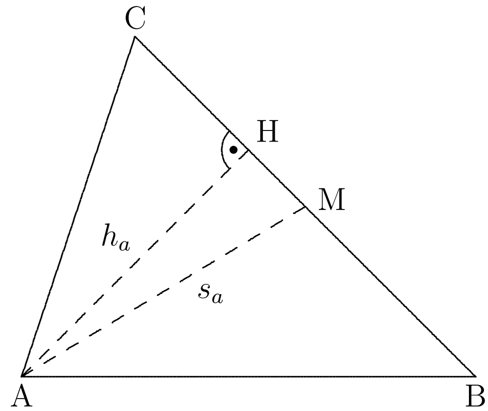
Lösung: $y = -0,25 \cdot (x-3)^2 + 1\,;\qquad d = 3,75\,cm$

24. Dem Kreis $k(M; r)$ ist ein Drachenviereck $ABCD$ einbeschrieben.
    Die Diagonale $[BD]$ hat die Länge $\overline{BD} = \frac{3}{2}r$.
    Zeige, daß dann gilt: $z = \overline{MP} = \frac{r}{4}\sqrt{7}\,.$



Lösung:

25. In nebenstehendem Dreieck ABC sind gegeben:
Höhe $h_a = 60\,\text{mm}$;
Seitenhalbierende $s_a = 65\,\text{mm}$;
Flächeninhalt $F = 2220\,\text{mm}^2$.



(a) Berechne die Seitenlänge $\overline{AC}$ des Dreiecks ABC.
(Ergebnis: $\overline{AC} = 12\sqrt{26}\,\text{mm}$)

(b) Das Lot von H auf $[AC]$ trifft $[AC]$ im Punkt G. Berechne $\overline{CG}$.

Lösung: $\overline{CG} = \frac{6}{13}\sqrt{26}\,mm$

26. In einem Koordinatensystem ist durch die Punkte $C(5|3\sqrt{6})$ und den Fußpunkt $F(5|\sqrt{3})$ die Höhe h_c eines gleichseitigen Dreiecks gegeben.

(a) Zeichne das Dreieck ABC in das Koordinatensystem (Längeneinheit: 1 cm) so genau wie möglich ein und berechne dann die exakten Koordinaten der Punkte A und B!

(b) Berechne den exakten Wert des Flächeninhalts von Dreieck ABC!

Lösung: (a): $A(6 - 3\sqrt{2}|\sqrt{3})$, $B(4 + 3\sqrt{2}|\sqrt{3})$
(b): $A_{ABC} = 19\sqrt{3} - 6\sqrt{6}$

27. Gegeben sind die Punkte $A(-3|-2)$, $B(6|1)$ und $C(-5|4)$.
Prüfe durch Rechnung, ob das Dreieck ABC rechtwinklig ist.
(Achtung: Hier ist keine Zeichnung verlangt!)

Lösung: $(\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 = (\overline{BC})^2$

28. In einem Dreieck seien $c = 32\,\text{cm}$, $h_c = 24\,\text{cm}$ und $s_c = 25\,\text{cm}$. Berechne die Längen der Seiten a und b und zeige durch Rechnung, daß das Dreieck nicht rechtwinklig ist.

Lösung: $a = \sqrt{1105}$, $b = \sqrt{657}$ (oder umgekehrt). Es ist $a^2 + b^2 = 1762 \neq 32^2 = 1024$.

29. Gegeben sind die Punkte $A(0|-3)$, $B(6|-6)$ und $C(3|3)$, sowie $P(8|5)$, $Q(10|4)$ und $R(9|7)$.
Entscheide durch Rechnung, ob die Dreiecke ABC und PQR zueinander ähnlich sind.
(Achtung: Hier ist keine Zeichnung verlangt!)

Lösung: Die Berechnung der Seitenlängen liefert den Nachweis der Ähnlichkeit.

30. In einem gleichschenkligen Dreieck ist die Basishöhe um 2 cm größer als die Basis und um 1 cm kleiner als die Schenkel.
Berechne die erwähnten Stücke!

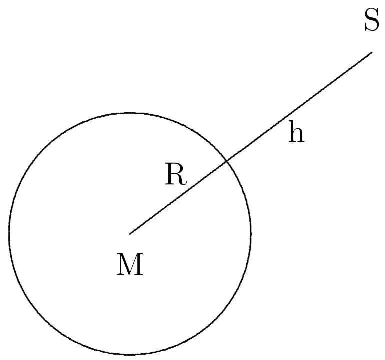
Lösung: Basis: $10\,cm$; Höhe: $12\,cm$; Schenkel: $13\,cm$;
Die Lösungsansätze führen auf eine quadratische Gleichung!

31. Im Quadrat $ABCD$ der Seitenlänge a ist M die Mitte von $[AB]$ und N die Mitte von $[BC]$. Berechne die Fläche des Dreiecks MND in Abhängigkeit von a!

Lösung: $\frac{3}{8}a^2$

5.2.2. Berechnungen am Kreis

1. Ein Satellit S befindet sich in der Höhe $h = 230\,\text{km}$ über der Erdoberfläche. Die Erdkugel vom Radius $R = 6370\,\text{km}$ erscheint von S aus betrachtet als eine Kreisscheibe.
Vervollständige die nebenstehende Skizze entsprechend und berechne dann den Radius r dieser Kreisscheibe.



Lösung: Gesucht ist die halbe Länge der Berührsehne der Tangenten von S aus an den „Erdkreis“.
$r \approx 1670\,km$

2. In einem Kreis mit Radius r ist eine Sehne $[AB]$ der Länge 10 cm gegeben. $[MF]$ sei die Lotstrecke vom Kreismittelpunkt M auf die Sehne $[AB]$. Die Verlängerung dieser Lotstrecke treffe die Kreislinie im Punkt Q. Es sei $\overline{FQ} = 2\,\text{cm}$. Berechne den Kreisradius r anhand einer übersichtlichen Skizze!

Lösung: $r = 7,25\,cm$

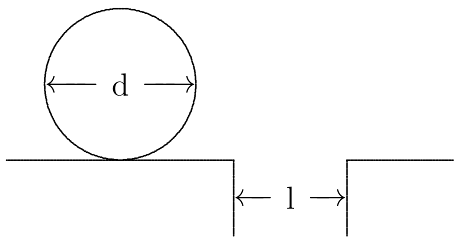
3. An einen Kreis sind von einem Punkt T aus die beiden Tangenten gezogen (Zeichne eine Planskizze!). Die Tangenten berühren den Kreis in den zwei Punkten P und Q. Die Berührsehne s ist 8 cm lang. Ferner ist $\overline{PT} = \overline{QT} = 20\,\text{cm}$.
   Berechne den Kreisradius r!

Lösung: $r = \frac{5}{3}\sqrt{6}\,cm$

4. Im Kreis $k(M; r = 4\,\text{cm})$ sei eine Sehne $[CD]$ der Länge 4 cm gegeben. Die Tangente in C an den Kreis schneidet das Lot vom Kreismittelpunkt M auf die Sehne $[CD]$ im Punkt P.
   (a) Erstelle eine saubere Konstruktion!
   (b) Berechne die Streckenlänge $\overline{CP}$!

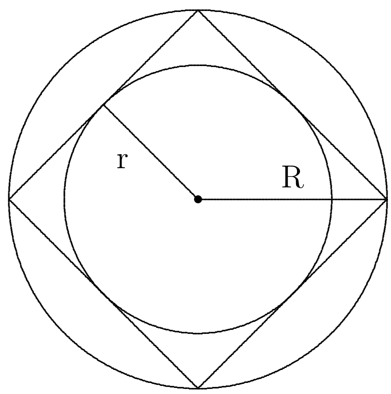
Lösung: $\overline{CP} = \frac{4}{3}\sqrt{3}\,cm$

5. Eine Kugel vom Durchmesser $d = 1,0\,\text{m}$ rollt auf ein Loch vom Durchmesser $l = 70\,\text{cm}$ zu. Wie tief sackt die Kugel in das Loch ein? Runde das Ergebnis auf ganze cm.



Lösung: 14 cm

6. Berechnen Sie den Inkreisradius r eines Quadrats, wenn der Umfang des zugehörigen Umkreises mit dem Radius R um 2,6026 cm größer ist als der des Inkreises!



Lösung: $r = 1{,}0000\,cm$

7. Unter einem Ankreis eines Dreiecks versteht man einen Kreis, der eine Dreiecksseite und die Verlängerung der beiden anderen Dreiecksseiten berührt. Jedes Dreieck besitzt also drei Ankreise.
   (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt eines der drei (untereinander kongruenten) Ankreise eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge a! Erstellen Sie eine saubere Überlegungsskizze!
   (b) Wie verhalten sich die Umfänge von Inkreis, Umkreis und (einem) Ankreis eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge a?

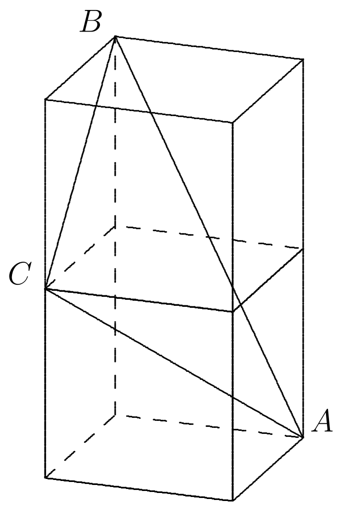
Lösung: (a) $A_{AK} = \frac{3}{4}a^2\pi$ (b) $U_{IK} : U_{UK} : U_{AK} = 1 : 2 : 3$

8. Unter einem Ankreis eines Dreiecks versteht man einen Kreis, der eine Dreiecksseite und die Verlängerung der beiden anderen Dreiecksseiten berührt. Jedes Dreieck besitzt also drei Ankreise.
   Gegeben sei nun ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck der Schenkellänge a. Fertigen Sie eine übersichtliche Zeichnung an und berechnen Sie dann Umfang und Flächeninhalt desjenigen Ankreises, der die Hypotenuse und die verlängerten Schenkel berührt!

Lösung: $U_{AK} = a\pi \cdot (2 + \sqrt{2})$ $A_{AK} = \frac{a^2}{2}\pi \cdot (3 + 2\sqrt{2})$

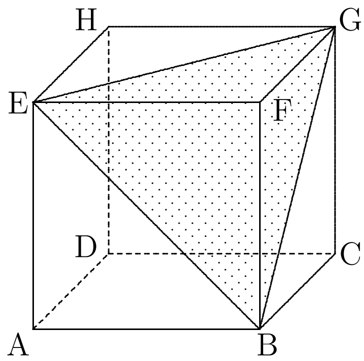
5.2.3. Anwendungen auf räumliche Situationen

1. Zwei Würfel der Kantenlänge a übereinandergestellt bilden den Quader der Zeichnung. Berechne die Seitenlängen des Dreiecks ABC und zeige durch Rechnung, daß es rechtwinklig ist.



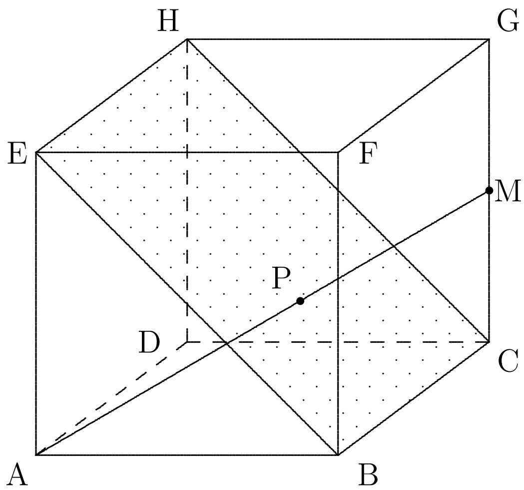
Lösung:

2. Von einem Holzwürfel mit der Kantenlänge $10,0\,\mathrm{cm}$ wird ein Stück abgesägt (vgl. Abbildung).
   Berechne den Flächeninhalt der (schraffierten) Schnittfläche!



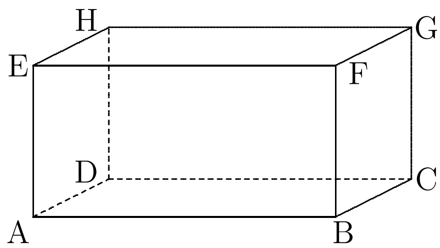
Lösung: $A \approx 86,6\,\mathrm{cm}^2$

3. Gegeben ist ein Würfel $ABCDEFGH$ der Kantenlänge $2a$ (siehe Skizze). M sei der Mittelpunkt der Kante $[CG]$. Die Gerade AM durchstoße die Ebene EBC im Punkt P. Zeige, daß $\overline{AP} = 2a$ gilt.
   (Hinweis: Bestimme zunächst die Länge der Lotstrecke von P auf die Ebene ABC. Verwende dann den Strahlensatz und den Satz des Pythagoras!)



Lösung:

4. Gegeben ist ein Quader mit
   $\overline{AB} = a = 7\,\mathrm{cm}$
   $\overline{BC} = b = 5\,\mathrm{cm}$
   $\overline{AE} = c = 4\,\mathrm{cm}$
   Berechne den Abstand der Ecke H von der Raumdiagonalen [EC].



Lösung: $4,25\,\mathrm{cm}$

5. Kann man eine $15\,\mathrm{cm}$ lange Stricknadel in einem $13,6\,\mathrm{cm}$ langen, $6\,\mathrm{cm}$ breiten und $25\,\mathrm{mm}$ hohen Kästchen aufbewahren?

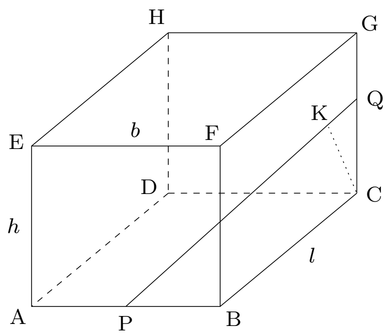
Begründe.

Lösung: Ja, wenn die Maße Innenmaße sind, dann mißt die Raumdiagonale 150, 7 mm.

6. Ein Quader $ABCDEFGH$ hat die Maße $\overline{AB} = 5\,\text{cm}, \overline{BC} = 3\,\text{cm}$ und $\overline{AE} = 4\,\text{cm}$. Die Mitte von $[AB]$ sei M, die Mitte von $[CG]$ sei L.
   (a) Konstruiere das $\triangle MBL$ in wahrer Größe!
   (b) Konstruiere den Neigungswinkel α der Geraden ML bezüglich der Ebene $(A; B; C)$ in wahrer Größe!
   (c) <u>Berechne</u> $\overline{ML}$ aus den obigen Angaben!

Lösung: (c): $\frac{1}{2}\sqrt{77}\,cm$

7. Im nebenstehend skizzierten Quader sei gegeben:
   $l = \overline{BC} = 9\,\text{cm},\ b = \overline{AB} = 6\,\text{cm}$. Ferner ist P der Mittelpunkt der Kante $[AB]$ und Q teilt die Kante $[CG]$ im Verhältnis 4:3.
   (a) Berechne $d = \overline{PQ}$ in Abhängigkeit von der Höhe h des Quaders.
   (b) Wie ist h zu wählen, wenn $d = 10\,\text{cm}$ sein soll?
   (c) Von C aus wird das Lot auf $[PQ]$ gefällt (Fußpunkt K). Berechne dessen Länge $\overline{KC}$, wenn $d = 10\,\text{cm}$ ist.



Lösung: (a): $d = \frac{1}{7}\sqrt{4410\,cm^2 + 16h^2}$
(b): $h = \frac{7}{4}\sqrt{10}\,cm^2$
(c): $\overline{KC} = 3\,cm$

5.2.4. Herleitungen geometrischer Aussagen

1. Beweise anhand einer übersichtlichen Skizze:

   In einem Viereck, dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, sind die Summen der Quadrate der Gegenseiten einander gleich.

Lösung:

2. Zeige anhand einer übersichtlichen Skizze, daß für den Inkreisradius ϱ_n eines beliebigen regulären n-Ecks mit Seitenlänge s_n und Umkreisradius r gilt:

$$\varrho_n = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4r^2 - {s_n}^2}$$

Lösung:

3. In einem kartesischen Koordinatensystem ist $M(m_1|m_2)$ der Mittelpunkt eines Kreises vom Radius r.
   (a) Zeige anhand einer übersichtlichen Skizze, daß die Koordinaten eines jeden Punktes $P(x|y)$ auf der Kreislinie folgende Gleichung erfüllen:

   $$(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = r^2$$

   (b) Vom Punkt $Q(3m_1|3m_2)$ außerhalb des Kreises wird eine Tangente an den Kreis gelegt. Zeige, daß für die Entfernung $\overline{BQ}$ des Berührpunktes B vom Punkt Q gilt:

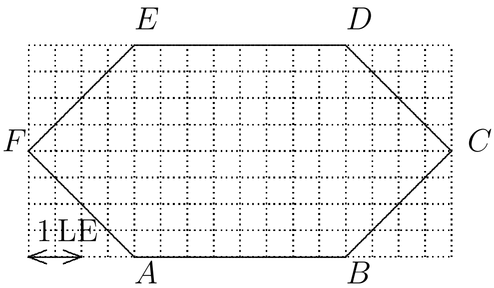
   $$\overline{BQ} = \sqrt{4 \cdot (m_1^2 + m_2^2) - r^2}$$

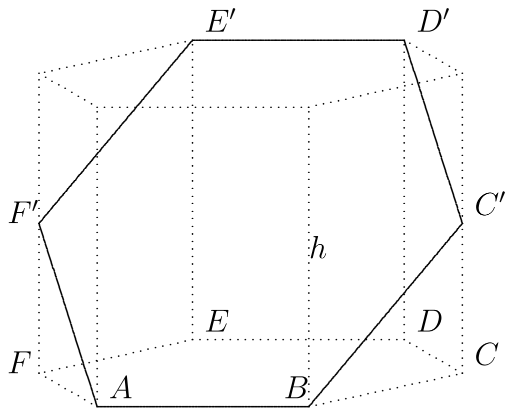
Lösung:

4. Man beweise, daß in einem regulären Oktaeder der Kantenlänge a der Abstand des Oktaedermittelpunktes von der Ebene eines Seitenflächendreiecks die Entfernung $\frac{a}{6}\sqrt{6}$ hat.

Lösung:

5. Über einem Sechseck (alle nötigen Maße sollen der linken Zeichnung entnommen werden) wird ein gerades Prisma der Höhe h errichtet und dieses entlang der Ebene ABD' durchgeschnitten (vgl. rechte Abbildung).
   (a) Begründe anhand einer Skizze, daß C' und F' die Höhe h halbieren.
   (b) Wie groß muß h sein, damit $[BC']$ so lang ist wie $[AB]$? (Ergebnis: $h = 4\sqrt{2}$) Erkläre, warum in diesem Fall sogar alle sechs Seiten des Sechsecks $ABC'D'E'F'$ gleich lang sind?
   (c) Berechne für diesen Fall $\overline{BD'}$ und $\overline{AC'}$. (Zwischenergebnis: $\overline{AC} = \sqrt{40}$)
   (d) Begründe ausführlich mit dem Ergebnis der letzten Teilaufgabe, warum $\sphericalangle BC'D' = \sphericalangle ABC'$ ist. Erkläre damit, warum das Sechseck nicht nur gleichseitig, sondern sogar regulär ist.





Lösung: (a) Eine Skizze, in der die Schnittebene projizierend liegt, liefert die Behauptung mit Hilfe des Strahlensatzes.

(b) Ansatz: $(\frac{h}{2})^2 + \overline{BC}^2 = 4^2$

(c) $\overline{AC'} = \overline{BD'} = \sqrt{48}$

(d) Die Dreiecke ABC' und $BC'D$ stimmen in drei Seitenlängen überein, daher sind die Innenwinkel des Sechsecks bei B und C' kongruent. Diese Überlegungen gelten analog für alle Innenwinkel.

5.3. Anwendungen in anderen Gebieten

1. Kann man ein $2,50\,\text{m}$ langes und $1,85\,\text{m}$ breites rechteckiges Holzbrett durch eine $1,25\,\text{m}$ breite und $1,35\,\text{m}$ hohe rechteckige Fensteröffnung transportieren? Begründe deine Antwort mit einer Skizze und einer Rechnung.

Lösung: Nein, da die Diagonale des Fensters nur ca. $1,84\,\text{m}$ groß ist.

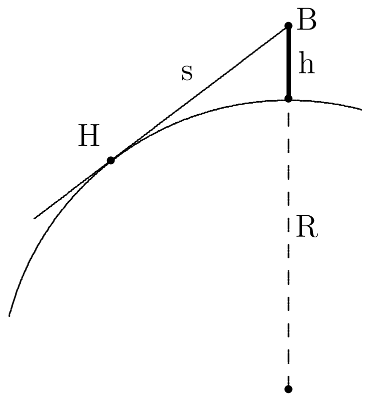
2. Von einem Ort A führt eine 2,00 km lange Straße mit einer Steigung von 8,0% geradlinig zu einem Ort B. Um wieviel liegt Ort B höher als Ort A?

Lösung: ca. $160\,m$

3. Ein Beobachter B befindet sich in der (Augen)höhe h über der Erdoberfläche. Die Erde wird dabei als ideale Kugel vom Radius $R = 6370\,\text{km}$ betrachtet.

   (a) Zeige anhand nebenstehender Skizze, daß für die Sichtweite s bis zum Horizont H des Beobachters die Beziehung $s = \sqrt{h \cdot (2R + h)}$ gilt.

   (b) Wie weit kann man vom Gipfel der Zugspitze ins 2500 m tiefer gelegene bayerische Land hinausschauen?



Lösung: (b): $\approx 180\,\text{km}$

4. Ein Matrose sitzt auf hoher (und ruhiger) See im Ausguck eines Schiffes 25 m über dem Wasser. In welcher Entfernung (Luftlinie) sieht er frühestens

   (a) eine auf dem Wasser treibende Luftmatratze?

   (b) einen anderen Matrosen, der seinerseits in einem Ausguck 30 m über der Wasseroberfläche sitzt?

   Hinweise: Fertige eine Skizze. Erdradius: 6370 km

Lösung: (a) $17,8\,\text{km}$ (b) $37,4\,\text{km}$

5.4. Goldener Schnitt

5.4.1. Konstruktionen

1. Konstruiere ein reguläres Fünfeck mit der Seitenlänge 5 cm.

Lösung:

2. Man kann zeigen, daß die Seitenlänge eines regulären 10-Ecks genauso lang ist wie der größere Abschnitt des nach dem Goldenen Schnitt geteilten Umkreisradius dieses regulären 10-Ecks.

   (a) Konstruiere in einem Kreis mit Radius 6 cm die Seitenlänge s_{10} eines regulären 10-Ecks, welches diesen Kreis als Umkreis hat!

   (b) Überzeuge dich davon, daß eine Strecke der Länge s_{10} tatsächlich genau 10mal auf dem Kreisumfang abgetragen werden kann!

Lösung:

5.4.2. rein rechnerische Aufgaben

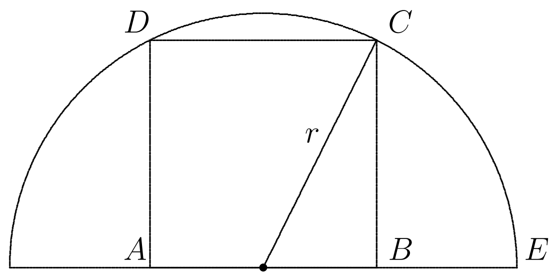
1. Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Winkel 36° bei der Spitze. Die Winkelhalbierende eines Basiswinkels treffe den gegenüberliegenden Schenkel im Punkt P. Zeige anhand einer übersichtlichen Skizze, daß der Punkt P den Schenkel nach dem Goldenen Schnitt teilt!
(Hinweis: Verwende ähnliche Dreiecke!)

Lösung:

2. Der Unterschied der Längen der Abschnitte einer nach dem Goldenen Schnitt geteilten Strecke beträgt 5 cm. Wie lang ist diese Strecke und wie groß sind ihre Abschnitte?

Lösung: Strecke: $5 \cdot (\sqrt{5}+2)\, cm$; Abschnitte: $\frac{5}{2} \cdot (\sqrt{5}+3)\, cm$, $\frac{5}{2} \cdot (\sqrt{5}+1)\, cm$

3. Dem Quadrat $ABCD$ der Seitenlänge 1 wird wie in der Zeichnung ein Halbkreis umbeschrieben. Zeige durch Rechnung: B teilt die Strecke $[AE]$ im Verhältnis des goldenen Schnitts.



Lösung: Es ist $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$ also $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

4. $ABCDE$ ist ein regelmäßiges Fünfeck, d. h. seine Seiten sind gleich lang, seine Innenwinkel gleich groß.

   (a) Begründe:

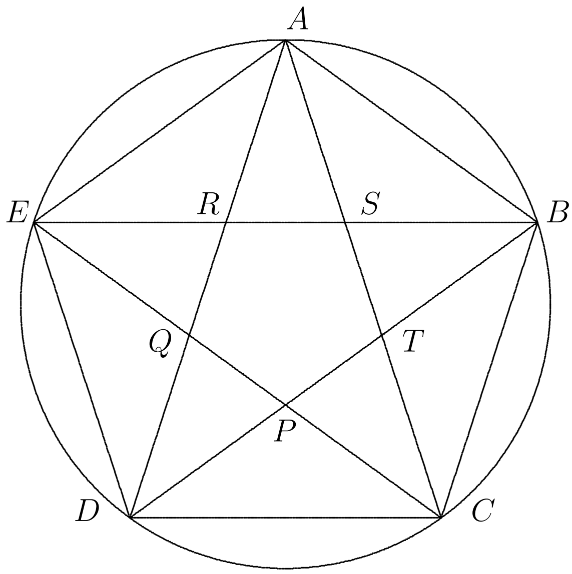
      i. $\sphericalangle DAC = \sphericalangle QCD = \sphericalangle ACE$

      ii. Die Dreiecke ADC und AQC sind gleichschenklig.

      iii. Die Dreiecke ADC und CQD sind ähnlich.

      iv. $\overline{AD} : \overline{DC} = \overline{CQ} : \overline{QD}$

   (b) Begründe, daß Q die Strecke AD im goldenen Schnitt teilt.



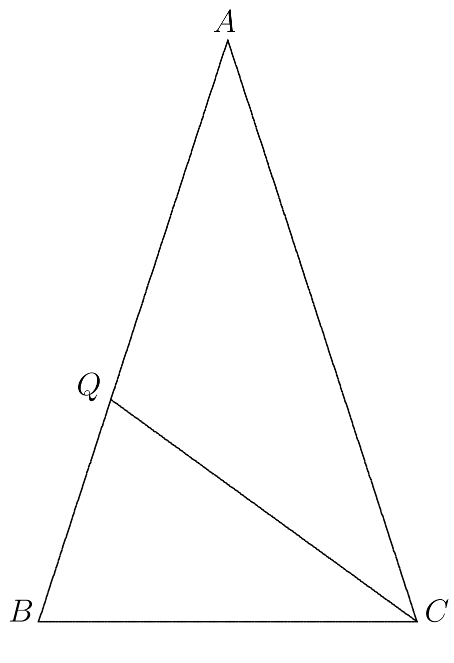
Lösung: (a) (i) Umfangswinkelsatz für Sehnen gleicher Länge. (ii) Aus der Regularität des Fünfecks ergibt sich z. B., daß $EAD \cong BCA$, deswegen ist ADC gleichschenklig. AQC ist wegen der Identität aus (i) „gleichwinklig ". (iii) Übereinstimmung in drei Winkeln. (iv) Folge der Ähnlichkeit.

(b) Ersetze in der Proportion $\overline{DC}$ und $\overline{CQ}$ durch $\overline{AQ}$.

5. Im Dreieck ABC teilt der Punkt Q die Seite $[AB]$ im goldenen Schnitt. Ferner gilt $\overline{AQ} = \overline{CQ} = \overline{BC}$.

   (a) Zeige, daß die Dreiecke ABC und CQB ähnlich sind und berechne alle Innenwinkel des Dreiecks ABC.

   (b) Beschreibe wie man, ausgehend von diesem Dreieck, ein reguläres Fünfeck konstruieren kann.



Lösung: (a) Weil Q die Strecke $[AB]$ im goldenen Schnitt teilt und wegen der Gleichheiten $\overline{AQ} = \overline{CQ} = \overline{BC}$ ergibt sich $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{CQ} : \overline{QB}$. Also sind ABC und CQB ähnlich. Daraus ergibt sich $\sphericalangle\alpha = 36^0$ und $\sphericalangle\beta = \sphericalangle\gamma = 72^0$.

(b) Das Fünfeck erhält man z. B. durch Antragen der 72^0-Winkel im Mittelpunkt eines Kreises.

5.4.3. Kombinierte Aufgaben (Zeichnung/Rechnung)

1. (a) Zeichne die Punkte $A(-3|-6)$, $B(2|-1)$, $C(-2|3)$ und $D(-7|-2)$ in ein Koordinatensystem.
   (b) Beweise rechnerisch, daß das Rechteck ABCD kein goldenes Rechteck ist! (Hinweis: Berechne die Seitenlängen!)
   (c) Konstruiere den Punkt T, der die Strecke [AB] im Goldenen Schnitt teilt!
   (d) Konstruiere nun die Punkte E und F auf AD bzw. BC, so daß das Viereck ABEF ein goldenes Rechteck mit der längeren Seite $[AB]$ ist!

Lösung: (b) $\overline{AB} : \overline{BC} = 5 : 4$ (c) $T(0|-3)$

2. (a) Zeichne die Punkte $A(1|3)$ und $B(9|1)$ in ein Koordinatensystem.
   (b) Konstruiere den Punkt T, der $[AB]$ im Goldenen Schnitt teilt.
   (c) Ergänze die Figur zu einem Goldenen Rechteck $ABCD$, wobei $[AB]$ die längere Seite ist.
   (d) Berechne die Länge a der Strecke $[AB]$.
   (e) Begründe, daß gilt: $\overline{AT} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \cdot a$
   (f) Zeige, daß das Rechteck $TBCE$ ebenfalls ein Goldenes Rechteck ist (E liegt auf $[CD]$).

Lösung: (d) $a = 2\sqrt{17}$ (e) folgt aus $\overline{AT} = \frac{a}{\phi}$

3. (a) Zeichne die Punkte $A(-3|-2)$, $B(6|1)$ und $C(-5|4)$ in ein Koordinatensystem. (Platzbedarf: $-7 \le x \le 7$; $-5 \le y \le 8$)
   (b) Beweise rechnerisch, daß $\sphericalangle(BAC) = 90^o$ gilt!
   (c) Der Punkt $D(x_D|7)$ ist der vierte Eckpunkt des Rechtecks ABCD.
   Berechne die fehlende Koordinate!
   Zeichne D in das Koordinatensystem ein.
   (d) Konstruiere nun E auf AC bzw. F auf BD, so daß das Viereck ABFE ein goldenes Rechteck ist.
   (e) Berechne $\overline{AE}$! (Gib das Ergebnis auf eine Dezimale gerundet an.)

Lösung: (b) Seitenlängen des Dreiecks ABC berechnen; Pythagoras
(c) $x_D = 4$ (e) $\overline{AE} = 5,9$

4. Eine Strecke $[AB]$ mit $\overline{AB} = 7,0\,\mathrm{cm}$ soll so über B hinaus verlängert werden, daß die entstandene Gesamtstrecke $[AC]$ durch den Punkt B nach dem Goldenen Schnitt geteilt wird.
   (a) Berechne, um wieviel die Strecke $[AB]$ verlängert werden muß!
   (b) Konstruiere den Punkt C!

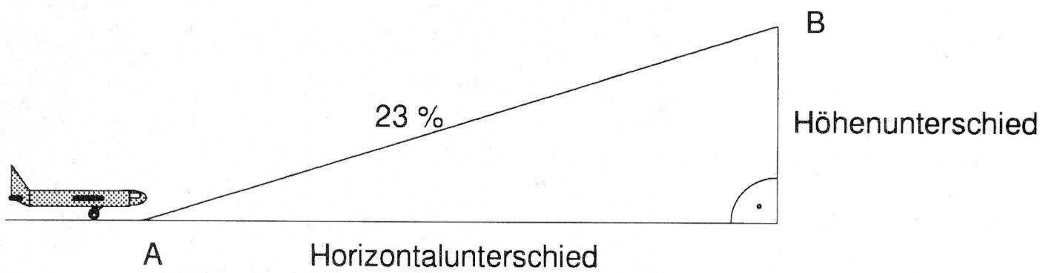
Lösung: (a): $\overline{BC} = \frac{7}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1)$

6. Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck

6.1. Sinus, Kosinus, Tangens am rechtwinkligen Dreieck

1. **Über den Wolken ...**

   Doris Trump ist Pilotin eines Passagierflugzeuges. Sie ist dafür verantwortlich, dass sich ihre Gäste während des Fluges wohlfühlen. Vor allem beim Start hat sie darauf zu achten, dass nach dem Abheben vom Boden eine Steigung von 23% nicht überschritten wird.



Die Steigung von $23\% = 0,23$ wird aus dem Quotienten von Höhen- und Horizontalunterschied ermittelt: $Steigung = \frac{Höhenunterschied}{Horizontalunterschied}$.

Unsere Pilotin Doris Trump hat es da einfacher - ganz ohne Rechnerei. Sie schaut nur auf das Steigungsmessgerät im Cockpit ihres Flugzeuges. Dieses zeigt nämlich den Winkel an, den die Flugstrecke mit der Horizontalstrecke bilden soll. Man nennt diesen Winkel Anstellwinkel, d.h. dieser Winkel wird von der Pilotin eingestellt, der tatsächliche Ansteigwinkel ist aber ein anderer. Dabei ist die Differenz vom tatsächlichen Ansteig- und dem theoretischen Anstellwinkel u.a. von Richtung und Stärke des Windes sowie vom Luftdruck abhängig.

Doris Trump hebt mit ihrer Maschine Richtung London ab. Vom Steigungsmessgerät liest sie einen Steigungswinkel von $16°$ ab.

(a) Wie groß ist die Steigung des Flugzeuges in Prozent?

(b) Gib die tatsächlich geflogene Steigung in Prozent an, wenn wir annehmen, dass der Ansteigwinkel der Boing $747 - 400$ um $3°$ kleiner ist als der Anstellwinkel.

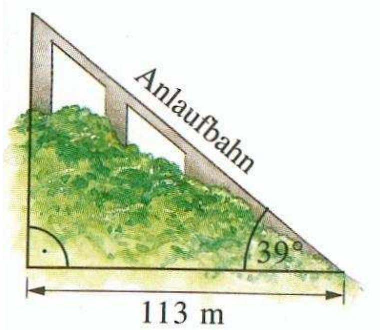
Quelle: RAAbits Reihe 5 Material S. 5

Lösung: (a) $\approx 28,67\%$

(b) $\tan 13° \approx 23,09\%$

2. **Aufgaben zur Anwendung**

In Oberstdorf befindet sich eine der größten Skiflugschanzen der Welt. Sie wird auch „Himmelsguckloch“ genannt.



(a) Welchen Höhenunterschied hat die Anlaufbahn und wie lang ist sie?

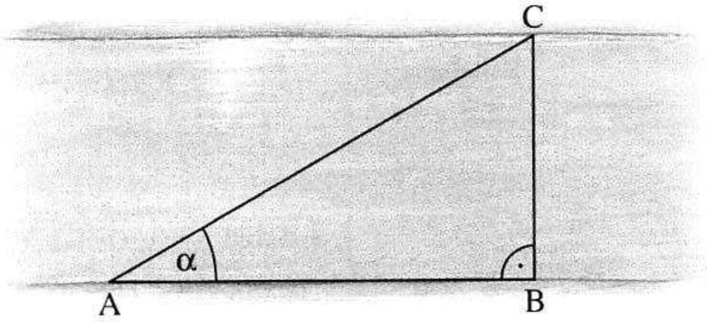
(b) Welchen Höhenunterschied legt ein Springer auf der Anlaufbahn zurück, wenn diese wegen zu großer Weiten der Teilnehmer im ersten Durchgang im zweiten Durchgang um 5 m verkürzt worden ist?

Lösung: (a) Höhenunterschied $= 91,5\,\text{m}$ Länge der Anlaufbahn $= 145,4\,\text{m}$

(b) Höhenunterschied $= 88,4\,\text{m}$

3. **Aufgaben zur Anwendung**

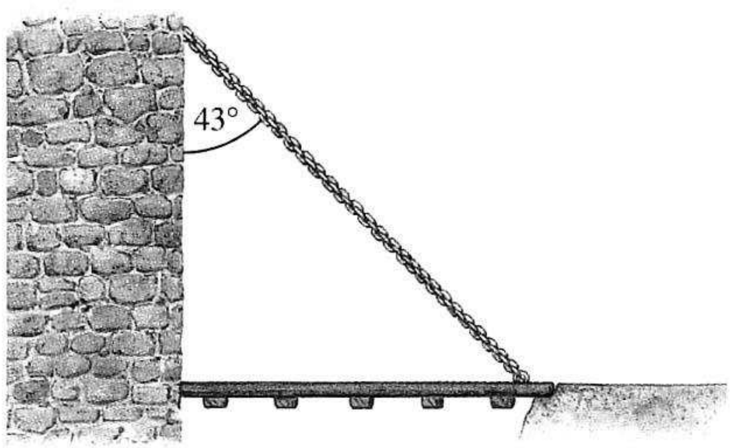
Um die Breite eines Flusses zu bestimmen, hat man unmittelbar an einer Uferseite eine Strecke $|\overline{AB}| = 80\,\text{m}$ abgesteckt und den Visierwinkel $\alpha = 38°$ gemessen. Wie breit ist der Fluss?



Lösung: Breite des Flusses $= 62,5\,\text{m}$

4. **Aufgaben zur Anwendung**

Ritter Eisenkopf soll für die neue Zugbrücke unter anderem eine Kette kaufen, mit der man die 8 Meter lange Brücke im Notfall hochziehen kann. Bei seinen vielen Einkaufszetteln findet er jedoch nur die nebenstehende Zeichnung ohne Längenangabe der Kette. Kannst du ihn davor bewahren ohne Kette in die Burg heimzukehren?



Lösung: Die Kette muss mindestens $11,7\,\text{m}$ lang sein.

5. **Aufgaben zur Anwendung**

   Die Steigung einer Straße mit dem Steigungswinkel α ist der Wert von $\tan\alpha$, umgerechnet in Prozent.

   (a) Die steilste Straße der Welt soll im neuseeländischen Ort Duneddin sein. Sie hat den Steigungswinkel $31°$. Ermittle die Steigung.

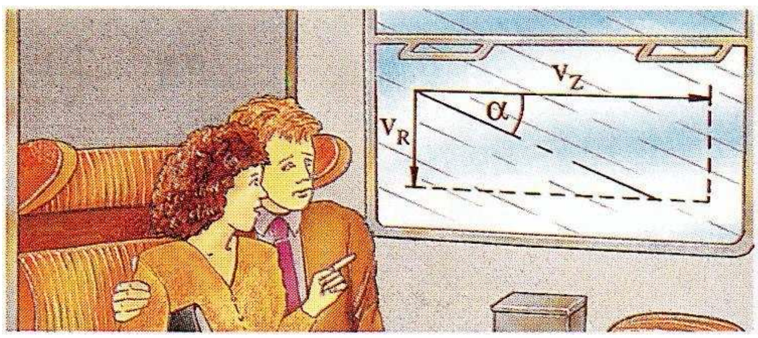
   (b) Ein Spezialfahrzeug für Waldarbeit im Gebirge kann $50°$ geneigte Hänge hochfahren. Wieviel % Steigung sind das?

Lösung: (a) 60% Steigung

(b) 119% Steigung

6. **Aufgaben zur Anwendung**

   Bei Windstille bilden die Regentropfen am Fenster eines mit einer Geschwindigkeit $v_z = 140\,\frac{km}{h}$ fahrenden Zuges einen Winkel $\alpha = 20°$ mit der Waagerechten. Berechne die Fallgeschwindigkeit v_R der Regentropfen.



Lösung: Die Regentropfen fallen mit einer Geschwindigkeit von $14,15\,\frac{m}{s}$ oder $50,96\,\frac{km}{h}$.

7. Begründen Sie anhand einer Zeichnung:

$$\cos(90^o - \alpha) = \sin\alpha$$

Lösung:

8. Begründen Sie anhand einer Zeichnung:

$$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$$

Lösung:

9. Vereinfachen Sie für $0 \leq \alpha \leq 90^o$: $\sqrt{1 + \tan^2\alpha} \cdot \sin(90^o - \alpha)$

Lösung: 1

10. Vereinfachen Sie die folgenden trigonometrischen Ausdrücke so weit wie möglich:
    (a) $\frac{1}{\tan\alpha\cos\alpha}$
    (b) $\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\tan\alpha}$
    (c) $\sqrt{1+\sin\alpha} \cdot \sqrt{1-\sin\alpha}$
    (d) $\dfrac{1}{1+(\tan\alpha)^2}$

Lösung: (a) $\frac{1}{sin\alpha}$ (b) $\frac{1}{sin\alpha}$ (c) $|cos\alpha|$ (d) $(cos\alpha)^2$

11. Bestimme die Definitionsmenge des Terms

$$\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha \cdot (\tan^2\alpha + 1)}$$

für $\alpha \in [0°; 90\circ]$ und vereinfache diesen soweit wie möglich.

Lösung: $D =]0°; 90°[$, $\cos^3\alpha$

12. Bestimme die Definitionsmenge des Terms

$$\frac{\tan\alpha - \tan\alpha\cdot\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

für $\alpha \in [0°; 90°]$ und vereinfache diesen soweit wie möglich.

Lösung: $D =]0°; 90°[$, $\frac{1}{2}$

13. Der **Kotangens** eines Winkels ist definiert als $\cot\varphi = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$. Gib die Definitionsmenge an und vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{1}{1+\tan^2 x} + \frac{1}{1+\cot^2 x}$$

Lösung: $D =]0°; 90°[$, $\dfrac{1}{1+\tan^2 x} + \dfrac{1}{1+\frac{1}{\tan^2 x}} = 1$

14. Vereinfachen Sie folgenden Term für $\alpha \in]0°; 90°[$ soweit wie möglich.

$$\cos(90° - \alpha)\cdot\sqrt{1+(\tan\alpha)^2}$$

Lösung: $\tan\alpha$

15. Drücken Sie $\sin\alpha$ für $0° \leq \alpha < 90°$ durch $\tan\alpha$ aus.
Hinweis: Quadrieren Sie zunächst $\tan\alpha$.

Lösung: $\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{(\tan\alpha)^2+1}}$

16. Zeige für $0° \leqq \alpha < 90°$ die Gültigkeit folgender Formel:

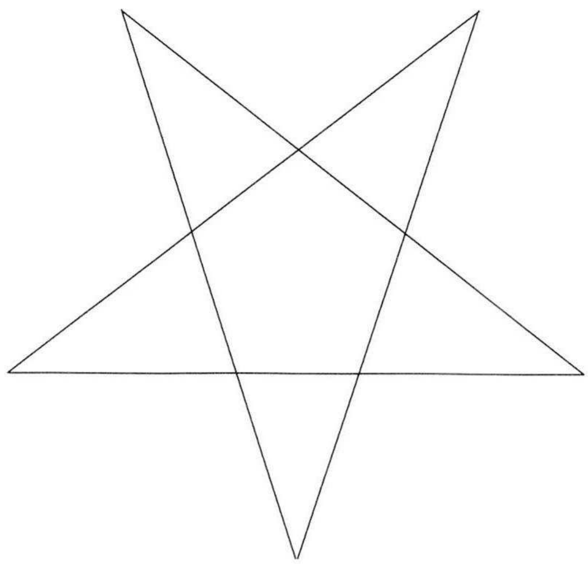
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

Lösung:

6.2. Berechnungen am Dreieck

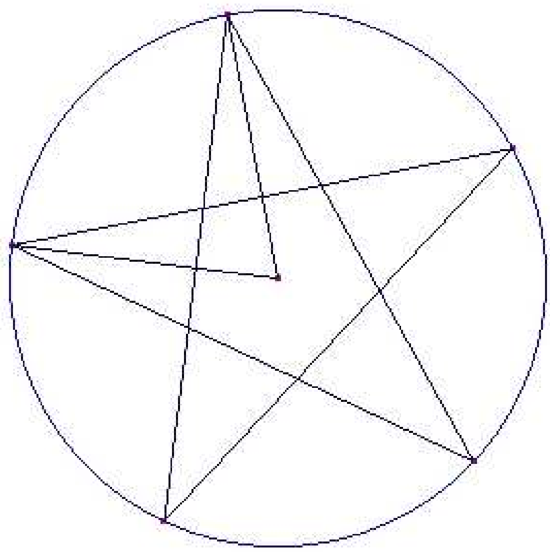
1. **Stern**

   Ein fünfzackiger Stern, wie abgebildet, soll völlig symmetrisch sein (alle fünf Linien sind gleich lang und alle gleichartigen Innenwinkel gleich groß).
   Die Gesamtlänge der Linien sei 1000 mm, d.h. dass bei der Zeichnung des Sterns ein Bleistift ohne das Papier zu verlassen 1000 mm zurückgelegt hat.
   Wie groß ist der Abstand von einer Sternspitze bis zum Mittelpunkt des Sterns?

   Quelle: Fich, O.: Mathelogik

Lösung: Von jeder Sternspitze gehen zwei Linien aus. Wenn man sich vorstellt, dass der Stern von einem Kreis umgeben ist, bei dem die fünf Sternspitzen genau auf dem Kreisrand liegen, wird deutlich, dass der Winkel zwischen den beiden Linien der Sternspitze 36 Grad betragen muss (Umfangswinkelsatz oder Winkelsumme). Zeichnet man eine Linie von einer Sternspitze zum Mittelpunkt des Sterns und eine Linie vom Zentrum des Sterns rechtwinklig zu einer der beiden Linien von der Sternspitze, erhält man ein rechtwinkliges Dreieck, bei dem man den Abstand von einer Sternspitze zum Mittelpunkt folgendermaßen berechnen kann: $s = \frac{1000\,\mathrm{mm}}{cos 18°} = 105\,\mathrm{mm}$.

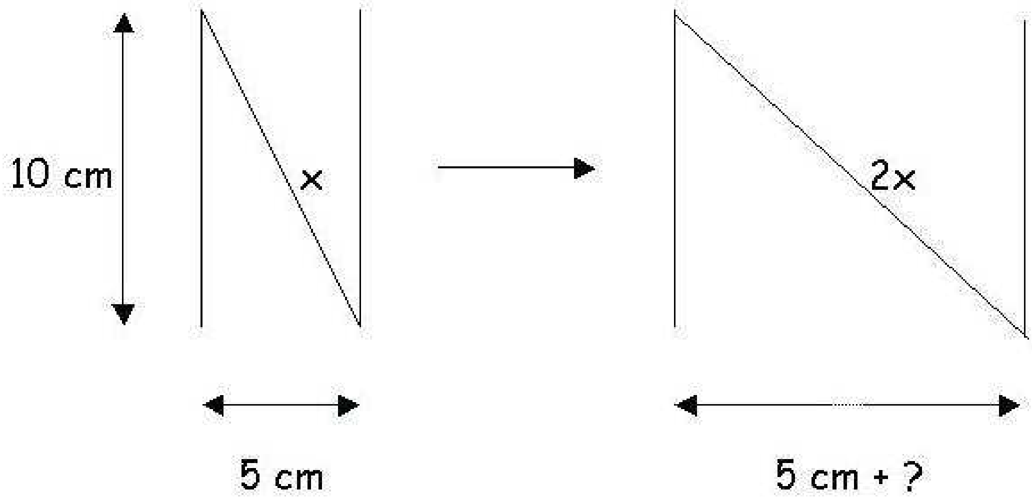


2. **Buchstaben-Geometrie**

   Einige Buchstaben sind hervorragende Repräsentanten für die Geometrie. Schauen wir uns z.B. den Buchstaben N an - er besteht aus zwei senkrechten Linien und einer schrägen Linie. Der Buchstabe ist ca. doppelt so hoch wie breit. Wir nehmen eine Breite von 5 cm an. Damit beträgt die Höhe 10 cm.

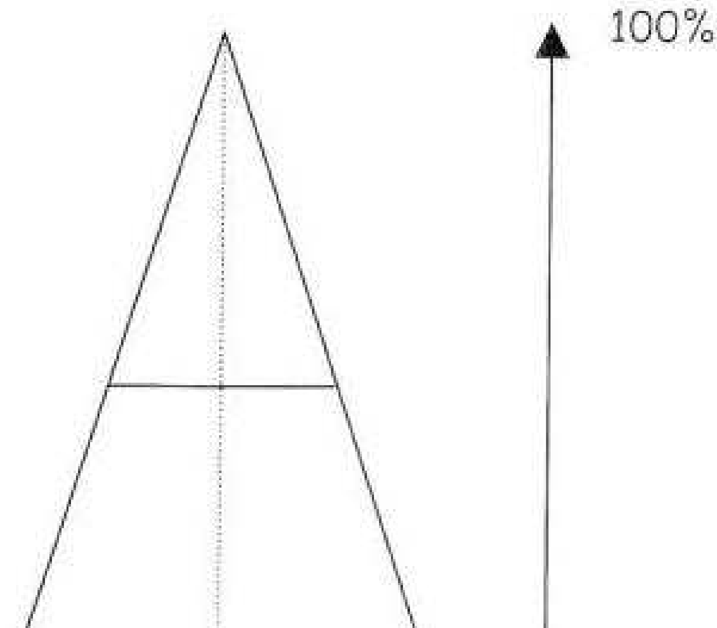
   (a) Buchstabe N

      i. Wenn wir uns vorstellen, dass die linke senkrechte Linie sich nicht bewegt, während sich die rechte senkrechte Linie von der feststehenden Linie fortbewegt - wie weit muss diese Linie verschoben werden, damit sich die Länge der schrägen Linie (siehe Abbildung) verdoppelt?



ii. Wenn wir die senkrechte Linie weiter parallel verschieben, so dass sich die Länge der schrägen Linie wiederum verdoppelt (d.h. eine Vervierfachung im Vergleich zur ursprünglichen Linie) - muss die Linie dann im Vergleich zur ersten Verschiebung um mehr oder um weniger verschoben werden?

(b) Buchstabe A



i.

Schauen wir uns jetzt einmal den Buchstaben A an - er besteht aus zwei schrägen Linien und einem Querstrich. Wir nehmen an, dass der Winkel zwischen den beiden Schräglinien 30° beträgt. Wenn wir uns jetzt vorstellen, dass die beiden „losen“ Enden der beiden Schräglinien mit einer geraden Linie verbunden werden, so bilden diese ein Dreieck (siehe Abbildung). Der Querstrich des Buchstaben A teilt das Dreieck in zwei Bereiche. Wir zeichnen eine Hilfslinie in Form einer Senkrechten vom höchsten Punkt zur Grundlinie.

ii. Wenn wir den unteren Punkt der Hilfslinie mit 0% bezeichnen und den obersten Punkt mit 100%, bei welchem Prozentsatz muss dann der Querstrich die Hilfslinie schneiden, wenn die beiden Flächen (geteilt durch den Querstrich des A's) gleich groß sein sollen?

iii. Wie lang ist der Querstrich in diesem Fall?

Quelle: Fich, O.: Mathelogik

Lösung: (a) i. Ausgehend vom Satz des Pythagoras muss die Länge der Diagonalen $\sqrt{125}$ cm betragen. Das Doppelte hiervon ist $\sqrt{500}$ cm. Die Länge der senkrechten Linie ist unverändert 10 cm und damit 100, wenn sie quadriert wird. Die Breite zum Quadrat muss daher 400 sein, wenn die Summe 500 betragen soll. Die Quadratwurzel aus 400 ist 20, d.h. die neue Breite ist also 15 cm größer als vorher.

ii. Die Verdopplung entspricht in diesem Fall einer schrägen Linie mit der Länge $\sqrt{2000}$ cm, und da die Länge der senkrechten Linie unverändert ist, muss die Breite des Buchstabens $\sqrt{900}\,\text{cm} = 43,6\,\text{cm}$ sein, was einer Vergrößerung um ca. $23,6$ cm entspricht.

(b) i. Wenn wir die Länge der senkrechten Linie als 1 definieren, muss die Fläche des großen Dreiecks (das ganze A) sein: A (großes Dreieck) $= \frac{1}{2} \cdot \tan 15° \cdot 1 \cdot 2 = \tan 15°$. Der Querstrich soll nun entsprechend der Hälfte der Fläche des As platziert werden. Wenn wir die Länge der Linie, die von der Spitze des As rechtwinklig zum Querstrich verläuft, b nennen, ist die Fläche des Dreiecks über dem Querstrich: A (kleines Dreieck) $= \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot \tan 15° \cdot 2 = b^2 \tan 15°$. Dies soll gleich $\frac{1}{2} \cdot \tan 15°$ sein, weshalb $b = \sqrt{0,5} \approx 0,707$ entsprechend $70,7\%$ ist, oder $29,3\%$, von unten nach oben gemessen.

ii. Die Länge der Querlinie beträgt: $L = 2 \cdot \sqrt{0,5} \cdot \tan 15° \approx 0,379$.

3. Einem Kreis vom Radius 6,00cm ist ein reguläres 20-Eck einbeschrieben. Berechnen Sie dessen Umfang. Wie groß ist die prozentuale Abweichung vom Kreisumfang?

Lösung: 37,54cm, 0,41%

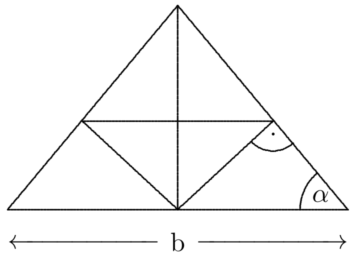
4. Eine Leiter der Länge 4,7 m wird an eine Wand gelehnt. Zwischen welchen Werten darf sich ihr Neigungswinkel gegenüber der Wand bewegen, wenn der Fußpunkt der Leiter mindestens 1 m, aber nicht weiter als 2 m von der Wand entfernt sein soll? (3 geltende Ziffern)

Lösung: $12,3° \leqq \alpha \leqq 25,2°$

5. Ein Flugzeug fliegt auf geradlinigem Kurs und in gleichbleibender Höhe von 4000 m mit einer Geschwindigkeit von 250 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ genau über einen Beobachter hinweg. Wie weit ist das Flugzeug nach 20 s vom Beobachter entfernt, und unter welchem Winkel gegen die Horizontale beobachtet er es dann? Fertige eine Skizze an.

Lösung: 6403 m; 38,66^o

6. Der Giebel eines Hauses soll mit einem symmetrischen Fachwerk verziert werden (vgl. Zeichnung). Alle eingezeichneten Strecken stellen Balken dar. Wieviel Meter Balken braucht man insgesamt, wenn die Giebelbreite $b = 6{,}40$ m und der Neigungswinkel $\alpha = 50^o$ beträgt?

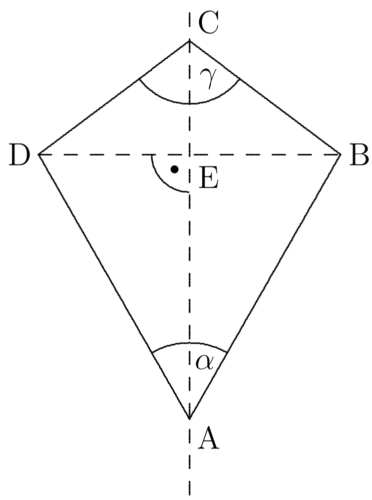


Lösung: 28,82 m

7. Von der Plattform eines 23,8 m hohen Leuchtturmes sieht man mit einem Fernrohr ein vor Anker liegendes Schiff unter einem Tiefenwinkel von 12,9°.
Wie weit ist das Schiff horizontal entfernt, wenn sich das Fernrohr 1,60 m über der Plattform befindet?

Lösung: $\approx 111\,m$

8. Gegeben ist das Viereck $ABCD$ mit der Symmetrieachse AC (siehe Skizze) und
$\alpha = 70°$, $\overline{AB} = 5{,}2$ cm, $\overline{AC} = 11{,}3$ cm.
Berechnen Sie $\overline{BC}, \overline{BD}$ auf 1 Dezimale und den Winkel γ auf 1 Grad genau!



Lösung: $\overline{BC} \approx 7{,}6\,cm$; $\overline{BD} \approx 6{,}0\,cm$; $\gamma \approx 46°$

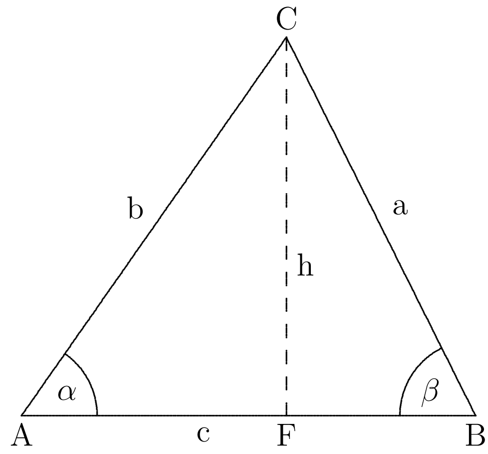
9. Von einem allgemeinen Dreieck ABC (siehe Figur!) ist bekannt:
   $b = 7{,}0\,\text{cm}$; $c = 7{,}4\,\text{cm}$; $\alpha = 53°$.
   Berechne ohne Verwendung des Satzes von Pythagoras:

   (a) die Länge der Höhe h

   (b) die Länge von [AF]

   (c) den Winkel β

   (d) die Länge der Seite a.



Lösung: (a): 5,6 *cm* (*b*) : 4,2 *cm* (*c*) : 60° (*d*) : 6,5 *cm*

10. Ein Heißluftballon steigt in 500 m Entfernung senkrecht empor. Man sieht ihn zunächst unter einem Winkel von 50°, einige Zeit später unter einem Winkel von 60° und schließlich unter einem Winkel von 70° (jeweils gemessen gegen die Horizontale). Um wie viele Meter ist der Ballon zwischen den ersten beiden Winkeln gestiegen, um wie viele Meter zwischen den letzten beiden?

Lösung: $\approx 270\,\text{m}$ *bzw.* $\approx 508\,\text{m}$

11. Gegeben ist ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit den parallelen Grundseiten $[AB]$ und $[CD]$, wobei $\overline{AB} > \overline{CD}$ sein soll. Es sei $\overline{AB} = 2a$ und $\overline{AD} = a$ sowie $\sphericalangle BAD = \alpha$ gesetzt.

    (a) Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt F des Trapezes gilt:

    $$F = a^2 \cdot (2 - \cos\alpha) \cdot \sin\alpha$$

    (b) Zeigen Sie, dass für die Diagonalenlänge $\overline{AC}$ gilt:

    $$\overline{AC} = a \cdot \sqrt{5 - 4 \cdot \cos\alpha}$$

    (c) Geben Sie die möglichen Werte für die Diagonalenlänge $\overline{AC}$ in Abhängigkeit von a an!

Lösung: (c) Wegen $0° < \alpha < 90°$ folgt $a < \overline{AC} < a \cdot \sqrt{5}$

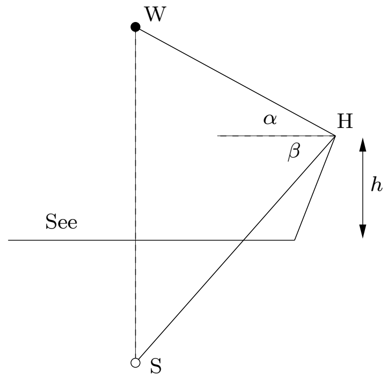
12. Ein Planet hat ein Volumen von $V = 4{,}523 \cdot 10^{10}\,\text{km}^3$. Zwei Städte haben, auf der Planetenoberfläche gemessen, eine gegenseitige Entfernung von $a = 5000\,\text{km}$. Wie lang ist ein Tunnel, der die beiden Städte geradlinig miteinander verbindet?

Lösung: 4000 km

13. Ein Planet hat ein Volumen von $V = 4{,}225 \cdot 10^{9}\,\text{km}^3$. Zwei Städte haben, auf der Planetenoberfläche gemessen, eine gegenseitige Entfernung von $b = 3000\,\text{km}$. Wie lang ist ein Tunnel, der die beiden Städte geradlinig miteinander verbindet?

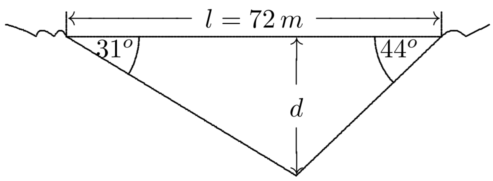
Lösung: 2000 km

14. Die Höhendifferenz zwischen dem Wasserspiegel eines Sees und einem über dem See gelegenen Hotel H beträgt $h = 75{,}4\,\text{m}$. Vom Hotel aus sieht ein Beobachter eine Wolke unter dem Winkel $\alpha = 59{,}2°$, ihr Spiegelbild im See unter dem Winkel $\beta = 62{,}3°$.
Wie hoch steht die Wolke über dem See?



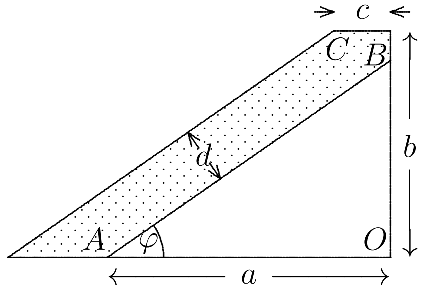
Lösung: $\overline{WP} = \frac{\tan\beta + \tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha} \cdot h \approx 1190\,m$

15. Über einen Kanal führt eine Brücke wie in der Skizze rechts dargestellt. Berechne aus der Brückenlänge und aus den beiden Neigungswinkeln die größte Tiefe d des Kanals.



Lösung: 26,7m

16. Die Zeichnung stellt die seitliche Wange einer Treppe dar, von der die Maße $a = 150$ cm, $b = 120$ cm, $c = 30$ cm und $d = 30$ cm gegeben sind. Ihr Steigungswinkel φ soll berechnet werden.
    (a) Berechnen Sie $\overline{AC}$ und $\sphericalangle OAC$.
    (b) Berechnen Sie damit $\sphericalangle BAC$ und φ.



Lösung: (a) $\overline{AC}^2 = (a-c)^2 + b^2$ ergibt $\overline{AC} = 170$cm. $\tan(\sphericalangle OAC) = 1$ also $\sphericalangle OAC = 45^o$.

(b) $\sin(\sphericalangle BAC) = \frac{d}{\overline{AC}}$ ergibt $\sphericalangle BAC = 10{,}2^o$. Daraus folgt $\varphi = 34.8^o$.

17. Von einem Quader $ABCDEFGH$ sind bekannt:
    (a) die Länge der Raumdiagonalen $[BH]$: $\overline{BH} = 21{,}5\,\text{cm}$,
    (b) der Neigungswinkel von $[BH]$ gegen die Ebene ABC: $\gamma = 42{,}3°$,
    (c) der Winkel $\sphericalangle DBA$: $\varepsilon = 35{,}1°$.

    Erstellen Sie zunächst eine übersichtliche Schrägbildskizze und berechnen Sie dann die Maße des Quaders! Leiten Sie dazu Formeln für die Kantenlängen des Quaders her und setzen Sie erst ganz am Schluß die gegebenen Größen ein!

Lösung: $\overline{DH} = \overline{BH} \cdot \sin\gamma = 14{,}5\,cm$;
$\overline{AB} = \overline{BH} \cdot \cos\gamma \cdot \cos\varepsilon = 13{,}0\,cm$;
$\overline{AD} = \overline{BH} \cdot \cos\gamma \cdot \sin\varepsilon = 9{,}1\,cm$

6.3. Vermessungsaufgaben

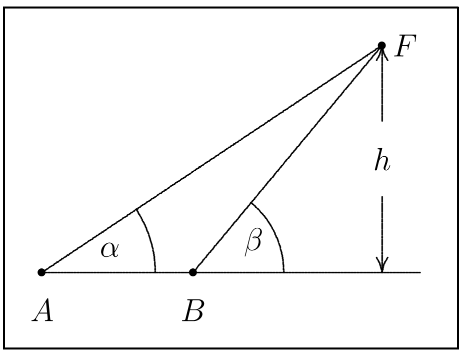
1. Eine Radarstation R peilt einen heranfliegenden Überschalljäger F an und ermittelt alle 5 s die Entfernung $r = \overline{RF}$ des Flugzeugs zur Station sowie den Winkel φ der Geraden RF zur Horizontalen. Zwei aufeinanderfolgende Datensätze sind

$$\begin{aligned} r_1 &= 6946\,\text{m}\,; & \varphi_1 &= 30{,}26° \\ \text{und}\quad r_2 &= 5000\,\text{m}\,; & \varphi_2 &= 36{,}87°. \end{aligned}$$

   Erstelle eine Zeichnung des Sachverhaltes im Maßstab 1 : 100 000 und berechne die horizontale Geschwindigkeit v_H, die Sinkgeschwindigkeit v_s sowie die Gesamtgeschwindigkeit v des Flugzeuges. Achte auf eine sinnvolle Genauigkeit.

Lösung: $v_\text{H} = 400\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_\text{s} = 100\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v = 412\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

2. Zwei Buben haben sich an den Orten A und B aufgestellt ($\overline{\text{AB}} = 1000\,\text{m}$) und bestimmen mit selbstgebastelten Winkelmessern die Winkel $\alpha = 30°$ und $\beta = 45°$ eines Flugzeuges F zur Horizontalen (siehe Abb.).



   (a) Berechne die Höhe h des Flugzeuges über Grund unter der Annahme, dass die beiden gemessenen Winkel exakt sind.

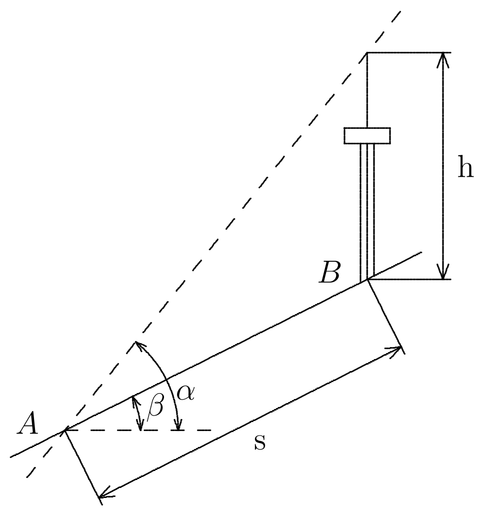
(b) In welchem Intervall liegt h, wenn die gemessenen Winkel jeweils mit einem Fehler von $\pm 1°$ behaftet sind? Erstellen Sie unbedingt eine Überlegungsfigur!

Lösung: (a) $h = \overline{AB} \cdot \dfrac{\tan\alpha\ \tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha} = 500\,\text{m} \cdot (\sqrt{3} - 1) \approx 1366\,\text{m}$

(b) $h_{\text{min}} = 1000\,\text{m} \cdot \dfrac{\tan 29°\ \tan 46°}{\tan 46° - \tan 29°} \approx 1193\,\text{m}$

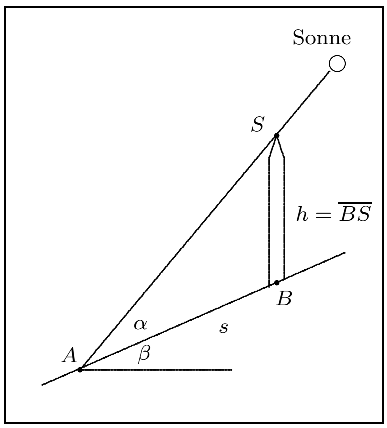
$h_{\text{max}} = 1000\,\text{m} \cdot \dfrac{\tan 31°\ \tan 44°}{\tan 44° - \tan 31°} \approx 1590\,\text{m}$

3. Ein Turm der Höhe $h = 25$ m steht auf einem Hang, der unter dem Winkel $\beta = 28^o$ gegen die Horizontale geneigt ist. Die Schattenlänge $s = \overline{AB}$ des Turms beträgt bei dem aus der Skizze ersichtlichen Sonnenstand 45 m. Berechnen Sie den Höhenwinkel α, unter dem die Sonne erscheint,auf Grad genau.



Lösung: $\tan\alpha = \dfrac{h + s\sin\beta}{s\cos\beta}$
liefert $\alpha = 49{,}3°$

4. Ein Turm der Höhe h steht an einem Hang, der unter dem Winkel $\beta = 30°$ gegen die Horizontale geneigt ist. Die Schattenlänge $s = \overline{\text{AB}}$ des Turms ist bei dem aus der Skizze ersichtlichen Sonnenstand gerade doppelt so groß wie die Turmhöhe. Berechne den Winkel α zwischen Sonnenstrahlen und Hang.
Fertige eine saubere Zeichnung an, aus der die Bedeutung aller verwendeten Größen hervorgeht.



Lösung: $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{h + 2\,h\ \sin\beta}{2\,h\ \cos\beta} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $\alpha \approx 19{,}1°$

5. Die Höhe eines Schlotes soll durch Winkelmessung mit einem Theodoliten bestimmt werden. Weil der Turmfuß nicht sichtbar ist, wird folgendes Verfahren gewählt: Vom Punkt A aus wird der Winkel α zwischen der Horizontalen und der Blickrichtung zur Turmspitze gemessen. Anschließend wird der Theodolit **waagrecht** in Richtung des Turms zum Punkt B bewegt und die Messung wiederholt (Winkel β).
   (a) Berechnen Sie die Turmhöhe h aus $\overline{AB} = 51{,}7\text{m}$, $\alpha = 23{,}65^0$ und $\beta = 26{,}20^0$.
   (b) Wie ändert sich dieses Ergebnis, wenn annimmt,dass der Messwert von α mit einem Fehler von $\pm 0{,}05^0$ behaftet ist? Runden Sie den Wert von h zweckmäßig.

Lösung: (a) $h = \dfrac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)} \cdot \overline{AB} = 205{,}8\text{m}$

(b) Fehler: ca. 4m, $h = 206\text{m}$

7. Fortführung der Raumgeometrie

7.1. Schrägbilder

7.2. Körper

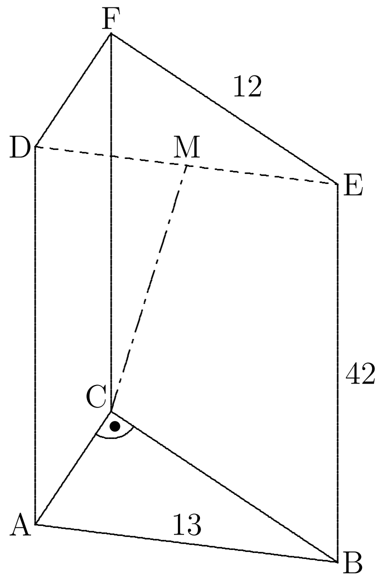
7.2.1. gerades Prisma

1. Ein gerades Prisma besitzt ein rechtwinkliges Dreieck als Grund- und Deckfläche sowie die in der Abbildung angegebenen Maße (in cm). M sei der Mittelpunkt der Kante $[DE]$. Berechne

   (a) die Oberfläche des Prismas

   (b) sein Volumen

   (c) die Länge der Strecke $[CM]$.



Lösung: (a) $1320\,\text{cm}^2$ (b) $1260\,\text{cm}^3$ (c) $42{,}5\,\text{cm}$

2. Der Quader $ABCDEFGH$ hat die Kantenlänge $\overline{AB} = 12cm$, $\overline{BC} = 20cm$ und $\overline{AE} = 10cm$. Die Mittelpunkte der Kanten $[BF]$ und $[CG]$ seien M und N.

   (a) Welche der Geraden AF, BG und BC steht auf der Gerade BE senkrecht?

   (b) Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks $EMNH$

   (c) E, M, F, H, N und G sind die Ecken eines Prismas. Welchen Bruchteil des Quadervolumens nimmt dieses Prisma ein?

   Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 10 der Gymnasien 2005

Lösung: (a) BC (b) $260cm^2$ (c) $\frac{1}{4}$

3. Von einem geraden Prisma kennt man die Höhe $h = 9\,\text{cm}$, das Volumen $V = 1134\,\text{cm}^3$ und die Oberfläche $O = 522\,\text{cm}^2$. Berechne den Umfang der Grundfläche.

Lösung: $\text{G} = 126\,\text{cm}^2$; $\text{M} = 270\,\text{cm}^2$; $\text{u} = 30\,\text{cm}$

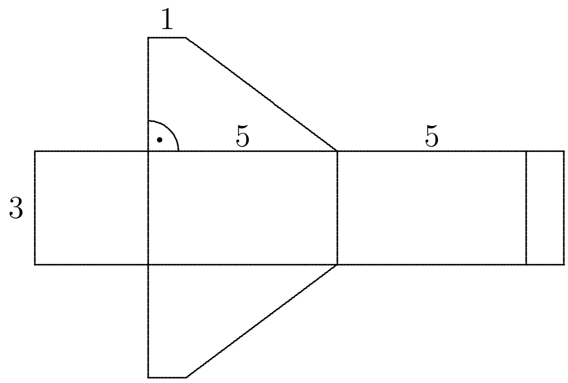
4. Die Oberfläche eines geraden Prismas mit dem Volumen $72\,\text{cm}^3$ beträgt $168\,\text{cm}^2$. Die Grundfläche hat einen Flächeninhalt von $12\,\text{cm}^2$. Berechne die Höhe des Prismas und den Umfang der Grundfläche.

Lösung: $h = 6\,\text{cm}$; $M = 144\,\text{cm}^2$; $u = 24\,\text{cm}$

5. Die Oberfläche eines geraden Prismas mit dem Volumen $150\,\text{cm}^3$ beträgt $158\,\text{cm}^2$. Berechne die Grundfläche und deren Umfang, wenn die Höhe des Prismas 6 cm beträgt.

Lösung: $G = 25\,\text{cm}^2$; $M = 108\,\text{cm}^2$; $u = 18\,\text{cm}$

6. Gegeben ist das Netz eines vierseitigen Prismas. Berechne zunächst die nötigen Längenmaße und dann seine Oberfläche sowie das Volumen (Längen in cm).



Lösung: Pythagoras, $O = 60\,\text{cm}^2$, $V = 27\,\text{cm}^2$

7. Ein Prisma hat insgesamt fünf Begrenzungsflächen und ist 5 cm hoch. Drei dieser fünf Flächen haben den gleichen Flächeninhalt von $12{,}5\,\text{cm}^2$.
   (a) Beschreibe genau, um welche Art von Prisma es sich handelt.
   (b) Berechne genügend viele weitere Maßangaben dieses Prismas, so daß du schließlich eine genaue Zeichnung seines Netzes anfertigen kannst.

Lösung: (a) Gleichseitiges Prisma mit 3 Seiten (b) $s = 2{,}5\,\text{cm}$

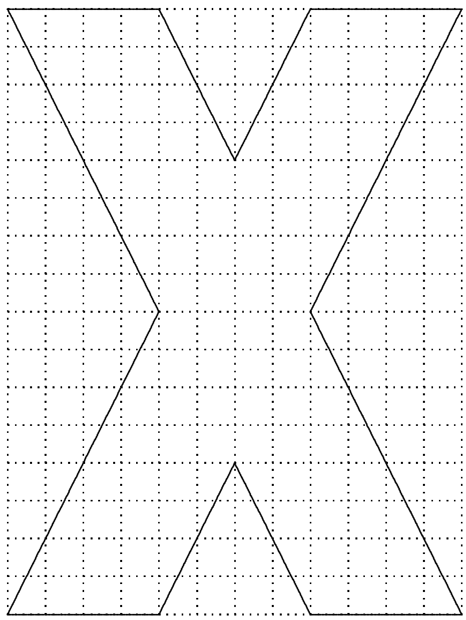
8. Zwei gleiche Prismen mit gleichschenklig-rechtwinkliger Grundfläche, deren Basis 6 cm lang ist, werden so zusammengeklebt, daß ein vierseitiges Prisma mit quadratischer Grundfläche entsteht. Die Oberfläche dieses neuen Prismas ist um $84\,\text{cm}^2$ kleiner als die Oberfläche der zwei dreiseitigen Prismen zusammen.
   Berechne die Höhe der Prismen und zeichne die zusammengeklebten Grundflächen möglichst genau.

Lösung: $h = 7\,cm$

9. Ein gerades Prisma hat als Grundfläche ein gleichschenkliges Trapez mit folgenden Maßen: Die Grundseiten sind 8 cm und 2 cm lang, die Höhe ist 4 cm und die Schenkellänge 5 cm lang.
   (a) Zeiche ein Schrägbild des Prismas mit $q = 1$ und $w = 45°$.
   (b) Bereche Oberfläche und Volumen des Prismas, wenn seine Höhe 3 cm ist.
   (c) Wie hoch wäre das Prisma, wenn die Oberfläche $140\,\text{cm}^2$ ist?

Lösung: (b) $O = 100\,\text{cm}^2$; $V = 60\,\text{cm}^3$ (c) $h = 5\,\text{cm}$

10. Ein gerades Prisma besitzt die rechts dargestellte Figur als Grundfläche. Gegeben sind ferner $G = 28\,\text{cm}^2$, $M = 70\,\text{cm}^2$ und $h = 2\,\text{cm}$.
    (a) Berechne das Volumen V, den Grundflächenumfang u und die Oberfläche O des Prismas.
    (b) Übertrage die Grundflächenskizze auf dein Arbeitsblatt und bestätige mit Hilfe des Prinzips der Ergänzungsgleichheit, daß $G = 28\,\text{cm}^2$ ist.
    (c) Zeichne das Schrägbild mit der übertragenen Grundfläche. ($\omega = 45°$; $q = 1$; $h = 2\,\text{cm}$)



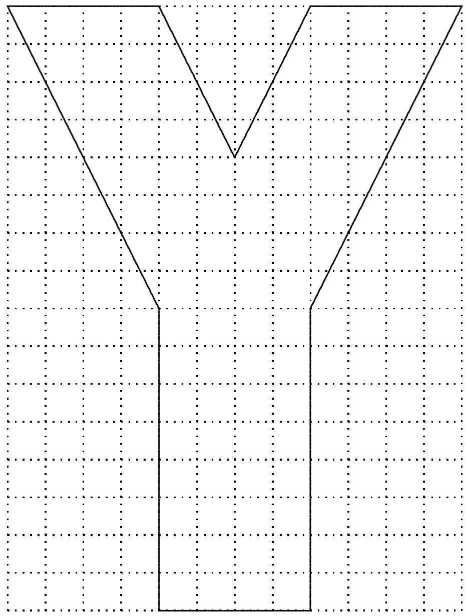
Lösung: (a) $V = 56\,\text{cm}^3$; $u = 35\,\text{cm}$; $O = 126\,\text{cm}^2$

11. Ein gerades Prisma besitzt die rechts dargestellte Figur als Grundfläche. Gegeben sind ferner $G = 22\,\text{cm}^2$, $M = 41{,}25\,\text{cm}^2$ und $h = 1{,}5\,\text{cm}$.

    (a) Berechne das Volumen V, den Grundflächenumfang u und die Oberfläche O des Prismas.

    (b) Übertrage die Grundflächenskizze auf dein Arbeitsblatt und bestätige mit Hilfe des Prinzips der Ergänzungsgleichheit, daß $G = 22\,\text{cm}^2$ ist.

    (c) Zeichne das Schrägbild mit der übertragenen Grundfläche. ($\omega = 45°$; $q = 1$; $h = 1,5\,\text{cm}$)



Lösung: (a) $V = 33\,\text{cm}^3$; $u = 27,5\,\text{cm}$; $O = 85,25\,\text{cm}^2$

12. Das Profil eines 50 km langen Kanals ist ein gleichschenkliges Trapez. Die beiden parallelen Seiten sind 6 m und 8 m lang, ihr Abstand beträgt 3 m.

    (a) Wieviel Kubikmeter Wasser enthält der volle Kanal?

    (b) Die Strömungsgeschwindigkeit im Kanal sei überall 0,4 m/s. Wieviel Wasser fließt in einer Minute an einem Angler vorbei, der am Ufer sitzt?

Lösung: (a) $1050000\,\text{m}^3$

(b) $8{,}4\,\text{m}^3$

13. Gegeben sind die Punkte $A(1|-3,5)$, $B(3|-5,5)$, $C(5|-6)$, $D(6,5|-3)$ und $E(4|-2)$. Zeichne das Schrägbild des geraden Prismas mit der Grundfläche $ABCDE$ und der Höhe 4 cm. Die Schrägbildachse sei die x-Achse des Koordinatensystems. ($\omega = 30°$; $q = \frac{1}{2}$)

Lösung:

14. Bestimme die Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten eines 17-seitigen Prismas.

Lösung: 34 Ecken, 19 Flächen, 51 Kanten

15. Münchhausen behauptet, daß er ein 10-seitiges gerades Prisma mit 18 Ecken, 24 Kanten und 12 Flächen gesehen habe. Welche der Aussagen ist falsch und wie lautet die richtige Aussage für ein 10-seitiges Prisma?

Lösung:

16. Münchhausen behauptet, daß er ein 12-seitiges gerades Prisma mit 20 Ecken, 14 Flächen und 26 Kanten gesehen habe. Welche der Aussagen ist falsch und wie lautet die richtige Aussage für ein 12-seitiges Prisma?

Lösung:

7.2.2. gerader Zylinder

1. Ein gerader Kreiszylinder hat die Höhe h und den Radius r.
   (a) Erklären Sie, wie man die Formel $M = rh2\pi$ für den Inhalt der Mantelfläche des Zylinders herleiten kann.
   (b) Für den Inhalt O der Oberfläche des Zylinders gilt demnach: $O = 2\pi r^2 + 2\pi rh$
   Lösen Sie diese Formel nach der Höhe h auf.

   Quelle: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 10 der Gymnasien 2008

Lösung: (a) Der abgewickelte Mantel ist ein Rechteck mit den Seiten h und $2\pi r$ (Umfang der Grundfläche).
(b) $h = \frac{O-2\pi r^2}{2\pi r}$

2. **Lagertanks**

Millimeterarbeit war vonnöten, um die jeweils drei Einzelteile zweier Lagertanks für den Transport vom Gelände der Firma Apparatebau vorzubereiten. Mit sechs Kesselbrücken wurden die riesigen bleiummantelten Behälter jetzt nach Ludwigshafen zu einem großen Chemieunternehmen gefahren. Die Tanks sind nach der Montage 30 Meter groß, sieben Meter breit und fassen jeweils 900 Kubikliter Flüssigkeit. Pro Exemplar erreichen sie ein Gewicht von 150 000 Kilogramm. In den Behältern soll Rückschwefelsäure gelagert werden.

Goslarsche Zeitung vom 4.7.1997

(a) Zeige, dass die im Text genannte Einheit „Kubikliter“ keine Volumeneinheit ist! Welche Potenz einer Längeneinheit wird durch die Einheit „Kubikliter“ dargestellt?

(b) Berechne das (Außen-)Volumen eines solchen Tanks und korrigiere dann die falsche Einheit!

Quelle: Herget, W. et al.: Produktive Aufgaben

Lösung: (a) Es gilt 1 Kubikliter $= 1\,\text{l}^3 = 1\,(\text{dm}^3)^3 = 1\,\text{dm}^9$. Die Einheit „Kubikliter" entspricht einer Längeneinheit in neunter Potenz und ist damit keine Volumeneinheit (Längeneinheit in dritter Potenz).

(b) Gegeben sind die Größe (gemeint ist die Höhe) $h = 30\,\text{m}$ und die Breite (gemeint ist der Durchmesser) $d = 7\,\text{m}$, womit für den Radius $r = 3{,}5\,\text{m}$ folgt. Für die Stirnfläche A der Tanks gilt $A = \pi r^2$, somit für das Volumen V eines Tanks $V = \pi r^2 \cdot h \approx 1150\,\text{m}^3$. Aufgrund der Dicke der Wände, des Bodens und der Decke der Tanks ist ihr Fassungsvermögen sicherlich jeweils kleiner als $1150\,\text{m}^3$. In der Zeitung sollte es also vermutlich „und fassen 900 Kubikmeter Flüssigkeit" heißen.

3. **Der Brunnen**

Ein Brunnen soll 12 m tief ausgeschachtet werden. Zum Schutz gegen das Erdreich soll er innen mit einer 38 cm dicken Ziegelwand ausgemauert werden. Die Mauer soll $0{,}5\,\text{m}$ aus dem Erdreich ragen. Der Innendurchmesser des Brunnens soll $2{,}10\,\text{m}$ betragen.

(a) Wie viel m^3 Erdreich sind auszuschachten?

(b) Pro 1m^3 Mauerwerk werden 380 Ziegelsteine benötigt. Wie viele Ziegelsteine sind nötig?

(c) Wie viele Liter Wasser stehen in dem Brunnen, wenn der Wasserspiegel $4{,}20\,\text{m}$ von der Oberkante der Mauer entfernt ist?

Lösung: (a) Es müssen 77m^3 (Kontrolle: $77{,}09$) Erdreich ausgeschachtet werden.

(b) Zum Ausmauern des Brunnens werden ca. 14000 (Kontrolle:14063) Steine benötigt.

(c) Im Brunnen stehen ca. 29000 (Kontrolle: $28747{,}93$) l Wasser

4. Bei einem geraden Kreiszylinder sind der Radius $r = 25$ mm und der Inhalt der Oberfläche $O = 375\ \text{cm}^2$ gegeben. Leiten Sie Formeln für

a) die Mantelfläche M b) die Höhe h c) das Volumen V

jeweils in Abhängigkeit von r und O her und berechnen Sie die Zahlenwerte.

Lösung: i) $M = O - 2\pi r^2 = 336\ \text{cm}^2$

ii) $h = \frac{O-2\pi r^2}{2\pi r} = 21.4\ \text{cm}$

iii) $V = \frac{r}{2}(O - 2\pi r^2) = 420\text{cm}^3$

5. Von einem geraden Kreiszylinder kennt man den Oberflächeninhalt $O = 750\,\text{cm}^2$ und den Mantelflächeninhalt $M = 450\,\text{cm}^2$.
Man berechne Radius r, Höhe h und Volumen V des Zylinders! (Rundung jeweils auf 1 Dezimale!)

Lösung: $r = 6{,}9\,cm;\ h = 10{,}4\,cm;\ V = 1555{,}5\,cm^3$

6. Eine außen und innen zylinderförmige Glasvase hat einen Innenradius von 4,0 cm und eine Gesamthöhe von 32,0 cm. Der Boden ist 1,0 cm dick.
   (a) Die Vase sei zur Hälfte mit Wasser gefüllt. Wie groß ist der Inhalt der vom Wasser benetzten Glasfläche? Rundung auf cm^2 genau!
   (b) Wie groß müsste die Wanddicke der Vase sein, damit der Glaskörper bei gleichbleibender Bodendicke von 1,0 cm dasselbe Volumen hat wie der Hohlraum der Vase? Rundung auf 1 Dezimale!

Lösung: (a): $440\,cm^2$ $(b):\ 1{,}6\,cm$

7. Bestimmen Sie die Masse m eines Kupferrohrs, das die Länge $l = 1\,\text{m}$, den Außendurchmesser $2r = 4\,\text{cm}$ und die Wandstärke $d = 3\,\text{mm}$ hat. Die Dichte von Kupfer ist $\varrho = 8{,}9\dfrac{g}{cm^3}$.
   (a) Leiten Sie zunächst einen Ausdruck her, der m durch die Größen l, r, d, ϱ ausdrückt.
   (b) Berechen Sie den Wert dieses Ausdrucks für die angegebenen Werte der Größen l, r, d, ϱ mit dem Taschenrechner.

Lösung: (a) $m = \pi\varrho l d(2r - d)$ (b) $m = 3103{,}6g \approx 3{,}1kg$

8. Wir betrachten einen geraden Kreiszylinder mit dem Volumen $V = \dfrac{1}{\sqrt{8\,\pi}}\,\text{m}^3$, in dem die Höhe das k-fache des Grundkreisradiuses ist ($h = k\,r$).
   (a) Drücken Sie r durch V und k aus!

(b) Beweisen Sie, unter Nutzung des Ergebnisses von (a), für die Oberfläche des Zylinders die Formel

$$A_0 = \frac{1+k}{\sqrt[3]{k^2}}\,\mathrm{m}^2 \; .$$

(c) Durch Probieren mit dem Taschenrechner ist herauszufinden, für welchen Wert von k die Oberfläche A_0 den kleinstmöglichen Wert annimmt! Erstellen sie ein genaues Protokoll der Rechnungen in Form einer Wertetabelle mit geschickt gewählten k-Werten.

Lösung: (a) $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{k\,\pi}}$

(c) A_0 minimal für $k = 2$, d.h. $h = 2\,r$; $A_{0min} = 1{,}889881575\,\mathrm{m}^2$

9. Ein Würfel aus Kork ($\varrho_K = 0{,}2\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$) wird senkrecht zu einer Seitenfläche zylindrisch durchbohrt. In diese Bohrung wird ein Aluminiumzylinder ($\varrho_{Al} = 2{,}7\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$) gleicher Größe gesteckt. Die Kantenlänge a des Würfels beträgt 30 cm.
Wie groß muss der Radius r der Bohrung sein, damit der Körper im Wasser ($\varrho_W = 1{,}0\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$) schwebt? Berechnen Sie zunächst allgemein den Radius r der Bohrung in Abhängigkeit von der Kantenlänge a des Würfels und setzen Sie erst dann die gegebenen Werte ein!

Lösung: $r = \sqrt{\frac{\varrho_W - \varrho_K}{(\varrho_{Al} - \varrho_K)\cdot\pi}} \cdot a = 9{,}6\,cm$; Auftriebsgesetz von Archimedes verwenden!

10. Bei einem Brunnen liefert eine Röhre mit einem Innendurchmesser von 2,6 cm in der Minute 20 Liter Wasser. Wie groß ist die Ausflussgeschwindigkeit des Wassers? Geben Sie das Ergebnis in der Einheit $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ an!

Lösung: $0{,}63\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

11. Die Höhe eines Zylinders, dessen Oberfläche $12\pi\,\mathrm{cm}^2$ beträgt, ist um 1 cm größer als sein Radius. Wie groß ist sein Volumen?

Lösung: $\frac{45}{8}\pi\,cm^3$

12. Gegeben ist ein Rohr mit Länge l, Außendurchmesser d_a und Innendurchmesser d_i.

(a) Berechnen Sie das Volumen des massiven Teils des Rohres in Abhängigkeit von den gegebenen Größen!

(b) Zeigen Sie, dass für die Oberfläche S des Rohres gilt:

$$S = \frac{\pi}{2}\cdot(d_a + d_i)\cdot(2l + d_a - d_i)$$

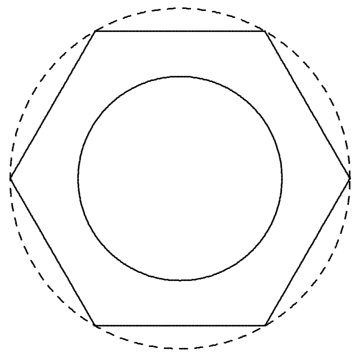
(c) Berechnen Sie S speziell für $l = 1{,}5\,\mathrm{m}$; $d_a = 50\,\mathrm{cm}$; $d_i = 48\,\mathrm{cm}$ und geben Sie das Ergebnis sinnvoll gerundet in der Einheit m^2 an!

Lösung: (a) $V = \frac{\pi}{4} \cdot l \cdot (d_a^2 - d_i^2)$ (c) $S \approx 4{,}6\,m^2$

13. Einem Zylinder (Radius r; Höhe h) wird ein gerades, regelmäßiges , sechsseitiges Prisma umbeschrieben. Berechnen Sie das Verhältnis: $V_{Zylinder} : V_{Prisma}$ zunächst exakt und dann in Prozent.

Lösung: $V_{Zylinder} : V_{Prisma} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \pi \approx 90{,}7\%$

14. Schraubenmuttern besitzen die Form eines geraden, regelmäßigen, sechsseitigen Prismas aus dem ein Zylinder herausgebohrt wurde. Zur Fertigung einer bestimmten Sorte von Schraubenmuttern verwendet man Hohlzylinder aus Metall (Durchmesser außen: $d_A = 2{,}2\,\mathrm{cm}$; innen: $d_I = 0{,}8\,\mathrm{cm}$; Höhe $h = 0{,}9\,\mathrm{cm}$), die entsprechend zurechtgefräst werden (vgl. Abbildung).
Berechnen Sie die Masse einer Mutter aus Messing (Dichte $\varrho = 8{,}4\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$).



Lösung: ca. 20 g

15. Ein Rechteck mit den Seitenlängen a und $10a$ läßt sich zur Mantelfläche eines geraden Kreiszylinders mit der Höhe $10a$ oder mit der Höhe a rollen. Wie verhalten sich jeweils die Volumina und die Oberflächen der beiden entstehenden Zylinder?

Lösung: $V_1 : V_2 = 1 : 10\,;$ $O_1 : O_2 = (5 + a\pi) : (5 + 100a\pi)$

16. Der Grundfläche eines Zylinders ist ein Quadrat vom Umfang $U = 28\sqrt{2}$ L.E. einbeschrieben, das die Grundfläche einer geraden Pyramide mit der Seitenkantenlänge $s = 25$ L.E. bildet. Wie verhalten sich die Rauminhalte von Zylinder und Pyramide, wenn beide Körper gleiche Höhe haben?

Lösung: $V_{Zyl} : V_{Pyr} = 3\pi : 2$

17. In einem Messzylinder mit dem inneren Radius $R = 1{,}2\,\text{cm}$ steht eine Flüssigkeit 3 cm hoch. Diese Flüssigkeit wird in ein Reagenzglas mit dem inneren Radius $r = 0{,}6\,\text{cm}$ gegossen. Wie hoch (in cm) steht die Flüssigkeit im Reagenzglas vom untersten Punkt aus gemessen?
Hinweis: Betrachten Sie das Reagenzglas als Zylinder mit angesetzter Halbkugel!

Lösung: 12,2 cm

7.2.3. Pyramide

Grundlegendes zur Pyramide als räuml. Körper

1. Je vier Tennisbälle sollen für den Transport und Verkauf zusammen verpackt werden. Entwickle mindestens drei verschiedene Vorschläge und wähle eine „optimale Verpackung“ aus. Begründe deine Auswahl.

   Quelle: MaTEAMatik, Lars Holzäpfel, Timo Lauders, Praxis der Mathematik in der Schule, Heft Nr. 35/52. Jahrgang, S. 1-8

Lösung: Z. B.:
4 Bälle übereinander in Zylinder:
$V = 8\pi r^3 \approx 25,13r^3$, $A = 18\pi r^2 \approx 56,55r^2$
2×2 Bälle in Quader: $V = 32r^3$, $A = 64r^2$
gleichseitige Pyramide/Tetraeder: drei Bälle in Dreieck am Boden, darüber zentrisch der 4. Ball: Seitenlänge der Pyramide $a = 2(1 + \sqrt{3})r$
$V = \frac{2}{3}\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})^3 r^3 \approx 19,23r^3$, $A = 4\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})^2 r^2 \approx 51,71r^2$
Die gleichseitige Pyramide hat die effizienteste Raumnutzen (Anteil Volumen Bälle/Volumen Packung) und den geringsten Verbrauch an Verpackungsmaterial. In den Geschäften hat die Form jedoch Nachteile (schlecht stapelbar).

2. **Pyramidenbau**

   Mit einem Magnetspiel sollen Pyramiden gebaut werden. Die Grundfläche und die Seitenflächen sind gleichseitige Dreiecke. Die farbigen Stücke sind Magnete. Zwischen zwei Magneten befindet sich immer eine Kugel. Ein Magnet ist 27 mm lang, eine Kugel hat einen Durchmesser von 13 mm. Gebaut wird zuerst die „Spitze“ aus 4 Kugeln und 6 Magneten. Von da aus wird die 1. Etage nach unten angebaut. Damit der Bau stabiler wird, wird an jede Kugel, die sich innerhalb einer Kante befindet, ein Magnet als Querstrebe angesetzt.

   Das Bild zeigt eine Pyramide mit Spitze und einer Etage.

(a) Untersuche, wie viele Magnete und wie viele Kugeln benötigt werden, um die abgebildete Pyramide zu bauen.

(b) Monika sagt: „Die Kantenlänge dieser abgebildeten Pyramide ist 8 cm“. Wie kommt sie zu dieser Antwort?

(c) Berechne mit Monikas Wert das Volumen der Pyramide.

(d) Wie viele kleine Dreiecke und wie viele Parallelogramme sind außen auf der abgebildeten Pyramide zu finden?

(e) Wie viele Magnete und Kugeln werden benötigt, um dieser Pyramide eine weitere Etage anzubauen?

(f) Monika hat in ihrem Magnetspiel 80 Magnete und 50 Kugeln. Welche Kantenlänge hat die größte solche Pyramide, die sie damit bauen kann?

(g) Erkennst du ein System für die Anzahl der Magnete und die Anzahl der Kugeln in der n-ten Etage? Notiere auch einen Term, mit dem sich die Anzahl der Magnete und die Anzahl der Kugeln bestimmen lassen.

Quelle: Werner Blum u. a. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret, Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen; mit CD-Rom / IQB, Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (www.IQB.hu-berlin.de), 1. Auflage, Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor, 2006

Lösung: (a) 18 Magnete, 10 Kugeln

(b) a = Kugelradius + Magnetlänge + Kugeldurchmesser + Magnetlänge + Kugelradius

(c) $V = \frac{1}{3}G_\triangle \cdot h_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_\triangle) \cdot h_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3}) \cdot 8\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 60\text{cm}^3$

(d) 6 kleine Dreiecke, 3 Parallelogramme

(e) 18 Magnete, 9 Kugeln

(f) Spitze und drei weitere Etagen, Kantenlänge der Pyramide: 16 cm

(g) n: Etage (Spitze: n=0);

Anzahl Magnete: $M(n) = (n+1) \cdot 6 \quad (n \geqq 0)$;

Anzahl Kugeln: $K(n) = (n+1) \cdot 3 \quad (n > 0)$

3. Wie viele Kanten, Ecken und Flächen hat eine 50-seitige Pyramide? (Rechenansätze)! Warum kann es allgemein keine Pyramide mit ungerader Kantenzahl geben?

Lösung: $k = 100$, $e = 51$, $f = 51$; $\quad k = 2 \cdot n$ (n: Seitenzahl)

Konstruktionsaufgaben

1. Konstruiere in einer sauberen und genauen Konstruktion das Netz einer geraden vierseitigen Pyramide $ABCDS$ der Höhe 4 cm, deren Grundfläche ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen 6 cm und 4 cm ist!
Eine Konstruktionsbeschreibung ist nicht verlangt.

Lösung:

2. Die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze S ist das Dreieck $A(3|4)$, $B(8|4)$ und $C(4|9)$. Die Seitenkante $[AS]$ hat die Länge $\overline{AS} = 4\,\text{cm}$. Der Höhenfußpunkt ist $F(5|6)$. Konstruiere ein Netz der Pyramide.

Lösung: Platzbedarf im wesentlichen durch die Koordinaten gegeben.

3. Die Grundfläche einer vierseitigen Pyramide $ABCDS$ ist ein Viereck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = 7,0\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 4,0\,\text{cm}$, $\overline{CD} = 4,5\,\text{cm}$, $\overline{AD} = 3,0\,\text{cm}$ und der Diagonalenlänge $\overline{AC} = 7,0\,\text{cm}$. Die Pyramidenhöhe beträgt $h = 6,0\,\text{cm}$. Der Höhenfußpunkt der Pyramide fällt mit dem Diagonalenschnittpunkt der Grundfläche zusammen. Konstruiere das Pyramidennetz!

Lösung:

4. Die Grundfläche einer vierseitigen Pyramide $ABCDS$ ist ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit den parallelen Grundlinien AB und CD mit $\overline{AB} = 5,0\,\text{cm}$ und $\overline{CD} = 3,0\,\text{cm}$ sowie dem Winkel $\alpha = 70°$. Jede Seitenkante der Pyramide ist unter dem Winkel $\varepsilon = 55°$ gegen die Grundfläche geneigt. Konstruiere das Pyramidennetz!

Lösung:

5. Grundfläche der Pyramide $ABCS$ ist das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Basislänge $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$ und den Schenkeln der Länge 6 cm. Der Fußpunkt F der Pyramidenhöhe ist der Mittelpunkt der Kante $[AC]$. Der Winkel $\sphericalangle CAS$ beträgt 50°. Konstruiere das Netz der Pyramide.
Platzbedarf: ca. eine halbe Seite

Lösung:

6. Eine Pyramide hat ein Dreieck ABC als Grundfläche. ABC ist rechtwinklig mit Hypotenuse $c = 5\,\text{cm}$ und $a = 3\,\text{cm}$. Der Höhenfußpunkt F ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden s_a und s_c. Die Höhe beträgt $h = 5\,\text{cm}$.

   (a) Konstruiere das Netz der Pyramide.

   (b) Berechne die Längen der Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{AS}$ und gib das Ergebnis gerundet auf zwei Nachkommastellen an. (Zwischenergebnis: $\overline{AF} = 2,85\,\text{cm}$)

Lösung: (a) Platzbedarf für das Netz vom Höhenfußpunkt aus 7 cm in jeder Richtung.

(b) $\overline{AS} = 5,75\,\text{cm}$

1. $ABCDS$ ist eine gerade vierseitige Pyramide, deren Grundfläche $ABCD$ ein Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{AB} = 6,0\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 4,0\,\text{cm}$ ist. Die Pyramidenhöhe beträgt 4,0 cm.

   (a) Fertige eine saubere und genaue Konstruktion des Standardnetzes der Pyramide an! (keine Konstruktionsbeschreibung!)

   (b) Konstruiere den Neigungswinkel μ der Ebene $E(A; D; S)$ gegen die Grundflächenebene der Pyramide

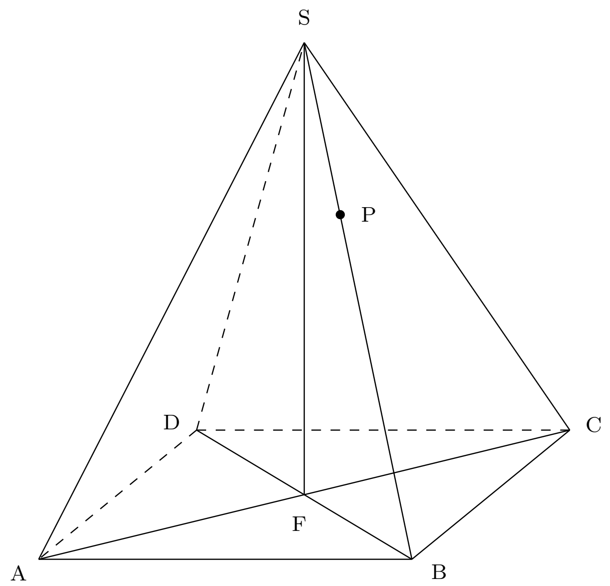
      (α) in der beigelegten Schrägbildskizze,

      (β) in wahrer Größe auf deinem Arbeitsblatt!

   (c) P sei derjenige Punkt auf der Seitenkante $[BS]$ mit $\overline{BP} = 3,5\,\text{cm}$. Konstruiere den Neigungswinkel ε der Geraden PC gegen die Grundflächenebene der Pyramide

      (α) in der beigelegten Schrägbildskizze,

      (β) in wahrer Größe auf deinem Arbeitsblatt!



Lösung: (b),(α): M sei der Mittelpunkt von $[AD]$. $\sphericalangle FMS$ ist dann der gesuchte Winkel.

(b),(β): Man konstruiere das bei F rechtwinklige Dreieck FMS in wahrer Größe!

(c),(α): Das Lot von P auf die Grundflächenebene treffe $[BD]$ im Punkt Q. $\sphericalangle PCQ$ ist dann der gesuchte Winkel.

(c),(β): Man konstruiere das bei Q rechtwinklige Dreieck CQP in wahrer Größe, wobei $\overline{PQ}$ aus dem Dreieck FBS und $\overline{CQ}$ dann aus dem Dreieck BCF gewonnen werden.

2. Die Grundfläche einer Pyramide $ABCS$ besteht aus einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenusenlänge $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und der Kathetenlänge $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$. Der Höhenfußpunkt F fällt mit dem Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden des Dreiecks (d. h. dem Schwerpunkt) zusammen. Die Pyramidenhöhe beträgt 5 cm.
   (a) Konstruiere die Grundfläche mit dem Höhenfußpunkt F in die Mitte einer halben Seite.
   (b) Bestimme durch geeignete Konstruktionen die Längen der Seitenkanten sowie den Neigungswinkel der Seitenkante $[BS]$ gegen die Grundfläche.
   (c) Bestimme den Neigungswinkel der Seitenfläche ABS gegen die Grundfläche.

Lösung: (b) $\overline{AS} \approx 5,9\,\text{cm}$; $\overline{BS} \approx 5,8\,\text{cm}$; $\overline{CS} \approx 5,5\,\text{cm}$; $\sphericalangle FBS \approx 59°$
(c) $\varphi \approx 78°$

3. Gegeben ist eine quadratische Pyramide. Der Radius des Umkreises der Grundfläche ist r, **alle** Kanten der Pyramide sind gleich lang.
   (a) Berechne den Inhalt M der Mantelfläche und die Höhe h der Pyramide in Abhängigkeit von r.
   (b) Bestimme mit Hilfe einer sauberen Konstruktion für $r = 8\text{cm}$
      i. den Winkel, den eine Seitenkante mit der Grundfläche einschließt,
      ii. den Winkel, den eine Seitenfläche mit der Grundfläche einschließt.

Lösung: $M = 2\sqrt{3}r^2$, $h = r$, 45^0, 54.7^0

4. Eine gerade, dreiseitige Pyramide hat als Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Katheten $a = 40\,\text{mm}$ und $b = 30\,\text{mm}$. Die Seitenkanten sind $50\,\text{mm}$ lang.
   (a) Konstruiere das Netz der Pyramide. Welche besondere Lage hat der Höhenfußpunkt?
   (b) Konstruiere mit Hilfe des Netzes den Neigungswinkel α der Seitenfläche BSC gegen die Grundfläche.
   (c) Bestimme $\overline{AB}$ und die Höhe h nur durch Rechnung.

Lösung: (a) Der Höhenfußpunkt ist der Mittelpunkt des Umkreises, hier also die Mitte der Seite $[AB]$.
(b) $\alpha = 71^0$
(c) $\overline{AB} = 50\,\text{mm}$, $h = 4{,}33\,\text{cm}$ mit Hilfe der Höhe $h_S = \sqrt{2100}\,\text{mm}$ im Dreieck BSC.

1. Die Grundfläche eines Pyramidenstumpfs ist fünfmal so groß wie die Deckfläche, seine Höhe beträgt $4{,}0\,\text{cm}$. Berechne die Höhe der Pyramidenspitze über der Grundfläche.

Lösung: $h = 5 + \sqrt{5}\,\text{cm}$

2. Die Grundfläche $ABCD$ einer vierseitigen Pyramide $ABCDS$ ist eine Raute $ABCD$ mit den Diagonalenlängen $\overline{AC} = 16\,\text{cm}$ und $\overline{BD} = 12\,\text{cm}$. Der Diagonalenschnittpunkt F der Raute ist gleichzeitig der Höhenfußpunkt der Pyramide. Die Länge der Seitenkante $[AS]$ beträgt $\overline{AS} = 17\,\text{cm}$.
   (a) Erstelle eine saubere und übersichtliche Schrägbildskizze der Pyramide!
   (b) Berechne die Pyramidenhöhe!
   (c) Berechne die Längen aller Kanten der Pyramide!

(d) Punkt H sei der Fußpunkt der Höhe von S auf die Kante $[BC]$ im Seitenflächendreieck BCS. Trage $[SH]$ in die Skizze ein und berechne $\overline{SH}$. (Ergebnis: $\overline{SH} \approx 15,7\,\text{cm}$)

(e) Berechne den Oberflächeninhalt der Pyramide! Verwende dabei den in Teilaufgabe (d) angegebenen Näherungswert für $\overline{SH}$!

Lösung: (b): $h = 15\,cm$
(c): $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 10\,cm$;
$\overline{CS} = \overline{AS} = 17\,cm$; $\overline{BS} = \overline{DS} = 3\sqrt{29}\,cm$
(d): $O \approx 410\,cm^2$

3. (a) Berechne den Oberflächeninhalt eines regulären Tetraeders mit der Kantenlänge 4 cm.
   (b) Berechne die Höhe dieses Tetraeders.

Lösung: $O = 16\sqrt{3}\,\text{cm}^2$; $h = \frac{4}{3}\sqrt{6}\,\text{cm}$

4. Die Grundkante a einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide ist 2 cm lang, der Inhalt ihrer Mantelfläche M beträgt $12\,\text{cm}^2$.
   Berechne den Oberflächeninhalt O, die Länge der Seitenkante s und die Höhe h.

Lösung: $O = 16\,\text{cm}^2$; $s = \sqrt{10}\,\text{cm}$; $h = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$

5. Man beweise, daß in einem regulären Oktaeder der Kantenlänge a der Abstand des Oktaedermittelpunktes von der Ebene eines Seitenflächendreiecks die Entfernung $\frac{a}{6}\sqrt{6}$ hat.

Lösung:

Pyramidenvolumen

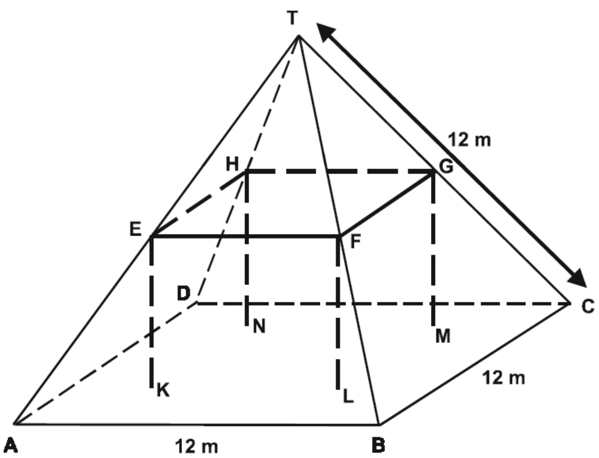
1. Je vier Tennisbälle sollen für den Transport und Verkauf zusammen verpackt werden. Entwickle mindestens drei verschiedene Vorschläge und wähle eine „optimale Verpackung“ aus. Begründe deine Auswahl.

   Quelle: MaTEAMatik, Lars Holzäpfel, Timo Lauders, Praxis der Mathematik in der Schule, Heft Nr. 35/52. Jahrgang, S. 1-8

Lösung: Z. B.:
4 Bälle übereinander in Zylinder:
$V = 8\pi r^3 \approx 25,13r^3$, $A = 18\pi r^2 \approx 56,55r^2$
2×2 Bälle in Quader: $V = 32r^3$, $A = 64r^2$
gleichseitige Pyramide/Tetraeder: drei Bälle in Dreieck am Boden, darüber zentrisch der 4. Ball: Seitenlänge der Pyramide $a = 2(1+\sqrt{3})r$
$V = \frac{2}{3}\sqrt{2}(1+\sqrt{3})^3 r^3 \approx 19,23r^3$, $A = 4\sqrt{3}(1+\sqrt{3})^2 r^2 \approx 51,71r^2$
Die gleichseitige Pyramide hat die effizienteste Raumnutzen (Anteil Volumen Bälle/Volumen Packung) und den geringsten Verbrauch an Verpackungsmaterial. In den Geschäften hat die Form jedoch Nachteile (schlecht stapelbar).

2. Hier siehst du ein Foto eines Bauernhauses mit pyramidenförmigem Dach.

Nachstehend siehst du das mathematische Modell mit den entsprechenden Maßen, das eine Schülerin vom Dach des Bauernhauses gezeichnet hat.



Der Boden des Dachgeschosses, in der Zeichnung $ABCD$, ist ein Quadrat. Die Balken, die das Dach stützen, sind die Kanten eines Quaders (rechtwinkliges Prisma) $EFGHKLMN$. E ist die Mitte von $[AT]$, F ist die Mitte von $[BT]$, G ist die Mitte von $[CT]$ und H ist die Mitte von $[DT]$. Jede Kante der Pyramide in der Zeichnung misst 12 m.

(a) Berechne die Fläche und das Volumen des Dachgeschosses.

(b) Berechne die Länge von $[EF]$, einer der horizontalen Kanten des Quaders.

nach: Pisa 2000, Aufgabenbeispiele

Lösung: (a) $144\,\text{m}^2$, Höhe der Pyramide: $\frac{1}{\sqrt{2}}12\,\text{m}$, Volumen $V = \frac{1}{\sqrt{2}}12 \cdot 12^3\,\text{m}^3 = 1,2 \cdot 10^3\text{m}^3$

(b) $6\,\text{m}$

3. Die Ecken einer dreiseitigen Pyramide haben die Koordinaten A(0|0|0), B(a|0|0), C(0|a|0) und S(0|0|a) mit $a > 0$, H ist der Mittelpunkt der Strecke [BC].

   Alle Ergebnisse als möglichst einfache Terme mit der Variablen a!

   (a) Zeichne ein Schrägbild der Pyramide mit $a \mathrel{\widehat{=}} 6\,\text{cm}$ (nur für die Zeichnung) und zeichne [SH] ein. Berechne die Kantenlänge $b = \overline{\text{BC}}$, $h_\text{s} = \overline{\text{SH}}$, den Flächeninhalt A_D des Dreiecks BCS und dann das Volumen V und die Oberfläche A der Pyramide. Berechne den Neigungswinkel φ der Geraden SH gegen die Grundebene (xy-Ebene) auf Bogensekunden genau.

   (b) Man kann das Dreieck BCS als Grundfläche und A als Spitze unserer Pyramide auffassen. Der Fußpunkt des Lotes von A auf die Ebene durch B, C und S sei F. Beweise, dass die Höhe in diesem Fall $h' = \overline{\text{AF}} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$ ist. Zeichne das Dreieck AHS in wahrer Größe (nicht als Schrägbild) und zeichne [AF] ein. Berechne die Koordinaten von F(x_F|y_F|z_F).

Lösung: (a) $b = \overline{\text{BC}} = \overline{\text{BS}} = \overline{\text{CS}} = a\sqrt{2}$

$$h_\text{s} = \frac{b}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{2}\sqrt{6}$$

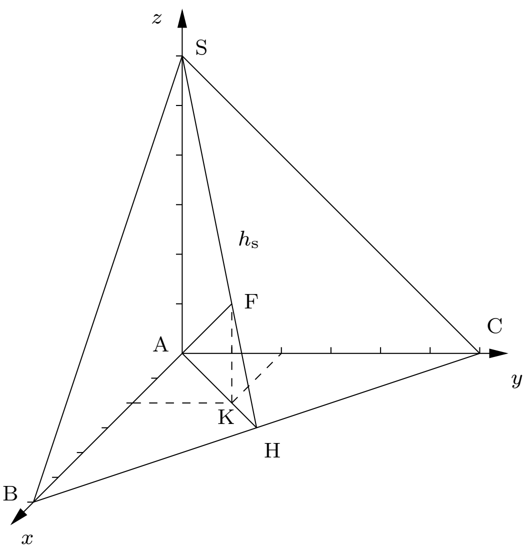
$$A_\text{D} = \frac{1}{2}bh_\text{s} = \frac{a^2}{2}\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6}$$

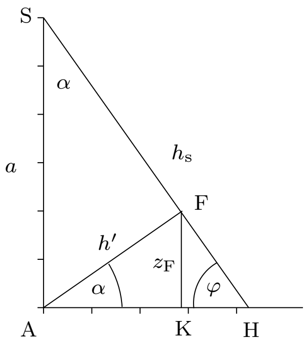
$$A = 3 \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{2}(3 + \sqrt{3})$$

$$\tan\varphi = \frac{\overline{\text{AS}}}{\overline{\text{AH}}} = \frac{a}{\frac{a}{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi = 54{,}7356^\circ = 54^\circ 44' 8''$$



(b) $V = \dfrac{a^3}{6} = \dfrac{1}{3} A_{\mathrm{D}} h' \quad \Longrightarrow \quad h' = \dfrac{3a^3}{6\frac{a^2}{2}\sqrt{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{a}{3}\sqrt{3}$



$\triangle \mathrm{AFS} \sim \triangle \mathrm{FKA} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{z_{\mathrm{F}}}{h'} = \dfrac{h'}{a}$

$z_{\mathrm{F}} = \dfrac{h'^2}{a} = \dfrac{a}{3}$

$\overline{\mathrm{AK}} = \sqrt{h'^2 - z_{\mathrm{F}}^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} - \dfrac{a^2}{9}} = \dfrac{a}{3}\sqrt{2}$

$x_{\mathrm{F}} = y_{\mathrm{F}} = \dfrac{\overline{\mathrm{AK}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{3} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{F}\left(\dfrac{a}{3}\Big|\dfrac{a}{3}\Big|\dfrac{a}{3}\right)$

4. Die Ecken einer geraden, vierseitigen Pyramide haben die Koordinaten A$(0|0|0)$, B$(a|0|0)$, C$(a|a|0)$, D$(0|a|0)$ und S$\left(\frac{a}{2}|\frac{a}{2}|h\right)$ mit $a > 0$ und $h > 0$.

   Alle Ergebnisse als möglichst einfache Terme mit den Variablen a und h!

   (a) Zeichne ein Schrägbild der Pyramide mit $a \mathrel{\widehat{=}} 6\,\mathrm{cm}$ und $h \mathrel{\widehat{=}} 5\,\mathrm{cm}$ (nur für die Zeichnung). Zeichne den Mittelpunkt M der Strecke [CD] und die Höhe [SF] mit dem Fusspunkt F ein. Berechne die Längen s und h_{s} der Seitenkanten und Seitenhöhen und dann das Volumen V und die Oberfläche A der Pyramide.

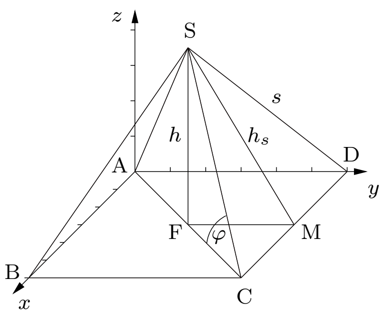
   (b) Mit einem Draht der Länge $g = 7a$ wird ein Modell unserer Pyramide gebaut (Grund- und Seitenkanten). Welche Höhe h hat dieses Modell? Drücke für diesen Fall h_{s}, s, V und A nur durch a aus. Berechne in unserem Modell den Neigungswinkel φ einer Seitenkante gegen die Grundebene (xy-Ebene) auf Bogensekunden genau.

Lösung: (a) $h_{\mathrm{s}} = \sqrt{h^2 + \dfrac{a^2}{4}}$

$s = \sqrt{h_s^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \sqrt{h^2 + \dfrac{a^2}{2}}$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$

$A = a^2 + 4 \cdot \dfrac{a}{2} h_{\mathrm{s}} = a^2 + 2a\sqrt{h^2 + \dfrac{a^2}{4}}$



(b) $g = 7a = 4a + 4s = 4a + 4\sqrt{h^2 + \dfrac{a^2}{2}} \quad \Longrightarrow \quad \left(\dfrac{3a}{4}\right)^2 = h^2 + \dfrac{a^2}{2}$

$h^2 = \dfrac{9a^2}{16} - \dfrac{8a^2}{16} = \dfrac{a^2}{16} \quad \Longrightarrow \quad h = \dfrac{a}{4}$

$h_{\mathrm{s}} = \sqrt{\dfrac{a^2}{16} + \dfrac{a^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{5a^2}{16}} = \dfrac{a}{4}\sqrt{5}, \quad s = \sqrt{\dfrac{5a^2}{16} + \dfrac{a^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{9a^2}{16}} = \dfrac{3a}{4}$

$V = \dfrac{a^3}{12}, \quad A = a^2 + 2a \cdot \dfrac{a}{4}\sqrt{5} = a^2\left(1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{5}\right)$

$$\sin\varphi = \frac{h}{s} = \frac{\frac{a}{4}}{\frac{3a}{4}} = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 19{,}47122^\circ = 19^\circ 28' 16''$$

5. Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze S(2 cm|3 cm|6 cm) ist das Dreieck ABC mit A(0|0|0), B(6 cm|2,5 cm|0) und C(0|y_c|0) mit $y_c > 0$.
   (a) Das Volumen der Pyramide ist $V = 52\,\text{cm}^3$. Berechne den Inhalt G der Grundfläche. Zeichne A und B in ein xy-System und konstruiere C. Begründe die Konstruktion und *berechne* dann y_c.
   (b) Zeichne ein Schrägbild der Pyramide. Welchen Neigungswinkel φ hat AS gegen die yz-Ebene?

Lösung: (a) $V = \frac{1}{3}Gh \quad \Longrightarrow \quad G = \frac{3V}{h} = 26\,\text{cm}^2$

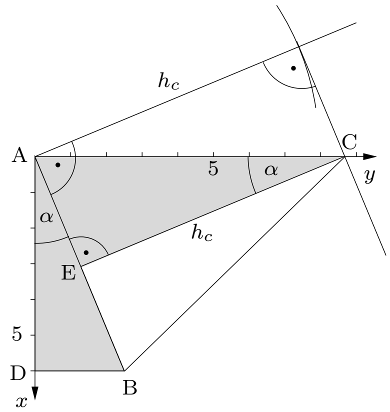
$\overline{\text{AB}} = \sqrt{6^2\,\text{cm}^2 + 2{,}5^2\,\text{cm}^2} = 6{,}5\,\text{cm}$

$G = \frac{1}{2}\overline{\text{AB}}h_c \quad \Longrightarrow \quad h_c = \frac{2G}{\overline{\text{AB}}} = 8\,\text{cm}$

C liegt also auf der Parallelen zu AB im Abstand 8 cm.

$\triangle\text{ADB} \sim \triangle\text{CEA} \quad \Longrightarrow \quad \frac{y_c}{h_c} = \frac{\overline{\text{AB}}}{\overline{\text{AD}}}$

$y_c = \frac{\overline{\text{AB}} \cdot h_c}{\overline{\text{AD}}} = \frac{6{,}5 \cdot 8}{6}\,\text{cm} = 8\frac{2}{3}\,\text{cm} \approx 8{,}67\,\text{cm}$

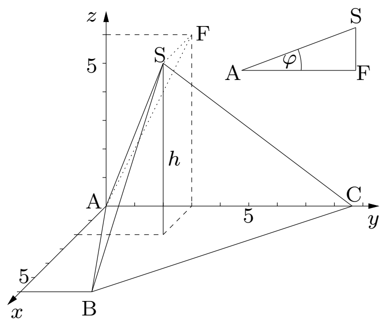


Alternative: $\tan\alpha = \frac{2{,}5}{6} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 22{,}62^\circ \quad y_c = \frac{h_c}{\cos\alpha} \approx 8{,}67\,\text{cm}$

(b) F(0|3 cm|6 cm) ist der Fußpunkt des Lotes von S auf die yz-Ebene:

$\overline{\text{AF}} = \sqrt{6^2\,\text{cm}^2 + 3^2\,\text{cm}^2} = \sqrt{45}\,\text{cm}$

$\tan\varphi = \frac{\overline{\text{SF}}}{\overline{\text{AF}}} = \frac{2}{\sqrt{45}} = 0{,}298 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 16{,}6^\circ$

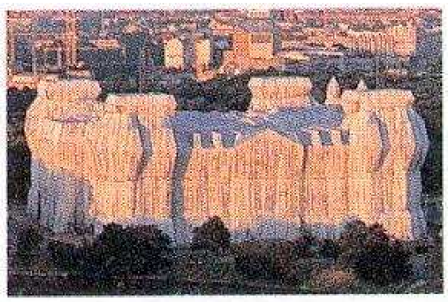


6. **Aufgaben zur Anwendung**

   Die größte ägyptische Pyramide, die Cheopspyramide (erbaut um 2600 v.Chr.), ist eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Ihre Grundkante war 233 m lang, ihre Seitenkanten 221 m.
   (a) Wie hoch war die Pyramide ursprünglich?
   (b) Das verwendete Gestein wiegt 2, 75 t pro m^3. Wie viel t Gestein wurden benötigt, wenn man von den Gängen und Kammern im Inneren der Pyramide absieht?

(c) Heute hat die Cheopspyramide aufgrund der Verwitterung nur noch eine Grundkantenlänge von 227 m und eine Höhe von 137 m. Wie viel Prozent des ursprünglichen Volumens sind inzwischen verwittert?

(d) Angenommen, Christo und Jeanne-Claude möchten die Cheopspyramide verhüllen. Wie viel m^2 Gewebe benötigen sie dazu mindestens?

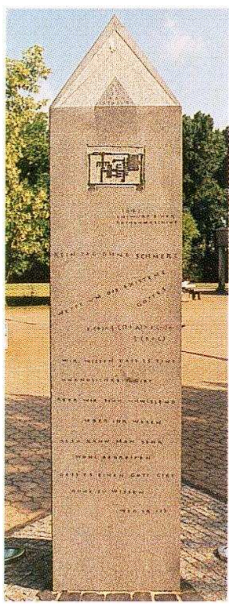


Christo und Jeanne-Claude verpackten im Juni 1995 den Reichstag in Berlin.

Lösung:

7. **Aufgaben zur Anwendung**

Im Hof des Pascal-Gymnasiums steht ein Denkmal für Blaise Pascal. Es besteht aus Granit und hat eine Gesamthöhe von 2, 50 m. Die Grundfläche ist ein gleichseitiges Dreieck mit einer Seitenlänge von 30 cm. Die Pyramide ist 43 cm hoch. 1 dm^3 Granit wiegt 2, 9 kg. Wie schwer ist das Denkmal?



Lösung:

8. Eine gerade Pyramide mit einer quadratischen Grundfläche der Seitenlänge g hat die Höhe h.

   (a) Löse die Formel $V = \frac{1}{3}g^2h$ für das Volumen der Pyramide nach der Seitenlänge g auf.

   (b) Wie groß ist der Winkel, den eine Seitenkante der Pyramide mit der Grundfläche einschließt, wenn die Höhe h halb so lang wie die Diagonale des Grundflächenquadrats ist?

   Die Pyramide wird nun von einer Ebene geschnitten, die parallel zur Grundfläche ist und von dieser den Abstand $\frac{h}{2}$ hat.

   (c) Zeichne die Pyramide und die entstandene Schnittfläche in einem Schrägbild.

   (d) Welchen Bruchteils des Inhalts der Grundfläche ist der Inhalt der Schnittfläche?

   (e) Welchen Bruchteils des Pyramidenvolumens ist das Volumen der abgeschnittenen kleinen Pyramide?

   Bayerischer Mathematik Test für die 10. Klasse, 2007

Lösung: (a) $g = \sqrt{\frac{3V}{h}}$

(b) $45°$

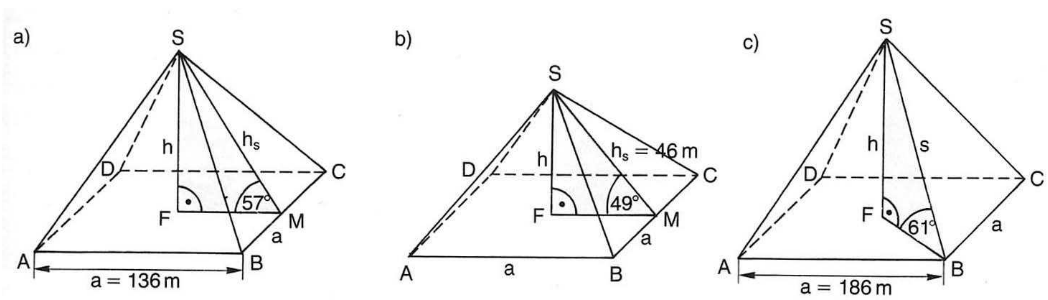
(c)

(d) $\frac{1}{4}$

(e) $\frac{1}{8}$

9. **Aufgaben zur Anwendung**

   Berechne das Volumen und die Oberfläche der unten abgebildeten Pyramiden.



Lösung: (a) Volumen $= 645577{,}1\,\mathrm{m}^3$, Oberfläche $= 52456{,}1\,\mathrm{m}^2$

(b) Volumen $= 42157{,}8\,\mathrm{m}^3$, Oberfläche $= 9195{,}9\,\mathrm{m}^2$

(c) Volumen $= 2736217,5\,\mathrm{m}^3$, Oberfläche $= 129399,6\,\mathrm{m}^2$

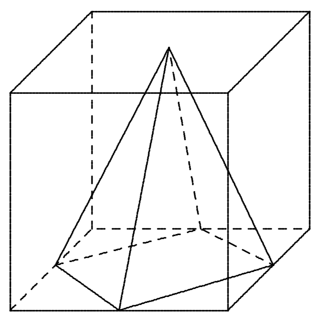
10. Eine gerade Pyramide hat eine quadratische Grundfläche der Seitenlänge $a = 16,4\,\mathrm{cm}$ und Seitenkanten der Länge $l = 24,5\,\mathrm{cm}$. Berechne ihr Volumen.

Lösung: $h = 21,6\,\mathrm{cm}$, $V = 1935\,\mathrm{cm}^3$

11. Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge a; die Höhe der Pyramide beträgt $2a$.
Bestimme den Inhalt der Oberfläche und das Volumen in Abhängigkeit von a!

Lösung: $O = \frac{3}{2}a^2(\sqrt{3} + \sqrt{19})$; $V = \sqrt{3}a^3$

12. Die Kante eines Würfels ist 8 cm lang. Diesem Würfel ist eine Pyramide so einbeschrieben, daß ihre Spitze mit dem Mittelpunkt der oberen Würfelfläche zusammenfällt. Die Mittelpunkte der Würfelgrundkanten sind die Ecken der Pyramidengrundfläche.
Berechne Oberfläche und Volumen der Pyramide!



Lösung: $O = 128\,\mathrm{cm}^2$; $V = 85\frac{1}{3}\,\mathrm{cm}^3$

13. Wie verhalten sich die Volumina von regulärem Oktaeder und Würfel, wenn ihre Oberflächen gleich groß sind?

Lösung: $\sqrt{2} : \sqrt{\sqrt{3}}$

14. Eine regelmäßige 6-seitige Pyramide hat ein Volumen von $180\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3$ und eine Höhe von 15 cm.
    (a) Erstelle eine übersichtliche Schrägbildskizze der Pyramide!
    (b) Berechne die Länge einer Grundkante! (Ergebnis: $2\sqrt{6}\,\mathrm{cm}$)
    (c) Berechne den Oberflächeninhalt der Pyramide! (Exakter Wert!)

Lösung: Oberflächeninhalt in cm^2: $36\sqrt{3} + 162\sqrt{2}$

15. Die Länge der Grundkante einer geraden quadratischen Pyramide beträgt $a = 4,0\,\text{cm}$, der Mantelflächeninhalt $M = 20\,\text{cm}^2$. Berechne das Volumen V der Pyramide anhand einer übersichtlichen Schrägbildskizze!

Lösung: $V = 8,0\,cm^3$

16. Die Grundfläche der Cheops-Pyramide ist ein Quadrat von $227,5\,\text{m}$ Seitenlänge. Ihre Spitze liegt $137\,\text{m}$ über dem Schnittpunkt der Diagonalen.
    (a) Berechne das Volumen der Pyramide. Runde sinnvoll.
    (b) Wieviel Prozent der Steine waren bis zur halben Höhe verbaut?

Lösung: (a) ca. $2,36 \cdot 10^6\,\text{m}^3$ (b) $87,5\%$

17. Vier gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge $7,60\,\text{cm}$ werden so zusammengeklebt, daß sie den Mantel einer quadratischen Pyramide bilden.
    (a) Berechne den Inhalt der Mantelfläche (3 gültige Ziffern).
    (b) Berechne Höhe und Volumen der Pyramide (3 g.Z.).

Lösung: (a) $100\,\text{cm}^2$
(b) $h = \frac{\sqrt{2}}{2} 7,60\,\text{cm} = 5,37\,\text{cm}$, $V = 103\,\text{cm}^3$.

18. Eine reguläre achtseitige Pyramide hat die Grundkante $a = 2{,}25\,\text{m}$ und die Höhe $H = 12{,}28\,\text{m}$. Berechnen Sie das Volumen V der Pyramide! (Rundung des Ergebnisses auf 1 Dezimale!)

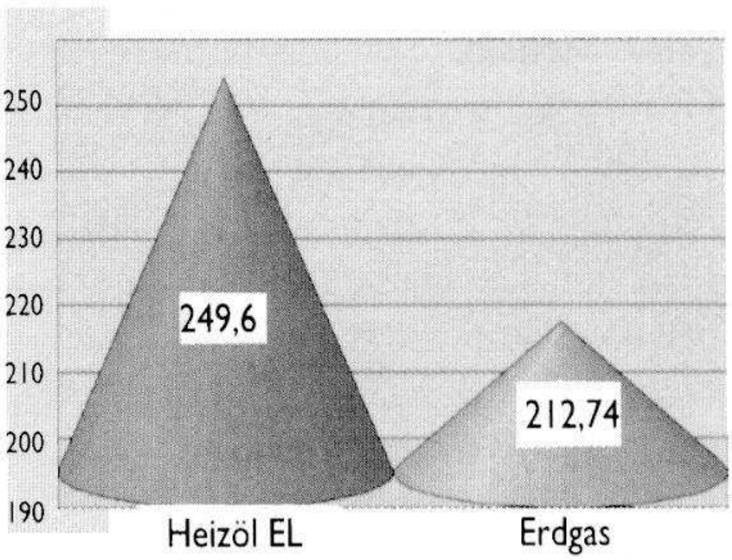
Lösung: $V = 100{,}1\,m^3$

7.2.4. Kegel

Kegel - Volumen und Oberfläche

1. **CO_2-Emission**

   Das nebenstehende Diagramm befand sich in der Kundenzeitschrift „Tag und Nacht“ 3/1999 der Wetzlarer Stadtwerke. Es soll Kunden zur Umstellung ihrer Heizungsanlage von Heizöl auf Erdgas motivieren.



Bisherige Minderung der CO_2-Emission – unter Berücksichtigung gleicher Energieinhalte – in Tonnen pro Jahr durch Brennstofftausch bei der Aktion WechselGeld

(a) Was meinst du dazu? Um wie viel Prozent ist der Erdgas-Kegel kleiner als der Heizöl-Kegel?

(b) Vergleiche mit den angegebenen Zahlen.

(c) Versuche eine angemessene Darstellung der Werte mit Kegeln (bzw. mit anderen geometrischen Körpern) zu finden.

Quelle: mathematik lehren (1999)

Lösung: Der „unbefangene“ Betrachter der Grafik assoziiert nahe liegender Weise das Volumen der dargestellten Kegel als Maß für die CO_2-Menge und stellt fest: Bei Erdgasheizung wird die CO_2-Emission um rund 60% reduziert. Rechnet man dagegen mit den angegebenen Zahlen, so erhält man eine Reduktion um rund 15%, was weit weniger eindrucksvoll ist.

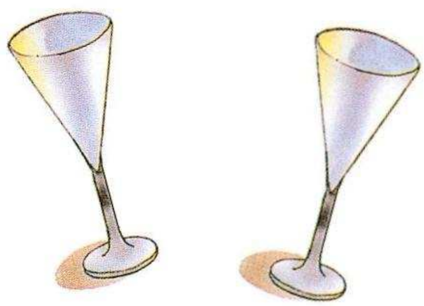
2. **St. Cyriakus**

In Gernrode am Nord-Ost-Rand des Harzes wurde 961 mit dem Bau der Kirche St. Cyriakus begonnen. Sie gehört zu den bedeutendsten Kirchenbauten Deutschlands. St. Cyriakus hat eine Doppelturmfassade mit kegelförmigen Dächern. Ein Dach ist 9 m hoch. Der Durchmesser der Grundfläche beträgt 5,20 m. Aus Gründen des Denkmalschutzes muss eine besondere Dacheindeckung gewählt werden, die pro m^2 375 € kostet. Bei der Materialbestellung wird mit einer 15% größeren Fläche gerechnet (Verschnitt). Das Amt für Denkmalschutz übernimmt 55% der Kosten, die bei der Neueindeckung der beiden Türme anfallen. Wie viel Geld bezahlt das Amt?

Lösung: Die Dachfläche beträgt ca. 153 (Kontrolle: $153,07$) m^2, aber es müssen ca. 176 (Kontrolle: $176,03$) m^2 Material bestellt werden. Das Amt für Denkmalschutz übernimmt von den Gesamtkosten ($66011,25$ €) $36306,19$ €

3. **Sektgläser**

   Eine übliche Sektflasche reicht für sieben „normal große“ Sektgläser. Für wie viele Sektgläser reicht eine Sektflasche, wenn die Gläser nur halb gefüllt werden?
   Bevor ihr rechnet: Gebt einen Tipp ab und versucht, eine möglichst schöne Begründung zu finden.



Lösung: Die folgende Lösung gilt nur für Sektgläser, die die Form von Kreiskegeln haben.
Zunächst muss dann geklärt werden, was „halb gefüllt“ bedeutet. Meint man damit, dass die Füllhöhe halbiert wird, so können mit einer üblichen Sektflasche 56 Sektgläser halb gefüllt werden.
Dies kann insbesondere mit rein funktionalen Argumenten begründet werden (Halber Radius und halbe Höhe; Radius tritt quadratisch auf, also Volumen nur $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ des ursprünglichen.

4. **Sektgläser**

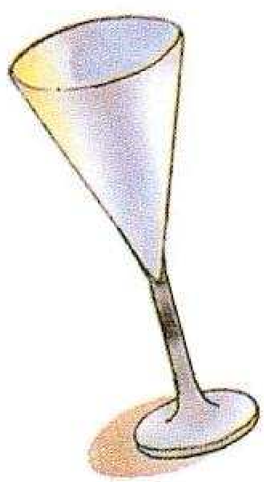
   Der Kelch eines Sektglases ist 12 cm hoch und hat einen oberen Innendurchmesser von 7 cm.

   (a) In welchem Abstand vom oberen Rand muss der Eichstrich für 0, 1 l Sekt angebracht werden?

   (b) Wie viel Prozent spart man, wenn man die Gläser nur bis 1 cm unter den Eichstrich füllt?

   (c) Erkundige dich nach dem Preis für ein Glas Sekt im Lokal und dem Preis für eine Flasche Markensekt im Supermarkt. Berechne den Gewinn in € und in Prozent.

   (d) Wie hoch muss der Preis sein, wenn das Glas mit Sekt und Orangensaft gefüllt wird?



Lösung: (a) $r = 3,03\,\text{cm}$; $h = 10,39\,\text{cm}$; Abstand vom oberen Rand $= 1,61\,\text{cm}$

(b) $h' = 9,39\,\text{cm}$; $r' = 2,74\,\text{cm}$; $V' = 73,82\,\text{cm}^3$; $26,18\%$

(1) ca. 80% der Höhe: $9,6\,\text{cm}$

5. Befördert man eineinhalb Kubikmeter Sand über ein feststehendes Förderband, so entsteht nach dem Abfallen ein kegelförmiger Sandhaufen von 85 cm Höhe.
   Berechnen Sie auf Grad genau den Böschungswinkel dieses Schüttkegels!
   (Der Böschungswinkel ist der Winkel zwischen einer Mantellinie und der Grundfläche.)

Lösung: $33°$

6. Der Mantel eines Kegels mit dem Grundkreisradius $r = 2\,\text{cm}$ ergibt ausgerollt einen Viertelkreis. Berechnen Sie Oberfläche und Volumen des Kegels!

Lösung: $O = 62{,}8\,\text{cm}^2; \text{V} = 32{,}4\,\text{cm}^3$

7. Ein Kegel und ein Zylinder haben gleiche Grundfläche, gleiche Höhe und gleiche Mantelfläche. Berechnen Sie den Mittelpunktswinkel (Bogenmaß und Gradmaß!) des Kreissektors, der beim Abrollen des Kegelmantels entsteht!

Lösung: $\sqrt{3}\,\pi$ *bzw.* $311{,}8°$

8. Bei einem Kegel mit dem Grundkreisradius $r = 6\,\text{cm}$ ist die Oberfläche 1,8 mal so groß wie die Mantelfläche.
   (a) Bestätigen Sie durch Rechnung, dass die Mantellinie m dieses Kegels eine Länge von 7,5 cm besitzt.
   (b) Berechnen Sie den Mittelpunktswinkel α, der sich bei der Abwicklung dieses Kegelmantels ergibt.

Lösung: $\alpha = 288^o$

9. Der Grundkreis eines geraden Kreiskegels hat einen Radius von 8 cm, die Höhe des Kegels beträgt 15 cm.
   (a) Wie groß ist der Öffnungswinkel des Kegels?
   (b) Der Kegelmantel wird zu einem Kreissektor aufgerollt. Wie groß ist der Mittelpunktswinkel dieses Sektors?

Lösung: (a) $56{,}1^0$
(b) $169{,}4^0$

Zylinder und Kegel - Volumen und Oberfläche

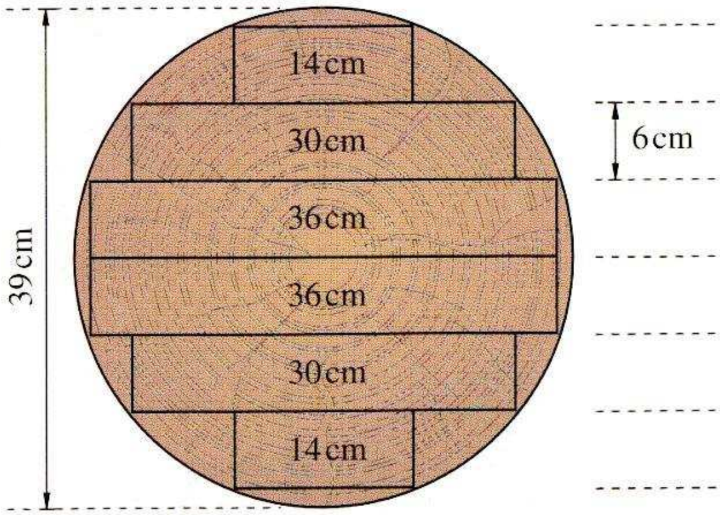
1. **Aufgaben zur Anwendung**

   Aus einem 39 cm dicken und 7 m langen Baumstamm sollen Dielen gesägt werden wie in nebenstehender Abbildung angegeben.

   (a) Berechne das Volumen des Baumstamms.

(b) Wie viel m^3 Holz kann für die Dielen genutzt werden? Wie viel Prozent beträgt der Schnittverlust

(c) Wenn die Dielen eine Dicke von $1,5\,\text{cm}$ haben sollen, wie viel m^2-Wohnfläche können damit ausgelegt werden?



Lösung:

2. **Mathe im Sport**

   (a) Beim Biathlon beträgt der Durchmesser der Scheiben beim Schießen mit liegenden Anschlag 4,5cm und beim stehenden Anschlag 11,5cm.

   Um wie viel Mal ist die Fläche beim stehendem Anschlag größer als beim liegenden Anschlag?

   (b) Nach dem Sieg wird mit einem Glas Sekt gefeiert. Das Glas hat eine Gesamthöhe von 21 cm , eine Fußhöhe von 11 cm und einen oberen Durchmesser von 6cm.

   i. Welches Gesamtvolumen hat das Sektglas?

   ii. Wie viele Gläser Sekt kann man aus einer 1,5-Liter-Flasche aussschenken?

   (c) Ein zylindrischer Puck hat eine Oberfläche von $152cm^2$ und eine Höhe von 2,54 cm. Welches Volumen hat der Eishockey-Puck?

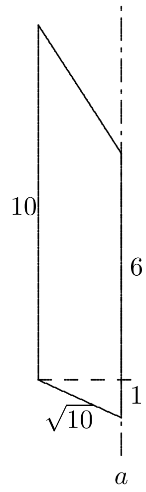
Lösung: (a) $6,53$

(b) $0,094$l; 16

(c) $2r^2\pi + 2r\pi h = A \Rightarrow r = -h \pm \sqrt{h^2 + \frac{2A}{\pi}} \Rightarrow r \approx 7,62cm$

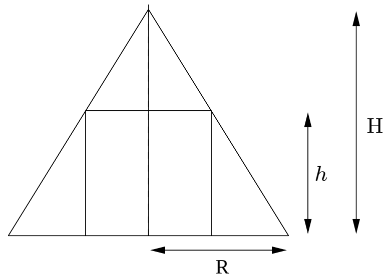
$\Rightarrow V = r^2\pi h = 463cm^3$

3. Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Körpers, der entsteht, wenn die Figur um die Achse a rotiert!



Lösung: $O = (75 + 3\sqrt{10}) \cdot \pi$

4. Gegeben ist ein gerader Kreiskegel mit dem Radius $R = a$ und der Höhe $H = \frac{4}{3}a$.
   (a) Berechnen Sie die Länge einer Mantellinie in Abhängigkeit von a!
   (b) Beim Abwickeln des Kegelmantels entsteht ein Kreissektor. Berechnen Sie den Mittelpunktswinkel des Kreissektors!
   (c) Aus dem Kegel wird ein Zylinder mit der Höhe $h = a$ herausgebohrt (s. Skizze!). Berechnen Sie das Volumen des Zylinders in Abhängigkeit von a!



Lösung: (a): $\frac{5}{3}a$ $(b):$ $216°$ $(c):$ $\frac{\pi}{16}a^3$

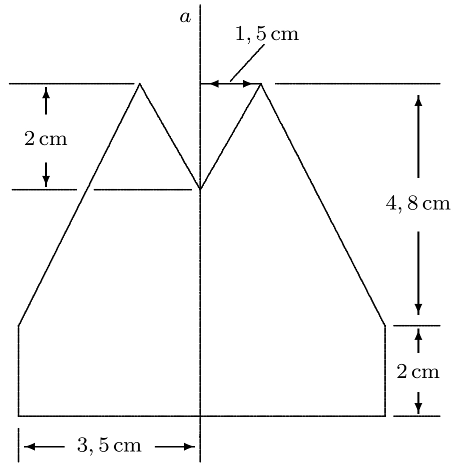
5. Ein Apfelmushersteller hat bei einer Dosenfabrik 12 000 zylindrische Blechdosen mit dem Radius r und der Höhe $h = 2\,r$ in Auftrag gegeben. In die bestellten Dosen paßt gerade sein gesamter Apfelmusvorrat. Der Designer der Dosenfabrik, ein mathematischer Analphabet, ließ statt der zylindrischen kegelförmige Dosen mit dem Radius $R = 9\,\text{cm}$ und der Höhe $H = 12\,\text{cm}$ herstellen. Die Oberfläche einer kegelförmigen Dose ist genauso groß wie die Oberfläche einer bestellten zylindrischen Dose. Wie viele kegelförmige Dosen müssen nachbestellt werden, damit der gesamte Musvorrat abgepackt werden kann?

Lösung: $r = 6\,\text{cm}$; $V_K = 324\,\pi\,\text{cm}^2$; $V_Z = 432\,\pi\,\text{cm}^2$

$$\text{Gesamtzahl der Kegel} = 12\,000 \cdot \frac{V_Z}{V_K} = 16\,000$$

$\Longrightarrow$ 4000 Kegel nachbestellen

6. Die nebenstehend gezeichnete, zur Achse a symmetrische Figur rotiert um die Achse a. Berechne das Volumen V und die Oberfläche A des entstehenden Rotationskörpers!

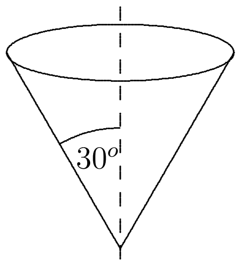


Lösung: $V = 54{,}6\,\pi\,\text{cm}^3$
$A = 56\,\pi\,\text{cm}^2$

7. <u>Aus alt mach neu!</u>
Man nehme 35 Weihnachtskerzen, die eine Zylinderform mit 10 mm Radius und 13,2 cm Höhe sowie einen 4 mm dicken Docht haben. Nach dem Entfernen des Dochtes werden die Kerzen in einem Topf zum Schmelzen gebracht.

   (a) Welches Volumen hat die Wachsmasse?

   (b) Schüttet man die flüssige Wachsmasse in einen kegelförmigen Trichter mit einem Öffnungswinkel von 60^o(vgl. Zeichnung), so entsteht eine herrliche Geburtstagskerze. Wie hoch steht die Wachsmasse im Trichter?



Lösung: $1393\,\text{cm}^3$ und $15{,}86\,\text{cm}$

8. Ein gleichseitiger Kegel (d.h. Grundkreisdurchmesser = Mantellinienlänge) und ein gleichseitiger Zylinder (d.h. Grundkreisdurchmesser = Zylinderhöhe) haben gleiche Oberflächen.
Wie verhalten sich ihre Rauminhalte?

Lösung: $V_Z : V_K = \sqrt{6} : 2$

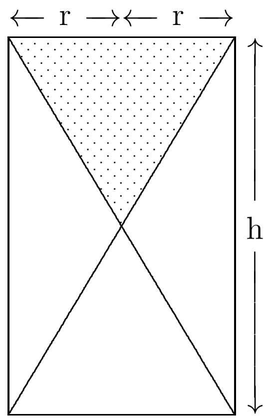
9. Einem Kegel mit Radius r und Höhe h ist ein Zylinder einbeschrieben, der auf der Grundfläche des Kegels steht und dessen Grundkreisdurchmesser gleich seiner Höhe ist. Wie verhalten sich die Volumina von Kegel und Zylinder zueinander?

Lösung: $V_{Ke} : V_{Zy} = (2r + h)^3 : 6rh^2$

10. Bei einem Kegel mit Grundkreisradius r und Höhe h ist die Mantellinienlänge m doppelt so groß wie h. Dem Kegel ist ein Zylinder einbeschrieben, der auf der Grundfläche des Kegels steht und dessen Mantelfläche ein Viertel der Mantelfläche des Kegels beträgt. Welchen Radius ϱ besitzt der Zylinder?

Lösung: $\varrho = \frac{r}{2}$

11. In eine zylinderförmige Eieruhr aus Plexiglas (Radius $r = 4\,\text{cm}$, Höhe $h = 12\,\text{cm}$) sind zwei gleiche Kegel eingeschliffen, die sich mit den Spitzen berühren und dort gegenseitig durchlässig sind (vgl. Abb.). Der obere Kegel sei ganz mit feinem Sand gefüllt, der innerhalb von 5 Minuten in den unteren Kegel abfließen kann.



(a) Wie viele Kubikmillimeter Sand fließen pro Sekunde ab, wenn eine gleichbleibende Geschwindigkeit vorausgesetzt wird?

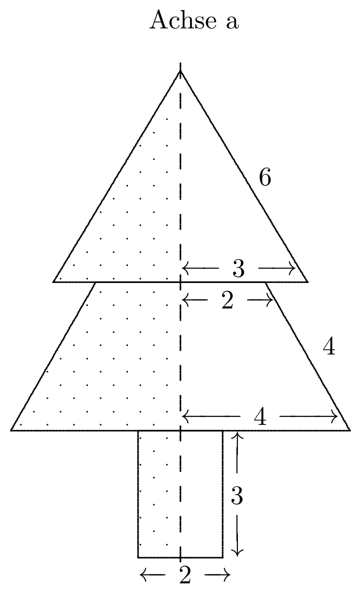
(b) Wie hoch steht der Sand im oberen Kegel nach 3 Minuten?

(c) Berechnen Sie die Masse der Eieruhr!
($\varrho_{Plexiglas} = 1{,}2\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$; $\varrho_{Sand} = 1{,}8\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$)

Lösung: $335\,\text{mm}^3$; $4{,}4\,\text{cm}$; $664\,\text{g}$

Kegelstumpf - Volumen und Oberfläche

1. Oh Tannenbaum!
Das punktierte Flächenstück rotiert um die eingezeichnete Achse a. Die Längenangaben sind in cm. Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers!
Hinweis:
Für einen Kegelstumpf mit den Radien r_1 und r_2, der Höhe h und der Mantellinie s gilt:
$V_{KST} = \frac{1}{3}\pi(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)h$
$M_{KST} = (r_1 + r_2)\pi s$

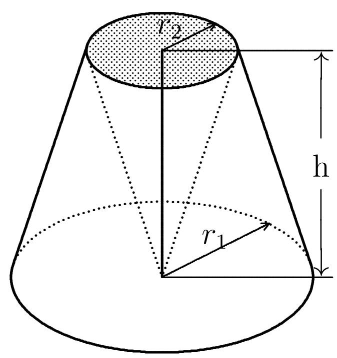


Lösung: $V = 160{,}0\,\mathrm{cm}^3, \mathrm{O} = 216{,}8\,\mathrm{cm}^2$

2. In einen Kegelstumpf wird wie in der Abbildung ein kegelförmiger Krater gebohrt.

   (a) Berechnen Sie das Volumen V des Körpers für beliebige Werte von r_1, r_2 und h.

   (b) Wir beschränken uns jetzt auf den Fall $r_1 = 2r_2$. Fertigen Sie eine Seitenansicht. Wie verhält sich der Flächeninhalt A des (Außen)-Mantels des Kegelstumpfs zum Flächeninhalt I des Kraters?



Lösung: (a) Bezeichnet man die Höhe des ursprünglichen Kegels mit H, so gilt $H = \frac{hr_1}{r_1 - r_2}$ und man erhält:

$V = \frac{1}{3}\pi r_1^2 H - \frac{1}{3}\pi r_2^2 (H - h) - \frac{1}{3}\pi r_2^2 h = \frac{1}{3}\pi(r_1 + r_2)hr_1.$

(b) $A = \frac{1}{2}2\pi 2r_2 \cdot 2 \cdot \sqrt{h^2 + r_2^2} - \frac{1}{2}2\pi r_2 \cdot \sqrt{h^2 + r_2^2}$ und $I = \frac{1}{2}2\pi r_2 \cdot \sqrt{h^2 + r_2^2}$ ergibt $\frac{A}{I} = 3$

3. Ein (umgekehrt) kegelförmiges Glas von 10 cm Höhe und 5 cm Radius (Innenmaße) ist bis zur halben Höhe voller Saft.
   (a) Fertigen Sie eine Skizze an und berechnen Sie den Flächeninhalt der vom Saft benetzte Glasfläche.
   (b) Wie hoch steht der Saft im Glas, nachdem jemand eine Kirsche von 1 cm Radius in das Glas geworfen hat?
   (c) Wieviel Saft muss man nachgießen, damit das Glas (ohne Kirsche) halbvoll wird?

Lösung: (a) $\frac{\sqrt{5}\pi 5^2}{4}\mathrm{cm}^2$
(b) $h = \sqrt[3]{141}\mathrm{cm}$
(c) Ein Viertel des Glasvolumens: $\frac{250}{12}\pi\mathrm{cm}^3$

4. Ein 10 cm hoher gerader Kegel soll parallel zu seiner Grundfläche durchgeschnitten werden, so dass der Flächeninhalt der Schnittfläche halb so groß wie der der Grundfläche ist.
   In welchem Abstand von der Grundfläche muss der Kegel durchgeschnitten werden?

Lösung: $h \approx 2{,}9\,\mathrm{cm}$

5. Ein 10 cm hoher gerader Kegel soll parallel zu seiner Grundfläche durchgeschnitten werden, so dass die beiden entstehenden Körper gleiches Volumen besitzen.
   In welchem Abstand von der Grundfläche muss der Kegel durchgeschnitten werden?

Lösung: $h \approx 2{,}1\,\mathrm{cm}$

6. Befördert man $2\,\mathrm{m}^3$ Sand über ein feststehendes Förderband, so entsteht nach dem Abfallen ein kegelförmiger Sandhaufen von 92 cm Höhe.
   (a) Welchen Durchmesser hat die Grundfläche dieses Schüttkegels?
   Rundung des Ergebnisses auf cm!

   Wenn Sie (a) nicht lösen konnten, so rechnen Sie im folgenden mit einem Radius von 144 cm.

   (b) Ein Käfer krabbelt von der Spitze des Schüttkegels auf kürzestem Weg zu seiner Freundin, die auf dem Sandhaufen in halber Höhe über dem Boden (d.h. der Kegelgrundfläche) wartet.
   Welchen Weg (in cm) legt der Käfer zurück?

Lösung: (a): $288\,cm$ (b): $85\,cm$

7. Befördert man eineinhalb Kubikmeter Sand über ein feststehendes Förderband, so entsteht nach dem Abfallen ein kegelförmiger Sandhaufen von 85 cm Höhe.
   Berechnen Sie auf Grad genau den Böschungswinkel dieses Schüttkegels!
   (Der Böschungswinkel ist der Winkel zwischen einer Mantellinie und der Grundfläche.)

Lösung: $33°$

7.2.5. verschiedene Körper

1. (a) Konstruiere die Höhe eines regulären Tetraeders mit der Seitenlänge 6 cm, sowie den Neigungswinkel einer Seitenkante gegen die Grundfläche.
   (b) Die Oberfläche eines regulären Oktaeders beträgt $2\,\text{m}^2$.
   Berechne seine Kantenlänge a! Gib das Ergebnis zunächst exakt und dann auf zwei Dezimalen gerundet an!

Lösung: $a = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}}}\,\text{m} \approx 0,76\,\text{m}$

2. **Fussballverpackung**

   Zur Fußballweltmeisterschaft hat sich eine Firma für Kleinbildfilme eine besondere Verpackung ausgedacht: jeweils 4 Filme werden in einer Schachtel verpackt, die an einen Fußball erinnern soll.

Bild 1

Bild 2

   (Die beiden Bilder sind aus unterschiedlichen Perspektiven fotographiert, damit du die Form besser erkennen kannst.)

   Wenn du die Verpackung betrachtest, erkennst du Quadrate und Dreiecke. Die Dreiecke sind rechtwinklig und gleichschenklig. Die Seitenlänge eines Quadrats beträgt

4 cm. Jeweils drei Dreiecke bilden eine kleine Pyramide, die nach innen zeigt. Die Verpackung bekommt dadurch mehr Stabilität und sieht auch interessanter aus, als wenn man nur ein einfaches Dreieck genommen hätte.

(a) Aus wie vielen Quadraten und Dreiecken besteht die Verpackung?

(b) Berechne die Größe der Oberfläche der Verpackung.

(c) Wichtig ist auch, wie viel Platz überhaupt in der Verpackung ist. Die Designer geben an, dass das Volumen (gerundet) 528 cm^3 beträgt. Bekommst du das auch heraus?

(d) Jeder der vier Filme steckt in einem Zylinderförmigen Döschen (Durchmesser: 3,1 cm; Höhe: 5,2 cm). Wie viel Prozent der Fußballschachtel bleiben leer, wenn die vier Filme eingepackt sind? Schätze zuerst die Prozentzahl und berechne erst danach das Ergebnis.

(e) Ein Fotogeschäft hat die Preise für die Filme in der Fußballschachtel reduziert von 6,99 € auf 5,99 € (vgl. Abb.). Wie viel Prozent Preisermäßigung sind das?

(f) Zur gleichen Zeit kann man in demselben Fotogeschäft die gleichen Filme in einer normalen Schachtel als Zweierpack kaufen. Ein Zweierpack kostet 1,99 €. Wie viel Prozent könnte man gegenüberder Fussballverpackung zun 5,99 € sparen, wenn man 2 Zweierpacks kauft?

Lösung: (a) $5 + 5 + 8 = 18$ Quadrate, $8 \cdot 3 = 24$ Dreiecke

(b) $18 \cdot (4\,\text{cm})^2 + 24 \cdot \left(\frac{4\,\text{cm}}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 288\,\text{cm}^2 + 96\,\text{cm}^2 = 384\,\text{cm}^2$

(c) Volumen der Verpackung:

$$V_{\text{Verpack}} = \left[4^3 + 6 \cdot 4^2 \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} + 12 \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\right] \text{cm}^3 = 527{,}53\,\text{cm}^3$$

(d) Volumen der 4 Dosen: $V_{\text{Dosen}} = 4 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 3{,}1\,\text{cm}\right)^2 \pi\right] \cdot 5{,}2\,\text{cm} \approx 157\,\text{cm}^3$

Also werden 30% der Verpackung ausgefüllt.

(e) 14, 3%

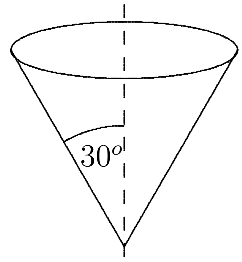
(f) 33, 6%

3. Aus alt mach neu!

Man nehme 35 Weihnachtskerzen, die eine Zylinderform mit 10 mm Radius und 13,2 cm Höhe sowie einen 4 mm dicken Docht haben. Nach dem Entfernen des Dochtes werden die Kerzen in einem Topf zum Schmelzen gebracht.

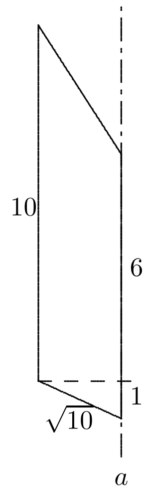
(a) Welches Volumen hat die Wachsmasse?

(b) Schüttet man die flüssige Wachsmasse in einen kegelförmigen Trichter mit einem Öffnungswinkel von 60^o(vgl. Zeichnung), so entsteht eine herrliche Geburtstagskerze. Wie hoch steht die Wachsmasse im Trichter?



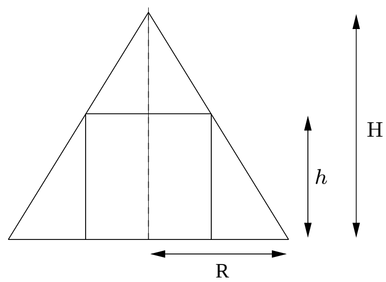
Lösung: $1393\,\mathrm{cm}^3$ und $15{,}86\,\mathrm{cm}$

4. Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Körpers, der entsteht, wenn die Figur um die Achse a rotiert!



Lösung: $O = (75 + 3\sqrt{10}) \cdot \pi$

5. Gegeben ist ein gerader Kreiskegel mit dem Radius $R = a$ und der Höhe $H = \frac{4}{3}a$.
   (a) Berechnen Sie die Länge einer Mantellinie in Abhängigkeit von a!
   (b) Beim Abwickeln des Kegelmantels entsteht ein Kreissektor. Berechnen Sie den Mittelpunktswinkel des Kreissektors!
   (c) Aus dem Kegel wird ein Zylinder mit der Höhe $h = a$ herausgebohrt (s. Skizze!). Berechnen Sie das Volumen des Zylinders in Abhängigkeit von a!



Lösung: (a): $\frac{5}{3}a$ $(b):$ $216°$ $(c):$ $\frac{\pi}{16}a^3$

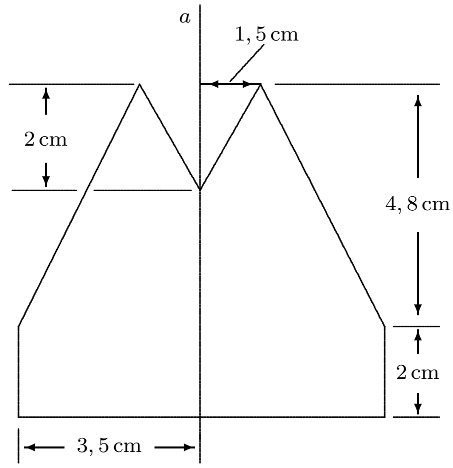
6. Ein Apfelmushersteller hat bei einer Dosenfabrik 12 000 zylindrische Blechdosen mit dem Radius r und der Höhe $h = 2\,r$ in Auftrag gegeben. In die bestellten Dosen paßt gerade sein gesamter Apfelmusvorrat. Der Designer der Dosenfabrik, ein mathematischer Analphabet, ließ statt der zylindrischen kegelförmige Dosen mit dem Radius $R = 9\,\text{cm}$ und der Höhe $H = 12\,\text{cm}$ herstellen. Die Oberfläche einer kegelförmigen Dose ist genauso groß wie die Oberfläche einer bestellten zylindrischen Dose. Wie viele kegelförmige Dosen müssen nachbestellt werden, damit der gesamte Musvorrat abgepackt werden kann?

Lösung: $r = 6\,\text{cm}$; $\quad V_K = 324\,\pi\,\text{cm}^2$; $\quad V_Z = 432\,\pi\,\text{cm}^2$

$$\text{Gesamtzahl der Kegel} = 12\,000 \cdot \frac{V_Z}{V_K} = 16\,000$$

$\Longrightarrow \quad$ 4000 Kegel nachbestellen

7. Die nebenstehend gezeichnete, zur Achse a symmetrische Figur rotiert um die Achse a. Berechne das Volumen V und die Oberfläche A des entstehenden Rotationskörpers!

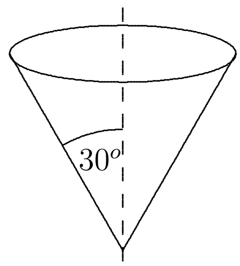


Lösung: $V = 54{,}6\,\pi\,\text{cm}^3$
$A = 56\,\pi\,\text{cm}^2$

8. <u>Aus alt mach neu!</u>
Man nehme 35 Weihnachtskerzen, die eine Zylinderform mit 10 mm Radius und 13,2 cm Höhe sowie einen 4 mm dicken Docht haben. Nach dem Entfernen des Dochtes werden die Kerzen in einem Topf zum Schmelzen gebracht.

   (a) Welches Volumen hat die Wachsmasse?

   (b) Schüttet man die flüssige Wachsmasse in einen kegelförmigen Trichter mit einem Öffnungswinkel von 60^o(vgl. Zeichnung), so entsteht eine herrliche Geburtstagskerze. Wie hoch steht die Wachsmasse im Trichter?



Lösung: $1393\,\text{cm}^3$ und 15,86 cm

9. Ein gleichseitiger Kegel (d.h. Grundkreisdurchmesser = Mantellinienlänge) und ein gleichseitiger Zylinder (d.h. Grundkreisdurchmesser = Zylinderhöhe) haben gleiche Oberflächen.
   Wie verhalten sich ihre Rauminhalte?

Lösung: $V_Z : V_K = \sqrt{6} : 2$

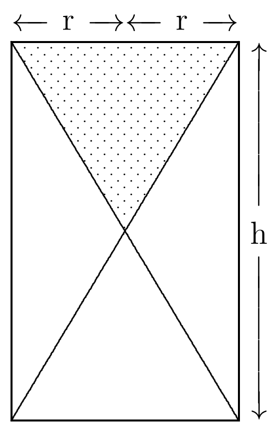
10. Einem Kegel mit Radius r und Höhe h ist ein Zylinder einbeschrieben, der auf der Grundfläche des Kegels steht und dessen Grundkreisdurchmesser gleich seiner Höhe ist. Wie verhalten sich die Volumina von Kegel und Zylinder zueinander?

Lösung: $V_{Ke} : V_{Zy} = (2r + h)^3 : 6rh^2$

11. Bei einem Kegel mit Grundkreisradius r und Höhe h ist die Mantellinienlänge m doppelt so groß wie h. Dem Kegel ist ein Zylinder einbeschrieben, der auf der Grundfläche des Kegels steht und dessen Mantelfläche ein Viertel der Mantelfläche des Kegels beträgt. Welchen Radius ϱ besitzt der Zylinder?

Lösung: $\varrho = \frac{r}{2}$

12. In eine zylinderförmige Eieruhr aus Plexiglas (Radius $r = 4\,\text{cm}$, Höhe $h = 12\,\text{cm}$) sind zwei gleiche Kegel eingeschliffen, die sich mit den Spitzen berühren und dort gegenseitig durchlässig sind (vgl. Abb.). Der obere Kegel sei ganz mit feinem Sand gefüllt, der innerhalb von 5 Minuten in den unteren Kegel abfließen kann.



(a) Wie viele Kubikmillimeter Sand fließen pro Sekunde ab, wenn eine gleichbleibende Geschwindigkeit vorausgesetzt wird?

(b) Wie hoch steht der Sand im oberen Kegel nach 3 Minuten?

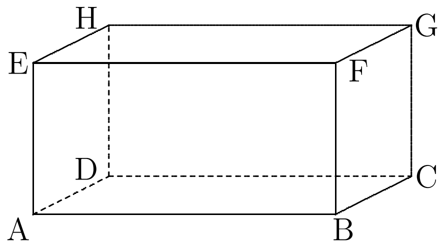
(c) Berechnen Sie die Masse der Eieruhr!
($\varrho_{Plexiglas} = 1{,}2\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$; $\varrho_{Sand} = 1{,}8\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$)

Lösung: $335\,\text{mm}^3$; $4{,}4\,\text{cm}$; $664\,\text{g}$

7.2.6. Streckenlängen und Winkelgrößen an Körpern

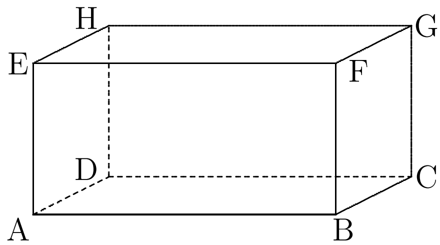
7.3. Raumvorstellungsvermögen

1. Ein Quader hat die Maße $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$ und $\overline{AE} = 5\,\text{cm}$. M ist der Mittelpunkt der Strecke $[AB]$. Bestimme mit Hilfe einer Konstruktion den Neigungswinkel der Geraden GM gegenüber der Grundfläche $ABCD$.



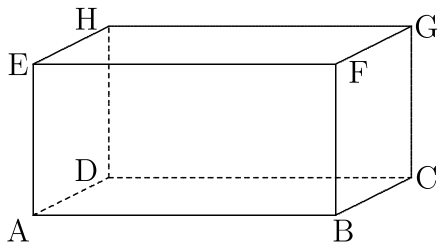
Lösung: $\sphericalangle CMG \approx 41^o$

2. Ein Quader hat die Maße $\overline{AB} = 7\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 5\,\text{cm}$ und $\overline{AE} = 4\,\text{cm}$. M ist der Mittelpunkt der Strecke $[AB]$. Bestimme mit Hilfe einer Konstruktion den Neigungswinkel der Geraden HM gegenüber der Grundfläche $ABCD$.



Lösung: $\sphericalangle HMD \approx 33^o$

3. Gib zwei durch Ecken festgelegte Geraden an, die sich schneiden <u>und</u> zu DC windschief sind.



Lösung: z.B. AE und AF

4. Die Punkte A, B und C liegen nicht auf einer Geraden, und T nicht auf der Ebene $E(A, B, C)$. Fertige eine passende Skizze und bestimme darin die Schnittgerade von $E(A, B, T)$ und $E(B, C, T)$.

Lösung: Schnittgerade BT

5. Die Geraden RS und QP sind parallel, der Punkt T liegt nicht in $E(Q, P, S)$. Fertige eine passende Skizze und bestimme darin die Schnittgerade der Ebenen $E(R, P, T)$ und $E(R, S, Q)$.

Lösung: Schnittgerade RP

6. Die Geraden AB und CD sind windschief. Liegt C auf der Ebene $E(A, B, D)$? Begründe.

Lösung: Nein, sonst würden beide Geraden in dieser Ebene liegen, sie wären dann nicht windschief.

7. S ist ein Punkt, der nicht in der Ebene $E(A, B, C)$ liegt. Durch S werden die Parallelen g bzw. h zu AB bzw BC gelegt. g und AB legen die Ebene E fest, h und BC die Ebene F. Fertige eine passende Skizze. Wie liegen E und F zueinander? Bestimme gegebenenfalls die Schnittgerade.

Lösung: Schnittgerade BS

8. Die Geraden AB und CD sind windschief. Fertige eine passende Skizze mit den Ebenen $E(A, B, C)$ und $E(B, C, D)$ und ihrer Schnittgerade?

Lösung: Schnittgerade BC

9. Die Geraden AB und CD sind windschief. g ist die Parallele zu AB durch C und h die Parallele zu CD durch B. AB und g bestimmen die Ebene E, CD und h bestimmen die Ebene F. Fertige eine passende Skizze und bestimme darin die Schnittgerade von E und F.

Lösung: Schnittgerade BC

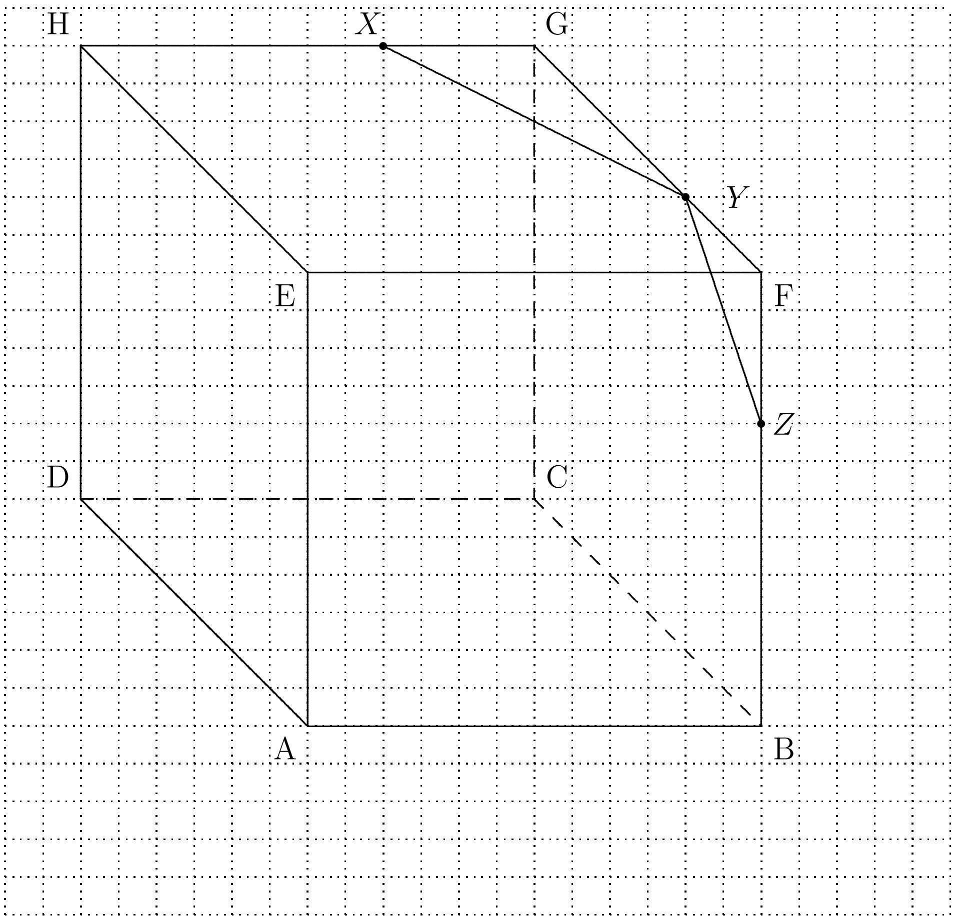
10. Die Geraden AB und CD sind windschief. M ist der Mittelpunkt der Strecke CD. Fertige eine übersichtliche Skizze und gib die Schnittgerade der Ebenen $E(A, C, D)$ und $E(M, B, A)$ an.

Lösung: Schnittgerade AM

11. Die zwei Geraden AB und CD sind parallel, T liegt nicht in $E(A, B, C)$. Durch B wird die Parallele BE zu CT gelegt.
    (a) Wie liegen die Ebenen $E(A, B, E)$ und $E(C, D, T)$ zueinander? Begründe mit einem bekannten Satz.
    (b) Wie liegen die Geraden CT und AD zueinander. Begründe.

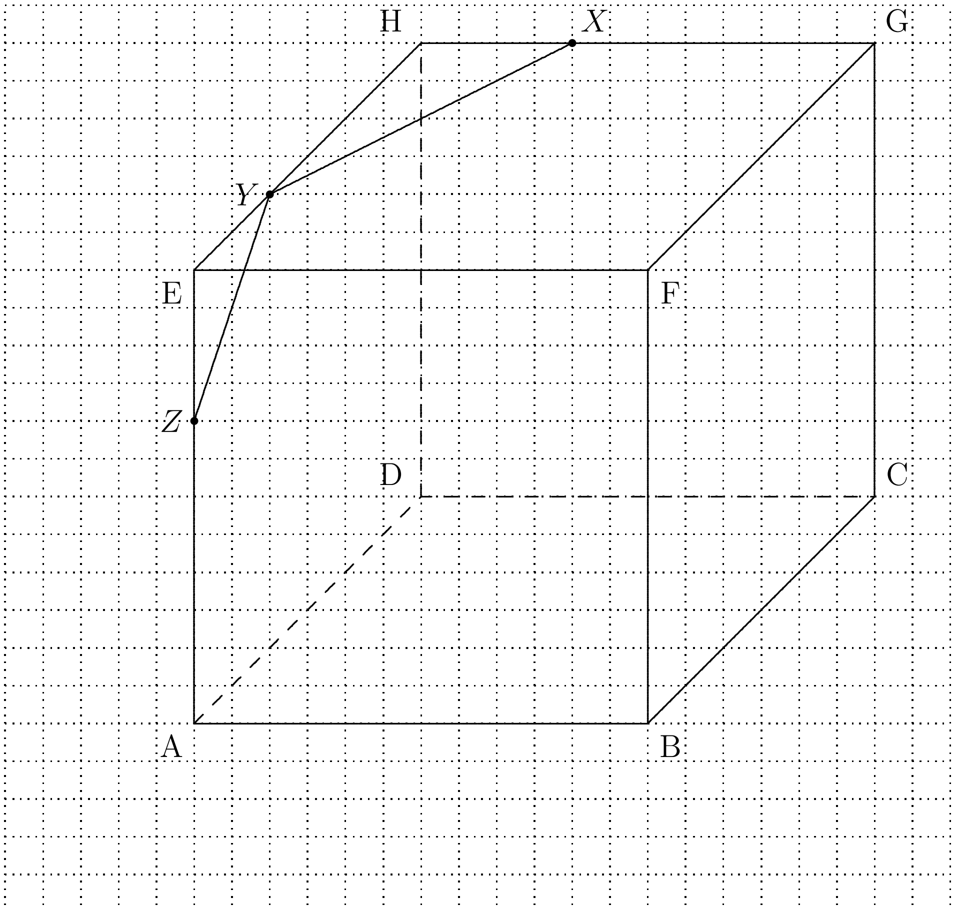
Lösung: (a) Zwei Paare sich schneidender Geraden, von denen je zwei parallel sind, legen parallele (oder gleiche) Ebenen fest.
(b) Sie sind windschief.

12. Der Würfel $ABCDEFG$ wird durch die Ebene $E(XYZ)$ in zwei Teile zerschnitten. Konstruiere die Schnittfigur im Schrägbild.



Lösung:

13. Der Würfel $ABCDEFG$ wird durch die Ebene $E(XYZ)$ in zwei Teile zerschnitten. Konstruiere die Schnittfigur im Schrägbild.

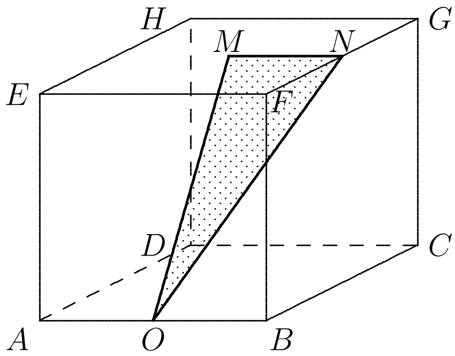


Lösung:

14. Gegeben ist ein Würfel $ABCDEFGH$. M ist der Mittelpunkt der Deckfläche, O und N sind Kantenmittelpunkte.

    (a) Gib eine Lotebene zur schraffierten Ebene $E(OMN)$ an und begründe kurz deine Antwort.

    (b) Konstruiere die Strecke NO in wahrer Größe (Kantenlänge 6 cm).



Lösung: MN steht senkrecht auf der Seitenfläche $BCGF$, deswegen ist diese eine Lotebene zu MNO.

15. Welche der folgenden Aussagen sind falsch. Begründe kurz.

    (a) Durch jeden Punkt $P \notin E$ gibt es genau eine zu E parallele Gerade.

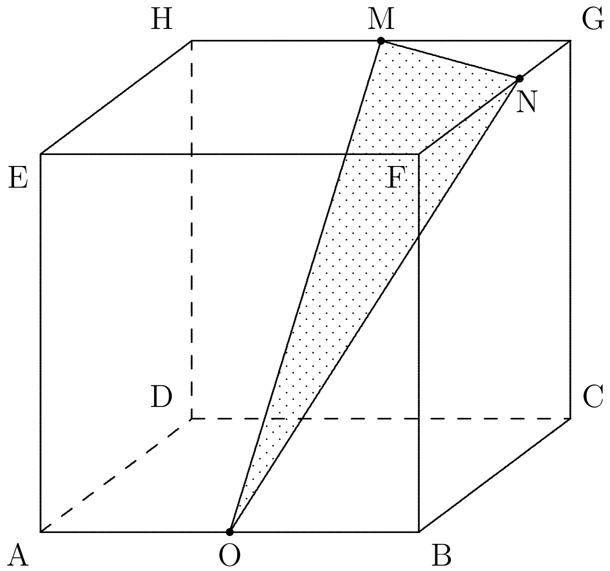
    (b) Durch jeden Punkt $P \notin E$ gibt es genau eine zu E parallele Ebene.

    (c) $g \parallel E \wedge h \parallel E \Longrightarrow E \parallel E(g,h)$

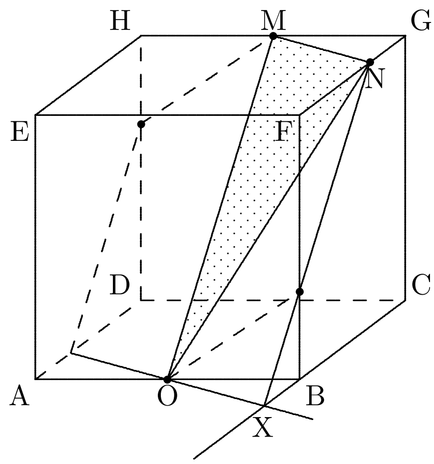
    (d) $g \parallel E \wedge h \subset E \Longrightarrow g \parallel h$

Lösung: a, c, und d sind falsch.

16. Gegeben ist ein Würfel mit den Ecken A, B, C, D, E, F, G und H. Die Punkte M und O sind Kantenmitten, N ist ein Punkt von $[FG]$ (siehe Abbildung). Die Ebene $E(MNO)$ zerlegt den Würfel in zwei Teile. Konstruiere die Schnittfigur im gegebenen Schrägbild.



Lösung: Man zeichnet die Parallele zu MN durch O und schneidet sie mit BC. Dieser Schnittpunkt X liegt in $E(MNO)$ und der rechten Seitenebene des Würfels. Also schneiden sich XN und FB in einem Punkt der Ebene $E(MNO)$. Die übrigen Randlinien der Schnittfigur ergeben sich durch Parallelenziehen.



17. Die Grundfläche einer Pyramide ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $a = 6\,\text{cm}$. Eine Seite des Dreiecks ist parallel zur Rißachse und liegt 1 cm vor ihr. Die Spitze der Pyramide liegt 5 cm senkrecht über dem Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Grunddreiecks.
    (a) Konstruiere in einer Figur Grundriß und Aufriß der Pyramide.
    (b) Konstruiere ein Schrägbild der Pyramide mit $q = \frac{1}{2}$ und $\omega = 30°$.
    (c) Konstruiere das Schrägbild der Pyramidenspitze auf eine 2. Art (in der gleichen Figur).
    (d) Erkläre in wenigen Sätzen beide Konstruktionen der Pyramidenspitze.

Lösung: