SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit $\TeX$

Jahrgangsstufe 8 (Gymnasium)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

5. Juni 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionale Zusammenhänge I

1.1 Proportionalität

1.1.1 direkte Proportionalität

1. Z. B.: x Geier am Ende auf Baum 1, dann sind $2x$ bzw. $4x$ auf Baum 2 bzw. 3. Damit sitzen nach den Flügen $56/7 = 8$ Geier auf dem ersten Baum und 16 bzw. 32 Geier auf dem 2. und 3. Baum. Vor dem Flug waren es dann 12, 21 und 23 Geier.

2. (a) Z. B. 3 x 4 Bratwürstl kosten 12,60 EUR; 2 x 6 Bratwürstl kosten 9,90 EUR; damit liegt keine direkte Proportionalität vor

   (b) 25 x 4 Bratwürstl kosten 105,00 EUR; Jeder Schüler spart $(105,00$ EUR - $64,50$ EUR): $25 = 1,62$ EUR

3. (a) Z. B.: Annahme: Tür 2,5 m hoch ⇒ Höhe des Fußballes ca. 15 m, Größe eines Spielers ca. 130 m

   (b) ca. 7 km

   (c) Fuß müsste ca. 20 m lang sein, ist jedoch kürzer; passt also nicht

4. Quelle: Herget, W. et al.: Produktive Aufgaben

1.1.2 Umfang des Kreises

1. (a) Als Kreisfläche eignen sich verschiedene Körper, wie z. B. Mülleimer, Tasse, Blumentopf,...

   (b)

	Mülleimer	Tasse	Blumentopf	Topf
Radius r in cm	20 cm	4,1 cm	15 cm	18 cm
Umfang u in cm	125,5 cm	25,5 cm	94 cm	113 cm
Radius: Umfang	6,28	6,22	6,26	6,28

   Erfahrungsgemäß ergeben sich bei den Ergebnissen aufgrund von Messungenauigkeiten Abweichungen (vgl. auch Ergebnisse von u in der Tabelle)!

2. Man legt die Schnur kreisförmig, um den maximalen Flächeninhalt zu erhalten: 1,3m^2
3. Quelle: Herget/Jahnke/Kroll: Produktive Aufgaben , Cornelsen
4.
5. $1{,}2 \cdot 10^{10}$ km
6. $3{,}4 \cdot U_{Erde}$
7. $2815 \cdot U_{Erde}$

1.1.3 indirekte Proportionalität

1. (a) (2) und (4) sind proportional
   (b) (2) 1,50EUR; (4) 49g

1.2 Funktion und Term

1.2.1 Funktionsbegriff

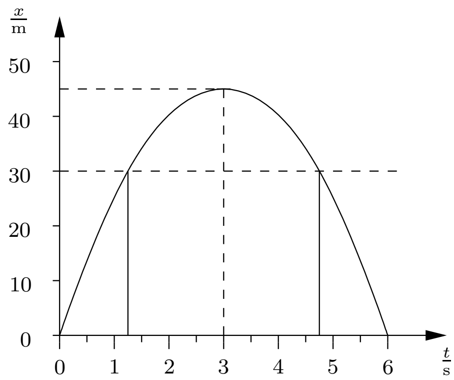
1.

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$\frac{x}{\mathrm{m}}$	0	13,75	25	33,75	40	43,75	45

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
$\frac{x}{\mathrm{m}}$	43,75	40	33,75	25	13,75	0

$L \approx [1{,}25\,;\,4{,}75]$

(genauer: $L \approx [1{,}268\,;\,4{,}732]$)



2. (b) $D = \mathbb{Q}$ und $f(x) = x + |x|$, (c) $D = \mathbb{Z}$ und $f(x) = -0,5x$
3.
4. Keine Funktion: $y = \pm x$
5. $D_f = [-8\,;\,8]$, $f(x) = 1{,}2 \quad \Longrightarrow \quad x = 1{,}2^3 = 1{,}728$
   Es ist eine Funktion: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

6. (a) Funktion (b) keine Funktion
   (c) keine Funktion (Kreis um $(0|0)$ mit $r = 2$)
   (d) keine Funktion (Rechteck, teilweise ohne Rand)

7. $f = \{\,(x|y)\,|\,(x-1)^2 + (y-2)^2 < 3\,\}$

8. $f = \{\,(x|y)\,|\,y \geqq \frac{1}{5}\,x + \frac{9}{5} \,\wedge\, y < x + 1 \,\wedge\, y < 9 - x\,\}$

1.2.2 funktionale Zusammenhänge erfassen und beschreiben

1. Z. B.: x Geier am Ende auf Baum 1, dann sind $2x$ bzw. $4x$ auf Baum 2 bzw. 3. Damit sitzen nach den Flügen $56/7 = 8$ Geier auf dem ersten Baum und 16 bzw. 32 Geier auf dem 2. und 3. Baum. Vor dem Flug waren es dann 12, 21 und 23 Geier.

2. (a) z. B.: Fahrtzeit $6,5\,s$, Stockwerkshöhe: $5\,m$
   (b) f: Karola, g Hanna

3. (a) 36%
   (b) Z. B.: $0,12\,\text{EUR} \cdot 46 = 5,52\,\text{EUR} < 7,19\ \text{EUR}$

       Bei diesem Auftrag ist der Drogeriemarkt billiger.
   (c) Drogeriemarkt: Preis = Anzahl $\cdot\ 0,12\,\text{EUR}$

       Versand: Preis = Anzahl $\cdot\ 0,10\,\text{EUR} + 2,59\,\text{EUR}$
   (d) Ab 130 bestellten Bildern ist der Versand günstiger.
   (e)
   (f) Aufgrund der Preissprünge sind beispielsweise 95 Bilder teuerer als 100. Ein Kunde, der 95 Bilder benötigt, sollte eigentlich 5 Bilder zusätzlich bestellen, und kommt damit billiger weg.

1.2.3 Flächeninhalt des Kreises

1. Abschätzung durch ein Rechteck mit Seitenlängen $4,5 \cdot 10^3\,\text{km}$ und

   $3,1 \cdot 10^3\,\text{km}$ liefert $A = 14 \cdot 10^6\,\text{km}^2$

   ODER: Abschätzung durch Kreis mit Radius $2,1 \cdot 10^3\,\text{km}$ liefert ebenso $A = 14\,\text{km}^2$

2.

Länge der Einfassung:	$s = 2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 2\pi(r_1 + r_2) = 15\pi\,\text{m} = 47{,}12\,\text{m}$
Kosten der Einfassung:	$47{,}12 \cdot 11{,}6\,€ = 546{,}59\,€$
Fläche des Beetes:	$A = r_2^2\pi - r_1^2\pi = (r_1^2 - r_2^2)\pi = 11{,}25\pi\,\text{m}^2 = 35{,}34\,\text{m}^2$
Preis für die Erde:	$35{,}34 \cdot 2{,}5\,€ = 88{,}35\,€$
Gesamtpreis:	$546{,}59\,€ + 88{,}35\,€ = 634{,}94\,€ \approx 630\,€$

3. (a) $A = \frac{3}{4}\, a^2\pi, \quad U = \frac{3}{4} \cdot 2\pi a + 2a = \left(\frac{3\pi}{2} + 2\right) a \approx 6{,}71\, a$

   (b) $\frac{A}{a^2\pi} = 0{,}75 \quad \Longrightarrow \quad$ um 25% kleiner

   $\frac{U}{2a\pi} = \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi} = 1{,}068 \quad \Longrightarrow \quad$ um 6,8% größer

4. (a) $A = \frac{1}{2}\, a^2\pi + \frac{1}{4}\,(2a)^2\pi = \frac{3}{2}\, a^2\pi$

   $U = \frac{1}{2} \cdot 2\pi a + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot (2a) + 2a = 2\,(\pi + 1)\, a \approx 8{,}28\, a$

   (b) $\frac{A}{a^2\pi} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \quad \Longrightarrow \quad$ um den Faktor 1,5

   $\frac{U}{2a\pi} = \frac{\pi + 1}{\pi} = 1 + \frac{1}{\pi} \approx 1{,}318 \quad \Longrightarrow \quad$ um 31,8% größer

5. (a) $A = 2 \cdot \frac{1}{2}\, a^2\pi + \frac{1}{2}\,(2a)^2\pi + \frac{1}{4}\,(4a)^2\pi = a^2\pi + 2a^2\pi + 4a^2\pi = 7a^2\pi$

   $U = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a\pi + \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2a\pi + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 4a\pi = 2a\pi + 2a\pi + 2a\pi = 6a\pi$

   (b) $\frac{U}{4a\pi} = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad$ um den Faktor 1,5

   $\frac{A}{(2a)^2\pi} = \frac{7}{4} = 1{,}75 \quad \Longrightarrow \quad$ um 75% größer

6. (a) D $1600m^2$

   (b) Umfassende Recheckfläche hat $35\text{m} \cdot 70\text{m} = 2450\text{m}^2$.
   Frontfläche ist größer als die halbe Recheckfläche also D.
   ODER:
   Frontfläche ist kleiner als umschreibender Halbkreis mit der Fläche $\frac{1}{2}(35\text{m})^2\pi \approx 1924\text{m})^2$, also D.

7.

8.

Teilaufgabe	a	b	c	d
Radius in cm	8	4	2	1
Fläche in cm^2	201	50,3	12,6	3,14

Die Fläche des Kreises vervierfacht sich, wenn sich der Radius verdoppelt.
Fläche des Kreises direkt proportional zu r^2. $A \approx 3{,}14\, r^2$ Hinweis:
Die Aufgabe kann in der Klasse arbeitsteilig bearbeitet werden. Z. B.
Teilaufgabe (a) gemeinsam bearbeiten, dann die Klasse in drei Gruppen einteilen, von denen jede Gruppe eine der Teilaufgaben (b), (c) und (d) bearbeitet.

ODER: Klasse in zwei Gruppen einteilen, von denen jede Gruppe zwei Teilaufgaben ((a) und (d), (b) und (c)) bearbeitet.

Erfahrungsgemäß ergeben sich bei den Ergebnissen aufgrund von Messungenauigkeiten Abweichungen!

9.

10. Anleitung: Begründe, dass bei Verdoppelung des Durchmessers sich nicht die Grundfläche verdoppelt. Begründe dann, dass beim doppelten Durchmesser das Wasser weniger als halb so hoch steht.

    Anregungen zur Öffnung dieser Aufgabe:

    (a) Frage ersetzen durch: Betrachte die Zuordnung Durchmesser $\rightarrow$ Höhe. Was fällt dir auf?

    (b) Alternative: Erstellt selbst Graphen durch Füll-Versuche.

    (c) Umkehraufgabe: Gegeben sind verschiedene Graphen, Schüler zeichnen die dazu passenden Gefäße.

11. Fläche ist proportional zum Quadrat des Durchmessers $\Rightarrow$ genutzte Energie $= (\frac{15}{18})^2\cdot$ abgestrahlte Energie der Kochplatte $= 70\%\cdot$ abgestrahlte Energie der Kochplatte $\Rightarrow 30\%\cdot$ vergeudete Energie

12. Anmerkung: Es empfiehlt sich die Verwendung eines aktuellen Pizza-Prospekts mit Euro-Preisen.

    Der Preisvorteil bei der Jumbo-Pizza ist sehr gering. Die Werbung ist natürlich echt: Vielleicht sollten wir mal ein paar Schüler bei Dinos vorbeischicken ...

13. (a) 67%

    (b) Die große Pizza

    (c) Man kann 9 Euro sparen.

14. Preis proportional zur Fläche $\Rightarrow$ 20 cm und 23 cm

15. Ein möglicher Schnitt geht gleichzeitig durch den Kreismittelpunkt und den Mittelpunkt des Quadrats.

16. $r_1 = 4{,}5$; $r_2 = 1{,}5$

17. 63,7 %

1.3 lineare Funktionen

1.3.1 Definition, Interpretation der Parameter

1. Variationen:
   (a) Koordinaten von P als Linien einzeichnen
   (b) P mit ganzzahligen Koordinaten vorgeben
   (c) keinen Punkt vorgeben
   (d) Zusatzfrage: Kann P auf der Geraden wandern?
   (e) Geradengleichung auf verschiedene Arten bestimmen

   $\frac{y}{b} = \frac{a-x}{a}$
   $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

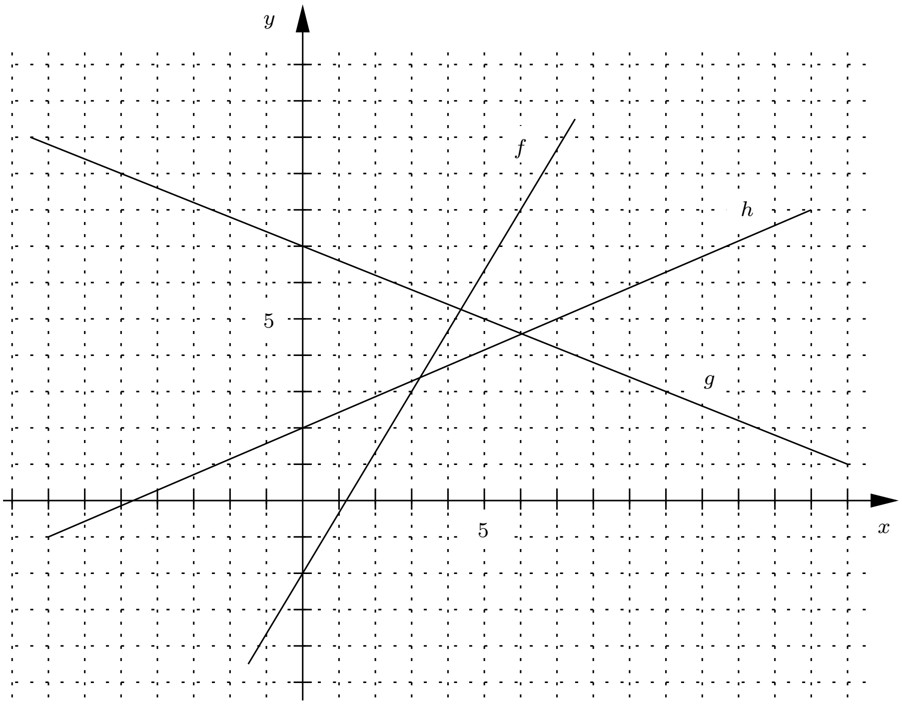
2. c) $A \approx 38,8\,\text{cm}^2$

1.3.2 Graph der linearen Funktion

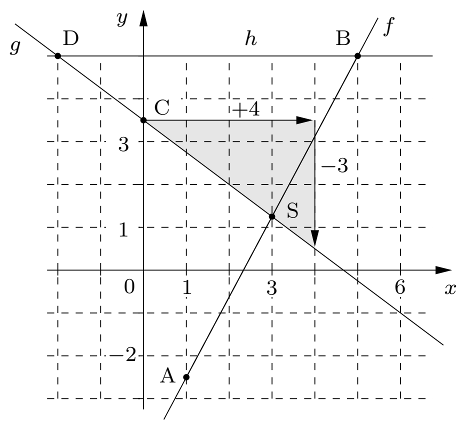
1. (a) $f(x) = \dfrac{5}{3}x - 2, \quad g(x) = -\dfrac{2}{5}x + 7$

   $x_{0f} = \dfrac{6}{5} = 1{,}2, \quad x_{0g} = 17{,}5$

   (b) $x_{0h} = -\dfrac{14}{3} = -4{,}\overline{6}, \quad h(14) = 8$



2.



(a) $g: \Delta x = 4 \Longrightarrow \Delta y = a_g \Delta x = -3$

(b) Steigung von f:

$$a_f = \frac{5-(-2{,}5)}{5-1} = \frac{15}{8} = 1{,}875$$

$$f(x) = -2{,}5 + \frac{15}{8}(x-1) =$$
$$= -\frac{35}{8} + \frac{15}{8}\,x = -4{,}375 + 1{,}875\,x$$

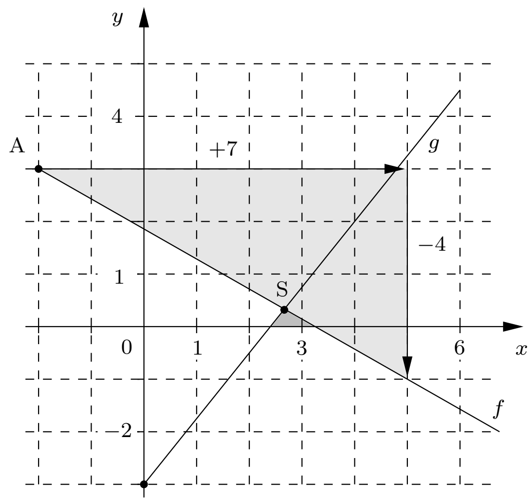
$$g(x) = 3{,}5 - 0{,}75\,x, \quad h(x) = 5$$

(c) $g(-2) = 3{,}5 - \frac{3}{4}\cdot(-2) = 3{,}5 + 1{,}5 = 5, \qquad \text{S}: \quad -\frac{35}{8} + \frac{15}{8}\,x = \frac{7}{2} - \frac{3}{4}\,x$

$$\frac{21}{8}\,x = \frac{63}{8} \quad \Longrightarrow \quad x = 3 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{7}{2} - \frac{3}{4}\cdot 3 = \frac{5}{4} = 1{,}25 \quad \Longrightarrow \quad \text{S}(3|1{,}25)$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot\overline{\text{DB}}\cdot(5-1{,}25) = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 3{,}75 = 13{,}125\,[\text{FE}]$$

3.



(a) $f: \Delta x = 7 \Longrightarrow \Delta y = a\Delta x = -4$

(b) $f(x) = -\frac{4}{7}\,x + b$

$$(-2|3) \in f \quad \Longrightarrow \quad -\frac{4}{7}(-2) + b = 3$$

$$b = 3 - \frac{8}{7} = \frac{13}{7}$$

$$f(x) = -\frac{4}{7}\,x + \frac{13}{7}$$

$$f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{13}{4} = 3{,}25$$

$$g(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

(c) $\text{S}: \quad -\frac{4}{7}\,x + \frac{13}{7}\,x = \frac{5}{4}\,x - 3$

$$\frac{51}{28}\,x = \frac{34}{7} \quad \Longrightarrow \quad x_{\text{S}} = \frac{8}{3} \quad \Longrightarrow \quad y_{\text{S}} = g\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{5\cdot 8}{4\cdot 3} - 3 = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \text{S}\left(\frac{8}{3}\middle|\frac{1}{3}\right)$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot(x_1 - x_2)\cdot y_{\text{S}} = \frac{1}{2}\cdot 0{,}85\cdot\frac{1}{3} = \frac{17}{120} = 0{,}141\overline{6}\,[\text{FE}]$$

4. (a) 2 (b) $\Delta = 24$ (c) $45°$

(d) $30°$ (e) 21

5. (a)6 (b) 15 (c) 0 (d) 520 (e) $45°$

6. (a) 24 (b) $(7+11)\cdot(13+21)=612$ (c) 20 (d) $\frac{1}{2}(6+8)\cdot 18=126$

7. (a) $f(-93)=-(-93)-1=92$

   (b) 1. Möglichkeit: beliebigen Punkt Q wählen und Geradengleichung durch P und Q aufstellen.

   2. Möglichkeit: Beliebigen Steigung $m \neq -1$ wählen und Geradengleichung durch P mit Steigung m aufstellen.

   (c) $f(x)=g_m(x) \Rightarrow$ Schnittpunkt $S(\frac{-3}{m+1}|\frac{2-m}{m+1})$ für $m\neq -1$.
   II. Quadrant für $\frac{-3}{m+1}<0$ und $\frac{2-m}{m+1}>0 \Rightarrow -1<m<2$.

8. Die Steigungen der beiden Geraden AB und AC stimmen überein ($m=-0{,}75$).

9. Die Steigungen der Geraden AB und AC stimmen nicht überein $\Rightarrow$ die Punkte A, B und C liegen nicht auf einer Geraden $\Rightarrow$ die Punkte A, B und C bilden ein Dreieck

10. c) $A \approx 38,8\,\mathrm{cm}^2$

11. (b): $C(0|3)$, $D(-4|0)$; $(c):\ y=-2x+14$; $(d):\ A_{ABCD}=27,5\,cm^2$

12. (a) $-2\cdot 1+5=3 \Rightarrow P$ liegt auf der Gerade

    (b) Z. B. $y=-3x+6$

13. Die Gerade AB hat die Gleichung $y=-\frac{7}{12}x+\frac{7}{4}$. Einsetzen von $x=0,5$ ergibt $y=\frac{35}{24}\neq 1,5$. C liegt also nicht auf AB.

14. $C \notin AB$

15. $g(x)=\frac{4}{5}x+\frac{7}{5}$, $f(x)=\frac{4}{5}x-2$

16. $y=\frac{7}{3}x-65$

17. $y=\frac{4}{3}x+\frac{10}{3}$

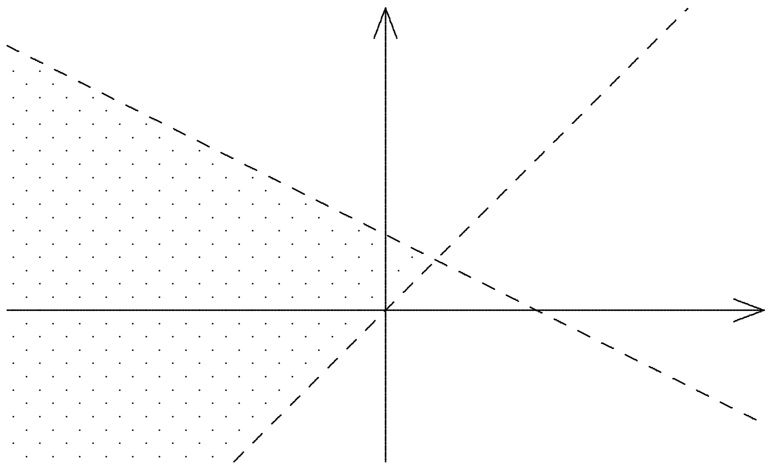
18. Die Steigungen der beiden Geraden AB und AC stimmen überein ($m = -0{,}8$).

19. $? = -5$

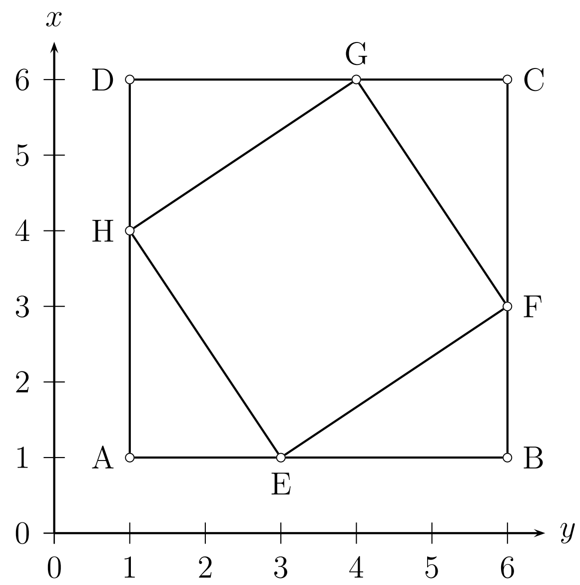
20. (b) $x = -1{,}5;\ y = -3$ (d) $y = \frac{4}{15}x - 9{,}8$

21.

22.



23. In der nebenstehend abgebildeten Grafik ist das Viereck ABCD ein Quadrat der Seitenlänge 5 und es ist $\overline{\text{EB}} = 3$, $\overline{\text{BF}} = 2$ und $\overline{\text{DG}} = 3$



(a) Ermittle die Funktionen f und g deren Grafen die Geraden EF und EH sind.

(b) Formuliere einen algebraischen Zusammenhang zwischen den Zahlen in den Funktionstermen $f(x)$ und $g(x)$, die die Steigung der Grafen wiedergeben.

(c) Begründe, dass die vier Dreiecke ΔEBF, ΔFCG, ΔGDH und ΔHAE kongruent sind.

(d) Begründe, dass das Viereck EFGH ein Quadrat ist. Welche Aussage kann man daraus für die Lage der Gerade EF bezüglich der Geraden EH ableiten?

(e) Formuliere aus den Erkenntnissen der vor stehenden Aufgaben einen mathematischen Satz, der einen Zusammenhang zwischen den Parametern in den Funktionstermen, die die Steigung wiedergeben und der Lagebeziehung der Grafen der zugehörigen Funktionen herstellt.

(a) $f : x \mapsto y = f(x) = \frac{2}{3}\,x - 1, g : x \mapsto y = g(x) = -\frac{3}{2}\,x + \frac{11}{2}$

(b) $\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$

(c) Begründung mit dem SWS–Satz (alle vier Dreiecke stimmen in den Längen zwei entsprechender Seiten und dem 90°–Winkel, den die zugehörigen Seiten einschließen, überein).

(d) Wegen der vorigen Teilaufgabe haben sind die vier Seiten des Vierecks EFGH gleich lang. Jeder der vier Innenwinkel bildet zusammen mit je zwei (unterschiedlichen) Innenwinkel der benachbarten Dreiecke einen gestreckten Winkel. Da die beiden (verschiedenen) Innenwinkel der benachbarten Dreiecke ein Winkelsumme von 90° haben, ist jeder Innenwinkel von EFGH ein 90°–Winkel.

(e) Das Produkt der Steigungen zweier affinder Funktionen, deren Graphen senkrecht zueinander sind, ist -1.

1.3.3 lineare Gleichungen

1. Schnittpunkt $(\frac{15}{8}|\frac{7}{8})$

2. $g:\ x = 1,5;\ h:\ y = -3,5;\ n:\ y = -\frac{1}{3}x + 1,5;\ m:\ y = \frac{2}{3}x - 2$

3. $g:\ x = -3,5;\ h:\ y = 1,5;\ n:\ y = -\frac{2}{3}x + 2;\ m:\ y = \frac{1}{3}x - 1,5$

4. a) keine Lösung; b) z.B. $(4|2)$, $(11|7)$, $(-3|-3)$

5. a) keine Lösung; b) z.B. $(2|1)$, $(5,5|4)$, $(1|\frac{1}{7})$

6. $a = \frac{nRTV^2}{V-b} - pV^2;\ \ V \neq 0;\ V \neq b$

7. $z = \frac{xy}{2x+y};\quad x = \frac{yz}{2(y-z}$

8. $L_{p=-q} = \mathbb{Q};\ L_{p\neq -q} = \{5(p-q)\}$

9. $L_{a=-b} = \mathbb{Q};\ L_{a\neq -b} = \{3(a-b)\}$

1.3.4 Anwendungsaufgaben

1. (a) Z. B.:
   Fass I: $2x = 100 \Rightarrow$ Fass I läuft nach 50 min über
   Fass II: $0,5x + 60 = 100 \Rightarrow$ Fass II läuft nach 80 min über

   (b) Z. B.: $2x = 0,5x + 60 \Rightarrow$ Gleichstand nach 40 min

2. (a)
   (b) Anzahl der vertelefonierten Minuten, bei denen für verschiedene Anbieter bzw. Tarife gleiche Gesamtkosten entstehen.
   (c)

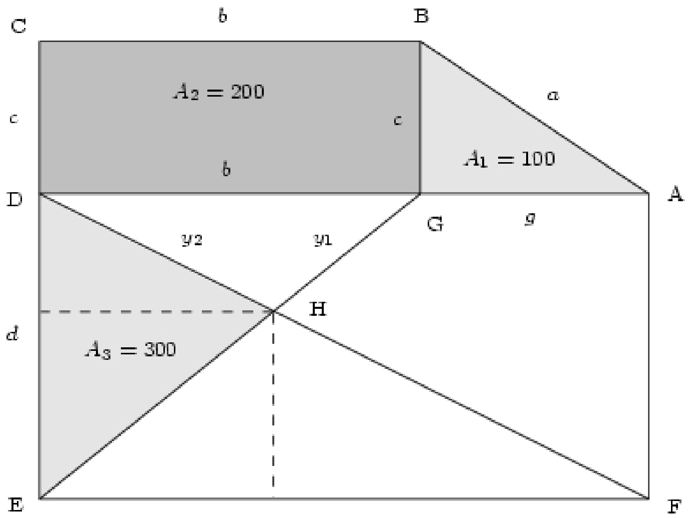
3. (a) $v = 2,5\,\frac{\text{km}}{\text{min}} = 150\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$
   (b) $x(t) = 150\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t - 100\,\text{km}$; $x(1.15\,\text{Uhr}) = x(1,25\,\text{h}) = 87,5\,\text{km}$
   (c) $t(0) = \frac{2}{3}\,\text{h}$, d.h. um 0.40 Uhr ; $t(210\,\text{km}) = \frac{31}{15}\,\text{h}$, d.h. um 2.04 Uhr.
4. (a) $x_1(t) = -800\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t + 6400\,\text{km}$; $x_2(t) = 2560\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t - 5120\,\text{km}$
   (b) $t = 3\,\frac{3}{7}\,\text{h}$, d.h. um 3.25.43 Uhr ; $x = 3657\,\frac{1}{7}\text{km}$.
5. (a) $x_1(t) = 120\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$; $x_2(t) = 160\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t - 60\,\text{km}$
   (b) $t = \frac{3}{2}\,\text{h}$, d.h. um 15.45 Uhr ; $x = 180\text{km}$.
6. $h_1(x) = 0,09x + 60$, $h_2(x) = 0,06x + 120$, ab 2000 Kilowattstunden ist H2 günstiger. (PS: Auch Gastarife werden nach Kilowattstunden abgerechnet.)

7. b) $16\frac{2}{3}\,l$; c) $y = \frac{1}{3}x + 16\frac{2}{3}$; d) 100 Minuten

8. b) x: Zeit in Minuten; y:Wassermenge in Litern; $y = 105 - 18x$
   c) 5 min 50 s
9. (a) Um 9.42 Uhr, 61 km von A entfernt
   (b) Eilzug: $x \longmapsto 85x$; D-Zug: $x \longmapsto -113x + 140\frac{2}{3}$
10. Fluß: $0,25\frac{\text{m}}{\text{s}}$, Schwimmer: $1,25\frac{\text{m}}{\text{s}}$

11. Hänsel: 36 h, Gretel: 24 h, Dame: 72 h

12.



Der Flächeninhalt für A_1 und A_2 berechnet sich nach:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot c \cdot g; \qquad A_2 = c \cdot b$$

Mit $A_2 = 2 \cdot A_1$ folgt:

$$c \cdot b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot c \cdot g \quad \Longrightarrow \quad b = g$$

Geradengleichung für y_1 und y_2

$$y_1 = \frac{d}{b} \cdot x \qquad y_2 = -\frac{d}{2b} \cdot x + d$$

Die Schnittpunktkoordinaten für den Punkt H ergeben sich aus:

$$y_1 = y_2, \qquad \frac{d}{b} \cdot x = -\frac{d}{2b} \cdot x + d \quad \Longrightarrow \quad x = h = \frac{2}{3} \cdot b, \quad y = \frac{2}{3} \cdot d$$

Die Fläche A_3 berechnet sich aus:

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot b \cdot d = 3A_1 = \frac{3}{2}bc \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{9}{2} \cdot c$$

Nachdem das Verhältniss zwischen den Seitenlängen c und d bekannt ist, kann der gesamte Flächeninhalt berechnet werden. Um ein Flächenmaß zu erhalten wird $c = 10\,\text{cm}$ definiert.

$$A_2 = 200\,\text{cm}^2 = b \cdot c \quad \Longrightarrow \quad b = 20\,\text{cm}, \qquad d = \frac{9}{2} \cdot c = 45\,\text{cm}$$

$$A_{\text{ges}} = (c+d) \cdot (b+b) - A_1 = (10+45)\,\text{cm} \cdot (20+20)\,\text{cm} - 100\,\text{cm}^2 = 2100\,\text{cm}^2$$

Bauer Hein muss demnach 2100,- € für seinen fünfeckigen Acker bezahlen.

1.3.5 lineare Ungleichungen

1.

2.

3. $L =]-2; \infty[$

1.4 lineare Gleichungssysteme

1.4.1 Lösungsverfahren (graphisch und rechnerisch)

1.

$$\begin{aligned}
\frac{x}{3} - \frac{y}{4} &= \frac{1}{12} && (1) \mid \cdot 12 \\
3x - 4y &= \frac{1}{6} && (2) \mid \cdot 6 \\
\hline
4x - 3y &= 1 && (3) \mid \cdot 8 \\
18x - 24y &= 1 && (4) \mid \cdot (-1) \\
\hline
32x - 24y &= 8 && (5) \\
-18x + 24y &= -1 && (6) \\
\hline
(5) + (6): \quad 14x &= 7 && (7) \\
x &= \frac{1}{2} && (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(8) \text{ in } (3): \quad 4 \cdot \frac{1}{2} - 3y &= 1 && (9) \\
-3y &= 1 - 2 && (10) \\
y &= \frac{1}{3} && (11)
\end{aligned}$$

$$L = \left\{ \left(\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{3} \right) \right\}$$

2. (a) $x = 1$ und $y = 0,5$

   (b) $x = -4$ und $y = -4,46$

   Die Ursache dafür liegt darin, dass die beiden Geraden fast die gleiche Steigung haben und folglich eine geringfügige Änderung der Steigung einer Geraden den Schnittpunkt beider Geraden erheblich verschiebt.

3. (a)
$$\left| \begin{array}{l} y = 0,5x + 0,5 \\ y = -x + 2 \end{array} \right|$$

   (b)
$$\left| \begin{array}{l} y = 0,25x + 0,25 \\ y = -0,5x + 1 \end{array} \right|$$

   (c)
$$\left| \begin{array}{l} y = 2x + 4 \\ y = -0,5x \end{array} \right|$$

   (d)
$$\left| \begin{array}{l} y = -3x + 4 \\ y = x \end{array} \right|$$

4.

5. (b) Zu (1) und (2): $(0,9|4,5)$
6. $L = \{(2|3,5)\}$
7. $L = \{(2|-3,5)\}$
8. $(4,5|4,5)$
9. $g(x) = -\frac{3}{7}\,x + \frac{39}{7}$; $h(x) = \frac{3}{4}\,x + \frac{5}{4}$; $S(\frac{11}{3}|4)$
10. $g:\ y = \frac{2}{3}x - 2$;
    $h:\ y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$;
    $S(4\frac{1}{3}|\frac{8}{9})$
11. $g:\ y = -\frac{2}{3}x + 2$;
    $h:\ y = \frac{1}{3}x - 2\frac{1}{3}$;
    $S(4\frac{1}{3}|-\frac{8}{9})$
12. (a) Nullstelle $x = \frac{10}{3}$, (b) Funktionsterm $g(x) = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.
13. $L = \{(7|-5)\}$
14. $L = \{(-7|5)\}$
15. $L = \{(11|-5)\}$
16. $(\frac{1}{3}|\frac{4}{3})$
17. $L = \{(2\,|\,-\frac{1}{2})\}$
18. $L = \{(x|y)\,|\,3\,x - 8\,y = 2\}$
19. $L = \{\}$
20. $x = 1$, $y = 0,5$.
21. $x = -1$, $y = 0,5$.

22. $x = 3$, $y = 1$

23. $(-5|-4,5)$

24. $x = \frac{2}{7}$, $y = 1$

25. $x = -\frac{2}{7}$, $y = 1$

26. $x = 4$, $y = 1$

27. $x = 1{,}5$ und $y = -0{,}8$

28. keine Lösung

1.4.2 Anwendungen in Sachzusammenhängen

1. Variablenwahl: h: Alter von Hans heute, e: Alter von Eva heute

$$\begin{array}{rr} h-3=4(e-3) & (1) \\ h+5=2(e+5) & (2) \\ \hline h-3=4e-12 & (3) \\ h+5=2e+10 & (4) \\ \hline h-4e=-9 & (5) \\ h-2e=5 & (6) \\ \hline -h+4e=9 & (7) \\ 2h-4e=10 & (8) \\ \hline (7)+(8):\quad h=19 & (9) \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} (9) \text{ in } (7):\quad -19+4e=9 & (10) \\ 4e=28 & (11) \\ e=7 & (12) \end{array}$$

Hans ist 19 Jahre und Eva 7 Jahre alt.

Probe:

vor 3 Jahren:	Hans 16 und Eva 4
in 5 Jahren:	Hans 24 und Eva 12

2. Variationen:
   (a) Schüler sollen die Fragestellung selbst entwickeln

(b) Ändert den Comic so ab, dass die Informationen nicht ausreichen für eine eindeutige Bestimmung der Preise.

Erwachsene: $ 5,25
Kinder: $ 3,75

3. Variationen:
   (a) nur erste Situation vorgeben
   (b) unmögliche Zahlen vorgeben
   (c) eine Sprechblase leer lassen

   Erdnüsse: 3,90 €
   Bier: 4,20 €

4. Variationen der Aufgabe:

   Verwenden der Original-Fragestellungen:
   (a) 34 wird als Rechenergebnis genannt. Welche Gleichung gilt für $x =$ Anzahl der Münzen links und $y =$ Anzahl der Münzen rechts?
   (b) Es gibt noch eine zweite Gleichung für x und y. An sie denkt der Zauberer im zweiten Bild bei einem schnellen Blick auf die Münzen. Welche ist es?
   (c) Könnte der Zauberer auch mit anderen Zahlen als 3 und 4 multiplizieren lassen?

   Das Ergebnis liegt zwischen 27, falls alle Münzen in der linken Hand sind und 36, falls alle Münzen in der rechten Hand sind. Zieht man als Zauberer das genannte Ergebnis von 36 ab, so erhält man die Anzahl der Münzen in der rechten Hand.
   Dahinter steckt, dass sich der Zauberer irgendwann einmal die beiden linearen Gleichungen $3x + 4y = 34$ und $x + y = 9$ gedacht, für $y = 9 - x$ eingesetzt und so die Gesetzmäßigkeit erkannt hat.

5. Quelle: Schröder/Wurf: Mat(h)erialien 7-10, Schroedel 1996, S. 152
   1. M - U - R - C - I - A (Stadt im Südosten Spaniens, Hauptstadt der Provinz und der autonomen Region Murcia (11.317 Quadratkilometer, 1,1 Millionen Einwohner) am Ufer des Segura.
   2. $x = 17 \quad y = 32$
   3. $x = 21 \quad y = 30$
   4. $\alpha = 66 \quad \gamma = 48$
   5. $x = 120 \quad y = 240$
   6. $x = 50 \quad y = 120$
   7. $x = 7 \quad y = 21$

6. Es sind 6 Hennen und 3 Hasen.
7. Es kann entweder die Zahl 69 oder die Zahl 96 sein.
8. Laut Rechnung bei > 31 Fahrenheit.
9. Frau Noether: 36
   Emmy: 12
10. Rechtecksseitenlängen: 15 cm und 25 cm
11. Rechtecksseitenlängen: 9 cm und 16 cm
12. 7 Zwerge und 40 Räuber
13. 920 Stehplätze, 536 Sitzplätze
14. Länge 6 cm, Breite 4 cm
15. Länge 10 cm, Breite 6 cm
16. Tante 50 Jahre, Sandra 15 Jahre
17. Vater: 99 Jahre; Sohn: 66 Jahre
18. Äpfel: 3,20 € Birnen: 4,10 €
19. Oma: 75 Jahre Enkel: 10 Jahre
20. Peter: 45 € Seppi: 40 €
21. Hemd: 60 €, Pullover: 50 €
22. 34 Schweine und 66 Hühner.
23. Silber: 275 g; Kupfer: 475 g

2 Stochastik

2.1 Ergebnis, Ergebnisraum, Ereignis

1. Es wird jeweils der feinste Ergebnisraum (n möglichst groß) angegeben:
   (a) $\Omega = \{\text{W1,W2,W3,W4,W5,W6,Z1,Z2,Z3,Z4,Z5,Z6}\}$, $n = |\Omega| = 2 \cdot 6 = 12$
   (b) $\Omega = \{111, 112, 113, 114, 115, 116, 121, \ldots, 666\}$
   $n = |\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$
   (c) $\Omega = \{\text{WWW11,WWW12,WWW13,} \ldots \text{,ZZZ66}\}$
   $n = |\Omega| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 = 2^3 \cdot 6^2 = 288$
   (d) $\Omega = \{\text{rrr,rrb,rrg,rbr,rbb,rbg,} \ldots \text{,ggg}\}$
   $n = |\Omega| = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$

2. (a) Ω_0 hat nur ein Ereignis, nämlich $\emptyset$.
   Ω_1: $\emptyset$, $\{1\} = \Omega_1$
   Ω_2: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\} = \Omega_2$
   Ω_3: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\} = \Omega_3$
   Ω_4: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,2,3,4\} = \Omega_4$

Ergebnisraum	Ω_0	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4
Zahl der Ereignisse	$1 = 2^0$	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$	$16 = 2^4$

   Der vermutete Zusammenhang gilt allgemein:

   $$\boxed{\text{Zu jedem } \Omega \text{ gibt es } 2^{|\Omega|} \text{ verschiedene Ereignisse.}}$$

   (b) $\Omega = \{\text{WWW,WWZ,WZW,WZZ,ZWW,ZWZ,ZZW,ZZZ}\}$ mit $|\Omega| = 8$.
   $\Longrightarrow$ Es gibt $2^8 = 256$ verschiedene Ereignisse.

3. (a) E={110, 101, 011}; 1: „Prüfling besteht“, 0: „Prüfling besteht nicht“
   (b) E={111, 110, 101, 011}; 1: „Prüfling besteht“, 0: „Prüfling besteht nicht“

(c) E={110, 101, 011}; 1: „Prüfling besteht“, 0: „Prüfling besteht nicht“

4. (a) drei schwarze und sieben weiße Kugeln; Treffer, wenn scharze Kugel gezogen wird; es wird „mit Zurücklegen“ gezogen
   (b) Urne mit 49 roten (Mädchen) und 51 blauen Kugeln (Jungen). Man zieht „mit Zurücklegen“ und erhält drei rote Kugeln.

5. (a) Laplace-Experiment (wobei in der Natur kein wirkliches Laplace-Experiment existiert)
   (b) kein Laplace-Experiment
   (c) Laplace-Experiment
   (d) kein Laplace-Experiment

6. (a) naja
   (b) ja
   (c) nein
   (d) nein

2.2 Laplacewahrscheinlichkeiten

1. (a) $\Omega = \{0000000, 0000001, 0000010, 0000011, 0000012, \ldots 9999998, 9999999\}$, $|\Omega| = 10^7$
   (b) Wenn eine Zahl bereits gezogen ist, nimmt für diese Zahl die Wahrscheinlichkeit bei den folgenden Ziehungen ab, d. h. die Kritik ist berechtigt. Gleichwahrscheinlich wären die 7-ziffrigen Glückszahlen, wenn man mit Zurücklegen ziehen würde.

2. Für jede der angekreuzten Zahlen ist die Wahrscheinligkeit gezogen zu werden gleich hoch. Da die Zahlen unter 32 zu kleineren Gewinnsummen führen (diese werden häufiger angekreuzt), ist es günstiger diese nicht anzukreuzen.

3. (a) $4! \cdot 2^4 = 384$
   Begründung: Angenommen die Paare bestehen jewils aus Mann und Frau. Dann platziere alle Frauen auf der einen Tischseite. Dazu hat man 4! Möglichkeiten. Nun hat man für jedes Paar zu entscheiden, wie die Tischseiten-Verteilung sein soll. Für jedes Paar gibt es 2 Möglichkeiten, insgesamt also $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$.
   (b) $4! \cdot 2^4 = 384$

(c) $8! = 40320$

4. 6.227.020.800

5.
   - Wir interessieren uns für den Einkauf als Handlung. Dazu gehört sein zeitlicher Ablauf. Dieser kann hervorragend in einem Baumdiagramm dargestellt werden.
     Hans kauft ein erstes Stück Wurst. Dabei hat er 10 Möglichkeiten. Danach kauft er ein zweites Stück Wurst. Gleichgültig, welche Wurst er als erste gekauft hat, gibt es für ihn nun jeweils 9 Möglichkeiten, das zweite Stück Wurst zu kaufen. Insgesamt hat Hans $10 \cdot 9$ Möglichkeiten, zwei Stücke unterschiedlicher Wurst zu kaufen. Schließlich kauft er ein drittes Stück Wurst. Bei jedem der 90 möglichen Einkäufe kann er dazu eine aus 8 Sorten auswählen. Insgesamt hat er $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ Möglichkeiten. Hans kann also 720 verschiedene Einkäufe realisieren.
   - Es interessiert nicht der Einkauf als Vorgang, uns interessiert nun nur das Resultat des Einkaufs. Wir fragen: „Wie viele Warenkörbe kann Hans zusammenstellen?“
     Hans kauft drei verschiedene Wurstsorten. Betrachten wir einen Warenkorb. Er enthält drei Wurstsorten. Diese können auf $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Arten angeordnet werden. Der gleiche Warenkorb kann daher durch 6 verschiedene Einkäufe realisiert werden. Die Menge der möglichen Einkäufe zerfällt in elementfremde Teilmengen mit jeweils gleichwertigen Einkaufsergebnissen. Jede dieser Teilmengen heißt „ein Warenkorb“. Keine der Einkaufshandlungen führt zu zwei verschiedenen Warenkörben, und jeweils 6 Einkaufshandlungen liefern den gleichen Warenkorb. Daher gibt es $720 : 6 = 120$ mögliche Warenkörbe.

6. *1. Fall:* Hans kauft Leberwurst. Dann kauft er auch Griebenwurst. Danach kann er noch unter 8 Wurstsorten frei wählen. Insgesamt hat er in dieser Situation 8 Möglichkeiten.
   2.Fall: Hans kauft keine Leberwurst. Dann wird über den Einkauf von Griebenwurst keine Aussage gemacht. Hans kann nun aus 9 Wurstsorten drei Sorten frei auswählen. Dabei hat er $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$ Möglichkeiten. Insgesamt erfüllen $(8 + 84)$ Warenkörbe, also 92.

7. (a) *1. Möglichkeit:* Hans kauft gekochten, aber keinen gebackenen Bierschinken. Dann steht es ihm frei, aus 55 Sorten zwei beliebige auszuwählen. Hier sind $\frac{55 \cdot 54}{1 \cdot 2} = 1485$ Warenkörbe möglich.
   2. Möglichkeit: Hans kauft keinen gekochten, aber gebackenen Bierschinken. Hier sind ebenfalls 1485 Warenkörbe möglich.
   Insgesamt gibt es 2970 Warenkörbe, welche die Forderung erfüllen.

   (b) Weder gekochter noch gebackener Bierschinken sind in $\frac{55 \cdot 54 \cdot 53}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 26235$ Warenkörben. Heute gibt es 57 Sorten Wurst. Dann können $\frac{57 \cdot 56 \cdot 55}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 29260$ verschieden Warenkörbe gebildet werden. Dann gibt es aber $(29260 - 26235)$ Warenkörbe, also 3025 Warenkörbe, die gekochten oder gebackenen Bierschinken enthalten.

8. (a) $\frac{38 \cdot 37 \cdot 36}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 8436 \cdot 28 = 236208$ Warenkörbe

(b) $\frac{38 \cdot 37}{1 \cdot 2} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 703 \cdot 56 = 39368$ Warenkörbe

(c) $\frac{46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1370754$ Warenkörbe

(d) Es kommt auf die Reihenfolge nicht an, in welcher die Lebensmittel erworben werden. Wir wissen aus der Teillösung (b), dass es 39368 Warenkörbe sind. Um Zweifel zu beseitigen, berechnen wir das Ergebnis noch anders - und zwar auf dem Wege, welcher dem realen Handlungsablauf entspricht.
Das Quintupel (w,w,k,k,k) beschreibt $38 \cdot 37 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 472416$ mögliche Einkäufe; (w,k,k,w,k) beschreibt $38 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 37 \cdot 6 = 472416$ mögliche Einkäufe.
Insgesamt gibt es $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ solcher Quintupel mit zwei „w" und drei „k", welche für jeweils 472416 mögliche Einkäufe stehen. Insgesamt sind nun $472416 \cdot 10 = 4724160$ Einkäufe möglich, wobei uns die Reihenfolge interessiert.
Zu beachten ist, dass in der Einkaufstasche 5 verschiedene Lebensmittel liegen. Diese können auf $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ verschiedene Reihenfolgen erworben worden sein. Daher gibt es hier $4724160 : 120 = 39368$ Warenkörbe.

9. Frau Seidel kauft niemals Mettwurst. Abgesehen davon kauft sie entweder zwei Sorten Wurst und eine Sorte Käse oder aber keine Wurst und dafür drei Sorten Käse.

10.

11. Lösungen zur Geheimbotschaften-Aufgabe

a) SCHLÜSSEL

Original	A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
Geheim	G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F

b)

JKX SGZNKSGZOQATZKXXOINZ HXOTMZ YVGYY
DER MATHEMATIKUNTERRICHT BRINGT SPASS

c)

WAS HAST DU AM WOCHENENDE GEMACHT?
CGY NGYZ JA GS CUINKTKTJK MKSGINZ?

d) OIN NGHK MKRKYKT. (Vorschlag)

e) Entwickle eine eigene Geheimschrift und schreibe eine Botschaft.

f) SCHLÜSSEL

Original	A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
Geheim	Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X

12. (a) Die meisten Schätzungen liegen bei $p > 90\,\%$.

(b) Zahl der Erkrankten:

$$a \cdot n = 800$$

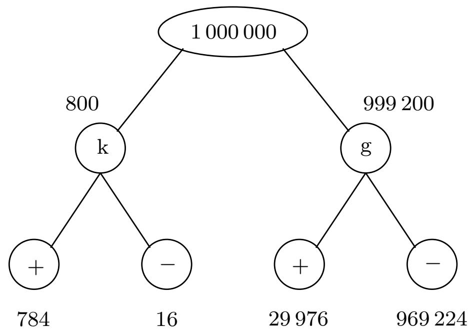
$$2\% \cdot 800 = 16$$

$$3\% \cdot 999\,200 = 29\,976$$

absol. Häuf.	Gesunde	Kranke	
positiv	29 976	784	30 760
negativ	969 224	16	969 240
	999 200	800	1 000 000

Von den insgesamt 30 760 positiv Getesteten sind nur 784 tatsächlich krank $\Longrightarrow$

$$p = \frac{784}{30\,760} = 2{,}55\,\%$$



(c) Mit $a = 0{,}0008$, $f_1 = 2\,\%$ und $f_2 = 3\,\%$ gilt

absol. Häuf.	Gesunde	Kranke	
positiv	$0{,}03\,(1-a)n$	$0{,}98\,an$	$(0{,}03+0{,}95a)n$
negativ	$0{,}97\,(1-a)n$	$0{,}02\,an$	$(0{,}97-0{,}95a)n$
	$(1-a)n$	an	n

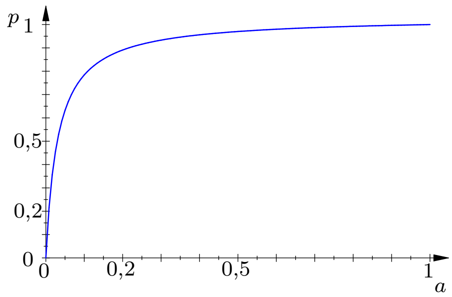
$$z = (0{,}03 + 0{,}95a)n$$

$$a = \frac{\frac{z}{n} - 0{,}03}{0{,}95} = \frac{0{,}0475}{0{,}95} = 0{,}05 = 5\,\%$$

Von den insgesamt $(0{,}03 + 0{,}95a)n$ positiv Getesteten sind nur $0{,}98\,an$ tatsächlich krank $\Longrightarrow$

$$p(a) = \frac{0{,}98\,an}{(0{,}03+0{,}95a)n} = \frac{98a}{3+95a}$$

$$p(0{,}05) = 63{,}2\,\%$$



13. (a) $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),\ \dots,(6,6)\}$ mit $|\Omega| = 36$.

$$\begin{array}{rcll}
E_2 & = & \{(1,1)\} & , \quad P(E_2) = \frac{1}{36} \\
E_3 & = & \{(1,2),(2,1)\} & , \quad P(E_2) = \frac{2}{36} \\
E_4 & = & \{(1,3),(2,2),(3,1)\} & , \quad P(E_2) = \frac{3}{36} \\
\hline
E_5 & = & \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} & , \quad P(E_2) = \frac{4}{36} \\
E_6 & = & \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} & , \quad P(E_2) = \frac{5}{36} \\
E_7 & = & \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} & , \quad P(E_2) = \frac{6}{36} \\
E_8 & = & \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\} & , \quad P(E_2) = \frac{5}{36} \\
\hline
E_9 & = & \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\} & , \quad P(E_2) = \frac{4}{36} \\
E_{10} & = & \{(4,6),(5,5),(6,4)\} & , \quad P(E_2) = \frac{3}{36} \\
E_{11} & = & \{(5,6),(6,5)\} & , \quad P(E_2) = \frac{2}{36} \\
E_{12} & = & \{(6,6)\} & , \quad P(E_2) = \frac{1}{36}
\end{array}$$

(b) Das Ereignis $\overline{G}$: „Spieler verliert“ tritt ein, wenn eines der Ereignisse E_5, E_6, E_7 oder E_8 eintritt:

$$P(\overline{G}) = \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} = 55{,}\overline{5}\,\%$$

$$P(G) = 1 - P(\overline{G}) = \frac{4}{9} = 44{,}\overline{4}\,\%$$

Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt also nur $44{,}\overline{4}\,\%$ und nicht wie auf dem Plakat angekündigt $64\,\%$.

(c) Bei einer sehr großen Zahl n von Spielen wird der Spieler im Mittel $\frac{4}{9} \cdot n$ Spiele gewinnen und $\frac{5}{9} \cdot n$ Spiele verlieren. Da er bei einem gewonnenen Spiel den Einsatz E gewinnt und bei einem verlorenen Spiel den Einsatz E verliert, hat er nach n Spielen im Mittel

$$\frac{4}{9}nE - \frac{5}{9}nE = -\frac{1}{9}nE$$

gewonnen bzw. $\frac{1}{9}nE$ verloren. Der mittlere Gewinn pro Spiel ist also

$$-\frac{1}{9}E = -11{,}\overline{1}\% \cdot E$$

die Rendite also $R = -11{,}\overline{1}\%$.

(d) Bei einer sehr großen Zahl n von Spielen wird der Spieler im Mittel $P(G) \cdot n$ Spiele gewinnen und $P(\overline{G}) \cdot n$ Spiele verlieren. Da er bei einem gewonnenen Spiel den Einsatz gE gewinnt und bei einem verlorenen Spiel den Einsatz E verliert, hat er nach n Spielen im Mittel

$$P(G)ngE - P(\overline{G})nE = P(G)ngE - (1 - P(G))nE$$

gewonnen. Der mittlere Gewinn pro Spiel ist also

$$P(G)gE - (1 - P(G))E = P(G)(g+1)E - E$$

die Rendite also $R = P(G)(g+1) - 1$.

(e) i. $P(G) = \frac{18}{37},\ g = 1 \quad\Longrightarrow\quad R = \frac{18}{37} \cdot (1+1) - 1 = -\frac{1}{37} = -2\frac{26}{37}\,\% \approx -2{,}7\,\%$

ii. $P(G) = \frac{12}{37},\ g = 2 \quad\Longrightarrow\quad R = \frac{12}{37} \cdot (2+1) - 1 = -\frac{1}{37} = -2\frac{26}{37}\,\%$

iii. $P(G) = \frac{1}{37},\ g = 35 \quad\Longrightarrow\quad R = \frac{1}{37} \cdot (35+1) - 1 = -\frac{1}{37} = -2\frac{26}{37}\,\%$

(f) Für ein faires Spiel gilt $R = P(G)(g+1) - 1 = 0$, d.h.

$$g = \frac{1}{P(G)} - 1$$

Würfelspiel: $P(G) = \frac{4}{9} \quad\Longrightarrow\quad g = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} = 1{,}25$

Roulette:

i. Setzen auf rot: $P(G) = \frac{18}{37} \quad\Longrightarrow\quad g = \frac{37}{18} - 1 = \frac{19}{18} = 1{,}0\overline{5}$

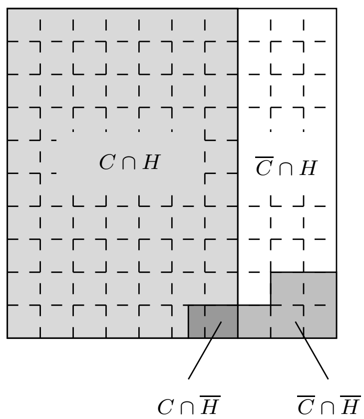
ii. Setzen auf ein Dutzend: $P(G) = \frac{12}{37} \quad\Longrightarrow\quad g = \frac{37}{12} - 1 = \frac{25}{12} = 2{,}08\overline{3}$

iii. Setzen auf eine Zahl: $P(G) = \frac{1}{37} \quad\Longrightarrow\quad g = 37 - 1 = 36$

14. (a)

rel. Häuf.	C	$\overline{C}$	
H	68,6%	25,15%	93,75%
$\overline{H}$	1,4%	4,85%	6,25%
	70%	30%	100%

absol. Häuf.	C	$\overline{C}$	
H	54 880 000	20 120 000	75 000 000
$\overline{H}$	1 120 000	3 880 000	5 000 000
	56 000 000	24 000 000	80 000 000



(b) Von den 24 000 000 Nichtcomputerbesitzern haben 3 880 000 kein Handy. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also

$$p = \frac{3\,880\,000}{24\,000\,000} = 0{,}161\overline{6}\,\% = 16\frac{1}{6}\,\%$$

15. Gesamtzahl der Kleidungsmöglichkeiten bei 9 Hosen und 7 Joppen: $|\Omega| = 9 \cdot 7 = 63$

(a) $|E_1| = 3 \cdot 5 = 15 \quad \Longrightarrow \quad P(E_1) = \frac{15}{63} = \frac{5}{21} = 23{,}8\%$

(b) Er kann die 2 Lederhosen und 4 braunen Hosen mit den 2 braunen Joppen kombinieren:
$$|E_2| = (2+4) \cdot 2 = 12 \quad \Longrightarrow \quad P(E_2) = \frac{12}{63} = \frac{4}{21} = 19{,}0\%$$

(c) $|E_3| = \overline{E_2} \quad \Longrightarrow \quad P(E_3) = 1 - P(E_2) = 1 - \frac{4}{21} = \frac{17}{21} = 81{,}0\%$

16. (a) $|\Omega| = 5! = 120$

(b) Es gibt zwei grundsätzlich verschiedene Anordnungen: Buben links oder Buben rechts: BBMMM oder MMBBB. Jede der beiden Anordnungen ist auf $3! \cdot 2! = 12$ Arten realisierbar.
$$P = \frac{2 \cdot 12}{120} = \frac{1}{5} = 20\%$$
Eine alternative Lösung, wenn man das „jeweils“ in der Angabe überliest: BMBMB. Dann ist
$$P = \frac{12}{120} = \frac{1}{10} = 10\%$$

17. $|\Omega| = 6^6 = 46\,656$

(a) $|E_1| = 1 \quad \Longrightarrow \quad P(E_1) = \dfrac{1}{6^6} = 2{,}14 \cdot 10^{-5}$

(b) $|E_2| = 5^6 \quad \Longrightarrow \quad P(E_2) = \dfrac{5^6}{6^6} = 33{,}49\%$

(c) $\overline{E}_3 = E_2 \quad \Longrightarrow \quad P(E_3) = 1 - P(E_2) = 66{,}51\%$

(d) $|E_4| = 6! \quad \Longrightarrow \quad P(E_4) = \dfrac{6!}{6^6} = 1{,}54\%$

18. (a) Ca. 83% der Würfelfläche sind rot.

(b) X: Anzahl der rot angestrichene Flächen(n)

$P(0) = \frac{2}{27}$, $P(1) = \frac{9}{27}$, $P(2) = \frac{12}{27}$, $P(3) = \frac{4}{27}$, $P(4) = \frac{0}{27}$

19. Nimmt man einen Laplace-Würfel an, lassen sich die Fragen wie folgt beantworten. Ansonsten kann man keine Aussagen machen.

(a) $\frac{1}{6}$

(b) $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6^5} = 9,3\%$

20. (a) $0,1 \quad 0,25 \quad 0,25 \quad 0,125$

(b) alle $0,5$

(c) Kreises 2, 3, und 4

21. (a) $\frac{1}{6}$ $[\frac{1}{6}]$
    (b) $\frac{1}{3}$
    (c) $\frac{1}{3}$

22. (a) $\frac{1}{7}; \frac{1}{6}; \frac{1}{4}$
    (b) ca. 11-mal

23. (a) 6 verschiedene
    (b) $\frac{1}{6}$

24. (a) $\frac{1}{365}$ (b) $\frac{1}{365}$ (c) 0 (d) $\frac{30}{365} = \frac{6}{37}$ (e) $\frac{12}{365}$ (f) $\frac{1}{365}$

25. $\frac{1}{6}$

2.3 Abgrenzung des Begriffs ,,Laplace-Experimente" durch Beispiele

1. Es ist gleich wahrscheinlich, dass eine gerade Zahl oder eine ungerade Zahl gezeigt wird.

3 Funktionale Zusammenhänge II: gebrochen rationale Funktionen

3.1 gebrochen-rationale Funktionen

1. Insgesamt gibt es bei zwei Würfen 36 Möglichkeiten.

Augensumme	5	6	7	8
Anzahl Möglichkeiten	4	5	6	5

   Ansgar hat 20 Gewinnmöglchkeiten und gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{20}{36} = 56\%$. Also ist seine Gewinnmöglichkeit besser.

2. $x = -\frac{4}{11}$

3.2 Bruchterme

3.2.1 Definitionsmenge

1. –

3.2.2 Erweitern und Kürzen

1. $\dfrac{51\,y^4 - 204\,y^2}{340\,y^4 - 85\,y^6} = \dfrac{51y^2(y^2-4)}{85y^4(4-\,y^2)} = \dfrac{-3\cdot 17(4-y^2)}{5\cdot 17y^2(4-\,y^2)} = -\dfrac{3}{5y^2}$
   $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2, 0, 2\}$

2. $\dfrac{36a^3b - 24a^2b^2}{18ab^2 - 27a^2b} = \dfrac{12a^2b(3a-2b)}{9ab(2b-3a)} = \dfrac{-4a(2b-3a)}{3(2b-3a)} = -\dfrac{4a}{3}$

3. (a): $\dfrac{60a^2b}{126a^4b^3c}$; EWF$= 6a^2b$ (b): $\dfrac{-18ab}{24a^2b - 30ab^2}$; EWF$= 6ab$

   (c): $\dfrac{2b^2 - 2ab - 4a^2}{2b^2 - 2a^2}$; EWF$= -2\cdot(a+b)$

4. $\dfrac{-(x+3)^2}{18-2x^2}$ und $\dfrac{30}{18-2x^2}$

5. $\dfrac{-(x+2)^2}{8-2x^2}$ und $\dfrac{28}{8-2x^2}$

6. $a-b$

7. $\dfrac{5\,x+2\,y}{2\,x+5\,y}$

8. $D=\mathbb{Q}\setminus\{0;1\}$; $\frac{1}{2x(x-1)}$

9. $\frac{v(3u-2v)}{u(3u+2v)}$

10. $-\frac{3x-7}{3x+7}$

11. $\frac{3(3y+x)}{x(3y-x)}$

12. $\frac{1}{3(4y-3x)}$

13. $D=\mathbb{Q}\setminus\{0;\pm\frac{3}{2}\}$, Ergebnis: $\frac{5x}{2x-3}$

14. $\dfrac{-xy}{4x^2+6x+9}$

15. $\dfrac{(x-5)\cdot(x-1)}{x+1}$ (Linearfaktorzerlegung eines quadr. Terms nötig!)

16. $-\frac{2x+5}{2}$

17. $\dfrac{\left(x^2+1\right)(x-3)}{x+3}=\dfrac{x^3-3\,x^2+x-3}{x+3}$
    $D_0=\mathbb{Q}\backslash\{-3\,;\,-1\,;\,1\,;\,3\}$; $D_1=\mathbb{Q}\backslash\{-3\}$

18. (a) $T^*(x)=\dfrac{2x(2x+3)}{3(2x-3)}$, $D=\mathbb{Q}\setminus\{-\dfrac{3}{2},0,\dfrac{3}{2}\}$, $D^*=\mathbb{Q}\setminus\{\dfrac{3}{2}\}$

    (b) $T^*(x)=-\dfrac{5}{3(3x+4)}$, $D=\mathbb{Q}\setminus\{-\dfrac{4}{3},0,\dfrac{4}{3}\}$, $D^*=\mathbb{Q}\setminus\{-\dfrac{4}{3}\}$

19. $\dfrac{7b+5a}{2(7b-5a)}$

20. (a) $\dfrac{3(2x-5)}{2x(2x+5)}$ $D=\mathbb{Q}\setminus\{-\dfrac{5}{2},0,\dfrac{5}{2}\}$ $D^*=\mathbb{Q}\setminus\{-\dfrac{5}{2},0\}$

(b) $-\dfrac{4}{3(5x+3)}$ $\quad D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{3}{5}, 0, \frac{3}{5}\} \quad D^* = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{3}{5}\}$

21. $\dfrac{6b+5a}{2(6b-5a)}$

22. $\dfrac{2b-3a}{2(2b+3a)}$

23. $\dfrac{2(3b-2a)}{a(3b+2a)}$

24. (a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$
    (b) $T(x) = \frac{2(2x-1)}{2x+1}$, $D^* = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

25. (a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$
    (b) $T(x) = \frac{2(3x-1)}{3x+1}$, $D^* = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$

3.2.3 Multiplikation und Division

1. (a) $a^{-8}c^{-11}$ (b) $-\dfrac{8c}{21ab^2}$
2. (a) $2^7 \cdot 3^4 \cdot u^8 \cdot v^{-4}$ (b) $2{,}4a^5b^{-8}c^5$
3. (a) $r^{m+4}a^{-1}$ (b) $-(3a-7b)^{4n+2}$ (c) -32

3.2.4 Addition und Subtraktion

1. (a) $\left(\dfrac{1}{a}\right)^3 : b^2 - b \cdot \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{a^3b^2} - \dfrac{b}{a^2} = \dfrac{1}{a^3b^2} - \dfrac{b \cdot ab^2}{a^2 \cdot ab^2} = \dfrac{1-ab^3}{a^3b^2}$

   (b) $x - \dfrac{x}{1-\dfrac{1}{x}} = x - \dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{x(x-1)-x^2}{x-1} = \dfrac{x^2-x-x^2}{x-1} = \dfrac{-x}{x-1} = \dfrac{x}{1-x}$

2. (a) $\dfrac{5x}{24a^2b^3} + \dfrac{7y}{18a^4b} = \dfrac{15a^2x+28b^2y}{72a^4b^3}, \qquad a \neq 0,\ b \neq 0$

   (b) $1 - \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 1 - \dfrac{x^2}{x^2-1} = \dfrac{x^2-1-x^2}{x^2-1} = \dfrac{-1}{x^2-1} = \dfrac{1}{1-x^2}, \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{-1, 0, 1\}$

3. $-\frac{15y^2+4x^2}{20x^2y^2}$

4. $\frac{5a^2-2b^2}{30a^2b^2}$

3.3 Bruchgleichungen

1. pro Minute: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$, also dauert es $\frac{6}{5}=1,2$ min
2. $D=\mathbb{Q}\setminus\{0;-\frac{1}{2}\}$, $L=\{-1\}$
3. (a) $D=\mathbb{Q}\setminus\{2\}$, $L=D$
   (b) $D=\mathbb{Q}\setminus\{0;-3\}$, $L=\{\}$
   (c) $D=\mathbb{Q}\setminus\{0,5;-1,5\}$, $L=\{-4,5\}$
4. $G=\mathbb{Q}\setminus\{3;0\}$, $L=\{-\frac{3}{5}\}$
5. $a=\frac{nRTV^2}{V-b}-pV^2$; $V\neq 0$; $V\neq b$
6. $a=\dfrac{b+2c}{1-b-2c}$
7. $x=1$, $y=3$
8. $x=1{,}4$, $y=0{,}9$
9. $x=0{,}7$, $y=0{,}9$
10. Beide Gleichungen mit dem Hauptnenner multiplizieren:
    $(I)\cdot(y+8)(\frac{y}{5}+1)\Rightarrow -3x-2y-7=0$
    $(II)\cdot(y+1)(-2x-3)\Rightarrow -4x-3y-9=0$

    Das Gleichungssystem (I') $-3x-2y-7=0$ und (II') $-4x-3y-9=0$ liefert die Lösung $x=-3$, $y=1$
11. Der Bruch heißt $\frac{17}{9}$
12. 20 Minuten

13. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3x} = \frac{1}{x}$ ergibt $x = 2$

14. (a) $h = \dfrac{z\,R^2}{1 - z\,R} = R \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{z\,R} - 1}$

    (b) $z\,R = \frac{1}{5}; \quad h = \frac{R}{4} = 1600\,\mathrm{km}$

15.
$$\begin{aligned} 2 < 4 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{2} > \frac{1}{4} \\ -4 < -2 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4} > -\frac{1}{2} = \frac{1}{-2} \\ -2 < 4 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} < \frac{1}{4} \end{aligned}$$

    Also:
$$\begin{aligned} 0 < a < b \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \\ a < b < 0 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \\ a < 0 < b \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \end{aligned}$$

3.4 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

1. Aus Annas Definition $0^0 = 1$ folgt: $1 = \dfrac{1}{1} = \dfrac{2^0}{0^0} = \left(\dfrac{2}{0}\right)^0$

   Der letzte Term $\left(\dfrac{2}{0}\right)^0$ ist aber wegen der Null im Nenner nicht definiert, damit ist das Potenzgesetz $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ verletzt.

   Aus Pauls Definition $0^0 = 0$ folgt: $0 = 0^0 = 0^{2-2} = \dfrac{0^2}{0^2} = \dfrac{0}{0}$

   Der letzte Term $\dfrac{0}{0}$ ist aber wegen der Null im Nenner nicht definiert, damit ist das Potenzgesetz $a^{n-m} = \dfrac{a^n}{a^m}$ verletzt.

2. Quelle: Schnittpunkt 9 (1995)

   Endziffer bleibt in der fünften Potenz erhalten. Allerdings muss das Jahrzehnt geschätzt werden.

3. $a = 1{,}89 \cdot 10^{26}\,\mathrm{m}$; $\quad V_{\text{Universum}} = 6{,}77 \cdot 10^{78}\,\mathrm{m}^3$
   $V_{\text{Proton}} = 10^{-45}\,\mathrm{m}^3$; $\quad N = \dfrac{V_{\text{Universum}}}{V_{\text{Proton}}} = 6{,}77 \cdot 10^{123}$

4. (a): $\dfrac{1{,}065^4 \cdot 1{,}9}{3{,}56} \cdot 10^{-26}$
   (b): $68{,}66 \cdot 10^{-28}$

4 Strahlensatz und Ähnlichkeit

4.1 Strahlensätze

4.1.1 Konstruktionsaufgaben

Teilungskonstruktionen

1.

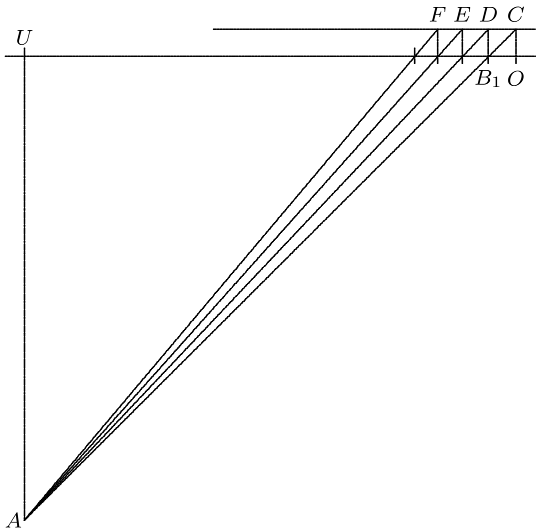
2. (a) $-\frac{5}{13}$; (b) $\overline{AD} \approx 1{,}1\,\mathrm{cm}$

3. Teilverhältnis $1:4$ bzw. $-1:4$

Sonstige Konstruktionsaufgaben

1. (a)

   $L_1 =$ Lot auf UO in U
   $L_2 =$ Lot auf UO in O
   A beliebiger Punkt auf L_1
   $C = L_2 \cap AB_1$
   $p =$ Parallele zu UO durch C
   $D = p \cap$ Lot auf UO durch B_1
   $B_2 = AD \cap UO$
   u.s.w.
   $\overline{UB_4} \approx 10{,}3\,\mathrm{cm} \mathrel{\widehat{=}} 51{,}5\,\mathrm{cm}$



   (b) $s_1 = k \cdot s_0\,, \quad s_2 = k \cdot s_1 = k^2 \cdot s_0\,, \dots, \; s_{12} = k^{12} \cdot s_0 = \dfrac{s_0}{2}$

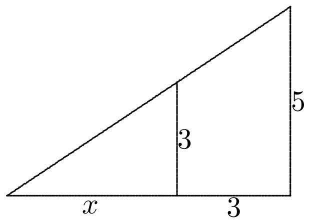
   $k^{12} = 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad k \approx 0{,}9439 \quad \Longrightarrow \quad \overline{UB_4} = k^4 \cdot s_0 \approx 51{,}59\,\mathrm{cm}$

2. (a) $4{,}2$ (b) $\dfrac{10}{3}$ (c) $4{,}4$

3. $x \approx 3{,}4$

4.

5.



6.

7. $x = 3,75\,\text{cm}$, $y = 7\,\text{cm}$

8. Als Hilfslängen sind die Diagonale und die doppelte Seitenlänge eines beliebigen Quadrats zu verwenden; für diese gilt: $d : 2s = \sqrt{2} : 2$;
   $a \approx 3,7\,\text{cm}$; $b \approx 5,3\,\text{cm}$

9.

4.1.2 Berechnungen mit Hilfe des Strahlensatzes

Strahlensatz allgemein

1. (a) $\dfrac{x}{40} = \dfrac{17}{25} \quad\Longrightarrow\quad x = \dfrac{17 \cdot 40}{25} = 27{,}2, \qquad y = 40 - x = 12{,}8$

   $\dfrac{z+4}{z} = 1 + \dfrac{4}{z} = \dfrac{25}{17} \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{4}{z} = \dfrac{8}{17} \quad\Longrightarrow\quad z = \dfrac{4 \cdot 17}{8} = 8{,}5$

   (b) $k = \dfrac{25}{17} \quad\Longrightarrow\quad A' = k^2 A = \dfrac{25^2 \cdot 578\,\text{cm}^2}{17^2} = 1250\,\text{cm}^2$

2. Quelle: Abakus 9, S.99

   $\frac{h}{2} = \frac{21}{6}$
   $h = 7\,\text{m}$

3. Quelle: Bigalke: Einführung in die Mathematik; Diesterweg

   Zahlenvorschlag: $|BC| = 1\,\text{m}$; $|AB| = 20\,\text{cm}$; $|AD| = 1,5\,\text{m}$
   $\frac{0{,}2}{1} = \frac{1{,}5}{x}$ wobei $x = 7,5$

4. Quelle: Mathematik 9, Cornelsen (1995)

   - $\frac{1500}{20} = \frac{x}{10}$
   - $\frac{1500}{20} = \frac{x}{20}$

5. Quelle: Mathematik heute 9 (1996)

   $\frac{e}{l} = \frac{s}{a}$

6. Quellen: Mathematik heute 9 (1996) Bigalke (1986), Diesterweg
   $\frac{x}{e} = \frac{|CD|}{m}$

7. $\frac{0,3}{h} = \frac{x}{4}$; $h = \frac{1,2}{x}$; $x = \frac{1,2}{h}$
   Für verschiedene Baumhöhen lassen sich folgende x-Werte berechnen:

Höhe in m	4	5	6	8	10	12	15	20	30	35	40
X in cm	30	24	20	15	12	10	8	6	4	3,4	3

8. Quelle: Schroedel, Elemente 9
   (a) $\frac{1,5}{2,5} = \frac{x}{3,2}$, also $x = 1,92$
   (b) $\frac{1,5}{2,5} = \frac{x}{2}$, also $x = 1,2$

9. (a) gemeint: nur 10×15 tut's
   (b) $2,4$

10. $a = 276\,\mathrm{m}$; $c = 7,5\%$

11. ca. $1950\,\mathrm{m}$

12. (a) $18\,\mathrm{m}$
    (b) $20,4\,\mathrm{m}$

13.

14. (a) $3476\,\mathrm{km}$
    (b) $1392000\,\mathrm{km}$

15. (a) $x = \dfrac{10}{3}\,, \quad y = 4,5\,, \quad z = \dfrac{20}{3}$ (b) $x = 7,5\,, \quad y = 2\,, \quad z = 4,5$

16. $x = 8$, $y = 12$

17. (a) $x = 2,4\,, \quad y = \dfrac{10}{3}$ (b) $x = 6\,, \quad y = 12$

18. $x = \dfrac{b\,c}{a-c}$ $y = \dfrac{d\,c}{a-c}$

19. (a) $\dfrac{e}{b} = \dfrac{d}{c} = \dfrac{f}{a} = \dfrac{e+f}{b+a}$

(b) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{f+e}{e} = \dfrac{a+b}{b}$

(c) $\dfrac{f+e}{f} = \dfrac{b+a}{a}$

20. (a): $\overline{BC} = 4{,}2\,\text{cm}$, $\overline{AD} = 2{,}8\,\text{cm}$ (b): $A_{ABCD} : A_{DCS} = 119 : 25$

21. $\overline{DT} = 4{,}5\,\text{cm}$. Die Diagonalen teilen sich im Verhältnis $5 : 3$, daraus ergibt sich $\overline{AC} = 4\,\text{cm}$. $\overline{AE} = \frac{5}{8} \cdot 3\,\text{cm}$.

22. $A = \dfrac{c^2\,d}{2\,(a-c)} = 8\,\text{cm}^2$

23. (a) $x = 4{,}9\,\text{cm}$ (b) $y = 3{,}9\,\text{cm}$ (c) $z = 5{,}25\,\text{cm}$

24. $\overline{DE} = 7{,}5\,\text{cm}$, $\overline{CE} : \overline{CB} = \overline{DE} : \overline{AB} = \overline{DC} : \overline{AC} = \frac{5}{7}$

25. $\overline{AF} = 4{,}2\,\text{cm}$; $\overline{BF} \approx 5{,}0\,\text{cm}$; $\overline{CD} \approx 2{,}7\,\text{cm}$; $\overline{AC} \approx 7{,}0\,\text{cm}$

26. $\overline{PR} = 9\,cm$; $\overline{AQ} = 2\,cm$

27. (a): $35\,cm$ (b): $-2{,}5$ (c): $10\,cm$

28. (b): $7\,cm$ (c): $\overline{CE} = 12\,cm$ (e): $\overline{HC} : \overline{HE} = 7 : 3$

29. (c): $\overline{AS} : \overline{SE} = 11 : 10$
(d): $\overline{SC} : \overline{CE} = 11 : 21$

30. (a): $\overline{CG} = 1{,}75\,cm$
(c): $\overline{HD} = 1\,cm$
(d): nein, da $\frac{\overline{KC}}{\overline{BC}} = \frac{5}{4} \neq \frac{1}{1} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CT}}$!

31. $x = 10{,}4\,\text{cm}$, $y = 9{,}9\,\text{cm}$, $z = 8{,}4\,\text{cm}$

32. $h = 1{,}20\text{m}$, der Abstand d beeinflußt h nicht.

33. (a) $\sphericalangle AFB = \sphericalangle EFG \implies \Delta AFB \sim \Delta EFG$, $d + e = 12{,}5\,\text{cm}$
(b) Alle Angaben in cm: $d = 8$; $e = 4{,}5$; $x = 6$; $y = 3{,}375$; $h = 3{,}6$; $u + v = 5{,}625$; $f + g = 7{,}5$; $g = 1\frac{67}{68}$; $f = 5\frac{35}{68}$; $u = 1\frac{133}{272}$ und $v = 4\frac{37}{272}$

Aufgaben speziell zum Teilverhältnis

1. $\overline{UW} = 1,5\,\text{cm}$, $\overline{UT} = 6\,\text{cm}$
2. Teilverhältnis $1:4$ bzw. $-1:4$
3. $x = 1,2\,\text{cm}, \quad y = 2,8\,\text{cm}$
4. (b) $\dfrac{\overline{T_aB}}{\overline{BT_i}} = \dfrac{\overline{T_aA}}{\overline{AT_i}} = 6 : 1$
5. (b): $\overline{BD} = 3,85\,cm$; $\overline{AE} = 16,5\,cm$ (c): $1 : 6$
6. (a) $\frac{3}{7}$; (b) $-\frac{3}{7}$ (c) D rückt von rechts gegen B.
7. (a) $\overline{CB} = \frac{5}{11} \cdot 7\,\text{cm}$
   (b) $\frac{\overline{AS}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{BE}}$

Herleitungen geometrischer Aussagen

1. (a) Strahlensatz am Zentrum A
   (b) Strahlensatz am Zentrum S, dem Schnittpunkt von M_bB und M_cC
2.
3.
4.
5. $\overline{ZA} = \frac{\overline{AA'} \cdot \overline{AB}}{\overline{A'B'} + \overline{AB}}$, $\overline{ZA'} = \frac{\overline{AA'} \cdot \overline{A'B'}}{\overline{A'B'} + \overline{AB}}$
6. (b) $S_{C;\frac{3}{2}}$ bildet F auf A und E auf B ab $\Longrightarrow FE \parallel AB$ (c) $3:2$
7. Aus der Zeichnung entnimmt man $\overline{AX} : \overline{CD} = 1 : 3$. Also teilt X die Seite $[AB]$ im Verhältnis $1:2$.
8. (a) Die Dreiecke stimmen im Winkel bei A und dem rechten Winkel überein.
   (b) Wähle z. B. $\alpha = 30^0$, $\sphericalangle CBB' = 10^0$, so ergibt sich $\sphericalangle C'CB = 20^0$. Die Dreiecke haben also verschiedene Winkel.

4.1.3 Anwendungen in anderen Gebieten

Vermessungsaufgaben

1. (b): $5,5\,m$ (c): $1,04\,m$
2. $\overline{HK} = 175\,\mathrm{m}$
3. $\overline{XA} = 300\,\mathrm{m}$, absoluter Fehler $26,4\,\mathrm{m}$ von $273,55\,\mathrm{m}$, relativer 10%.
4. (a) $3476\,\mathrm{km}$ (b) $1\,392\,000\,\mathrm{km}$

Strahlenoptik

1. (a) $x = d \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right)$ (b) $d < 0,0952\,\mathrm{mm}$ (c) $g = G \cdot \frac{b}{a}$
   (d) $a > 88\frac{8}{9}\,\mathrm{m}$
2.

Sonstiges

1. $h = 31,68\,\mathrm{m}$
2. $1,75\,m$
3. $50\,km$
4. $r_M : r_E = 3 : 11$
5. $b_1 = 3,6\mathrm{m}$, $b_2 = 15\mathrm{m}$
6. $h \approx 82\,\mathrm{cm}$
7. (a) $D = 3500\,\mathrm{km}$, (b) um 350 km.

4.2 Ähnlichkeit von Dreiecken

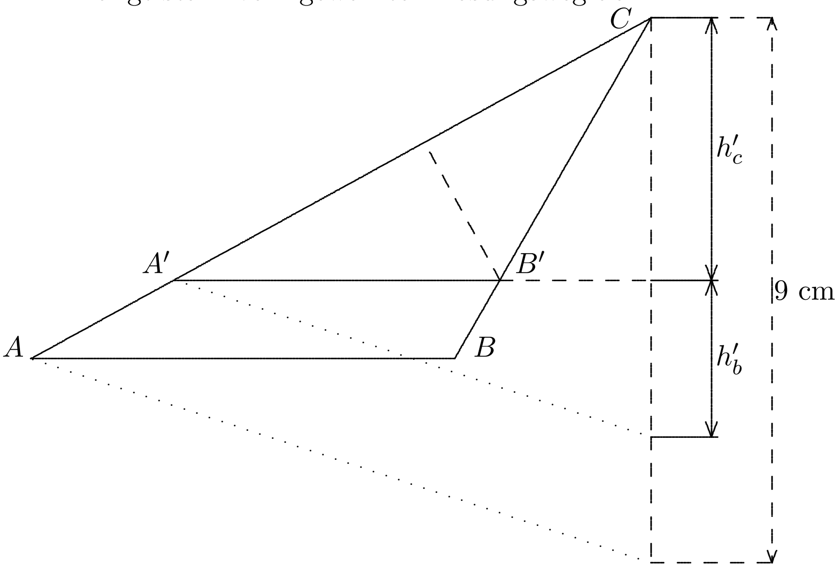
4.2.1 Dreieckskonstruktionen

1.
2.
3.
4.

5.

6.

7. Man konstruiert z.B. $A'B'C$, und streckt im Verhältnis $9cm : (h_{B'} + h'_C)$. Der Platzbedarf hängt stark vom gewählten Lösungsweg ab.



8. Konstruiere $\triangle A'B'C'$ mit $a' = 8\,cm$; $b' = 5\,cm$; $c' = 7\,cm$.
Bilde $\triangle A'B'C'$ auf $\triangle ABC$ ab unter der zentr. Streckung $S(Z;m)$ mit $Z = A'$ und $m = \frac{h_c+c-a}{h'_c+c'-a'}$.

9.

10.

11.

12.

13. Es ist $c : b : a = 6 : 8 : 3$.
Man konstruiere $\triangle A'B'C'$ aus $c' = 6\,cm$; $b' = 8\,cm$; $a' = 3\,cm$.
Bilde $\triangle A'B'C'$ auf $\triangle ABC$ ab unter der zentr. Streckung $S(Z;m)$ mit $Z = C'$ und $m = \frac{h_a-a}{h'_a-a'}$.

14.

4.2.2 Einbeschreibungskonstruktionen

1.

2. Lösungsschritte: Man konstruiert ein zu ABC ähnliches Dreieck $A'B'C'$ mit seinem Umkreis k'. Durch eine zentrische Streckung wird k' auf k und $A'B'C'$ auf ABC abgebildet. Der Platzbedarf hängt stark von einer günstigen Wahl von $A'B'C'$ ab.

3.

4.

5.

6.

4.2.3 Rein rechnerische Aufgaben

1. Die Berechnung der Seitenlängen liefert den Nachweis der Ähnlichkeit.

2. WWW; 18 cm

3. $h_a = 20\,cm;\ h_b = 25\,cm$

4. $\overline{AD} = 3,96\,\text{cm}$

5. (a) Die Dreiecke stimmen in den Winkeln überein (rechte Winkel, Z-Winkel).
   (b) $\overline{CE} = \frac{3}{2}a$

6. (a): $\triangle AFC \sim \triangle FBC \sim \triangle AFP \sim \triangle PFC$;
   (Übereinstimmung in allen Winkeln)
   (b): $\overline{AP} = \frac{b}{4},\ \overline{CP} = \frac{3}{4}b,\ h = \frac{b}{2}\sqrt{3}$

7. $x = \frac{527}{25}$ und $y = \frac{168}{25}$

8. Der Ansatz $c' = k \cdot c\,;\ b' = k \cdot b\,;\ a' = k \cdot a$ liefert $k = 3$,
   also $c' = 429\,mm;\ b' = 333\,mm;\ a' = 234\,mm.$

9. $a' = 21\,\text{cm};\ b' = 27\,\text{cm};\ c' = 15\,\text{cm};\ a = 35\,\text{cm};\ b = 45\,\text{cm};\ c = 25\,\text{cm}$

10. 20 cm und 32 cm

11. $A_2 = 10\,\text{cm}^2$.

12. (a) Sie stimmen jeweils in den Winkeln überein. (b) $\overline{CF} = 2\,\text{cm}$ (c) $\overline{DG} = \frac{8}{3}\,\text{cm}$

13. (a) $D = w_\gamma \cap [AC]$: $\Delta ABC \sim \Delta CBD$ und $\overline{AD} = w_\gamma$ ergibt $w_\gamma = \dfrac{a\,b}{c}$
    (b) $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \dfrac{b}{a}$

(c) $\frac{c}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \overset{(b)}{=} \frac{b}{a} \implies \frac{w_\gamma}{a} = \frac{\overline{AD}}{a} = \frac{c}{b} \overset{(a)}{\implies} \frac{b}{c} = \frac{c}{b}$

$b^2 = c^2 \quad , \quad b = c \implies \beta = \gamma = 2\,\alpha \implies 5\,\alpha = 360° \quad , \quad \alpha = 72°$

14. F =Muskelkraft, G =Gewichtskraft: $F = 2,5\,G$, $F' = G' \implies$
$k^2\,F = k^3\,G \implies F = k\,G \implies k = 2,5$, $k \cdot 180\,\mathrm{cm} = 450\,\mathrm{cm}$

15. Der Winkel ist invariant, die Längen wachsen um den Faktor $\frac{3}{2}$.

4.2.4 Herleitungen geometrischer Aussagen

1.

2.

3.

4. Die Winkelhalbierende schneidet die Seite c in D. Dann ist $CBD \sim ABC$, weil die Dreiecke in den Winkelmaßen übereinstimmen.

5. (a): $\triangle\mathrm{CBD} \sim \triangle\mathrm{ABC}$
(b): $\overline{\mathrm{CD}} : \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{AB}}$; $\quad \overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{BC}} : \overline{\mathrm{BD}}$

6. Beweis mit Hilfe der Ähnlichkeit geeigneter Dreiecke.

7. (a) $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ nach WW-Satz
(b) $\overline{AD} \approx 3\,\mathrm{cm}$, $\overline{DC} \approx 3\,\mathrm{cm}$ und $\overline{BD} \approx 1,9\,\mathrm{cm}$

8. (a) Übereinstimmung in zwei Winkelmaßen (Scheitelwinkel und Umgangswinkel über $[CD]$).
   (b) Strahlensatz

9.

4.2.5 Anwendungsaufgaben

1. (a) $h = 44\,\mathrm{m}$ (b) $x = 4,15\,\mathrm{m}$