SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit $\TeX$

Jahrgangsstufe 8 (Gymnasium)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

5. Juni 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionale Zusammenhänge I

1.1 Proportionalität

1.1.1 direkte Proportionalität

1. 56 Geier sitzen gelandweilt auf drei Bäumen herum. Vor Langeweile fliegen 4 Geier vom ersten auf den zweiten und 9 vom zweiten auf den dritten Baum. Nun sind auf dem zweiten Baum doppelt so viele Geier wie auf dem ersten und auf dem dritten doppelt so viele wie auf dem zweiten.

   Wie viele Geier saßen ursprünglich auf jedem Baum?

Lösung: Z. B.: x Geier am Ende auf Baum 1, dann sind $2x$ bzw. $4x$ auf Baum 2 bzw. 3. Damit sitzen nach den Flügen $56/7 = 8$ Geier auf dem ersten Baum und 16 bzw. 32 Geier auf dem 2. und 3. Baum. Vor dem Flug waren es dann 12, 21 und 23 Geier.

2. In einer Gartenwirtschaft werden Bratwürste angeboten:

4 Bratwürstl	4,20 EUR	50 Bratwürstl	32,50 EUR
6 Bratwürstl	4,95 EUR	100 Bratwürstl	64,50 EUR
8 Bratwürstl	5,70 EUR	Bratwürstsemmel	1,80 EUR

   (a) Zeigen Sie, dass der Preis nicht direkt proportional zur Anzahl der Bratwürste ist.

   (b) Jeder der 25 Schüler einer Klasse möchte 4 Bratwürste bestellen. Berechnen Sie, wie viele Euro jeder Schüler spart, wenn die Klasse stattdessen eine Portion mit 100 Würsten bestellt.

   Bayerischer Mathematik Test für die 10. Klasse, 2007

Lösung: (a) Z. B. 3 x 4 Bratwürstl kosten 12,60 EUR; 2 x 6 Bratwürstl kosten 9,90 EUR; damit liegt keine direkte Proportionalität vor

(b) 25 x 4 Bratwürstl kosten 105,00 EUR; Jeder Schüler spart ($105,00$ EUR - $64,50$ EUR): 25 =$1,62$ EUR

3. **Der Fußball-Globus**

   Ein begehbarer Fußball-Globus machte bis zur Fußball-Weltmeisterschaft 2006 eine Reise durch alle zwölf Austragungsorte der Weltmeisterschaft. In diesem Riesen-Fußball fanden Veranstaltungen unter dem Motto ,,Kulturfestival im WM-Globusßtatt.

Der überdimensionierte Fußball war nachts erleuchtet und stellte dann eine Weltkugel dar.

(a) Wie groß wäre ein entsprechender Fußballspieler, der mit diesem Ball spielen würde? Beschreibe, wie du vorgegangen bist.

(b) Wie lang wäre ein entsprechendes Spielfeld, wenn man mit diesem Fußball spielen würde? Beschreibe, wie du vorgegangen bist.

(c) Uwe Seeler: Größter Fuß der Welt

Ein riesiger Uwe-Seeler-Bronzefuß begrüßt die Fans am Eingang der Hamburger Fußball-Arena. Dieser Bronzefuß ist 3,50 Meter hoch, 2,30 Meter breit, 5,50 Meter lang und wiegt 1,5 Tonnen. Derzeit wird geprüft, ob die Skulptur als größter Fuß der Welt in das Guinness-Buch der Rekorde aufgenommen werden kann.

Passt die Größe dieses Fußes zu dem Fußballspieler aus Aufgabe (a)?

Auszug aus den Fußball-Regeln

Der Ball ist regelgerecht, wenn er:

- kugelförmig ist,
- aus Leder oder einem anderen geeigneten Material gefertigt ist,
- einen Umfang zwischen mindestens 68 und höchstens 70 cm hat.

Das Spielfeld:

- Das Spielfeld muss rechtwinklig sein. Die Länge der Seitenlinien muss in jedem Falle die Länge der Torlinie übertreffen.
- Länge mindestens 90 m, höchstens 120 m Breite mindestens 45 m, höchstens 90 m
- Bei Länderspielen: Länge mindestens 100 m, höchstens 110 m Breite mindestens 64 m, höchstens 75 m

Quelle: Werner Blum u. a. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret, Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen; mit CD-Rom / IQB, Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (www.IQB.hu-berlin.de), 1. Auflage, Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor, 2006

Lösung: (a) Z. B.: Annahme: Tür 2,5 m hoch $\Rightarrow$ Höhe des Fußballes ca. 15 m, Größe eines Spielers ca. 130 m

(b) ca. 7 km

(c) Fuß müsste ca. 20 m lang sein, ist jedoch kürzer; passt also nicht

4. **Zeitungslieferant**

Wie schwer ist wohl dieser Zeitungsstapel?

Quelle: Herget, W. et al.: Produktive Aufgaben

Lösung:

1.1.2 Umfang des Kreises

1. (a) Bestimme mit einer Schnur den Umfang und den Radius verschiedener Kreisflächen.

   (b) Fasse die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen und suche einen Zusammenhang zwischen Kreisradius und Kreisumfang.

Lösung: (a) Als Kreisfläche eignen sich verschiedene Körper, wie z. B. Mülleimer, Tasse, Blumentopf,...

(b)

	Mülleimer	Tasse	Blumentopf	Topf
Radius r in cm	20 cm	4,1 cm	15 cm	18 cm
Umfang u in cm	125,5 cm	25,5 cm	94 cm	113 cm
Radius: Umfang	6,28	6,22	6,26	6,28

Erfahrungsgemäß ergeben sich bei den Ergebnissen aufgrund von Messungenauigkeiten Abweichungen (vgl. auch Ergebnisse von u in der Tabelle)!

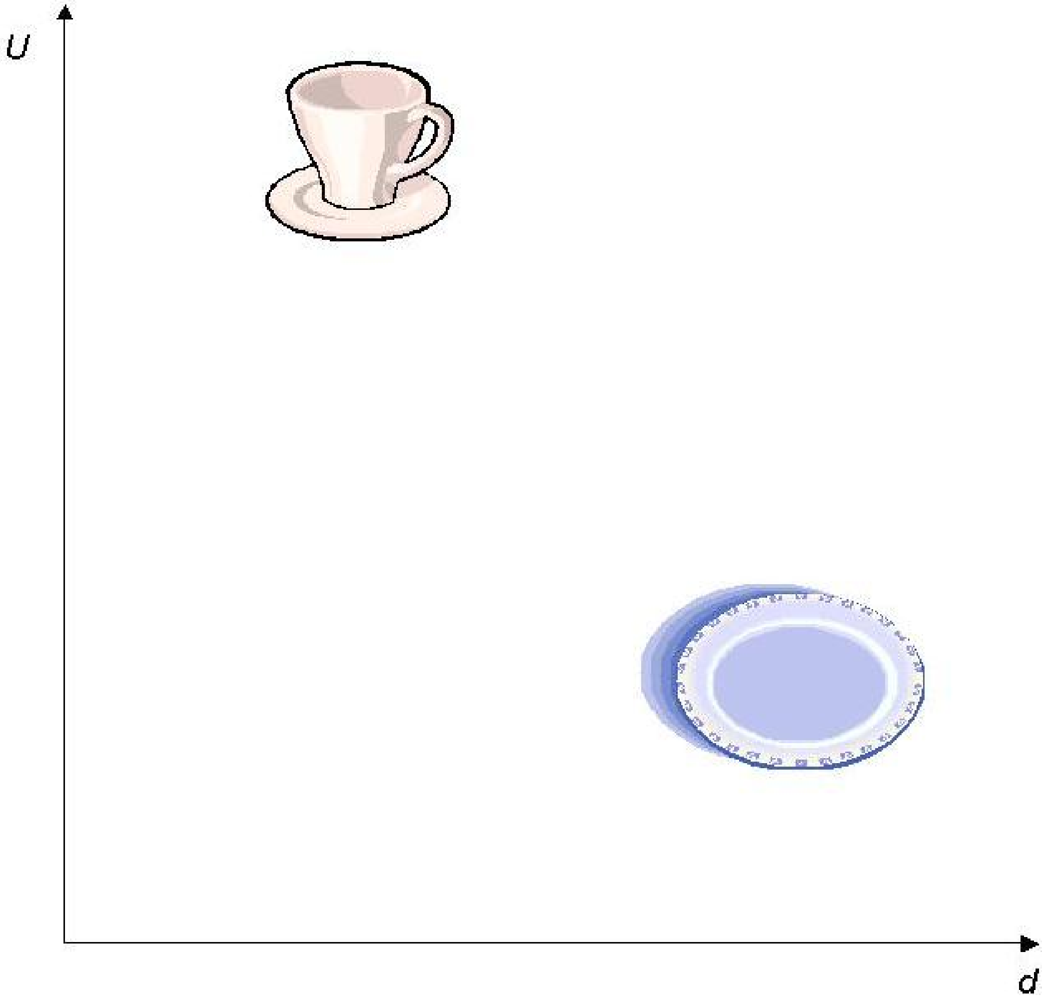
2. Die Länge einer Schnur beträgt 4 Meter. Welchen Flächeninhalt kann man damit maximal einschließen?

   Quelle: Jufo go (Spiel zum Wettbewerb Jugend forscht)

Lösung: Man legt die Schnur kreisförmig, um den maximalen Flächeninhalt zu erhalten: 1,3m^2

3. **Rundherum, das ist nicht schwer ...**

   Suche möglichst viele, möglichst verschieden große kreisrunde Objekte:
   Teller, Untertassen, Tassen, Deckel, runde Tische, Münzen, CDs, Schallplatten, runde Stifte, Dosen, Gläser, ...
   Miss jeweils den Durchmesser d und den Umfang U und trage die Werte in eine Tabelle ein.
   Fällt dir etwas auf?
   Trage die Messwert-Paare in ein geeignetes Koordinatensystem ein.



Quelle: Herget/Jahnke/Kroll: Produktive Aufgaben , Cornelsen

Lösung:

4. **Band um den Äquator**

   Um den Äquator denke man sich straff ein Seil gespannt. Dieses wird nun an einer beliebigen Stelle aufgeschnitten und um exakt einen Meter verlängert. Dann wird es zusammengebunden und wieder um den Äquator gelegt. Es steht nun wegen der durchgeführten Verlängerung etwas vom Äquator ab. Passt unter dem Seil eine Maus durch?

Untersucht die zugeteilten Gegenstände oder sucht euch selbst geeignete. Ermittelt zunächst den Umfang und den Radius des Gegenstandes.
Dann verlängert ihr den Umfang um 1 m und legt ein Band mit dieser Länge so um den Gegenstand, dass der Abstand des Gegenstandes zum Band überall gleich ist. Wie groß ist dieser Abstand?

Nr.	Gegenstand	Radius	Umfang	Abstand des verlängerten Bandes vom Gegenstand
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				
9.				
10.				
11.				
12.				
13.				
14.				
15.				

Was fällt euch auf?

Aus: Walsch, W.: Die aufgehängte Erdkugel; in: Mathematische Unterrichtspraxis (2000), H. 1, S. 31-35

Lösung:

5. Pluto, der äußerste Planet unseres Sonnensystems, bewegt sich mit einer mittleren Geschwindigkeit von 4,75 km/s in 248 Jahren einmal um die Sonne. Wie groß ist der Durchmesser seiner Bahn und damit der Durchmesser unseres Sonnensystems? (Die Bahn von Pluto kann als Kreis angesehen werden; ein Jahr soll 365 Tage haben.)

Lösung: $1{,}2 \cdot 10^{10}$ km

6. 1993 waren in Deutschland 32,7 Millionen Autos zugelassen. Reihe in Gedanken die durchschnittlich 4,2 m langen Autos aneinander und vergleiche die Länge dieser Autokette mit der Länge des Erdumfangs (40000 km).

Lösung: $3{,}4 \cdot U_{Erde}$

7. Falte (in Gedanken!) ein Blatt Papier der Dicke 0,1 mm 50mal. Wie dick wäre das entstandene Gebilde? Vergleichen das Ergebnis mit der Länge des Erdumfangs (40000 km)!

Lösung: $2815 \cdot U_{Erde}$

1.1.3 indirekte Proportionalität

1. Proportionale und nicht proportionale Zusammenhänge
   (1) Ein Läufer legt 100m in 12,5s zurück. In welcher Zeit läuft er 1500m?
   (2) 3kg Orangenkosten 4,50EUR. Wie viel kosten ein Kilogramm Orangen?
   (3) Milas kleiner Bruder ist acht Jahre alt und 1,46m groß. Wie groß wird er mit zwölf Jahren sein?
   (4) Auf der Verpackung eines Hamburgers steht: 14g Fett pro 100g. Wie viel Gramm Fett ist in dem 350g schweren Hamburger enthalten?
   (a) Prüfe, welche Situationen proportional sind.
   (b) Beantworte die Fragen, wenn dies möglich ist.

   Quelle: MaTEAMatik, Lars Holzäpfel, Timo Lauders, Praxis der Mathematik in der Schule, Heft Nr. 35/52. Jahrgang, S. 1-8

Lösung: (a) (2) und (4) sind proportional
(b) (2) 1,50EUR; (4) 49g

1.2 Funktion und Term

1.2.1 Funktionsbegriff

1. Die x-Koordinate eines nach oben geworfenen Steins ist eine Funktion der Zeit t mit der Gleichung
$$x(t) = 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t - 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2$$
und der Definitionsmenge $D_x = [0; 6\,\mathrm{s}]$. Erstelle eine Wertetabelle der Funktion x für ganze und halbe Sekunden ($t = 0$, $t = 0{,}5\,\mathrm{s}$, $t = 1{,}0\,\mathrm{s}$, ...,$t = 6{,}0\,\mathrm{s}$) und zeichne ihren Grafen in ein Koordinatensystem mit der Einheit $1\,\mathrm{s} \,\widehat{=}\, 1\,\mathrm{cm}$ auf der t-Achse und $10\,\mathrm{m} \,\widehat{=}\, 1\,\mathrm{cm}$ auf der x-Achse. Bestimme grafisch die Lösung der Ungleichung $x(t) \geqq 30\,\mathrm{m}$.

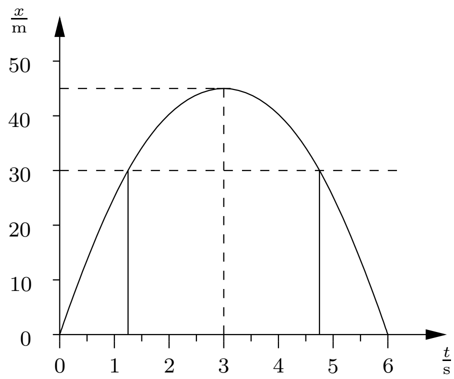
Lösung:

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$\frac{x}{\mathrm{m}}$	0	13,75	25	33,75	40	43,75	45

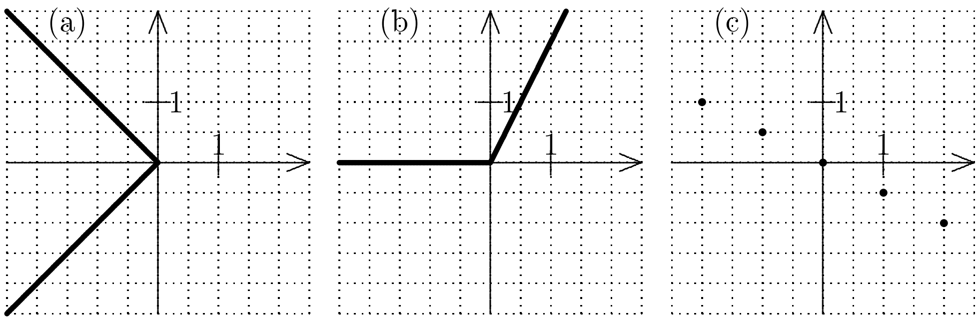
$\frac{t}{\mathrm{s}}$	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
$\frac{x}{\mathrm{m}}$	43,75	40	33,75	25	13,75	0

$L \approx [1{,}25\,;\,4{,}75]$

(genauer: $L \approx [1{,}268\,;\,4{,}732]$)

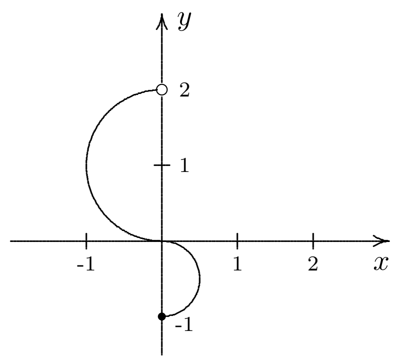


2. Bestimme wenn möglich zu den abgebildeten Graphen den Funktionsterm und einen passenden Definitionsbereich. Begründe andernfalls, warum der Graph keine Funktion darstellt.



Lösung: (b) $D = \mathbb{Q}$ und $f(x) = x + |x|$, (c) $D = \mathbb{Z}$ und $f(x) = -0,5x$

3. Gegeben ist der rechts dargestellte Graph.
   Bestimme seine Wertemenge.
   Handelt es sich um den Graphen einer Funktion?
   Begründe deine Entscheidung.



Lösung:

4. Erstellen Sie für die folgende Relation eine Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen:
$$f = \{(x|y) \mid x^2 = y^2 \; ; \; D_f = [-2; 2]\}$$
   Handelt es sich bei f um eine Funktion?

Lösung: Keine Funktion: $y = \pm x$

5. Erstellen Sie für die folgende Relation eine Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen:
$$f = \{(x|y) \mid x = y^3 \; ; \; W_f = [-2\,;\,2]\}$$
   Wie lautet D_f? Für welches x ist $f(x) = 1{,}2$?
   Handelt es sich bei f um eine Funktion?

Lösung: $D_f = [-8\,;\,8]$, $f(x) = 1{,}2 \quad \Longrightarrow \quad x = 1{,}2^3 = 1{,}728$
Es ist eine Funktion: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

6. Zeichnen Sie die Graphen folgender Relationen und untersuchen Sie, ob es sich um Funktionen handelt:
   (a) $f = \{\,(1|4)\,,\,(2|3)\,,\,(5|4)\,,\,(0|2)\,,\,(-1|-2)\,,\,(3|-1)\,\}$
   (b) $f = \{\,(1|3)\,,\,(2|3)\,,\,(5|1)\,,\,(0|-2)\,,\,(1|2)\,,\,(3|0)\,\}$
   (c) $f = \{\,(x|y)\,|\,x^2 + y^2 = 4 \wedge x \in [-2\,;\,2]\,\}$
   (d) $f = [\,2\,;\,5\,[\,\times\,]\,1\,;\,3\,]$

Lösung: (a) Funktion (b) keine Funktion
(c) keine Funktion (Kreis um $(0|0)$ mit $r = 2$)
(d) keine Funktion (Rechteck, teilweise ohne Rand)

7. Der Graph der Relation f ist eine offene Kreisscheibe (ohne Rand) um den Mittelpunkt $M(1|2)$ mit dem Radius $r = 3$. Schreiben Sie f als Menge hin.

Lösung: $f = \{ (x|y) \,|\, (x-1)^2 + (y-2)^2 < 3 \}$

8. Der Graph der Relation f ist die Fläche des Dreiecks ABC mit $A(1|2)$, $B(6|3)$ und $C(4|5)$. Die Seite [AB] gehört zum Graphen, die beiden anderen Seiten nicht. Schreiben Sie f als Menge hin.

Lösung: $f = \{ (x|y) \,|\, y \geqq \frac{1}{5}x + \frac{9}{5} \wedge y < x+1 \wedge y < 9-x \}$

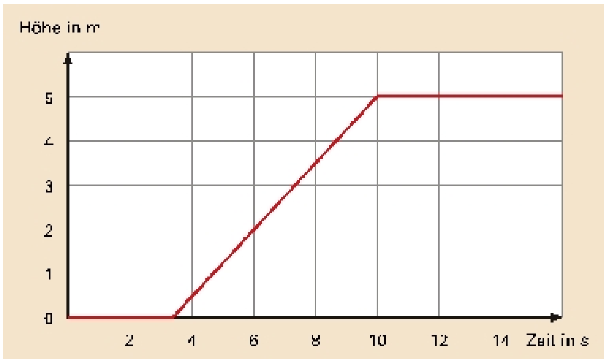
1.2.2 funktionale Zusammenhänge erfassen und beschreiben

1. 56 Geier sitzen gelandweilt auf drei Bäumen herum. Vor Langeweile fliegen 4 Geier vom ersten auf den zweiten und 9 vom zweiten auf den dritten Baum. Nun sind auf dem zweiten Baum doppelt so viele Geier wie auf dem ersten und auf dem dritten doppelt so viele wie auf dem zweiten.

   Wie viele Geier saßen ursprünglich auf jedem Baum?

Lösung: Z. B.: x Geier am Ende auf Baum 1, dann sind $2x$ bzw. $4x$ auf Baum 2 bzw. 3. Damit sitzen nach den Flügen $56/7 = 8$ Geier auf dem ersten Baum und 16 bzw. 32 Geier auf dem 2. und 3. Baum. Vor dem Flug waren es dann 12, 21 und 23 Geier.

2. Hanna fährt im Kaufhaus auf der Rolltreppe aufwärts. Ihre Bewegung lässt sich als Funktionsgraph darstellen:

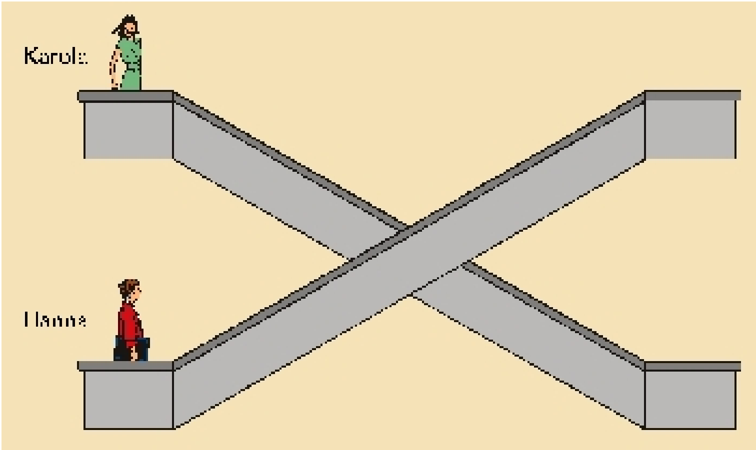


   (a) i. Was kann man alles aus diesem Graphen ablesen?

   ii. Der Graph gibt die Bewegung nicht ganz richtig wieder. Mache Verbesserungsvorschläge.

   iii. Stelle auch einen entsprechenden Graphen für die Bewegung eines Fahrstuhls (eines Skiliftes, eines Paternosters) dar und vergleiche.

(b) .



Die Zuordnungen $f(x) = -0,5x + 5$ und $g(x) = 0,625x$ stellen die Rolltreppenfahrt von Karola und Hanna stark vereinfacht dar. Dabei beschreibt x die Zeit in s und $f(x)$ bzw. $g(x)$ die Höhe in m. Welcher Funktionsterm gehört zu wem?

Quelle: Werner Blum u. a. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret, Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen; mit CD-Rom / IQB, Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (www.IQB.hu-berlin.de), 1. Auflage, Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor, 2006

Lösung: (a) z. B.: Fahrtzeit $6,5\,s$, Stockwerkshöhe: $5\,m$

(b) f: Karola, g Hanna

3. Ein Fotoversand verlangt für jeden Abzug 0,10 EUR und eine Versandkostenpauschale von 2,59 EUR.

   (a) Wie viel Prozent des Endbetrags machen die Versandkosten bei 46 Bildern aus?

   (b) Im Drogeriemarkt kostet ein Abzug 12 Cent. Ist es beim vorliegenden Auftrag besser im Drogeriemarkt Abzüge machen zu lassen?

   (c) Beschreibe die die Kosten beim Fotoversand bzw. beim Drogeriemarkt durch eine Funktion.

   (d) Ab welcher Anzahl bestellter Fotos ist der Fotoversand billiger als der Drogeriemarkt.

   (e) Ein Online-Fotoversand hat folgende Preisstaffelung:

Zahl der bestellten Bilder	Preis pro Abzug
1 bis 9	15 Cent
10 bis 49	12 Cent
50 bis 99	10 Cent
100 bis 300	8 Cent
ab 301	Sonderkonditionen auf Anfrage
Zahl der bestellten Bilder	Versandkostenanteil
1 bis 9	1 EUR
10 bis 200	2 EUR
ab 201	Kosten trägt der Fotoversand

Stelle grafisch dar, welche Gesamtkosten sich bei einer Bestellung in Abhängigkeit von der Anzahl bestellter Bilder ergeben.

(f) Wie sollte ein Kunde beim Online-Fotoversand vorgehen, der 95 Bilder braucht?

Lösung: (a) 36%

(b) Z. B.: $0,12\,\text{EUR} \cdot 46 = 5,52\,\text{EUR} < 7,19\ \text{EUR}$

Bei diesem Auftrag ist der Drogeriemarkt billiger.

(c) Drogeriemarkt: Preis = Anzahl $\cdot\ 0,12\,\text{EUR}$

Versand: Preis = Anzahl $\cdot\ 0,10\,\text{EUR} + 2,59\,\text{EUR}$

(d) Ab 130 bestellten Bildern ist der Versand günstiger.

(e)

(f) Aufgrund der Preissprünge sind beispielsweise 95 Bilder teuerer als 100. Ein Kunde, der 95 Bilder benötigt, sollte eigentlich 5 Bilder zusätzlich bestellen, und kommt damit billiger weg.

1.2.3 Flächeninhalt des Kreises

1. Schätze die Fläche der Antarktis, indem du den Maßstab der Karte benutzt.

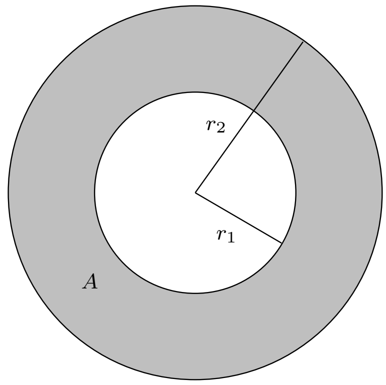
   Schreibe deine Rechnung auf und erkläre, wie du zu deiner Schätzung gekommen bist. (Du kannst in der Karte zeichnen, wenn dir das bei deiner Schätzung hilft.)

Quelle: PISA 2000, Beispielaufgaben aus dem Mathematiktest

Lösung: Abschätzung durch ein Rechteck mit Seitenlängen $4,5 \cdot 10^3\,\text{km}$ und $3,1 \cdot 10^3\,\text{km}$ liefert $A = 14 \cdot 10^6\,\text{km}^2$

ODER: Abschätzung durch Kreis mit Radius $2,1 \cdot 10^3\,\text{km}$ liefert ebenso $A = 14\,\text{km}^2$

2. Ein ringförmiges Beet mit dem Innenradius $r_1 = 3{,}0\,\mathrm{m}$ und dem Außenradius $r_2 = 4{,}5\,\mathrm{m}$ soll eine neue Einfassung erhalten (innen und außen) und mit frischer Erde gefüllt werden. Die Erde für einen Quadratmeter kostet 2,50 € und ein Meter der Einfassung kostet 11,60 €. Berechne die gesamten Materialkosten.



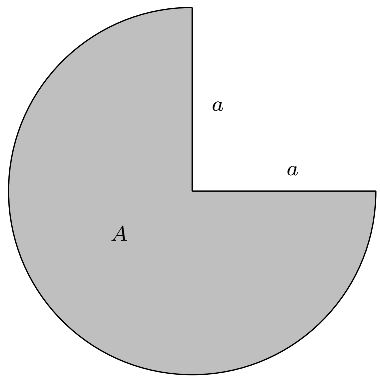
Lösung:

Länge der Einfassung:	$s = 2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 2\pi(r_1 + r_2) = 15\pi\,\mathrm{m} = 47{,}12\,\mathrm{m}$
Kosten der Einfassung:	$47{,}12 \cdot 11{,}6\,€ = 546{,}59\,€$
Fläche des Beetes:	$A = r_2^2\pi - r_1^2\pi = (r_1^2 - r_2^2)\pi = 11{,}25\pi\,\mathrm{m}^2 = 35{,}34\,\mathrm{m}^2$
Preis für die Erde:	$35{,}34 \cdot 2{,}5\,€ = 88{,}35\,€$
Gesamtpreis:	$546{,}59\,€ + 88{,}35\,€ = 634{,}94\,€ \approx 630\,€$

3.
   (a) Berechne den Flächeninhalt A und den Umfang U der nebenstehend abgebildeten Figur. Vereinfache die Ergebnisse soweit wie möglich.

   (b) Um wieviel Prozent ist A kleiner als die volle Fläche eines Kreises mit Radius a?

   Um wieviel Prozent ist U größer als der Umfang eines Kreises mit Radius a?

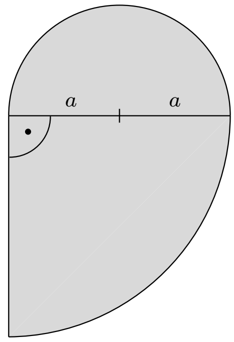


Lösung: (a) $A = \frac{3}{4}\,a^2\pi, \quad U = \frac{3}{4} \cdot 2\pi a + 2a = \left(\frac{3\pi}{2} + 2\right) a \approx 6{,}71\,a$

(b) $\frac{A}{a^2\pi} = 0{,}75 \quad \Longrightarrow \quad$ um 25% kleiner

$\frac{U}{2a\pi} = \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi} = 1{,}068 \quad \Longrightarrow \quad$ um 6,8% größer

4. (a) Berechne den Flächeninhalt A und den Umfang U der nebenstehend abgebildeten Figur. Vereinfache die Ergebnisse soweit wie möglich.
   (b) Um welchen Faktor ist A größer als die Fläche eines Kreises mit Radius a?
   Um wieviel Prozent ist U größer als der Umfang eines Kreises mit Radius a?



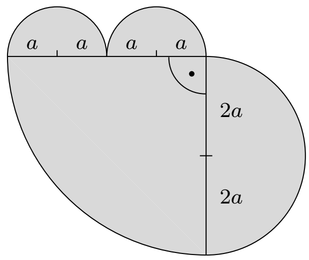
Lösung: (a) $A = \frac{1}{2}\,a^2\pi + \frac{1}{4}\,(2a)^2\pi = \frac{3}{2}\,a^2\pi$

$U = \frac{1}{2} \cdot 2\pi a + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot (2a) + 2a = 2\,(\pi + 1)\,a \approx 8{,}28\,a$

(b) $\frac{A}{a^2\pi} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \quad \Longrightarrow \quad$ um den Faktor 1,5

$\frac{U}{2a\pi} = \frac{\pi + 1}{\pi} = 1 + \frac{1}{\pi} \approx 1{,}318 \quad \Longrightarrow \quad$ um 31,8% größer

5. (a) Berechne den Flächeninhalt A und den Umfang U der nebenstehend abgebildeten Figur. Vereinfache die Ergebnisse soweit wie möglich.
   (b) Um welchen Faktor ist U größer als der Umfang eines Kreises mit Radius $2a$?
   Um wieviel Prozent ist A größer als die Fläche eines Kreises mit Radius $2a$?



Lösung: (a) $A = 2 \cdot \frac{1}{2}\,a^2\pi + \frac{1}{2}\,(2a)^2\pi + \frac{1}{4}\,(4a)^2\pi = a^2\pi + 2a^2\pi + 4a^2\pi = 7a^2\pi$

$U = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a\pi + \cdot\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2a\pi + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 4a\pi = 2a\pi + 2a\pi + 2a\pi = 6a\pi$

(b) $\frac{U}{4a\pi} = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad$ um den Faktor 1,5

$\frac{A}{(2a)^2\pi} = \frac{7}{4} = 1{,}75 \quad \Longrightarrow \quad$ um 75% größer

6. Du siehst auf dem Bild den ,,Berliner Bogen", ein berühmtes modernes Bürogebäude in Hamburg.
   Die hier sichtbare Frontfläche ist ungefähr 35m hoch und 70m breit.
   Bestimme den ungefähren Flächeninhalt der Frontfläche.

Bild: Jörg Hempel

(a) Kreuze die sinnvolle Lösung an.

A $500m^2$ B $1000m^2$ C $1200m^2$ D $1600m^2$ E $2500m^2$ F $3000m^2$

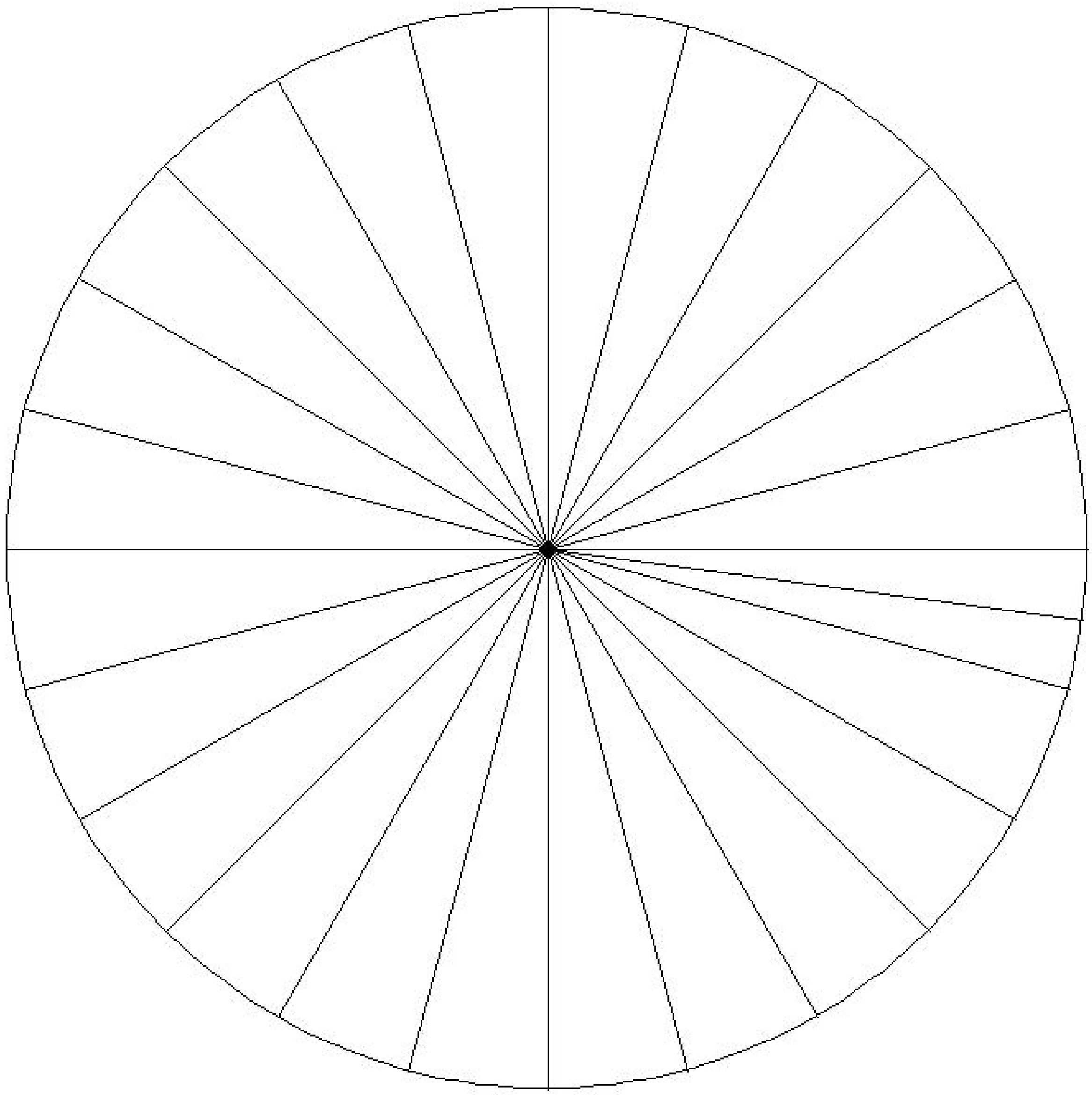
(b) Begründe deine Antwort.

Quelle: Vergleichsarbeit bundesland- und schulartübergreifend in der Jahrgangsstufe 8, Materialien zur Weiterarbeit

Lösung: (a) D $1600m^2$

(b) Umfassende Recheckfläche hat $35\text{m} \cdot 70\text{m} = 2450\text{m}^2$.
Frontfläche ist größer als die halbe Recheckfläche also D.
ODER:
Frontfläche ist kleiner als umschreibender Halbkreis mit der Fläche $\frac{1}{2}(35\text{m})^2\pi \approx 1924\text{m})^2$, also D.

7. **Vom Umfang zum Flächeninhalt**



Kannst du entdecken, wie Umfang und Flächeninhalt eines Kreises zusammenhängen? Vielleicht hilft es dir, wenn du die ausgeschnittenen Teile geeignet aneinander legst. Was passiert, wenn die Kreisteile immer dünner werden?

Lösung:

8. Zeichne einen Kreis mit Radius r auf Millimeterpapier und bestimme die Fläche des Kreises.
   (a) $r = 8\,\mathrm{cm}$
   (b) $r = 4\,\mathrm{cm}$

(c) $r = 2\,\text{cm}$

(d) $r = 1\,\text{cm}$

Finde eine Formel zur Berechnung der Kreisfläche.

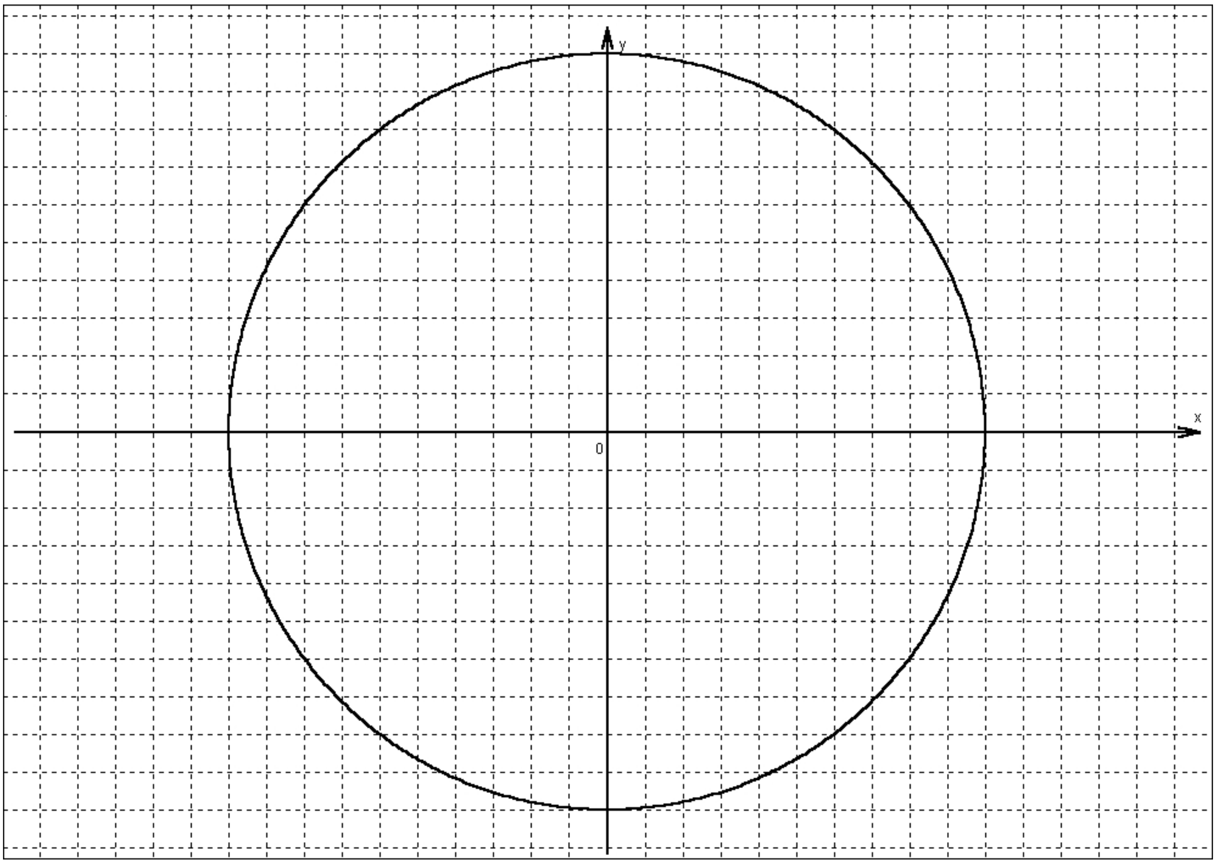
Lösung:

Teilaufgabe	a	b	c	d
Radius in cm	8	4	2	1
Fläche in cm^2	201	50,3	12,6	3,14

Die Fläche des Kreises vervierfacht sich, wenn sich der Radius verdoppelt.
Fläche des Kreises direkt proportional zu r^2. $A \approx 3{,}14\,r^2$ Hinweis:
Die Aufgabe kann in der Klasse arbeitsteilig bearbeitet werden. Z. B.
Teilaufgabe (a) gemeinsam bearbeiten, dann die Klasse in drei Gruppen einteilen, von denen jede Gruppe eine der Teilaufgaben (b), (c) und (d) bearbeitet.
ODER: Klasse in zwei Gruppen einteilen, von denen jede Gruppe zwei Teilaufgaben ((a) und (d), (b) und (c)) bearbeitet.

Erfahrungsgemäß ergeben sich bei den Ergebnissen aufgrund von Messungenauigkeiten Abweichungen!

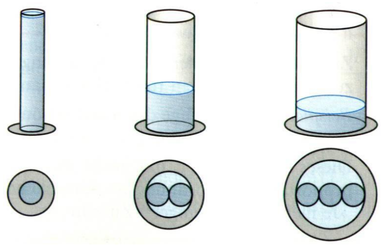
9. **Kästchen zählen**



Bestimme den Flächeninhalt des Kreises möglichst genau!

Lösung:

10. **Füll-Graphen verschiedener Gefäße**



In Glaszylinder, die verschiedene Durchmesser besitzen, wird immer 1 Liter Wasser gefüllt. Für die Zuordnung Durchmesser → Höhe gilt dann die Eigenschaft „je mehr → desto weniger“. Ist diese Zuordnung indirekt proportional?

Lösung: Anleitung: Begründe, dass bei Verdoppelung des Durchmessers sich nicht die Grundfläche verdoppelt. Begründe dann, dass beim doppelten Durchmesser das Wasser weniger als halb so hoch steht.

Anregungen zur Öffnung dieser Aufgabe:

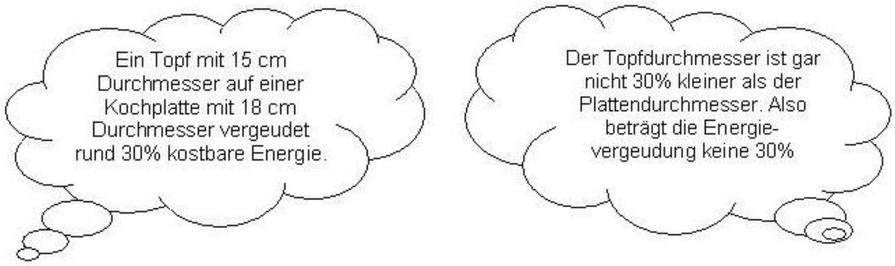
(a) Frage ersetzen durch: Betrachte die Zuordnung Durchmesser → Höhe. Was fällt dir auf?

(b) Alternative: Erstellt selbst Graphen durch Füll-Versuche.

(c) Umkehraufgabe: Gegeben sind verschiedene Graphen, Schüler zeichnen die dazu passenden Gefäße.

11. **„Heiße“ Kreise:**

Äußert euch zur Richtigkeit der Sprechblasen (A) und (B).



(A) (B)

Lösung: Fläche ist proportional zum Quadrat des Durchmessers ⇒ genutzte Energie = $(\frac{15}{18})^2\cdot$ abgestrahlte Energie der Kochplatte = 70%· abgestrahlte Energie der Kochplatte ⇒ 30%· vergeudete Energie

12. **Pizza**

PIZZE - PIZZA

	Mini Ø 20cm	Maxi Ø 30cm	Super Maxi Ø 40cm
1. Salami Tomaten, Käse, Salami	3,50	6,50	14,50
2. Roma Tomaten, Käse, Schinken*, Pilze	4,10	8,10	15,50
3. Diavolo (scharf) Tomaten, Käse, Salami, Peperoni, Oliven	5,50	9,80	16,50
4. Rustika Tomaten, Käse, Champignons, Salami, Paprika	5,50	8,50	19,50
5. Pomodori Tomaten, Käse, Schinken*, frische Tomaten, Mozarella	6,50	9,10	18,20
6. Quattro Stagioni Tomaten, Käse, Schinken*, Champignons, Artischocken	6,10	10,80	18,20
7. Bolognese Bolognese, Käse, Champignons	6,50	9,50	19,20
8. Lombarde Tomaten, Käse, Schinken*, Zwiebeln, Champignons	5,10	8,50	18,80
9. Hawaii Tomaten, Käse, Schinken*,Ananas	5,10	8,50	17,90
10. Tonno Tomaten, Käse, Thunfisch, Zwiebeln	6,50	10,50	18,10
11. Conladin Tomaten, Käse, Shrimps, Oliven, Thunfisch, Peperoni, Knoblauch	8,50	11,50	19,20
12. Pizza Speziale NEU Käse, Sauerrahm, Kartoffelscheiben, Spinat, Knoblauch, Mozarella	7,50	10,50	18,50

Beurteile die Preise in der neben stehenden Speisekarte der Firma Tornado.
Dinos Pizza Taxi bietet normalerweise runde Pizzas mit einem Durchmesser von 28 cm an. Würdest du eine Jumbo-Pizza bestellen?

Anmerkung: Es empfiehlt sich die Verwendung eines aktuellen Pizza-Prospekts mit Euro-Preisen.

Lösung: Der Preisvorteil bei der Jumbo-Pizza ist sehr gering. Die Werbung ist natürlich echt: Vielleicht sollten wir mal ein paar Schüler bei Dinos vorbeischicken ...

13. **Pizza**

Boris und Ingo haben zwei Pizzas geholt. Die Pizzas werden jeweils in 8 gleich große Stücke geschnitten. Boris isst seine eigene Pizza und außerdem 2 Stücke von Ingos Pizza, deren Rest Ingo selbst isst.

(a) Wie viel mehr Pizza isst Boris im Vergleich zu Ingo?

Die Pizzas, die kreisrund sind, sind in den Größen klein, mittel und groß erhältlich. Eine kleine Pizza hat einen Durchmesser von 30 cm, eine mittlere hat einen Durchmesser von 40 cm und eine große einen Durchmesser von 50 cm. Alle sind gleich dick. Eine kleine Pizza kostet 6 Euro, eine mittlere 9 Euro und die große 14 Euro.

(b) Welche Pizza muss man kaufen, wenn man möglichst viel Pizza pro Euro bekommen möchte?

Boris und Ingo erwarten Gäste und benötigen insgesamt 10 kleine Pizzas. Sie überlegen, an Stelle der 10 kleinen Pizzas eine Kombination aus kleinen mittleren und / oder großen Pizzas zu kaufen, mit denen sie die gleiche Menge Pizza für weniger Geld bekommen würden.

Lösung: (a) 67%

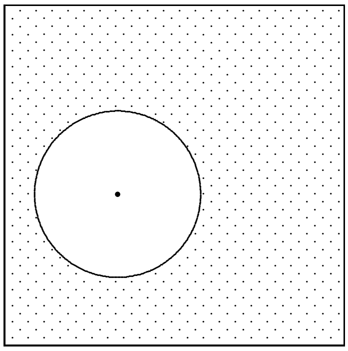
(b) Die große Pizza
(c) Man kann 9 Euro sparen.

14. **Pizza**

    Ein Pizza-Bäcker möchte seine kleine Pizza (16 cm Durchmesser) zu 7 € anbieten. Mit Blick auf die Konkurrenz möchte er auch eine Pizza zu 11 € und zu 14 € verkaufen.

Lösung: Preis proportional zur Fläche ⇒ 20 cm und 23 cm

15. Die punktierte Fläche soll mit einem einzigen geraden Schnitt halbiert werden. Begründe deinen Lösungsweg.



Lösung: Ein möglicher Schnitt geht gleichzeitig durch den Kreismittelpunkt und den Mittelpunkt des Quadrats.

16. Die Differenz der Umfänge zweier Kreise beträgt 6π, die Differenz der Flächen 18π. Berechnen Sie die Radien beider Kreise.

Lösung: $r_1 = 4{,}5$; $r_2 = 1{,}5$

17. Einem Kreis vom Radius r ist ein Quadrat einbeschrieben, dessen vier Ecken auf der Kreislinie liegen. Wieviel Prozent der Kreisfläche werden von dem Quadrat bedeckt?

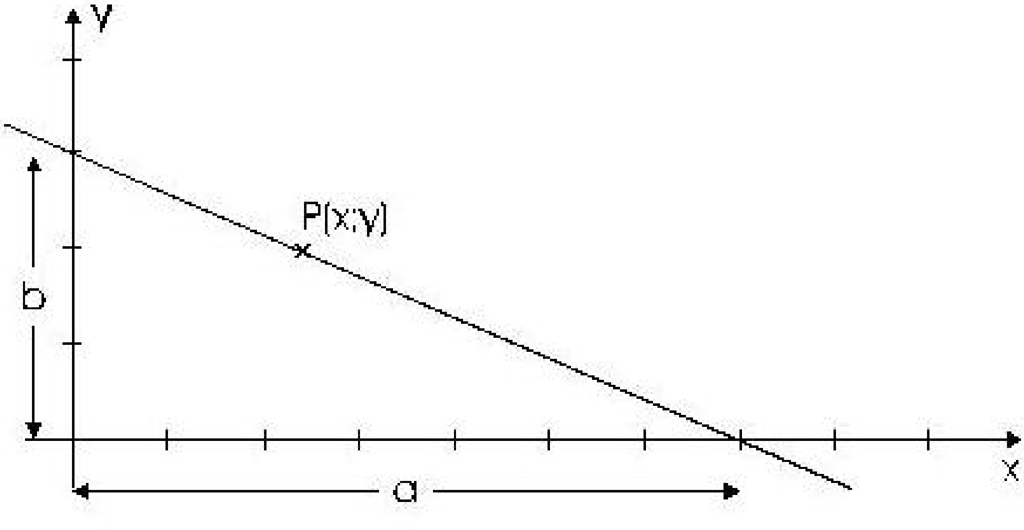
Lösung: 63,7 %

1.3 lineare Funktionen

1.3.1 Definition, Interpretation der Parameter

1. **Achsenabschnittsform der Geradengleichung**

   Eine Gerade schneidet die x-Achse bei a und die y-Achse bei b.
   Bestimme die Geradengleichung!



Variationen:

(a) Koordinaten von P als Linien einzeichnen
(b) P mit ganzzahligen Koordinaten vorgeben
(c) keinen Punkt vorgeben
(d) Zusatzfrage: Kann P auf der Geraden wandern?
(e) Geradengleichung auf verschiedene Arten bestimmen

Lösung: $\frac{y}{b} = \frac{a-x}{a}$
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

2. (a) Zeichne das Viereck $ABCD$ mit $A(-3|-4)$, $B(4|-1)$, $C(5|5)$ und $D(-2|2)$ in ein Koordinatensystem. (Platzbedarf: $-5 \leq x \leq 8$, $-7 \leq y \leq 7$)
   (b) Zeige mit Hilfe geeigneter Geradengleichungen, daß das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.
   (c) Gib seinen Flächeninhalt an.
   (d) Konstruiere ein <u>flächengleiches</u> Parallelogramm mit $a' = 5,5\,\mathrm{cm}$ und $b' = 8\,\mathrm{cm}$.

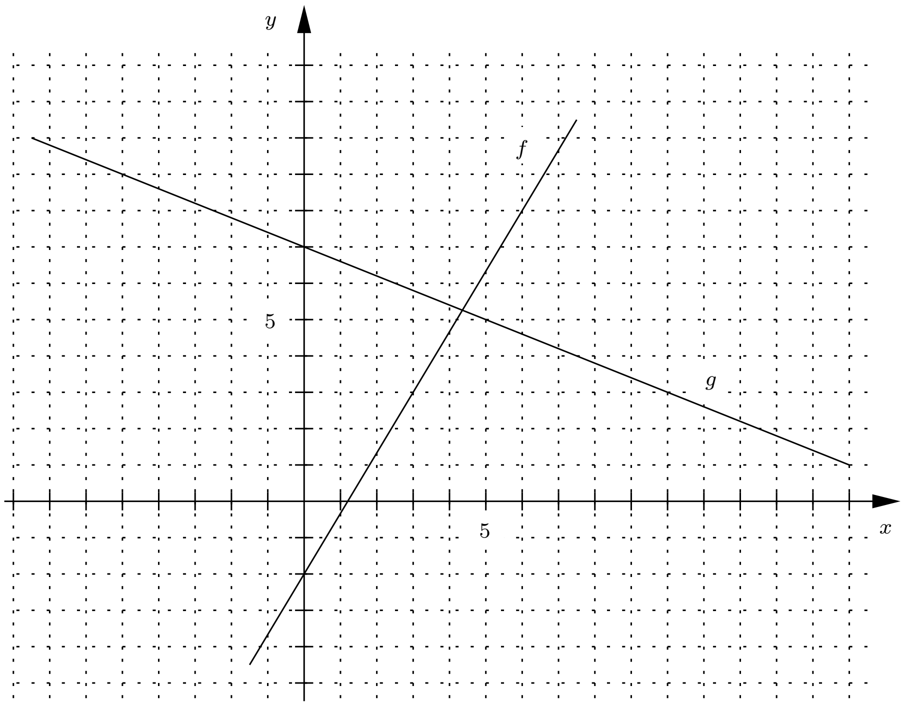
Lösung: c) $A \approx 38,8\,\mathrm{cm}^2$

1.3.2 Graph der linearen Funktion

1. Im unten stehenden Diagramm sind die Grafen der Funktionen f und g gezeichnet.

(a) Stelle die Gleichungen von f und g auf und berechne die Nullstellen der beiden Funktionen.

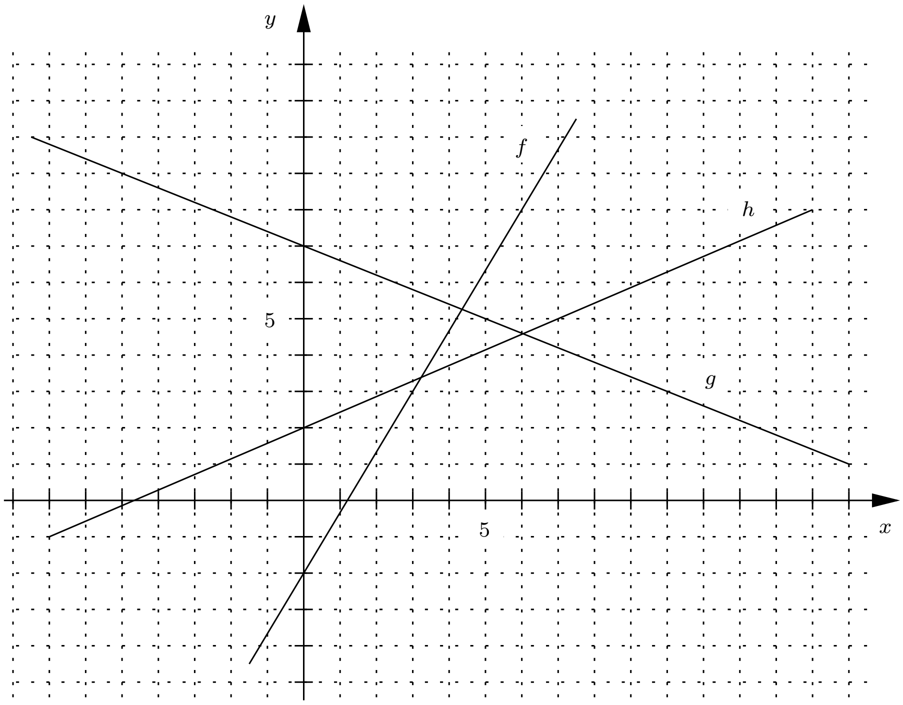
(b) Berechne die Nullstelle der Funktion h mit der Gleichung $h(x) = \frac{3}{7}x + 2$ und zeichne den Grafen von h in das Diagramm ein. Berechne $h(14)$.



Lösung: (a) $f(x) = \frac{5}{3}x - 2, \quad g(x) = -\frac{2}{5}x + 7$

$x_{0f} = \frac{6}{5} = 1{,}2, \quad x_{0g} = 17{,}5$

(b) $x_{0h} = -\frac{14}{3} = -4{,}\overline{6}, \quad h(14) = 8$



2. Der Graf der Funktion f ist eine Gerade durch die Punkte A$(1|-2{,}5)$ und B$(5|5)$, der Graf der Funktion g ist eine Gerade durch den Punkt C$(0|3{,}5)$ mit der Steigung $a_g = -\frac{3}{4}$ und der Graf der Funktion h ist eine Gerade durch die Punkte D$(-2|5)$ und B.
   (a) Zeichne die Grafen der Funktionen f, g und h in ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm. Begründe kurz, wie du den Grafen von g zeichnest.
   (b) Ermittle die Gleichungen der Funktionen f, g und h.
   (c) Beweise, dass $(-2|5) \in g$. S ist der Schnittpunkt der Grafen von f und g. Berechne die Koordinaten von S und den Flächeninhalt des Dreiecks DSB.

Lösung:

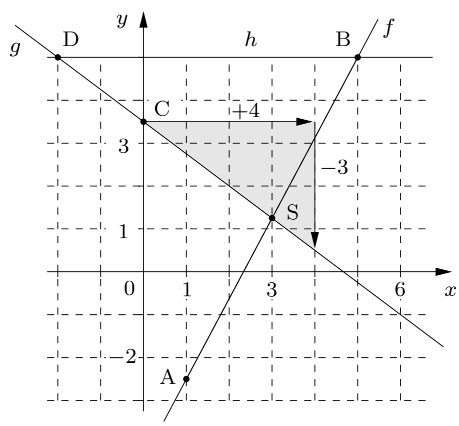
(a) $g:\ \Delta x = 4 \Longrightarrow \Delta y = a_g \Delta x = -3$

(b) Steigung von f:

$$a_f = \frac{5-(-2{,}5)}{5-1} = \frac{15}{8} = 1{,}875$$

$$f(x) = -2{,}5 + \frac{15}{8}(x-1) =$$
$$= -\frac{35}{8} + \frac{15}{8}x = -4{,}375 + 1{,}875\,x$$

$$g(x) = 3{,}5 - 0{,}75\,x, \quad h(x) = 5$$



(c) $g(-2) = 3{,}5 - \frac{3}{4}\cdot(-2) = 3{,}5 + 1{,}5 = 5, \qquad \mathrm{S}: \quad -\frac{35}{8} + \frac{15}{8}x = \frac{7}{2} - \frac{3}{4}x$

$$\frac{21}{8}x = \frac{63}{8} \quad\Longrightarrow\quad x = 3 \quad\Longrightarrow\quad y = \frac{7}{2} - \frac{3}{4}\cdot 3 = \frac{5}{4} = 1{,}25 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{S}(3|1{,}25)$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{DB}}\cdot(5-1{,}25) = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 3{,}75 = 13{,}125\,[\mathrm{FE}]$$

3. Der Graf der Funktion f ist eine Gerade durch den Punkte A$(-2|3)$ mit der Steigung $a = -\frac{4}{7}$. Die Gleichung der Funktion g ist $g(x) = \frac{5}{4}x - 3$.
   (a) Zeichne die Grafen der Funktionen f und g in ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm. Begründe kurz, wie du den Grafen von f zeichnest.
   (b) Ermittle die Gleichung der Funktionen f und berechne die Nullstellen von f und von g.
   (c) S ist der Schnittpunkt der Grafen von f und g. Berechne die Koordinaten von S und den Flächeninhalt des kleinen Dreiecks, das von den Grafen von f und von g und von der x-Achse gebildet wird.

Lösung:

(a) $f: \Delta x = 7 \Longrightarrow \Delta y = a\Delta x = -4$

(b) $f(x) = -\frac{4}{7}x + b$

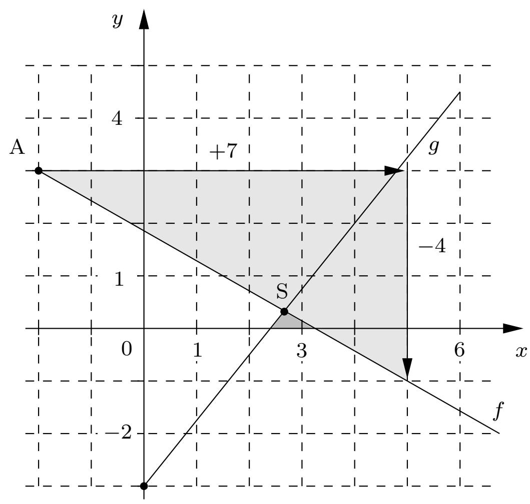
$$(-2|3)\in f \quad\Longrightarrow\quad -\frac{4}{7}(-2) + b = 3$$

$$b = 3 - \frac{8}{7} = \frac{13}{7}$$

$$f(x) = -\frac{4}{7}x + \frac{13}{7}$$

$$f(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_1 = \frac{13}{4} = 3{,}25$$

$$g(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_2 = \frac{12}{5} = 2{,}4$$



(c) $\mathrm{S}: \quad -\frac{4}{7}x + \frac{13}{7}x = \frac{5}{4}x - 3$

$$\frac{51}{28}x = \frac{34}{7} \quad\Longrightarrow\quad x_{\mathrm{S}} = \frac{8}{3} \quad\Longrightarrow\quad y_{\mathrm{S}} = g\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{5\cdot 8}{4\cdot 3} - 3 = \frac{1}{3} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{S}\left(\frac{8}{3}\middle|\frac{1}{3}\right)$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot(x_1 - x_2)\cdot y_{\mathrm{S}} = \frac{1}{2}\cdot 0{,}85\cdot\frac{1}{3} = \frac{17}{120} = 0{,}141\overline{6}\,[\mathrm{FE}]$$

4. (a) Steigung der Geraden $4x - 2y = 0$
   (b) $37\cdot(\Delta - 24)\cdot 15 = 0$

(c) Die Gerade $h : x + y = 0$ bildet mit der positiven x-Achse einen Winkel von $\ldots^\circ$.

(d) Der Stundenzeiger überstreicht in 1 Stunde einen Winkel der Größe $\ldots^\circ$.

(e) y-Abschnitt der Geraden $g : y - 21 = 0$

Quelle: Kreuzzahlrätsel von Ulrike Schätz

Lösung: (a) 2 (b) $\Delta = 24$ (c) 45°

(d) 30° (e) 21

5. (a) y-Achsenabschnitt der Geraden $g : x - 5y + 30 = 0$

   (b) $6 \cdot x = 30^2 : 10;\ x = \ldots$

   (c) Steigung der Geraden $k : y + 5 = 0$

   (d) $6! - 2! \cdot (3! - 1!) \cdot (4! - 4) = \ldots$

   (e) Größe des Winkels, den die Gerade $h : 3x - 3y - 6 = 0$ mit der positiven x-Achse bildet.

   Quelle: Kreuzzahlrätsel von Ulrike Schätz

Lösung: (a)6 (b) 15 (c) 0 (d) 520 (e) 45°

6. (a) y-Abschnitt der Geraden $k : 2x - 0,5y + 12 = 0$

   (b) Flächeninhalt des Rechtecks $WIEN$ mit $W(-13|-11)$, $I(21|-11)$, $E(21|7)$ und $N(-13|7)$.

   (c) Steigung jedes Lotes zur Geraden $g : 0,05x + y = 0$

   (d) Flächeninhalt des Dreiecks LEA mit $L(0|6)$, $E(0|-8)$ und $A(18|0)$.

   Quelle: Kreuzzahlrätsel von Ulrike Schätz

Lösung: (a) 24 (b) $(7 + 11) \cdot (13 + 21) = 612$ (c) 20 (d) $\frac{1}{2}(6 + 8) \cdot 18 = 126$

7. Gegeben ist die lineare Funktion $f(x) = -x - 1$

   (a) Zeichnen Sie den Graphen von f in ein Koordinatensystem. Zeigen Sie, dass der Punkt $P(-93|92)$ auf dem gegebenen Graphen liegt.

   (b) Beschreiben Sie einen Weg, wie Sie die Gleichung einer weiteren linearen Funktion finden, deren Graph ebenfalls durch den Punkt $P(-93|92)$ geht.

   (c) Gegeben sind lineare Funktionen g_m mit $g_m(x) = mx + 2$. Unter welchen Bedingungen für m schneiden sich die Fraphen von f und g_m im II. Quadranten.

   Quelle: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss

Lösung: (a) $f(-93) = -(-93) - 1 = 92$

(b) 1. Möglichkeit: beliebigen Punkt Q wählen und Geradengleichung durch P und Q aufstellen.

2. Möglichkeit: Beliebigen Steigung $m \neq -1$ wählen und Geradengleichung durch P mit Steigung m aufstellen.

(c) $f(x) = g_m(x) \Rightarrow$ Schnittpunkt $S(\frac{-3}{m+1}|\frac{2-m}{m+1})$ für $m \neq -1$.
II. Quadrant für $\frac{-3}{m+1} < 0$ und $\frac{2-m}{m+1} > 0 \Rightarrow -1 < m < 2$.

8. Weise durch Rechnung nach, dass die Punkte $A(-5|\frac{35}{4})$, $B(4|2)$ und $C(7|-\frac{1}{4})$ auf einer Geraden liegen.

Lösung: Die Steigungen der beiden Geraden AB und AC stimmen überein ($m = -0{,}75$).

9. Weise durch Rechnung nach, dass die Punkte $A(-10/27)$, $B(9/10)$ und $C(47/-27)$ ein Dreieck bilden!

Lösung: Die Steigungen der Geraden AB und AC stimmen nicht überein $\Rightarrow$ die Punkte A, B und C liegen nicht auf einer Geraden $\Rightarrow$ die Punkte A, B und C bilden ein Dreieck

10. (a) Zeichne das Viereck $ABCD$ mit $A(-3|-4)$, $B(4|-1)$, $C(5|5)$ und $D(-2|2)$ in ein Koordinatensystem. (Platzbedarf: $-5 \leq x \leq 8$, $-7 \leq y \leq 7$)

(b) Zeige mit Hilfe geeigneter Geradengleichungen, daß das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

(c) Gib seinen Flächeninhalt an.

(d) Konstruiere ein <u>flächengleiches</u> Parallelogramm mit $a' = 5,5\,\text{cm}$ und $b' = 8\,\text{cm}$.

Lösung: c) $A \approx 38,8\,\text{cm}^2$

11. In einem Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) sind die Punkte $A(7|0)$ und $B(5|4)$ sowie die Gerade g_1 durch die Gleichung $3x - 4y + 12 = 0$ gegeben.

(a) Zeichne die Punkte A und B sowie (mit Hilfe eines Steigungsdreiecks) die Gerade g_1 in das Koordinatensystem ein!

(b) Die Gerade g_1 schneidet die y-Achse im Punkt C und die x-Achse im Punkt D. Berechne die Koordinaten von C und D!

(c) Ermittle eine Gleichung der durch die Punkte A und B bestimmten Geraden g_2 in expliziter Form!

(d) Berechne ausführlich den Inhalt des Vierecks $ABCD$!

Lösung: (b): $C(0|3)$, $D(-4|0)$; $(c):\ y = -2x + 14$; $(d):\ A_{ABCD} = 27{,}5\,cm^2$

12. (a) Zeige, dass der Punkt $P(1|3)$ auf der Geraden mit der Gleichung $y = -2x + 5$ liegt.
    (b) Gib die Gleichung irgendeiner weiteren Geraden an, auf welcher der Punkt $P(1|3)$ liegt.

    Quelle: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 10 der Gymnasien 2004

Lösung: (a) $-2 \cdot 1 + 5 = 3 \Rightarrow P$ liegt auf der Gerade
(b) Z. B. $y = -3x + 6$

13. Prüfe durch Rechnung, ob die Punkte $A(-3|3{,}5)$, $B(3|0)$ und $C(0{,}5|1{,}5)$ auf einer Geraden liegen. (Rechne mit Brüchen.)

Lösung: Die Gerade AB hat die Gleichung $y = -\frac{7}{12}x + \frac{7}{4}$. Einsetzen von $x = 0{,}5$ ergibt $y = \frac{35}{24} \neq 1{,}5$. C liegt also nicht auf AB.

14. Untersuche <u>rechnerisch</u>, ob die drei Punkte $A(-6|4)$, $B(5|-3)$ $C(-7|\frac{53}{11})$ auf einer Geraden liegen.

Lösung: $C \notin AB$

15. Die Punkte $A(2|3)$ und $B(7|7)$ bestimmen den Graphen einer linearen Funktion g.
    (a) Bestimme den Funktionsterm $g(x)$.
    (b) Gib den Funktionsterm einer linearen Funktion f an, deren Graph parallel zu dem von g verläuft und durch den Punkt $R(5|2)$ geht.

Lösung: $g(x) = \frac{4}{5}x + \frac{7}{5}$, $f(x) = \frac{4}{5}x - 2$

16. Wie lautet die Funktionsgleichung der Parallelen zu $y = \frac{7}{3}x - \frac{12}{5}$ durch den Punkt $P(18|-23)$?

Lösung: $y = \frac{7}{3}x - 65$

17. Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch $P(-1|2)$ geht und zu der Geraden durch $A(0|-1)$ und $B(3|3)$ parallel ist?

Lösung: $y = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$

18. Weise durch Rechnung nach, dass die Punkte $A(-7|\frac{63}{5})$, $B(-5|11)$ und $C(15|-5)$ auf einer Geraden liegen.

Lösung: Die Steigungen der beiden Geraden AB und AC stimmen überein ($m = -0{,}8$).

19. Bestimme das ? durch Rechnung so, daß die drei Punkte $A(15|-43)$, $B(?|17)$ und $C(-12|38)$ auf einer Geraden liegen.

Lösung: $? = -5$

20. Gegeben ist die Funktion $f:\ x \longmapsto -2x - 3$.
    (a) Begründe ohne Zeichnung, in welchen Quadranten der Graph der Funktion verläuft.
    (b) Bestimme die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und zeichne den Graphen.
    (c) Zeige durch Rechnung, dass der Punkt $\mathrm{P}(3|-9)$ auf dem Graphen, der Punkt $\mathrm{Q}(-12|-13)$ jedoch nicht auf dem Graphen liegt.
    (d) Wie lautet die Funktionsvorschrift derjenigen linearen Funktion, auf deren Graphen sowohl P als auch Q liegt.

Lösung: (b) $x = -1{,}5$; $y = -3$ (d) $y = \frac{4}{15}x - 9{,}8$

21. Kennzeichne in einem kartesischen Koordinatensystem unter genauer Beachtung der Ränder mit Farbe diejenige Punktmenge, die zugleich alle folgenden Bedingungen erfüllt:

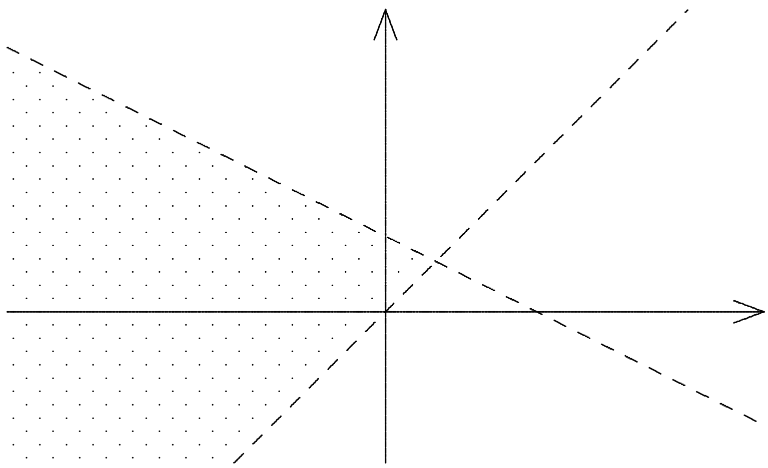
$$5x - 6y + 18 > 0\ ; \qquad 3x - 6 \leqq 0\ ; \qquad y \geqq -\frac{1}{3}x - 4$$

Lösung:

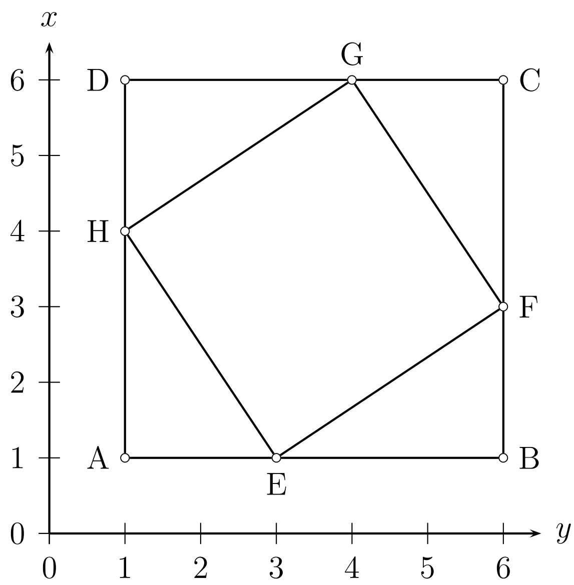
22. Bestimme durch Zeichnung die Menge aller Punkte (x, y), die folgende beide Bedingungen erfüllen:

$$y > x \text{ und } 2y + x < 2$$

Lösung:



23. In der nebenstehend abgebildeten Grafik ist das Viereck ABCD ein Quadrat der Seitenlänge 5 und es ist $\overline{\mathrm{EB}} = 3$, $\overline{\mathrm{BF}} = 2$ und $\overline{\mathrm{DG}} = 3$



(a) Ermittle die Funktionen f und g deren Grafen die Geraden EF und EH sind.

(b) Formuliere einen algebraischen Zusammenhang zwischen den Zahlen in den Funktionstermen $f(x)$ und $g(x)$, die die Steigung der Grafen wiedergeben.

(c) Begründe, dass die vier Dreiecke ΔEBF, ΔFCG, ΔGDH und ΔHAE kongruent sind.

(d) Begründe, dass das Viereck EFGH ein Quadrat ist. Welche Aussage kann man daraus für die Lage der Gerade EF bezüglich der Geraden EH ableiten?

(e) Formuliere aus den Erkenntnissen der vor stehenden Aufgaben einen mathematischen Satz, der einen Zusammenhang zwischen den Parametern in den Funktionstermen, die die Steigung wiedergeben und der Lagebeziehung der Grafen der zugehörigen Funktionen herstellt.

(a) $f : x \mapsto y = f(x) = \frac{2}{3}x - 1, g : x \mapsto y = g(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$

(b) $\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$

(c) Begründung mit dem SWS–Satz (alle vier Dreiecke stimmen in den Längen zwei entsprechender Seiten und dem 90°–Winkel, den die zugehörigen Seiten einschließen, überein).

(d) Wegen der vorigen Teilaufgabe haben sind die vier Seiten des Vierecks EFGH gleich lang. Jeder der vier Innenwinkel bildet zusammen mit je zwei (unterschiedlichen) Innenwinkel der benachbarten Dreiecke einen gestreckten Winkel. Da die beiden (verschiedenen) Innenwinkel der benachbarten Dreiecke ein Winkelsumme von 90° haben, ist jeder Innenwinkel von EFGH ein 90°–Winkel.

(e) Das Produkt der Steigungen zweier affinder Funktionen, deren Graphen senkrecht zueinander sind, ist -1.

1.3.3 lineare Gleichungen

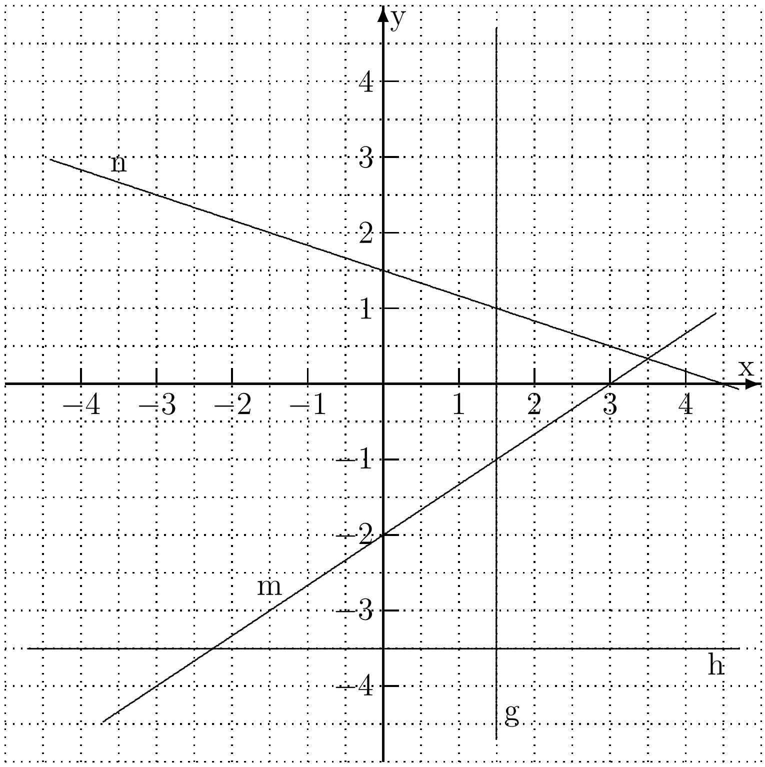
1. Gegeben sind die drei Geraden $g_1 : 2x+6y-9 = 0$, $g_2 : x+1,5 = 0$ und $g_3 : y = x-1$.

   (a) Zeichne die drei Geraden in ein Koordinatensystem ein und berechne den Schnittpunkt von g_1 und g_3.

   (b) Welche der drei Geraden ist nicht Graph einer Funktion? Begründe deine Antwort kurz.

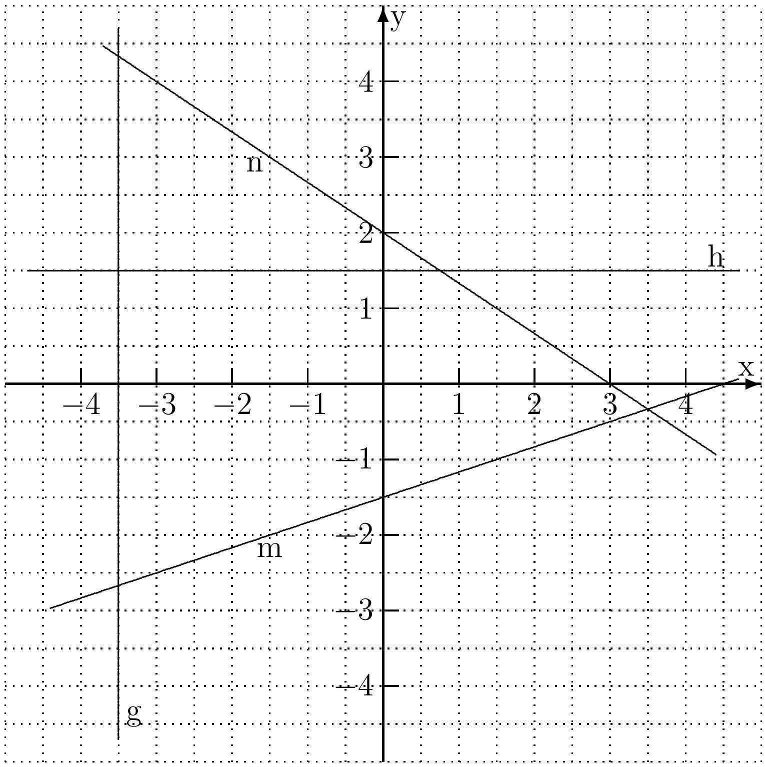
Lösung: Schnittpunkt $(\frac{15}{8}|\frac{7}{8})$

2. Jede Gerade im dargestellten Koordinatensystem veranschaulicht die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit zwei Variablen. Gib die Gleichungen an!



Lösung: $g: x = 1,5$; $h: y = -3,5$; $n: y = -\frac{1}{3}x + 1,5$; $m: y = \frac{2}{3}x - 2$

3. Jede Gerade im dargestellten Koordinatensystem veranschaulicht die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit zwei Variablen. Gib die Gleichungen an!



Lösung: $g: x = -3,5$; $h: y = 1,5$; $n: y = -\frac{2}{3}x + 2$; $m: y = \frac{1}{3}x - 1,5$

4. Gegeben ist die lineare Gleichung $5x - 7y = 6$.
   (a) Überprüfe durch eine Rechnung, ob $(-3|3)$ eine Lösung ist!
   (b) Gib zwei Lösungen an!

Lösung: a) keine Lösung; b) z.B. $(4|2)$, $(11|7)$, $(-3|-3)$

5. Gegeben ist die lineare Gleichung $6x - 7y = 5$.
   (a) Überprüfe durch eine Rechnung, ob $(-4|4)$ eine Lösung ist!
   (b) Gib zwei Lösungen an!

Lösung: a) keine Lösung; b) z.B. $(2|1)$, $(5,5|4)$, $(1|\frac{1}{7})$

6. Löse die Gleichung $\left(p + \frac{a}{V^2}\right) \cdot (V - b) = n \cdot R \cdot T$ nach der Variablen a auf! Nenne auch die Bedingungen, unter denen dies nur möglich sein kann!

Lösung: $a = \frac{nRTV^2}{V-b} - pV^2$; $V \neq 0$; $V \neq b$

7. Löse die Gleichung $\quad \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{y} \quad$ zuerst nach z, dann nach x auf.

Lösung: $z = \frac{xy}{2x+y}$; $\quad x = \frac{yz}{2(y-z}$

8. Gib für die folgende Gleichung eine vollständige Lösung an (übersichtliche Darstellung, Fallunterscheidung). Die Formvariablen vertreten beliebige rationale Zahlen.

$$3p(x - 3p - 2) + 5q^2 \;=\; (2p + q)x - 2p(2p + 3)$$

Lösung: $L_{p=-q} = \mathbb{Q}$; $L_{p\neq -q} = \{5(p - q)\}$

9. Gib für die folgende Gleichung eine vollständige Lösung an (übersichtliche Darstellung, Fallunterscheidung). Die Formvariablen vertreten beliebige rationale Zahlen.

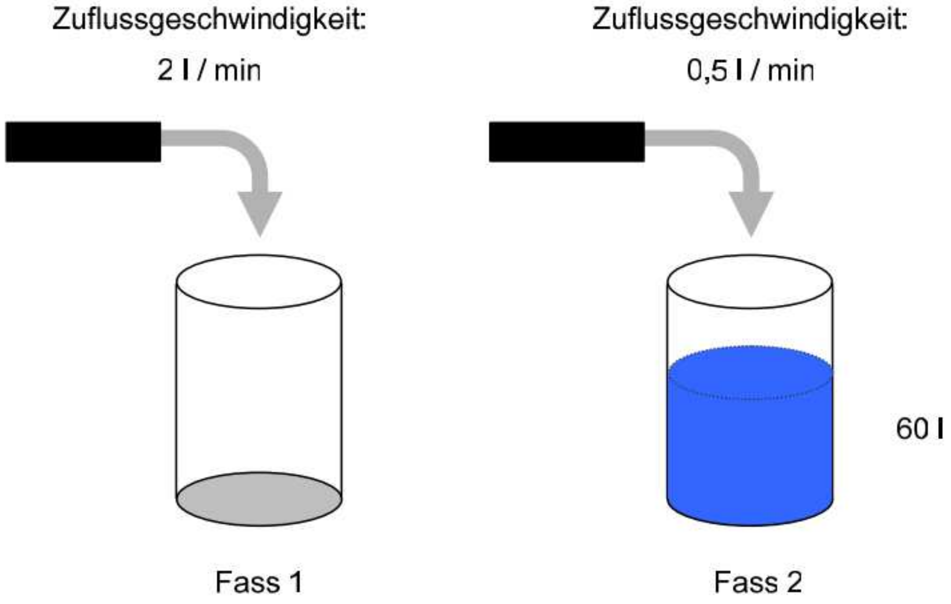
$$4a(x + 2a + 1) + 3b^2 \;=\; (3a - b)x + a(4 + 11a)$$

Lösung: $L_{a=-b} = \mathbb{Q}$; $L_{a\neq -b} = \{3(a - b)\}$

1.3.4 Anwendungsaufgaben

1. **Zwei Fässer**

   Jedes der beiden dargestellten Fässer fasst genau 100 l. Sie werden mit Wasser gefüllt. Zu Beginn des Füllvorgangs enthält Fass 2 bereits 60 l. Fass 1 wird mit $2\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}}$ gefüllt, Fass 2 mit $0,5\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}}$



(a) Stimmt es, dass Fass 2 zuerst überläuft? Schreibe auf, wie du zu deiner Entscheidung gekommen bist.

(b) Gibt es einen Zeitpunkt, zu dem das Wasser in beiden Fässern gleich hoch steht? Schreibe auf. wie du zu deiner Antwort gekommst.

Quelle: VERA C 2008

Lösung: (a) Z. B.:
Fass I: $2x = 100 \Rightarrow$ Fass I läuft nach 50 min über
Fass II: $0,5x + 60 = 100 \Rightarrow$ Fass II läuft nach 80 min über

(b) Z. B.: $2x = 0,5x + 60 \Rightarrow$ Gleichstand nach 40 min

2. Bei den Tarifen der Mobilfunkanbieter kommen zu einer festen monatlichen Grundgebür F Entgelte für jede Gesprächsminute dazu. Damit ergeben sich Zusammenhänge wie $G(t) = Mt + F$, wobei M der Minutenpreis des jeweiligen Anbieters in $\frac{\text{DM}}{\text{min}}$ ist und t die Anzahl der vertelefonierten Minuten. $G(t)$ sind die jeweils am Monatsende auflaufenden Gesamtkosten.

   (a) Trage die Graphen für verschiedene Anbieter (oder auch die Graphen für verschiedene Tarife mit unterschiedlichen Grundgebühren eines einzelnen Anbieters) in ein t-G-Diagramm ein und ermittle für ein bestimmtes individuelles Telefonierprofil (z. B. monatlich 60 Minuten ins Festnetz) die günstigsten Anbieter.

   (b) Welche Bedeutung haben die Schnittpunkte der Graphen?

   (c) Welche Vorteile bietet die sekundengenaue Abrechnung?

   Literatur: Sinnstiftende Kontexte, Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung München, 2000

Lösung: (a)

(b) Anzahl der vertelefonierten Minuten, bei denen für verschiedene Anbieter bzw. Tarife gleiche Gesamtkosten entstehen.

(c)

3. Die Polizei registriert einen Sportwagen auf der Autobahn München-Nürnberg am Kontrollpunkt A bei Kilometer 50 um 1.00 Uhr und am Kontrollpunkt B bei Kilometer 175 um 1.50 Uhr.

   (a) Berechne die Geschwindigkeit v des Sportwagens und zeichne das Zeit-Weg-Diagramm im Zeitraum von 0.30 Uhr bis 2.30 Uhr (Ursprung bei 0.00 Uhr; $1\,\mathrm{h} \mathrel{\widehat{=}} 3\,\mathrm{cm}$; $100\,\mathrm{km} \mathrel{\widehat{=}} 4\,\mathrm{cm}$)!

   (b) Stelle die Gleichung der Zeit-Weg-Funktion $x(t)$ auf! Wo befindet sich der Sportwagen um 1.15 Uhr?

   (c) Wann fuhr der Wagen auf die Autobahn (Kilometer Null) und wann passiert er den dritten Kontrollpunkt bei Kilometer 210?

Lösung: (a) $v = 2,5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}} = 150\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

(b) $x(t) = 150\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot t - 100\,\mathrm{km}$; $x(1.15\,\mathrm{Uhr}) = x(1,25\,\mathrm{h}) = 87,5\,\mathrm{km}$

(c) $t(0) = \frac{2}{3}\,\mathrm{h}$, d.h. um 0.40 Uhr ; $t(210\,\mathrm{km}) = \frac{31}{15}\,\mathrm{h}$, d.h. um 2.04 Uhr.

4. Um 0.00 Uhr startet eine B727 mit der Geschwindigkeit $v_1 = 800\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ von New York ($x = 6400\,\mathrm{km}$) nach Frankfurt ($x = 0$), um 2.00 Uhr startet eine Phantom mit $v_2 = 2560\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ von Frankfurt nach New York.

   (a) Stelle die Funktionsgleichungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ für die Ortskoordinaten der beiden Flugzeuge auf und zeichne ihre Graphen in **ein** Koordinatensystem ($1\,\mathrm{h} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$; $1000\,\mathrm{km} \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$)!

   (b) Wann und wo begegnen sich die beiden Flugzeuge? Berechne die gesuchten Werte, auf ganze Minuten und auf ganze km gerundet! Überprüfe die Ergebnisse am Graphen durch das Zeichnen geeigneter Hilfslinien!

Lösung: (a) $x_1(t) = -800\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot t + 6400\,\mathrm{km}$; $x_2(t) = 2560\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot t - 5120\,\mathrm{km}$

(b) $t = 3\,\frac{3}{7}\,\mathrm{h}$, d.h. um 3.25.43 Uhr ; $x = 3657\,\frac{1}{7}\mathrm{km}$.

5. Die Tankstelle am Beginn einer Autobahn ($x = 0$) wird überfallen. Der Täter flüchtet um 14.15 Uhr mit der Geschwindigkeit $v_1 = 120\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ auf die Autobahn. Die Polizeistation, die 20 km vor dem Autobahnbeginn liegt ($x = -20\,\mathrm{km}$), wird um 14.30 Uhr benachrichtigt und es wird sofort die Verfolgung mit $v_2 = 160\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ aufgenommen.

(a) Stelle dir vor, daß der Täter beim Fluchtbeginn eine Stopuhr einschaltet ($t = 0$ um 14.15 Uhr) und schreibe die Funktionsgleichungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ für die Ortskoordinaten der beiden Fahrzeuge hin! Zeichne die Graphen der beiden Funktionen in **ein** Koordinatensystem (1 h $\widehat{=}$ 4 cm; 100 km $\widehat{=}$ 5 cm)!

(b) Wann und wo holt die Polizei den Täter ein? Überprüfe die berechneten Ergebnisse am Graphen durch das Zeichnen geeigneter Hilfslinien!

Lösung: (a) $x_1(t) = 120\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$; $x_2(t) = 160\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t - 60\,\text{km}$

(b) $t = \frac{3}{2}$ h, d.h. um 15.45 Uhr ; $x = 180$km.

6. Herr Meier bezieht für sein Haus Gas. Er hat die Wahl zwischen dem Kleinverbrauchstarif H1 und dem Grundpreistarif H2. Beim Tarif H1 muß er monatlich 5 € bezahlen sowie 9 Cent für jede Kilowattstunde. Beim Tarif H2 sind die monatlichen Kosten 10 €, pro Kilowattstunde müssen aber nur 6 Cent entrichtet werden.

   (a) Gib Funktionsterme $h_1(x)$ und $h_2(x)$ für beide Tarife an, die dem Jahresverbrauch x in Kilowattstunden den Jahresgesamtpreis y in € zuordnen.

   (b) Stelle beide Tarife bis zu dem Wert $x = 3000$ graphisch dar.

   (Maßstab: 10 € $\widehat{=}$ $0,5$ cm in y-Richtung, 100 Kilowattstunden $\widehat{=}$ $0,5$ cm in x-Richtung. Verwende für die Zeichnung eine eigene Seite.)

   (c) Von welchem monatlichen Mindestverbrauch x an würdest du Herrn Meier raten, den Tarif H2 zu wählen? Begründe durch Rechnung.

Lösung: $h_1(x) = 0,09x + 60$, $h_2(x) = 0,06x + 120$, ab 2000 Kilowattstunden ist H2 günstiger. (PS: Auch Gastarife werden nach Kilowattstunden abgerechnet.)

7. 10 Minuten nach Beginn eines Regenschauers befinden sich 20 Liter Wasser in einer Regentonne. Jeweils in 3 Minuten nimmt die Wassermenge um 1 Liter zu.

   (a) Zeichne den Graphen der Zuordnung
   Zeit nach Beginn des Schauers (in Minuten) $\mapsto$ Wassermenge (in Litern)
   in ein geeignetes Koordinatensystem.

   (b) Berechne die Wassermenge, die zu Beginn des Schauers bereits in der Tonne war.

   (c) Gib die Zuordnungsvorschrift an.

   (d) Die Tonne faßt 50 Liter. Wie lange müßte der Regenschauer dauern, damit die Tonne überläuft?

Lösung: b) $16\frac{2}{3}\,l$; c) $y = \frac{1}{3}x + 16\frac{2}{3}$; d) 100 Minuten

8. In einer Badewanne befinden sich 105 Liter Wasser. Nachdem der Stöpsel herausgezogen wurde, fließen pro Minute 18 Liter Wasser durch den Ausguß ab.
   (a) Zeichne den Graphen der Zuordnung Zeit $\mapsto$ Wassermenge in der Wanne.
   (b) Gib die Zuordnungsvorschrift an.
   (c) Berechne die Zeitdauer in Minuten und Sekunden, bis die Wanne leer ist.

Lösung: b) x: Zeit in Minuten; y:Wassermenge in Litern; $y = 105 - 18x$
c) 5 min 50 s

9. Die Bahnhöfe A und B sind 103 km weit voneinander entfernt. Ein Eilzug verläßt um 9.00 Uhr Bahnhof A und fährt mit durchschnittlich 85 km pro Stunde in Richtung Bahnhof B. Von dort startet 20 Minuten später ein D-Zug mit durchschnittlich 113 km pro Stunde in Gegenrichtung.
   (a) Bestimme graphisch, wann und wo sich die beiden Züge begegnen. Wähle dazu die Einheiten so, daß eine möglichst hohe Genauigkeit erreicht wird.
   (b) Stelle die zugehörigen Funktionen auf.

Lösung: (a) Um 9.42 Uhr, 61 km von A entfernt
(b) Eilzug: $x \longmapsto 85x$; D-Zug: $x \longmapsto -113x + 140\frac{2}{3}$

10. Ein Schwimmwettkampf wird auf einem Fluß ausgetragen und dazu eine 100 m lange Strecke am Flußufer markiert. Ein Schwimmer legt die Strecke zunächst flußabwärts in $66\frac{2}{3}$ s zurück, beim Rückweg flußaufwärts kann er sein Tempo halten, braucht aber trotzdem 100 s.

    Berechne die Fließgeschwindigkeit des Flusses und die Eigengeschwindigkeit des Schwimmers.

Lösung: Fluß: $0,25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, Schwimmer: $1,25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

11. Hänsel und Gretel sammeln Brennholz, eine alte Dame hilft Ihnen dabei. Gretel schafft eineinhalb mal soviel wie Hänsel, während die alte Dame doppelt so lange wie Hänsel braucht. Nach 12 Stunden gemeinsamer Arbeit sind sie fertig. Wie lange hätte jeder alleine gebraucht. Ansatz und vollständige Rechnung.

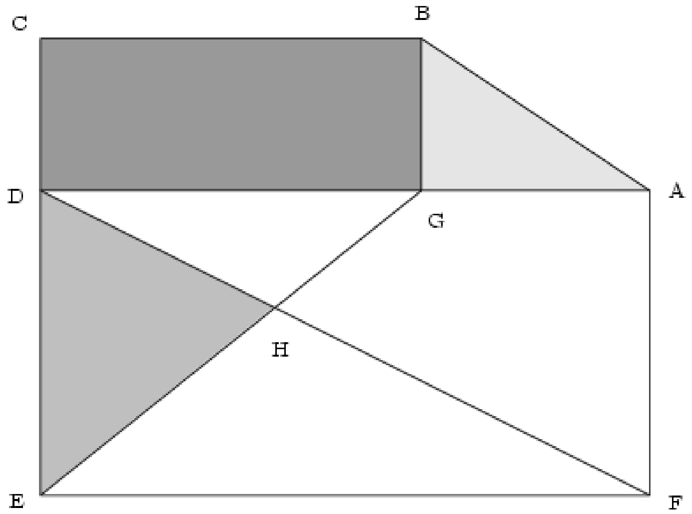
Lösung: Hänsel: 36 h, Gretel: 24 h, Dame: 72 h

12. **Landvermessung**

    „In diesem Bild stimmt kein Maß. Wie soll ich da die Grundstückssteuer für Bauer Heins fünfeckigen Acker festlegen?“ fragt der Finanzbeamte.

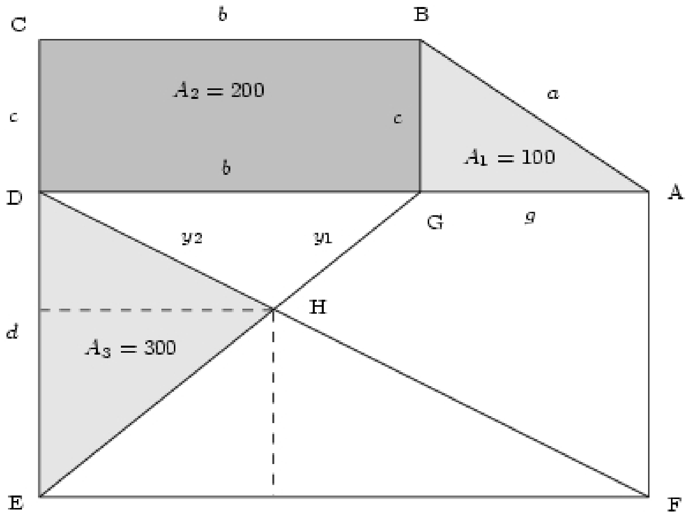
„Längentreu zu zeichnen, war noch nie meine Stärke, dafür ist alles, was wie ein rechter Winkel aussieht, in Wirklichkeit auch einer“, erklärt Messgehilfe Schluri „und schließlich hat mir Hein versichert, dass er für das Dreieck ABG immer 100 € bezahlt. Für das Rechteck $BCDG$ muss er 200 € und für das Dreieck DEH 300 € bezahlen.“

Die Steuer ist der Fläche proportional. Wieviel muss Hein bezahlen?



Quelle: Spektrum der Wissenschaft

Lösung:



Der Flächeninhalt für A_1 und A_2 berechnet sich nach:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot c \cdot g; \qquad A_2 = c \cdot b$$

Mit $A_2 = 2 \cdot A_1$ folgt:

$$c \cdot b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot c \cdot g \quad \Longrightarrow \quad b = g$$

Geradengleichung für y_1 und y_2

$$y_1 = \frac{d}{b} \cdot x \qquad y_2 = -\frac{d}{2b} \cdot x + d$$

Die Schnittpunktkoordinaten für den Punkt H ergeben sich aus:

$$y_1 = y_2, \qquad \frac{d}{b} \cdot x = -\frac{d}{2b} \cdot x + d \quad \Longrightarrow \quad x = h = \frac{2}{3} \cdot b, \quad y = \frac{2}{3} \cdot d$$

Die Fläche A_3 berechnet sich aus:

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot b \cdot d = 3A_1 = \frac{3}{2}bc \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{9}{2} \cdot c$$

Nachdem das Verhältniss zwischen den Seitenlängen c und d bekannt ist, kann der gesamte Flächeninhalt berechnet werden. Um ein Flächenmaß zu erhalten wird $c = 10\,\text{cm}$ definiert.

$$A_2 = 200\,\text{cm}^2 = b \cdot c \quad \Longrightarrow \quad b = 20\,\text{cm}, \qquad d = \frac{9}{2} \cdot c = 45\,\text{cm}$$

$$A_{\text{ges}} = (c + d) \cdot (b + b) - A_1 = (10 + 45)\,\text{cm} \cdot (20 + 20)\,\text{cm} - 100\,\text{cm}^2 = 2100\,\text{cm}^2$$

Bauer Hein muss demnach 2100,- € für seinen fünfeckigen Acker bezahlen.

1.3.5 lineare Ungleichungen

1. Kennzeichne in einem Koordinatensystem die Punkte, deren Koordinaten den folgenden Ungleichungen genügen:

$$x \leq 3 \text{ und } y < \frac{x}{3} + 4 \text{ und } 3x + 2y - 8 \geq 0$$

Lösung:

2. Kennzeichne in einem Koordinatensystem die Punkte, deren Koordinaten den folgenden Ungleichungen genügen:

$$x \geq 2 \text{ und } y < -\frac{x}{3} + 6 \text{ und } x - \frac{3y}{7} - \frac{6}{7} \leq 0$$

Lösung:

3. Löse folgende Ungleichung rechnerisch <u>und</u> graphisch:

$$-\frac{3}{5}x - \frac{6}{5} < 0$$

Lösung: $L =]-2; \infty[$

1.4 lineare Gleichungssysteme

1.4.1 Lösungsverfahren (graphisch und rechnerisch)

1. Berechne die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} &= \frac{1}{12} \\ 3x - 4y &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rl} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = \frac{1}{12} & (1)\,|\cdot 12 \\ 3x - 4y = \frac{1}{6} & (2)\,|\cdot 6 \\ \hline 4x - 3y = 1 & (3)\,|\cdot 8 \\ 18x - 24y = 1 & (4)\,|\cdot(-1) \\ \hline 32x - 24y = 8 & (5) \\ -18x + 24y = -1 & (6) \\ \hline (5)+(6): \quad 14x = 7 & (7) \\ x = \frac{1}{2} & (8) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrl} (8) \text{ in } (3): & 4 \cdot \frac{1}{2} - 3y = 1 & (9) \\ & -3y = 1 - 2 & (10) \\ & y = \frac{1}{3} & (11) \end{array}$$

$$L = \left\{ \left(\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{3} \right) \right\}$$

2. **Aufgabe zur Anwendung**

   Kleine Ursache - große Wirkung. Löse beide Gleichungssysteme rechnerisch.

   (a)
   $$\left| \begin{array}{l} 123x - 124y = 61 \\ 248x - 250y = 123 \end{array} \right|$$

   (b)
   $$\left| \begin{array}{l} 123,01x - 124y = 61 \\ 248x - 250y = 123 \end{array} \right|$$

   In welchen Quadranten liegen die Schnittpunkte? Vergleiche die Ergebnisse und versuche zu erklären!

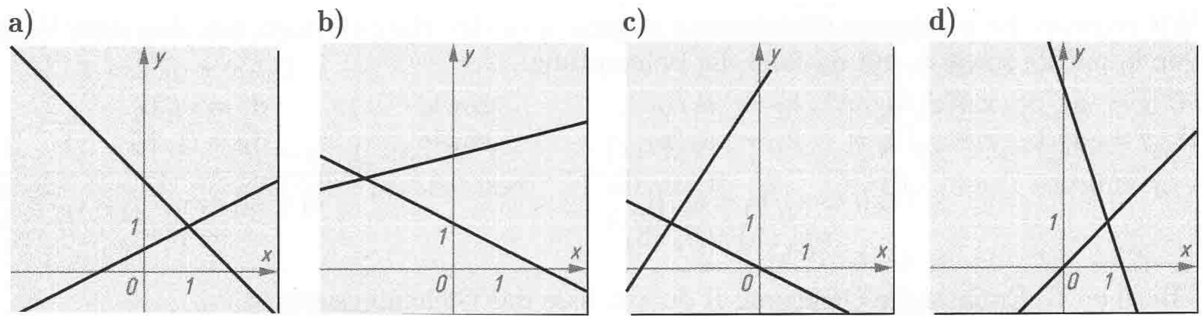
Lösung: (a) $x = 1$ und $y = 0,5$

(b) $x = -4$ und $y = -4,46$

Die Ursache dafür liegt darin, dass die beiden Geraden fast die gleiche Steigung haben und folglich eine geringfügige Änderung der Steigung einer Geraden den Schnittpunkt beider Geraden erheblich verschiebt.

3. **Aufgabe zur Anwendung**

Welches Gleichungssystem wird in den Grafiken jeweils graphisch gelöst?



Lösung: (a)

$$\left| \begin{array}{l} y = 0,5x + 0,5 \\ y = -x + 2 \end{array} \right|$$

(b)

$$\left| \begin{array}{l} y = 0,25x + 0,25 \\ y = -0,5x + 1 \end{array} \right|$$

(c)

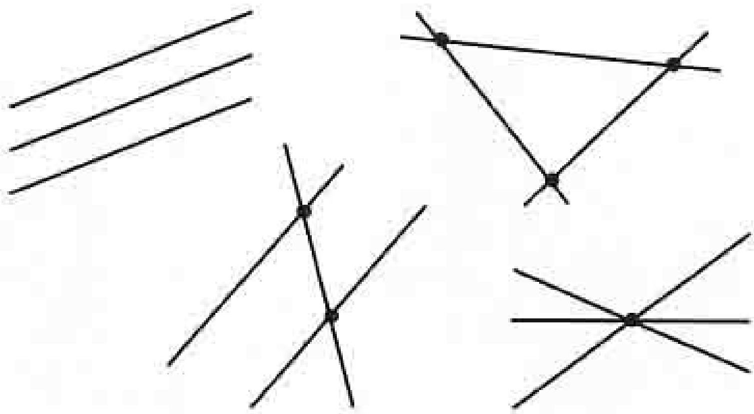
$$\left| \begin{array}{l} y = 2x + 4 \\ y = -0,5x \end{array} \right|$$

(d)

$$\left| \begin{array}{l} y = -3x + 4 \\ y = x \end{array} \right|$$

4. **Aufgabe zur Anwendung**

Drei verschiedene Geraden können unterschiedlich viele Schnittpunkte miteinander haben. Erstelle für alle vier Fälle ein Gleichungssystem.



Lösung:

5. Gegeben sind folgende lineare Gleichungen:

$$(1) \quad -3x + 5y = 20; \quad (2) \quad x + 2y = 10 \quad (3) \quad 3x + 6y = 6$$

   (a) Zeichne ihre Graphen in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm).
   (b) Zu welchen Gleichungspaaren kann man aus der Zeichnung die Lösung entnehmen? Gib diese Gleichungspaare und jeweils ihre Lösung an.
   (c) Zwei der Geraden verlaufen offensichtlich parallel. Weise dies anhand der zugehörigen Gleichungen durch geeignete Umformungen nach.

Lösung: (b) Zu (1) und (2): $(0,9|4,5)$

6. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

   (I) $5x - 2y = 3$
   (II) $x + 4y = 16$

   Bestimme die Lösung zeichnerisch und überprüfe das Ergebnis durch Einsetzen.

Lösung: $L = \{(2|3,5)\}$

7. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

   (I) $5x + 2y = 3$
   (II) $x - 4y = 16$

   Bestimme die Lösung zeichnerisch und überprüfe das Ergebnis durch Einsetzen.

Lösung: $L = \{(2| -3,5)\}$

8. Durch die folgenden Gleichungen sind zwei Geraden gegeben:

$$(1)\ \ y = \frac{2}{3}x + 1,5 \qquad\qquad (2)\ \ 0 = 2y - 3x + 4,5$$

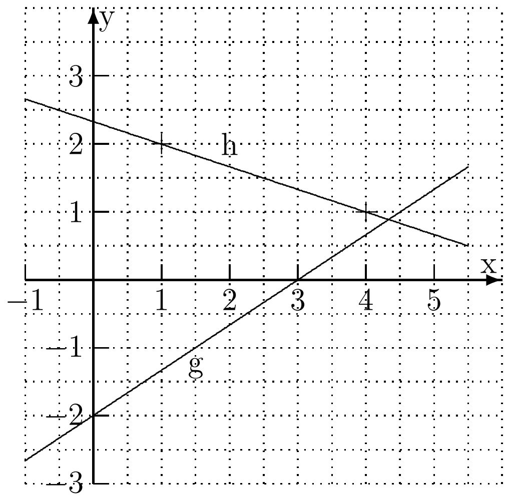
Zeichne ihre Graphen und bestimme graphisch die Lösung des Gleichungssystems.

Lösung: $(4,5|4,5)$

9. Die Punkte $A(-1|6)$ und $B(6|3)$ sind Elemente der Geraden g. Die Gerade h geht durch den Punkt $C(1|2)$ und hat die Steigung $\frac{3}{4}$.
   (a) Ermittle graphisch die Koordinaten des Schnittpunktes S von g und h!
   (b) Stelle die Gleichungen von g und h auf und berechne die Koordinaten von S!

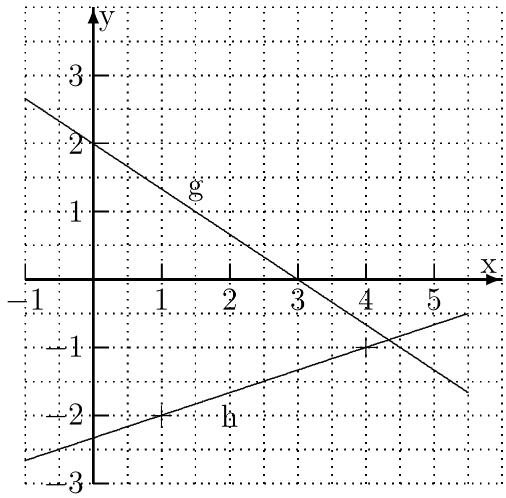
Lösung: $g(x) = -\frac{3}{7}x + \frac{39}{7}$; $h(x) = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$; $S(\frac{11}{3}|4)$

10. Gib die Funktionsgleichungen der Geraden g und h an und berechne die Koordinaten ihres Schnittpunktes S!



Lösung: $g:\ y = \frac{2}{3}x - 2$;
$h:\ y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$;
$S(4\frac{1}{3}|\frac{8}{9})$

11. Gib die Funktionsgleichungen der Geraden g und h an und berechne die Koordinaten ihres Schnittpunktes S!



Lösung: $g:\ y = -\frac{2}{3}x + 2$;
$h:\ y = \frac{1}{3}x - 2\frac{1}{3}$;
$S(4\frac{1}{3}| - \frac{8}{9})$

12. (a) Berechne die Nullstelle der Funktion $h : x \longmapsto \frac{3}{5}x - 2$.
    (b) Der Graph G_g einer Funktion g verläuft durch den Punkt $P(3|2)$ und ist parallel zum Graphen G_h der Funktion h. Gib den Funktionsterm der Funktion g an.

Lösung: (a) Nullstelle $x = \frac{10}{3}$, (b) Funktionsterm $g(x) = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

13. Löse mit dem Additionsverfahren:

(I) $\quad 7x + 11y = -6$
(II) $\quad 9x + 12y = 3$

Lösung: $L = \{(7| - 5)\}$

14. Löse mit dem Additionsverfahren:

(I) $\quad 9x + 12y = -3$
(II) $\quad 7x + 11y = 6$

Lösung: $L = \{(-7|5)\}$

15. Löse mit dem Additionsverfahren:

$$\begin{array}{lrl} \text{(I)} & 8x+19y & = -7 \\ \text{(II)} & 11x+17y & = 36 \end{array}$$

Lösung: $L = \{(11|-5)\}$

16. Berechne die Lösungen des Gleichungspaares:

$$(1)\; y + 2x = 2 \qquad (2)\; 4y - 7x = 3$$

Kontrolliere durch Einsetzen.

Lösung: $(\frac{1}{3}|\frac{4}{3})$

17. Berechne die Lösungsmenge: $\begin{array}{rcrcl} 27\,x & - & 26\,y & = & 67 \\ 19\,x & + & 39\,y & = & 18,5 \end{array}$

Lösung: $L = \{(2\,|\,-\frac{1}{2})\}$

18. Berechne die Lösungsmenge: $\begin{array}{rcrcr} 6\,x & - & 16\,y & = & 4 \\ -9\,x & + & 24\,y & = & -6 \end{array}$

Lösung: $L = \{(x|y)\,|\,3\,x - 8\,y = 2\}$

19. Berechne die Lösungsmenge: $\begin{array}{rcrcr} 27\,x & - & 18\,y & = & 63 \\ -0,6\,x & + & 0,4\,y & = & -1,6 \end{array}$

Lösung: $L = \{\}$

20. Bestimme die Lösungsmenge:

$$(1)\quad y - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} + \frac{1}{3}x \qquad\qquad (2)\quad \frac{2y}{5} + \frac{3}{10} = 1 - \frac{x}{2}$$

Lösung: $x = 1$, $y = 0,5$.

21. Bestimme die Lösungsmenge:

$$(1)\quad y - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} - \frac{1}{3}x \qquad\qquad (2)\quad \frac{2y}{5} + \frac{3}{10} = 1 + \frac{x}{2}$$

Lösung: $x = -1$, $y = 0,5$.

22. Bestimme die Lösungsmenge:

$$(1)\ \frac{9y+7}{12} = 2 - \frac{2x}{9} \qquad\qquad (2)\ \frac{2x}{5} + \frac{3}{10} = 1 + \frac{y}{2}$$

Lösung: $x = 3,\ y = 1$

23. Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems durch Rechnung:

$$(1)\ \frac{1}{3}y - \frac{1}{2}x = 1 \qquad\qquad (2)\ \frac{8y-3}{6} = x - \frac{3}{2}$$

Lösung: $(-5|-4,5)$

24. Löse folgendes Gleichungssystem rechnerisch ($G = \mathbb{Q}$):

$$\begin{array}{rrcr} \text{(I)} & \frac{7}{6}x + \frac{2}{3}y & = & 1 \\ \text{(II)} & -3y - 14x & = & -7 \end{array}$$

Lösung: $x = \frac{2}{7},\ y = 1$

25. Löse folgendes Gleichungssystem rechnerisch:

$$\begin{array}{rrcr} \text{(I)} & \frac{7}{4}x + \frac{3}{2}y & = & 1 \\ \text{(II)} & -5y - 14x & = & -1 \end{array}$$

Lösung: $x = -\frac{2}{7},\ y = 1$

26. Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems über der Grundmenge $\mathbb{Q}$!

$$\begin{array}{rl} \text{(I)} & 5(x+y) - 4(x-y) = 13 \\ \text{(II)} & 6(2x+3y) - 7(2x-3y) = 31 \end{array}$$

Lösung: $x = 4,\ y = 1$

27. Bestimme die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems!

$$\begin{aligned} (I) \quad & 1{,}2(x+4) - 2{,}5(3y-2) = 2 \\ (II) \quad & \tfrac{4}{5}(3x-5) + \tfrac{3}{2}(3y-4) = -10 \end{aligned}$$

Lösung: $x = 1{,}5$ und $y = -0{,}8$

28. Bestimme die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems!

$$\begin{aligned} (I) \quad & 2(y-1) - x - 4 = 0 \\ (II) \quad & 2y - x + 9 = 5 \end{aligned}$$

Lösung: keine Lösung

1.4.2 Anwendungen in Sachzusammenhängen

1. Vor drei Jahren war Hans viermal so alt als Eva vor drei Jahren alt war. In fünf Jahren ist Hans doppelt so alt als Eva in fünf Jahren alt sein wird. Wie alt sind die beiden jetzt?

Lösung: Variablenwahl: h: Alter von Hans heute, e: Alter von Eva heute

$$\begin{aligned} h - 3 &= 4(e-3) && (1) \\ h + 5 &= 2(e+5) && (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h - 3 &= 4e - 12 && (3) \\ h + 5 &= 2e + 10 && (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h - 4e &= -9 && (5) \\ h - 2e &= 5 && (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -h + 4e &= 9 && (7) \\ 2h - 4e &= 10 && (8) \end{aligned}$$

$$(7) + (8): \quad h = 19 \qquad (9)$$

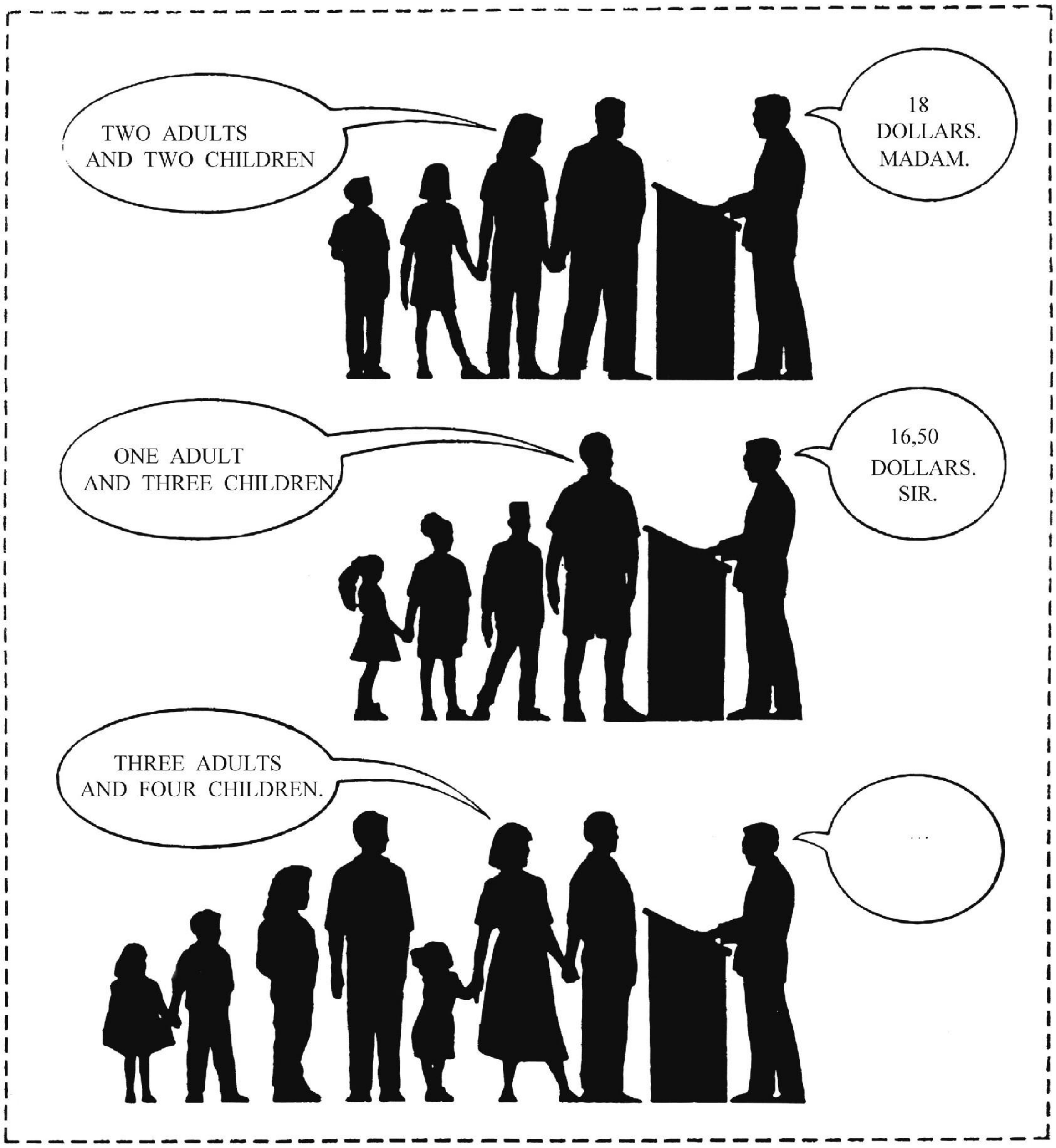
$$\begin{aligned} (9) \text{ in } (7): \quad -19 + 4e &= 9 && (10) \\ 4e &= 28 && (11) \\ e &= 7 && (12) \end{aligned}$$

Hans ist 19 Jahre und Eva 7 Jahre alt.

Probe:

vor 3 Jahren:	Hans 16 und Eva 4
in 5 Jahren:	Hans 24 und Eva 12

2. **An der Kinokasse**



An der Kinokasse irgendwo in Amerika ...

Variationen:

(a) Schüler sollen die Fragestellung selbst entwickeln

(b) Ändert den Comic so ab, dass die Informationen nicht ausreichen für eine eindeutige Bestimmung der Preise.

Lösung: Erwachsene: \$ 5,25
Kinder: \$ 3,75

3. **In der Kneipe**

Variationen:

(a) nur erste Situation vorgeben

(b) unmögliche Zahlen vorgeben

(c) eine Sprechblase leer lassen

Lösung: Erdnüsse: 3,90 €
Bier: 4,20 €

4. **Magie der Münzen**

Quelle: Schröder/Wurl: Mat(h)erialien 7-10 Algebra, Schroedel 1996, S. 150

(a) Versuche herauszufinden, wie der Zaubertrick des Magiers funktioniert.

(b) Erfinde selber einen (ähnlichen) „mathematischen Zaubertrick“ und teste ihn an deinem Nachbar.

Variationen der Aufgabe:

Verwenden der Original-Fragestellungen:

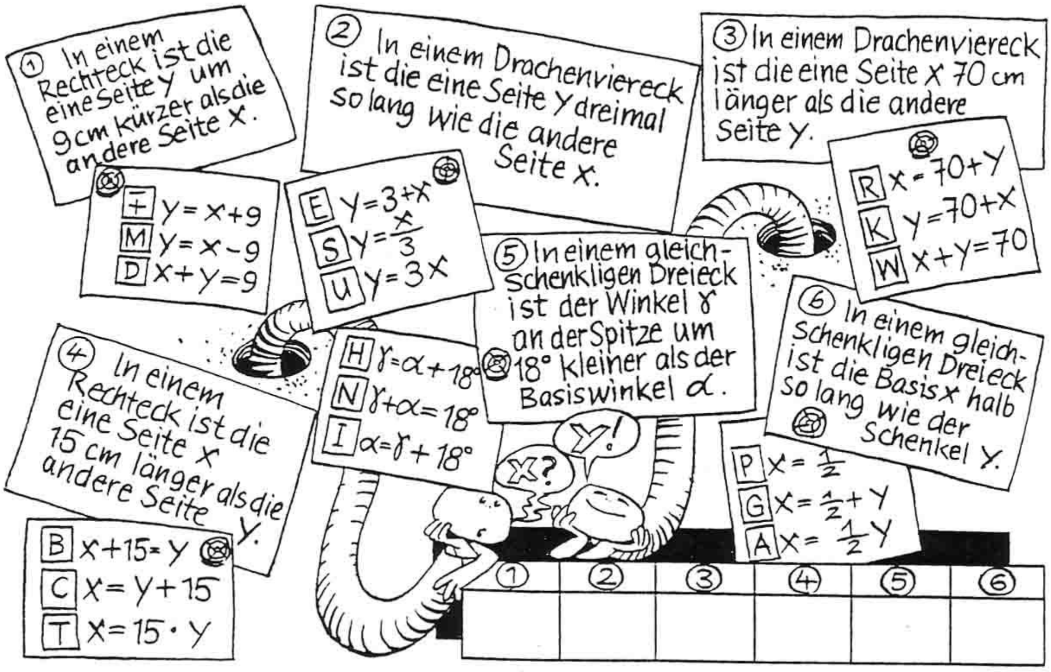
(a) 34 wird als Rechenergebnis genannt. Welche Gleichung gilt für $x =$ Anzahl der Münzen links und $y =$ Anzahl der Münzen rechts?

(b) Es gibt noch eine zweite Gleichung für x und y. An sie denkt der Zauberer im zweiten Bild bei einem schnellen Blick auf die Münzen. Welche ist es?

(c) Könnte der Zauberer auch mit anderen Zahlen als 3 und 4 multiplizieren lassen?

Lösung: Das Ergebnis liegt zwischen 27, falls alle Münzen in der linken Hand sind und 36, falls alle Münzen in der rechten Hand sind. Zieht man als Zauberer das genannte Ergebnis von 36 ab, so erhält man die Anzahl der Münzen in der rechten Hand.
Dahinter steckt, dass sich der Zauberer irgendwann einmal die beiden linearen Gleichungen $3x + 4y = 34$ und $x + y = 9$ gedacht, für $y = 9 - x$ eingesetzt und so die Gesetzmäßigkeit erkannt hat.

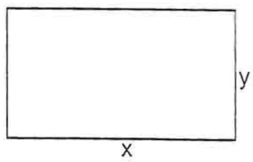
5. **Geometrie**



1. Welche Gleichung stimmt? Trage die Buchstaben ein für das Lösungswort.

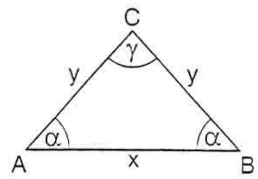
Schreibe jeweils mit zwei Gleichungen und bestimme ihre gemeinsame Lösung.

2. Der Umfang eines Rechtecks beträgt 98 cm. Die eine Seite ist 15 cm länger als die andere.



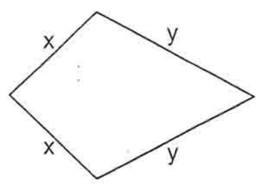
3. Der Umfang eines Rechtecks beträgt 102 cm. Die eine Seite ist 9 cm kürzer als die andere.

4. In einem gleichschenkligen Dreieck ist der Winkel γ um 18° kleiner als ein Basiswinkel. Die Winkelsumme kennst du auch.



5. Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 600 cm. Die Basis ist halb so lang wie ein Schenkel.

6. Der Umfang eines Drachenvierecks beträgt 340 cm. Die eine Seite ist 70 cm länger als die andere.



7. Der Umfang eines Drachenvierecks beträgt 56 cm. Die eine Seite ist dreimal so lang wie die andere.

Quelle: Schröder/Wurf: Mat(h)erialien 7-10, Schroedel 1996, S. 152

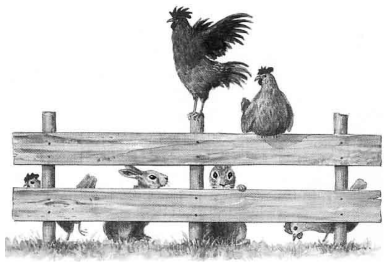
Lösung:

1. M - U - R - C - I - A (Stadt im Südosten Spaniens, Hauptstadt der Provinz und der autonomen Region Murcia (11.317 Quadratkilometer, 1,1 Millionen Einwohner) am Ufer des Segura.
2. $x = 17 \quad y = 32$

3. $x = 21 \quad y = 30$
4. $\alpha = 66 \quad \gamma = 48$
5. $x = 120 \quad y = 240$
6. $x = 50 \quad y = 120$
7. $x = 7 \quad y = 21$

6. **Aufgabe zur Anwendung**

   In einem Stall sind Hasen und Hennen und zwar 9 Tiere mit insgesamt 24 Füßen. Wie viele Hasen und Hennen sind es jeweils?



Lösung: Es sind 6 Hennen und 3 Hasen.

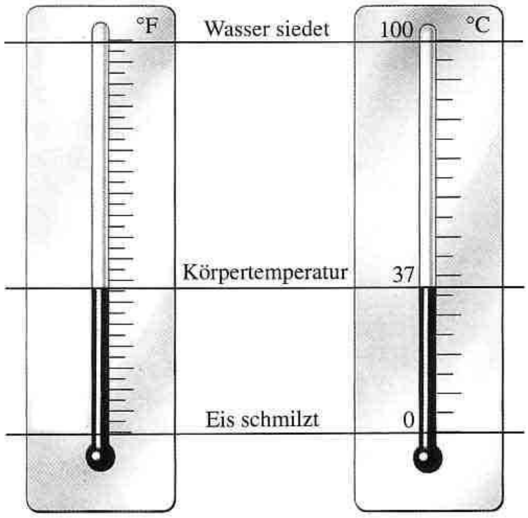
7. **Aufgabe zur Anwendung**

   Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 15, die Differenz der Ziffern ist 3. Welche beiden Zahlen können das sein?

Lösung: Es kann entweder die Zahl 69 oder die Zahl 96 sein.

8. **Aufgabe zur Anwendung**

   In den Vereinigten Staaten von Amerika wird die Temperatur in Grad Fahrenheit gemessen. Bei der Umrechnung von Celsius in Fahrenheit muss zu einem bestimmten Betrag jeweils ein Vielfaches der Celsius-Zahl addiert werden.
   Wie lautet die Umrechnungsformel, wenn $68°F = 20°C$ und $104°F = 40°C$ ist?
   Bei welcher Fahrenheittemperatur schmilzt also Eis? Trage die fehlenden Werte in die Grafik ein.



Lösung: Laut Rechnung bei > 31 Fahrenheit.

9. **Aufgabe zur Anwendung**

   Vor 6 Jahren war Frau Noether fünfmal so alt wie ihre Tochter Emmy. Heute ist Frau Noether dagegen nur noch dreimal so alt wie ihre Tochter. Wie alt sind die beiden heute?

Lösung: Frau Noether: 36
Emmy: 12

10. **Aufgabe zur Anwendung**

    Der Umfang eines Rechtecks beträgt 80 cm. Verlängert man zwei gegenüberliegende Seiten um je 8 cm und verkürzt zugleich die beiden anderen Seiten um je 5 cm, so verringert sich der Flächeninhalt des Rechtecks um 45 cm^2. Wie lang sind die Seiten des ursprünglichen Rechtecks?

Lösung: Rechtecksseitenlängen: 15 cm und 25 cm

11. **Aufgabe zur Anwendung**

    Verlängert man in einem Rechteck die kürzere Seite um 1 cm und die längere Seite um 4 cm, so nimmt der Flächeninhalt um 56 cm^2 zu.
    Verkürzt man dagegen die kürzere Seite um 4 cm und die längere Seite um 1 cm, dann nimmt der Flächeninhalt um 69 cm^2 ab.
    Wie lang sind die Seiten des ursprünglichen Rechtecks?

Lösung: Rechtecksseitenlängen: 9 cm und 16 cm

12. **Aufgabe zur Anwendung**

    Jeder Zwerg isst 2, jeder Räuber isst 3 Hühner. Jeder Zwerg trinkt 3, jeder Räuber trinkt 5 Flaschen Wein. Zusammen essen sie 134 Hühner und trinken 221 Flaschen Wein.
    Wie viele Zwerge und wie viele Räuber nehmen an dem Mahl teil?

Lösung: 7 Zwerge und 40 Räuber

13. Bei einem Fußballspiel bezahlten 1456 Zuschauer insgesamt 10880 €. Ein Stehplatz kostet 6 €, ein Sitzplatz 10 €. Wie viele Zuschauer bezahlten für einen Stehplatz, wie viele für einen Sitzplatz? (Lösung mit Hilfe einer Gleichung!).

Lösung: 920 Stehplätze, 536 Sitzplätze

14. Wenn man jede Seite eines Rechtecks um 2 cm vergrößert, dann wächst der Flächeninhalt um 24 cm^2. Verlängert man nur die längere Seite um 2 cm, dann wächst der Flächeninhalt um 8 cm^2. Berechne die Seitenlängen des ursprünglichen Rechtecks.

Lösung: Länge 6 cm, Breite 4 cm

15. Vergrößert man die Länge eines Rechtecks um 2 cm und verkleinert die Breite um 1 cm, dann bleibt der Flächeninhalt unverändert. Verkleinert man die Länge um 1 cm und vergrößert man die Breite um 2 cm, dann nimmt der Flächeninhalt um 12 cm^2 zu. Berechne die Länge und die Breite des Rechtecks.

Lösung: Länge 10 cm, Breite 6 cm

16. Löse mit Hilfe eines Gleichungssystems:
    Sandras Tante sagt zu Sandra: „Vor fünf Jahren war ich dreimal so alt wie du jetzt bist. Zusammen sind wir jetzt fünfmal so alt wie du vor zwei Jahres warst.“
    Wie alt sind Sandra und ihre Tante?

Lösung: Tante 50 Jahre, Sandra 15 Jahre

17. Der noch sehr rüstige Vater sagt zu seinem Sohn: „In elf Jahren bin ich genau doppelt so alt wie du vor elf Jahren warst.“ Darauf antwortet der Sohn: „Aber vor elf Jahren warst du nur $\frac{8}{7}$ mal so alt wie ich in elf Jahren sein werde.“ Wie alt sind die beiden?

Lösung: Vater: 99 Jahre; Sohn: 66 Jahre

18. „Geben sie mir drei Pfund Äpfel und vier Pfund Birnen“, sagt Susi und legt 26 € auf den Ladentisch, genau den richtigen Betrag. Als der Ladenbesitzer das Obst einpacken will, ruft Susi: „Geben sie mir doch lieber vier Pfund Äpfel und drei Pfund Birnen.“ „Dann bekommst du 90 Cent zurück“, sagt daraufhin der Ladenbesitzer. Was kostet ein Pfund Äpfel bzw. ein Pfund Birnen?

Lösung: Äpfel: 3,20 € Birnen: 4,10 €

19. Eine Oma sagt zu ihrem Enkel: „Teilt man mein Alter durch dein Alter, dann erhält man 7 Rest 5.“ Darauf sagt der kluge Enkel zu seiner Oma: „Teilt man das 53 fache meines Alters durch dein Alter, dann erhält man ebenfalls 7 Rest 5.“ Wie alt sind die beiden?

Lösung: Oma: 75 Jahre Enkel: 10 Jahre

20. Peter und Seppi unterhalten sich über den Inhalt ihrer Geldbeutel.

    Peter : „Wenn du mir 20 % von deinem Geld gibst, dann habe ich um 13 € mehr als du jetzt in deinem Geldbeutel hast.“

    Seppi : „Gibst du mir aber 20 % von deinem Geld, dann habe ich um 13 € mehr als du dann in deinem Geldbeutel hast.“

    Wieviel Geld haben die beiden vor den geplanten Tauschvorhaben?

Lösung: Peter: 45 € Seppi: 40 €

21. Ein Textilgeschäft bezieht 200 Hemden und 250 Pullover, die laut Rechnung zusammen 24500 € kosten. Die Hemden werden mit 20 %, die Pullover mit 40 % Aufschlag verkauft. Dabei werden insgesamt 31900 € eingenommen. Wie teuer waren ein Hemd bzw. ein Pullover im Einkauf?

Lösung: Hemd: 60 €, Pullover: 50 €

22. Bauer Franz Küchle hält auf seinem Hof nur Schweine und Hühner, insgesamt 100 Tiere. Irgendwann hat er festgestellt, daß diese insgesamt 268 Beine haben. Stelle ein Gleichungssystem auf und bestimme die Anzahl der Schweine und Hühner.

Lösung: 34 Schweine und 66 Hühner.

23. Der *Feingehalt* einer Gold- oder Silberlegierung wird in 1000 Teilen angegeben. Reines Gold bzw. Silber hat also den Feingehalt 1000.
    Eine Silberlegierung vom Feingehalt 250 enthält neben anderen Metallen 40% Kupfer. Wieviel reines Silber und wieviel reines Kupfer müssen zu 1000 g dieser Legierung hinzugefügt werden, damit sie nachher den Feingehalt 300 besitzt und außerdem 50%

Kupfer enthält?
Übersichtliche Lösung mit Hilfe eines Gleichungssystems mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten!

Lösung: Silber: $275\,g$; Kupfer: $475\,g$

2 Stochastik

2.1 Ergebnis, Ergebnisraum, Ereignis

1. Gib für folgende Zufallsexperimente einen geeigneten Ergebnisraum Ω und seine Mächtigkeit $n = |\Omega|$ an:
   (a) Eine Münze und ein Würfel werden geworfen.
   (b) Es wird dreimal gewürfelt.
   (c) Drei Münzen und zwei Würfel werden geworfen.
   (d) Aus einer Urne, die jeweils zehn rote, blaue und grüne Kugeln enthält, werden nacheinander drei Kugeln gezogen.

Lösung: Es wird jeweils der feinste Ergebnisraum (n möglichst groß) angegeben:

(a) $\Omega = \{\text{W1,W2,W3,W4,W5,W6,Z1,Z2,Z3,Z4,Z5,Z6}\}$, $n = |\Omega| = 2 \cdot 6 = 12$

(b) $\Omega = \{111, 112, 113, 114, 115, 116, 121, \ldots, 666\}$

$n = |\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$

(c) $\Omega = \{\text{WWW11,WWW12,WWW13}, \ldots, \text{ZZZ66}\}$

$n = |\Omega| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 = 2^3 \cdot 6^2 = 288$

(d) $\Omega = \{\text{rrr,rrb,rrg,rbr,rbb,rbg}, \ldots, \text{ggg}\}$

$n = |\Omega| = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$

2. (a) Schreibe für folgende Ergebnisräume *alle* möglichen Ereignisse auf. Wie viele sind es jeweils? Welches Gesetz vermutest du?

$$\Omega_0 = \emptyset, \quad \Omega_1 = \{1\}, \quad \Omega_2 = \{1,2\}, \quad \Omega_3 = \{1,2,3\}, \quad \Omega_4 = \{1,2,3,4\}$$

   (b) Wie viele verschiedene Ereignisse gibt es bei dem Zufallsexperiment „Werfen von drei Münzen“?

Lösung: (a) Ω_0 hat nur ein Ereignis, nämlich $\emptyset$.

Ω_1: $\emptyset$, $\{1\} = \Omega_1$

Ω_2: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\} = \Omega_2$

Ω_3: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\} = \Omega_3$

Ω_4: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,2,3,4\} = \Omega_4$

Ergebnisraum	Ω_0	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4
Zahl der Ereignisse	$1 = 2^0$	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$	$16 = 2^4$

Der vermutete Zusammenhang gilt allgemein:

$$\boxed{\text{Zu jedem } \Omega \text{ gibt es } 2^{|\Omega|} \text{ verschiedene Ereignisse.}}$$

(b) $\Omega = \{\text{WWW,WWZ,WZW,WZZ,ZWW,ZWZ,ZZW,ZZZ}\}$ mit $|\Omega| = 8$.
$\Longrightarrow$ Es gibt $2^8 = 256$ verschiedene Ereignisse.

3. **Führerscheinprüfung**
   (a) Drei Prüflinge legen die Führerscheinprüfung ab. Beschreibe das Ereignis E: „Genau zwei Prüflinge bestehen“ als Menge.
   (b) Drei Prüflinge legen die Führerscheinprüfung ab. Beschreibe das Ereignis E: „Mindestens zwei Prüflinge bestehen“ als Menge.
   (c) Drei Prüflinge legen die Führerscheinprüfung ab. Beschreibe das Ereignis E: „Genau ein Prüflinge besteht nicht“ als Menge.

   Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

Lösung: (a) E={110, 101, 011}; 1: „Prüfling besteht“, 0: „Prüfling besteht nicht“
(b) E={111, 110, 101, 011}; 1: „Prüfling besteht“, 0: „Prüfling besteht nicht“
(c) E={110, 101, 011}; 1: „Prüfling besteht“, 0: „Prüfling besteht nicht“

4. **Urnenmodell**
   (a) Die Wahrscheinlichkeit 0,3 soll durch eine Urne simuliert werden. Gib einen passenden Urneninhalt an und beschreibe die Art des Ziehens.
   (b) Die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Mädchens liegt bei etwa 49%. Eine Familie hat drei Töchter. Gib eine passende Simulation an.

   Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

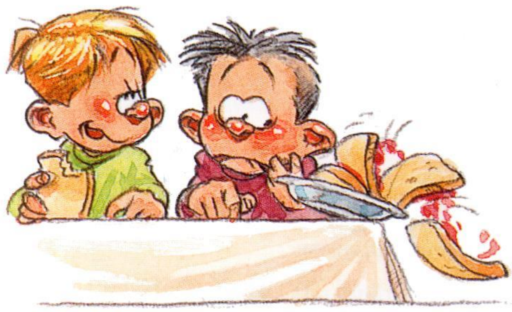
Lösung: (a) drei schwarze und sieben weiße Kugeln; Treffer, wenn scharze Kugel gezogen wird; es wird „mit Zurücklegen“ gezogen
(b) Urne mit 49 roten (Mädchen) und 51 blauen Kugeln (Jungen). Man zieht „mit Zurücklegen“ und erhält drei rote Kugeln.

5. **Aufgabe zur Anwendung**

Lege die möglichen Ergebnisse fest und entscheide und begründe, ob es sich bei den folgenden Experimenten um ein Laplace-Experiment (Zufallsexperiment, bei dem alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind) handelt oder nicht.

(a) Eine Geldmünze wird geworfen.
(b) Ein Elfmeter wird geschossen.
(c) Ein Marmeladenbrot fällt vom Tisch.
(d) Ein Dartpfeil wird auf die Dartscheibe geworfen.

Überlege dir drei Experimente die ein Laplace-Experiment darstellen und drei die dies nicht tun!



Lösung: (a) Laplace-Experiment (wobei in der Natur kein wirkliches Laplace-Experiment existiert)
(b) kein Laplace-Experiment
(c) Laplace-Experiment
(d) kein Laplace-Experiment

6. **Aufgabe zur Anwendung**

Welche der folgenden Laplace-Annahmen sind gerechtfertigt, welche sind nur annähernd gerechtfertigt, welche sind eindeutig falsch?

(a) Es gibt 12 Monate, also ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand im Januar Geburtstag hat, $\frac{1}{12} \approx 8,3\%$.
(b) Es gibt 7 Wochentage, also ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig herausgegriffene Person in diesem Jahr an einem Sonntag Geburtstag hat, $\frac{1}{7} \approx 14,3\%$.
(c) Es gibt 7 Wochentage, also ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Advent dieses Jahr auf einen Montag fällt, $\frac{1}{7} \approx 14,3\%$.
(d) Jeder Knopf hat zwei Seiten. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass er auf die Oberseite fällt, 50%.

Lösung: (a) naja

(b) ja

(c) nein

(d) nein

2.2 Laplacewahrscheinlichkeiten

1. **Aufgaben zur Anwendung**

   Zur teilweisen Finanzierung der Olympischen Spiele 1972 in München wurde eine Lotterie eingeführt: die Glücksspirale. Die 7-ziffrigen Glückszahlen wurden dabei wie folgt ermittelt: In einer Trommel befanden sich 70 Kugeln; auf 7 Kugeln stand die 0, auf 7 Kugeln die 1, ..., auf 7 Kugeln die 9. Aus dieser Trommel wurden 7 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und in der Reihenfolge des Ziehens zur jeweiligen Glückszahl angeordnet.

   (a) Gib den Ergebnisraum an. Wie viele Glückszahlen sind in ihm enthalten?

   (b) Nach der ersten Ziehung gab es in der Presse Kritik, daß durch dieses Verfahren nicht alle 7-ziffrigen Glückszahlen die gleiche Gewinnchance gehabt hätten. Bestätige oder widerlege diese Kritik. Mache gegebenenfalls (falls die Kritik zutrifft) einen Vorschlag zur Verbesserung des Ziehungsverfahrens und begründe den Vorschlag in Form eines Briefes an die Geschäftsführung der Glücksspirale.

Lösung: (a) $\Omega = \{0000000, 0000001, 0000010, 0000011, 0000012, \ldots 9999998, 9999999\}$, $|\Omega| = 10^7$

(b) Wenn eine Zahl bereits gezogen ist, nimmt für diese Zahl die Wahrscheinlichkeit bei den folgenden Ziehungen ab, d. h. die Kritik ist berechtigt. Gleichwahrscheinlich wären die 7-ziffrigen Glückszahlen, wenn man mit Zurücklegen ziehen würde.

2. **Aufgaben zur Anwendung**

   Zahlen unter 32 werden (wegen der Geburtstage der Tipper) beim Lottospiel 6 aus 49 häufiger angekreuzt als andere Zahlen. Im allgemeinen ist deshalb die Zahl der Gewinner um so größer, je mehr Zahlen unter 32 ausgelost werden. Sollte man also nur noch Zahlen über 32 tippen?

Lösung: Für jede der angekreuzten Zahlen ist die Wahrscheinligkeit gezogen zu werden gleich hoch. Da die Zahlen unter 32 zu kleineren Gewinnsummen führen (diese werden häufiger angekreuzt), ist es günstiger diese nicht anzukreuzen.

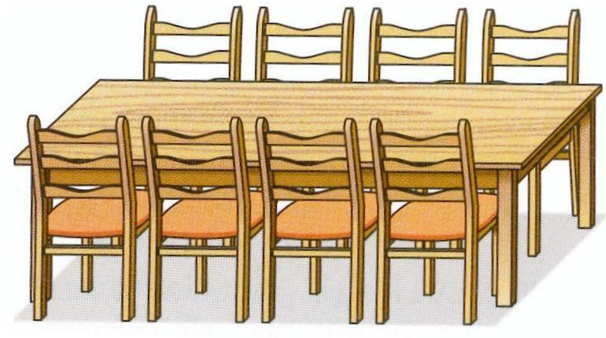
3. **Sitzordnung**

   An einem Tisch soll die Sitzverteilung für 4 Paare festgelegt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es

(a) wenn die Paare sich gegenüber sitzen sollen?

(b) wenn die Paare nebeneinander sitzen sollen?

(c) bei einer beliebigen Anordnung?



Lösung: (a) $4! \cdot 2^4 = 384$

Begründung: Angenommen die Paare bestehen jewils aus Mann und Frau. Dann platziere alle Frauen auf der einen Tischseite. Dazu hat man 4! Möglichkeiten. Nun hat man für jedes Paar zu entscheiden, wie die Tischseiten-Verteilung sein soll. Für jedes Paar gibt es 2 Möglichkeiten, insgesamt also $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$.

(b) $4! \cdot 2^4 = 384$

(c) $8! = 40320$

4. **CD-Player**

Auf einer Audio-CD sind 13 Titel. Der Zufallsgenerator eines CD-Players wird eingestellt. Berechne, wie viele verschiedene Reihenfolgen der Songs möglich sind.

Lösung: 6.227.020.800

5. **In der Metzgerei**

Heute bietet die Metzgerei Schnarr 10 Sorten Wurst an. Hans soll 3 verschiedene Sorten Wurst einkaufen. Wie viel Möglichkeiten hat Hans?

Lösung:

- Wir interessieren uns für den Einkauf als Handlung. Dazu gehört sein zeitlicher Ablauf. Dieser kann hervorragend in einem Baumdiagramm dargestellt werden.
  Hans kauft ein erstes Stück Wurst. Dabei hat er 10 Möglichkeiten. Danach kauft er ein zweites Stück Wurst. Gleichgültig, welche Wurst er als erste gekauft hat, gibt es für ihn nun jeweils 9 Möglichkeiten, das zweite Stück Wurst zu kaufen. Insgesamt hat Hans $10 \cdot 9$ Möglichkeiten, zwei Stücke unterschiedlicher Wurst zu kaufen. Schließlich kauft er ein drittes Stück Wurst. Bei jedem der 90 möglichen Einkäufe kann er dazu eine aus 8 Sorten auswählen. Insgesamt hat er $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ Möglichkeiten. Hans kann also 720 verschiedene Einkäufe realisieren.
- Es interessiert nicht der Einkauf als Vorgang, uns interessiert nun nur das Resultat des Einkaufs. Wir fragen: „Wie viele Warenkörbe kann Hans zusammenstellen?“
  Hans kauft drei verschiedene Wurstsorten. Betrachten wir einen Warenkorb. Er enthält drei Wurstsorten. Diese können auf $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Arten angeordnet werden. Der gleiche Warenkorb kann daher durch 6 verschiedene Einkäufe realisiert werden. Die Menge der möglichen Einkäufe zerfällt in elementfremde Teilmengen mit jeweils gleichwertigen Einkaufsergebnissen. Jede dieser Teilmengen heißt „ein Warenkorb“. Keine der Einkaufshandlungen führt zu zwei verschiedenen Warenkörben, und jeweils 6 Einkaufshandlungen liefern den gleichen Warenkorb. Daher gibt es $720 : 6 = 120$ mögliche Warenkörbe.

6. **Leber- und Griebenwurst**

   Wenn Hans Leberwurst kauft, dann erwirbt er auch Griebenwurst, denn dann kocht die Mutter Sauerkraut. Wie viele Warenkörbe gibt es für Hans?

Lösung: *1. Fall:* Hans kauft Leberwurst. Dann kauft er auch Griebenwurst. Danach kann er noch unter 8 Wurstsorten frei wählen. Insgesamt hat er in dieser Situation 8 Möglichkeiten.
2.Fall: Hans kauft keine Leberwurst. Dann wird über den Einkauf von Griebenwurst keine Aussage gemacht. Hans kann nun aus 9 Wurstsorten drei Sorten frei auswählen. Dabei hat er $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$ Möglichkeiten. Insgesamt erfüllen $(8 + 84)$ Warenkörbe, also 92.

7. **Bierschinken**

   Heute hat die Metzgerei Schnarr sogar 57 Sorten Wurst im Angebot.

   (a) Wie viele Warenkörbe gibt es für Hans, wenn entweder gekochter Bierschinken oder aber gebackener Bierschinken dabei sein muss?

   (b) Hans bringt immer gekochten oder gebackenen Bierschinken mit nach Hause. Wie viele Warenkörbe gibt es für Hans?

Lösung: (a) *1. Möglichkeit:* Hans kauft gekochten, aber keinen gebackenen Bierschinken. Dann steht es ihm frei, aus 55 Sorten zwei beliebige auszuwählen. Hier sind $\frac{55 \cdot 54}{1 \cdot 2} = 1485$ Warenkörbe möglich.
2. Möglichkeit: Hans kauft keinen gekochten, aber gebackenen Bierschinken. Hier sind ebenfalls 1485 Warenkörbe möglich.
Insgesamt gibt es 2970 Warenkörbe, welche die Forderung erfüllen.

(b) Weder gekochter noch gebackener Bierschinken sind in $\frac{55\cdot54\cdot53}{1\cdot2\cdot3} = 26235$ Warenkörben. Heute gibt es 57 Sorten Wurst. Dann können $\frac{57\cdot56\cdot55}{1\cdot2\cdot3} = 29260$ verschieden Warenkörbe gebildet werden. Dann gibt es aber $(29260-26235)$ Warenkörbe, also 3025 Warenkörbe, die gekochten oder gebackenen Bierschinken enthalten.

8. **Wurst und Käse**

Heute bietet die Metzgerei Meyer an der Wursttheke 38 Sorten Wurst und an der Käsetheke 8 Sorten Käse an. Die Kunden kaufen erfahrungsgemäß zuerst Wurst und dann Käse.

(a) Kathrin soll 3 Sorten Wurst und 2 Sorten Käse mitbringen. Wie viele Warenkörbe dieser Art gibt es?

(b) Kathrin weiß es besser: „Käse ist für meinen Papa gesünder“, denkt sie und kauft 2 Sorten Wurst und 3 Sorten Käse. Wie viele Warenkörbe kann sie zusammenstellen?

(c) Im Laden sieht Kathrin, dass die Theken zusammengestellt sind. Sie kauft fünf Sorten Lebensmittel in beliebiger Reihenfolge. Wie viele Warenkörbe sind möglich?

(d) Kathrin kauft 2 Sorten Wurst und 3 Sorten Käse in beliebiger Reihenfolge. Wie viele Warenkörbe sind möglich?

Lösung: (a) $\frac{38\cdot37\cdot36}{1\cdot2\cdot3} \cdot \frac{8\cdot7}{1\cdot2} = 8436 \cdot 28 = 236208$ Warenkörbe

(b) $\frac{38\cdot37}{1\cdot2} \cdot \frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 703 \cdot 56 = 39368$ Warenkörbe

(c) $\frac{46\cdot45\cdot44\cdot43\cdot42}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 1370754$ Warenkörbe

(d) Es kommt auf die Reihenfolge nicht an, in welcher die Lebensmittel erworben werden. Wir wissen aus der Teillösung (b), dass es 39368 Warenkörbe sind. Um Zweifel zu beseitigen, berechnen wir das Ergebnis noch anders - und zwar auf dem Wege, welcher dem realen Handlungsablauf entspricht.
Das Quintupel (w,w,k,k,k) beschreibt $38 \cdot 37 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 472416$ mögliche Einkäufe; (w,k,k,w,k) beschreibt $38 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 37 \cdot 6 = 472416$ mögliche Einkäufe.
Insgesamt gibt es $\frac{5\cdot4}{1\cdot2} = 10$ solcher Quintupel mit zwei „w“ und drei „k“, welche für jeweils 472416 mögliche Einkäufe stehen. Insgesamt sind nun $472416 \cdot 10 = 4724160$ Einkäufe möglich, wobei uns die Reihenfolge interessiert.
Zu beachten ist, dass in der Einkaufstasche 5 verschiedene Lebensmittel liegen. Diese können auf $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ verschiedene Reihenfolgen erworben worden sein. Daher gibt es hier $4724160 : 120 = 39368$ Warenkörbe.

9. **Frau Seidel**

In der Metzgerei Wagner gibt es 46 Sorten Wurst und 7 Sorten Käse. Frau Seidel ist der Meinung, sie könne $(\frac{45\cdot44}{1\cdot2} \cdot 7 + \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3})$ Warenkörbe zusammenstellen. Welche Bedingungen stellt Frau Seidel an ihre Einkäufe? Erzähle eine Geschichte.

Lösung: Frau Seidel kauft niemals Mettwurst. Abgesehen davon kauft sie entweder zwei Sorten Wurst und eine Sorte Käse oder aber keine Wurst und dafür drei Sorten Käse.

10. **Fußball-WM**

    An der Fußball-WM nehmen 32 Nationen teil, die in acht Spielgruppen aufgeteilt werden. Wie viele mögliche Aufteilungen gibt es, wenn

    (a) die Gruppeneinteilung zufällig erfolgt,

    (b) vier bestimmte Mannschaften gesetzt werden (je Gruppe eine) und die restlichen Mannschaften zufällig auf die Gruppen verteilt werden,

    (c) die 16 Nationen in vier Kategorien zu je vier Mannschaften aufgeteilt werden (z.B. vier nord-, vier west-, vier ost- und vier südeuropäische Mannschaften) und in jede Gruppe aus jeder Kategorie je ein Vertreter gelost wird?

11. Geheimbotschaften

    Lars und Tim Hendrik haben zusammen eine Geheimschrift ausgeknobelt. Sie ersetzen in einer Nachricht jeden Buchstaben durch einen anderen, der im Alphabet erst nach fünf weiteren Buchstaben folgt.
    Damit die Mitteilungen schneller verschlüsselt und entschlüsselt werden können, haben beide ein Hilfsmittel zur Darstellung dieser Geheimschrift.

    a) Entwickle eine Darstellung, die dir als Schlüssel dienen kann.

    b) Entschlüssele folgenden Satz:
    JKX SGZNKSGZOQATZKXXOINZ HXOTMZ YVGYY.

    c) Verschlüssele folgenden Satz:
    WAS HAST DU AM WOCHENENDE GEMACHT.

    d) Schreibe eine Antwort in Geheimschrift an deinen Nachbarn.

    *e) Entwickle eine eigene Geheimschrift und schreibe eine Botschaft.

*f) Kannst du hier den Schlüssel bestimmen? Wenn ja, dann schreibe ihn auf.
BYQ FYQR BS ESR ECKYAFR.

(* Zusatzaufgabe)

Lösung: Lösungen zur Geheimbotschaften-Aufgabe

a) SCHLÜSSEL

Original	A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
Geheim	G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F

b)

JKX SGZNKSGZOQATZKXXOINZ HXOTMZ YVGYY
DER MATHEMATIKUNTERRICHT BRINGT SPASS

c)

WAS HAST DU AM WOCHENENDE GEMACHT?
CGY NGYZ JA GS CUINKTKTJK MKSGINZ?

d) OIN NGHK MKRKYKT. (Vorschlag)

e) Entwickle eine eigene Geheimschrift und schreibe eine Botschaft.

f) SCHLÜSSEL

Original	A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
Geheim	Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X

12. Von 10 000 Touristen, die Transsylvanien besuchen, stecken sich im Mittel acht mit dem Draculvirus an, die Ansteckungsrate ist also $a = 8 \cdot 10^{-4}$. Herr Helsing unterzieht sich nach seinem Transsyslvanien-Urlaub einem medizinischen Test. Dieser Test erkennt 98 % der Infizierten und weist somit $f_1 = 2\,\%$ der Infizierten fälschlicherweise als gesund aus. Andererseits werden $f_2 = 3\,\%$ der nichtangesteckten Untersuchten fälschlicherweise als infiziert eingestuft. Herrn Helsings Test fällt positiv aus, d.h. er zeigt an, dass er infiziert ist.

(a) Schätze zuerst, in welchem Bereich die Wahrscheinlichkeit p liegt, dass Herr Helsing tatsächlich vom Draculvirus befallen ist:

kleiner als 10 %, zwischen 10% und 90 %, größer als 90 %

(b) Berechne jetzt die Wahrscheinlichkeit p, dass Herr Helsing tatsächlich vom Draculvirus befallen ist. Fülle zunächst folgende Vierfeldertafel aus, die von einer Million getesteter Transsylvanien-Urlauber ausgeht:

absol. Häuf.	Gesunde	Kranke	
positiv getestet			
negativ getestet			
			$n = 1\,000\,000$

Stelle den ganzen Sachverhalt auch in einem Baumdiagramm dar.

(c) In einer anderen Urblaubssaison ist die Ansteckungsrate a zunächst unbekannt. Es werden $n = 2000$ Transsylvanienurlauber gestestet und davon erweisen sich $z = 155$ Personen als positiv. Berechne zunächst a und dann wieder die Wahrscheinlichkeit p, dass ein als positiv Getesteter tatsächlich erkrankt ist.

Stelle p als Funktion von a dar und zeichne den Grafen dieser Funktion. Welche Definitionsmenge ist für a sinnvoll?

Lösung: (a) Die meisten Schätzungen liegen bei $p > 90\,\%$.

(b) Zahl der Erkrankten:

absol. Häuf.	Gesunde	Kranke	
positiv	29 976	784	30 760
negativ	969 224	16	969 240
	999 200	800	1 000 000

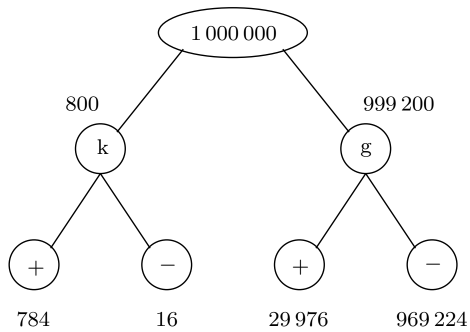
$$a \cdot n = 800$$

$$2\% \cdot 800 = 16$$

$$3\% \cdot 999\,200 = 29\,976$$

Von den insgesamt 30 760 positiv Getesteten sind nur 784 tatsächlich krank $\Longrightarrow$

$$p = \frac{784}{30\,760} = 2{,}55\,\%$$



(c) Mit $a = 0{,}0008$, $f_1 = 2\,\%$ und $f_2 = 3\,\%$ gilt

absol. Häuf.	Gesunde	Kranke	
positiv	$0{,}03\,(1-a)n$	$0{,}98\,an$	$(0{,}03 + 0{,}95a)n$
negativ	$0{,}97\,(1-a)n$	$0{,}02\,an$	$(0{,}97 - 0{,}95a)n$
	$(1-a)n$	an	n

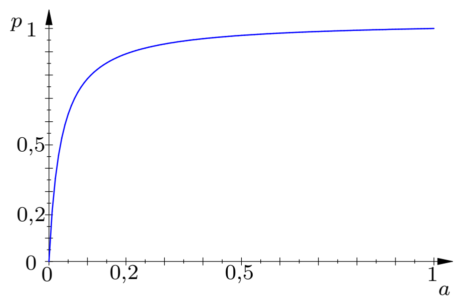
$$z = (0{,}03 + 0{,}95a)n$$

$$a = \frac{\frac{z}{n} - 0{,}03}{0{,}95} = \frac{0{,}0475}{0{,}95} = 0{,}05 = 5\,\%$$

Von den insgesamt $(0{,}03 + 0{,}95a)n$ positiv Getesteten sind nur $0{,}98\,an$ tatsächlich krank $\Longrightarrow$

$$p(a) = \frac{0{,}98\,an}{(0{,}03 + 0{,}95a)n} = \frac{98a}{3 + 95a}$$

$$p(0{,}05) = 63{,}2\,\%$$



13. Ein illegaler Wettanbieter wirbt auf einem Jahrmarkt mit folgendem Plakat:

Sie werfen einen roten und einen blauen Würfel. Bei den Augensummen 2, 3, 4, 9, 10, 11 und 12 bekommen Sie Ihren Einsatz doppelt zurück, bei den Augensummen 5, 6, 7 und 8 verlieren Sie Ihren Einsatz.

Da Sie bei 7 Augensummen gewinnen und nur bei 4 Augensummen verlieren, beträgt Ihre Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{7}{11} \approx 64\,\%$.

(a) Schreibe einen möglichst „feinen" Ergebnisraum Ω für das Zufallsexperiment hin und berechne dann die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse S_2: „Augensumme ist 2" bis S_{12}: „Augensumme ist 12".

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses G : „Spieler gewinnt"?

(c) Welcher mittlere Gewinn bzw. Verlust pro Spiel ist zu erwarten, wenn sich der Spieler zu sehr vielen Spielen hinreißen läßt und der Einsatz pro Spiel mit E bezeichnet wird? Berechne auch die *Rendite* R des Spiels, die folgendermaßen definiert ist:

$$R = \frac{\text{mittlerer Gewinn pro Spiel}}{E}.$$

(d) Wir betrachten jetzt ein beliebiges Spiel mit folgenden Regeln: Verliert der Spieler, dann gehört der Einsatz E dem Spieleanbieter, gewinnt der Spieler, dann erhält er seinen Einsatz zurück und zusätzlich das g-fache des Einsatzes. Beweise für die Rendite:

$$R = P(G)(g+1) - 1$$

(e) Informiere dich über die Spielregeln beim Roulette und berechne die Renditen folgender Spiele:

i. Setzen auf rot (Gewinn: $G = E$)

ii. Setzen auf ein Dutzend (Gewinn: $G = 2E$)

iii. Setzen auf eine Zahl (Gewinn: $G = 35E$)

(f) Ein Spiel heißt *fair*, wenn die Rendite null ist. Welche Gewinne müssen in den behandelten Spielen ausbezahlt werden, damit es sich um faire Spiele handelt?

Lösung: (a) $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), \ldots, (6,6)\}$ mit $|\Omega| = 36$.

$$\begin{array}{rcll}
E_2 & = & \{(1,1)\} & , \quad P(E_2) = \frac{1}{36} \\
E_3 & = & \{(1,2),(2,1)\} & , \quad P(E_2) = \frac{2}{36} \\
E_4 & = & \{(1,3),(2,2),(3,1)\} & , \quad P(E_2) = \frac{3}{36} \\
\hline
E_5 & = & \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} & , \quad P(E_2) = \frac{4}{36} \\
E_6 & = & \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} & , \quad P(E_2) = \frac{5}{36} \\
E_7 & = & \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} & , \quad P(E_2) = \frac{6}{36} \\
E_8 & = & \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\} & , \quad P(E_2) = \frac{5}{36} \\
\hline
E_9 & = & \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\} & , \quad P(E_2) = \frac{4}{36} \\
E_{10} & = & \{(4,6),(5,5),(6,4)\} & , \quad P(E_2) = \frac{3}{36} \\
E_{11} & = & \{(5,6),(6,5)\} & , \quad P(E_2) = \frac{2}{36} \\
E_{12} & = & \{(6,6)\} & , \quad P(E_2) = \frac{1}{36}
\end{array}$$

(b) Das Ereignis $\overline{G}$: „Spieler verliert“ tritt ein, wenn eines der Ereignisse E_5, E_6, E_7 oder E_8 eintritt:

$$P(\overline{G}) = \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} = 55{,}\overline{5}\,\%$$

$$P(G) = 1 - P(\overline{G}) = \frac{4}{9} = 44{,}\overline{4}\,\%$$

Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt also nur $44{,}\overline{4}\,\%$ und nicht wie auf dem Plakat angekündigt $64\,\%$.

(c) Bei einer sehr großen Zahl n von Spielen wird der Spieler im Mittel $\frac{4}{9} \cdot n$ Spiele gewinnen und $\frac{5}{9} \cdot n$ Spiele verlieren. Da er bei einem gewonnenen Spiel den Einsatz E gewinnt und bei einem verlorenen Spiel den Einsatz E verliert, hat er nach n Spielen im Mittel

$$\frac{4}{9}nE - \frac{5}{9}nE = -\frac{1}{9}nE$$

gewonnen bzw. $\frac{1}{9}nE$ verloren. Der mittlere Gewinn pro Spiel ist also

$$-\frac{1}{9}E = -11{,}\overline{1}\% \cdot E$$

die Rendite also $R = -11{,}\overline{1}\%$.

(d) Bei einer sehr großen Zahl n von Spielen wird der Spieler im Mittel $P(G) \cdot n$ Spiele gewinnen und $P(\overline{G}) \cdot n$ Spiele verlieren. Da er bei einem gewonnenen Spiel den Einsatz gE gewinnt und bei einem verlorenen Spiel den Einsatz E verliert, hat er nach n Spielen im Mittel

$$P(G)ngE - P(\overline{G})nE = P(G)ngE - (1 - P(G))nE$$

gewonnen. Der mittlere Gewinn pro Spiel ist also

$$P(G)gE - (1 - P(G))E = P(G)(g+1)E - E$$

die Rendite also $R = P(G)(g+1) - 1$.

(e) i. $P(G) = \frac{18}{37},\ g = 1 \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{18}{37} \cdot (1+1) - 1 = -\frac{1}{37} = -2\frac{26}{37}\,\% \approx -2{,}7\,\%$

ii. $P(G) = \frac{12}{37},\ g = 2 \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{12}{37} \cdot (2+1) - 1 = -\frac{1}{37} = -2\frac{26}{37}\,\%$

iii. $P(G) = \frac{1}{37},\ g = 35 \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{1}{37} \cdot (35+1) - 1 = -\frac{1}{37} = -2\frac{26}{37}\,\%$

(f) Für ein faires Spiel gilt $R = P(G)(g+1) - 1 = 0$, d.h.

$$g = \frac{1}{P(G)} - 1$$

Würfelspiel: $P(G) = \frac{4}{9} \quad \Longrightarrow \quad g = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} = 1{,}25$

Roulette:

i. Setzen auf rot: $P(G) = \frac{18}{37} \quad \Longrightarrow \quad g = \frac{37}{18} - 1 = \frac{19}{18} = 1{,}0\overline{5}$

ii. Setzen auf ein Dutzend: $P(G) = \frac{12}{37} \quad \Longrightarrow \quad g = \frac{37}{12} - 1 = \frac{25}{12} = 2{,}08\overline{3}$

iii. Setzen auf eine Zahl: $P(G) = \frac{1}{37} \quad \Longrightarrow \quad g = 37 - 1 = 36$

14. Von den 80 Millionen Deutschen besitzen 75 Milionen ein Handy und 70 % der Deutschen nennen einen Computer ihr Eigen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Computerbesitzer kein Handy hat, beträgt 2 %.

(a) Wie viele Deutsche und wieviel Prozent der Deutschen besitzen

i. einen Computer, aber kein Handy

ii. einen Computer und ein Handy

iii. keinen Computer, aber ein Handy

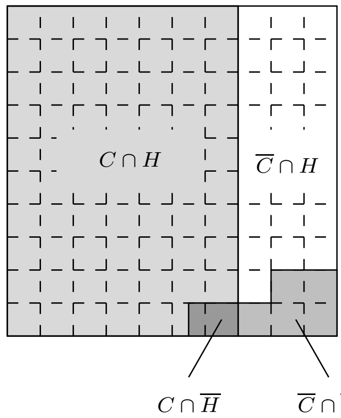
iv. keinen Computer und kein Handy

Stelle die berechneten Ergebnisse in einem Quadrat mit der Kantenlänge 5 cm grafisch dar.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nichtcomputerbesitzer auch kein Handy besitzt?

Lösung: (a)

rel. Häuf.	C	$\overline{C}$	
H	68,6%	25,15%	93,75%
$\overline{H}$	1,4%	4,85%	6,25%
	70%	30%	100%



absol. Häuf.	C	$\overline{C}$	
H	54 880 000	20 120 000	75 000 000
$\overline{H}$	1 120 000	3 880 000	5 000 000
	56 000 000	24 000 000	80 000 000

(b) Von den 24 000 000 Nichtcomputerbesitzern haben 3 880 000 kein Handy. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also

$$p = \frac{3\,880\,000}{24\,000\,000} = 0{,}161\overline{6}\,\% = 16\frac{1}{6}\,\%$$

15. Herr Dimpflmoser, der Trachtenvereinsvorstand von Oberndorf, besitzt zwei Lederhosen sowie drei graue und vier braune Lodenhosen. Weiter nennt er fünf graue und zwei braune Joppen sein Eigen. Herr Dimpflmoser greift sich zufällig eine Hose und eine Joppe. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wählt er dabei
   (a) eine graue Hose und eine graue Joppe (E_1)
   (b) kein graues Kleidungsstück (E_2)
   (c) mindestens ein graues Kleidungsstück (E_3)?

   Gib alle Wahrscheinlichkeiten als gekürzte Brüche und in Prozenten (auf zehntel Prozent gerundet) an.

Lösung: Gesamtzahl der Kleidungsmöglichkeiten bei 9 Hosen und 7 Joppen: $|\Omega| = 9 \cdot 7 = 63$

(a) $|E_1| = 3 \cdot 5 = 15 \quad\Longrightarrow\quad P(E_1) = \frac{15}{63} = \frac{5}{21} = 23{,}8\%$

(b) Er kann die 2 Lederhosen und 4 braunen Hosen mit den 2 braunen Joppen kombinieren:

$$|E_2| = (2+4) \cdot 2 = 12 \quad\Longrightarrow\quad P(E_2) = \frac{12}{63} = \frac{4}{21} = 19{,}0\%$$

(c) $|E_3| = \overline{E_2} \quad\Longrightarrow\quad P(E_3) = 1 - P(E_2) = 1 - \frac{4}{21} = \frac{17}{21} = 81{,}0\%$

16. Drei Buben und zwei Mädchen stellen sich für ein Gruppenfoto zufällig nebeneinander auf.
   (a) Wie viele verschiedene Aufstellungen sind möglich?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Buben und die Mädchen jeweils nebeneinander stehen?

Lösung: (a) $|\Omega| = 5! = 120$

(b) Es gibt zwei grundsätzlich verschiedene Anordnungen: Buben links oder Buben rechts: BBMMM oder MMBBB. Jede der beiden Anordnungen ist auf $3! \cdot 2! = 12$ Arten realisierbar.

$$P = \frac{2 \cdot 12}{120} = \frac{1}{5} = 20\%$$

Eine alternative Lösung, wenn man das „jeweils“ in der Angabe überliest: BMBMB. Dann ist

$$P = \frac{12}{120} = \frac{1}{10} = 10\%$$

17. Es werden sechs Laplace-Würfel geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

(a) E_1: „nur Sechsen liegen oben“

(b) E_2: „keine Sechs liegt oben“

(c) E_3: „mindestens eine Sechs liegt oben“

(d) E_4: „jede der Zahlen von eins bis sechs liegt oben“

Lösung: $|\Omega| = 6^6 = 46\,656$

(a) $|E_1| = 1 \quad \Longrightarrow \quad P(E_1) = \frac{1}{6^6} = 2{,}14 \cdot 10^{-5}$

(b) $|E_2| = 5^6 \quad \Longrightarrow \quad P(E_2) = \frac{5^6}{6^6} = 33{,}49\%$

(c) $\overline{E}_3 = E_2 \quad \Longrightarrow \quad P(E_3) = 1 - P(E_2) = 66{,}51\%$

(d) $|E_4| = 6! \quad \Longrightarrow \quad P(E_4) = \frac{6!}{6^6} = 1{,}54\%$

18. Fünf Seiten eines Würfels vom 3 cm Kantenlänge werden rot angestrichen, die sechste Fläche bleibt ohne Anstrich.

(a) Wie viel Prozent der Würfelfläche sind rot?

(b) Der Würfel wird in Teilwürfel von 1 cm Kantenlänge zerlegt. Diese Teilwürfel werden in ein Gefäß gelegt, aus dem anschließend einer mit geschlossenen Aufgen entnommen wird.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat der entnommene Würfel keine, genaue eine (zwei, drei, vier) rot angestrichene Flächen(n)?

Quelle: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss

Lösung: (a) Ca. 83% der Würfelfläche sind rot.

(b) X: Anzahl der rot angestrichene Flächen(n)
$P(0) = \frac{2}{27}$, $P(1) = \frac{9}{27}$, $P(2) = \frac{12}{27}$, $P(3) = \frac{4}{27}$, $P(4) = \frac{0}{27}$

19. **Für Spieler:**

(a) Ein Würfel wird fünfmal geworfen und zeigt jedes Mal eine Drei. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er beim nächsten Mal wieder die Drei zeigt?

(b) Ein Würfel wird fünfmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man fünf verschiedene Ergebnisse bekommt?

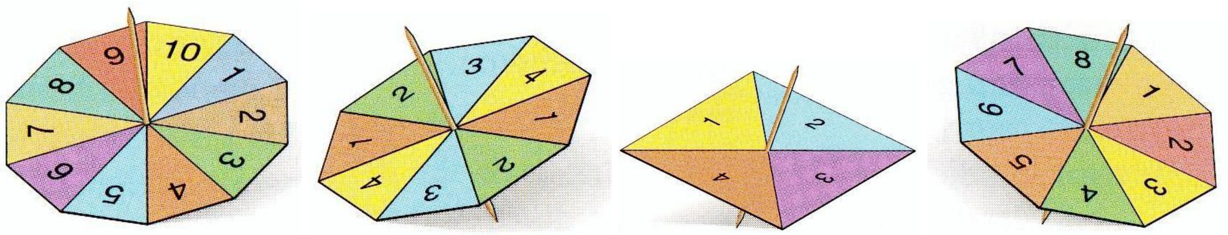
Quelle: G. M. Ziegler, FOCUS 23/2006

Lösung: Nimmt man einen Laplace-Würfel an, lassen sich die Fragen wie folgt beantworten. Ansonsten kann man keine Aussagen machen.

(a) $\frac{1}{6}$

(b) $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6^5} = 9,3\%$

20. **Aufgabe zur Anwendung**



Die oben abgebildeten Glückskreisel werden gedreht.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie im Feld „2“ liegen bleiben?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie auf einer geraden Zahl liegen bleiben?

(c) Für welche Glückskreisel ist das Spiel „Du gewinnst, wenn eine Primzahl kommt“ fair?

(d) Finde andere faire bzw. unfaire Spielregeln für die einzelnen Glückskreisel. Finde ggf. einen Kreisel bei dem das Spiel fair wäre.

Lösung: (a) $0,1 \quad 0,25 \quad 0,25 \quad 0,125$

(b) alle $0,5$

(c) Kreises 2, 3, und 4

21. **Aufgabe zur Anwendung**

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der gelbe Stein beim nächsten Wurf

(a) den grünen [bzw. den roten] Stein schlägt?

(b) in sein Haus gelangt?

(c) weder einen Stein schlägt noch in sein Haus gelangt?

Lösung: (a) $\frac{1}{6}$ $[\frac{1}{6}]$

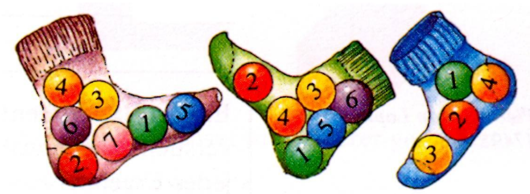
(b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{1}{3}$

22. **Aufgabe zur Anwendung**

(a) Welche Wahrscheinlichkeit hat die Zahl „3“ bei den Urnen in der Abbildung?

(b) Lina zieht 75-mal aus der Urne 1, dabei wird jede gezogene Kugel vor dem nächsten Zug zurückgelegt. Wie oft wird sie etwa in den 75 Versuchen die „3“ erwischen?



Lösung: (a) $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{4}$

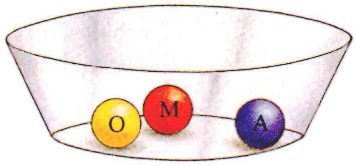
(b) ca. 11-mal

23. **Aufgabe zur Anwendung**

In einer Urne liegen drei Kugeln mit Buchstaben, sie werden nacheinander gezogen und hintereinander gelegt.

(a) Schreibe alle „Wörter“ auf, die dabei entstehen können.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit entsteht das Wort OMA?



Lösung: (a) 6 verschiedene

(b) $\frac{1}{6}$

24. **Aufgabe zur Anwendung**

Bestimme mit einer Laplace-Annahme die Wahrscheinlichkeit, dass jemand, der nicht in einem Schaltjahr geboren ist,

(a) am 12. Januar

(b) am 24. Dezember

(c) am 29. Februar

(d) im April

(e) an einem Monatsersten

(f) an einem Datum deiner Wahl

Geburtstag hat.

Lösung: (a) $\frac{1}{365}$ (b) $\frac{1}{365}$ (c) 0 (d) $\frac{30}{365} = \frac{6}{37}$ (e) $\frac{12}{365}$ (f) $\frac{1}{365}$

25. **Aufgabe zur Anwendung**

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Würfeln mit zwei Würfeln einen Pasch zu bekommen?

Lösung: $\frac{1}{6}$

2.3 Abgrenzung des Begriffs „Laplace-Experimente" durch Beispiele

1. Ein normaler Spielwürfel wird geworfen. In fünf aufeinander folgenden Würfen landet der Würfel jedes Mal so, dass eine gerade Zahl angezeigt wird. Nun wird der Würfel ein sechstes Mal geworfen. Welche der folgenden Aussagen trifft dann zu?

   - Es ist wahrscheinlicher, dass der Würfel eine gerade Zahl zeigt, als dass er eine ungerade Zahl zeigt.

- Es ist wahrscheinlicher, dass der Würfel eine ungerade Zahl zeigt, als dass er eine gerade Zahl zeigt.
- Es ist gleich wahrscheinlich, dass eine gerade Zahl oder eine ungerade Zahl gezeigt wird.
- Der Würfel zeigt mit Sicherheit eine ungerade Zahl.

Quelle: VERA C 2008

Lösung: Es ist gleich wahrscheinlich, dass eine gerade Zahl oder eine ungerade Zahl gezeigt wird.

3 Funktionale Zusammenhänge II: gebrochen rationale Funktionen

3.1 gebrochen-rationale Funktionen

1. Ansgar und Bernd spielen mit zwei Würfeln: Ansgar gewinnt, wenn die Augensumme 5, 6, 7 oder 8 ist. Bernd bei jedem anderen Ergebnis.

   Begründe, ob du eine der beiden Gewinnmöglichkeiten bevorzugen würdest.

   aus: Stochastik in der Realschule - Fortbildungsmaterialien, Prof. Dr. Timo Leuders, Pädagogische Hochschule Freiburg

Lösung: Insgesamt gibt es bei zwei Würfen 36 Möglichkeiten.

Augensumme	5	6	7	8
Anzahl Möglichkeiten	4	5	6	5

Ansgar hat 20 Gewinnmöglchkeiten und gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{20}{36} = 56\%$. Also ist seine Gewinnmöglichkeit besser.

2. Bestimme die Lösung der folgenden Gleichung ($D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$): $13 = 2 - \frac{4}{x}$

Lösung: $x = -\frac{4}{11}$

3.2 Bruchterme

3.2.1 Definitionsmenge

1. Dies ist Platzhalter für eine SMART-Aufgabe. Wird demnächst eingefügt.

Lösung: –

3.2.2 Erweitern und Kürzen

1. Kürze so weit wie möglich: $\dfrac{51\,y^4 - 204\,y^2}{340\,y^4 - 85\,y^6}$

   Wie lautet die Definitionsmenge des gegebenen Terms?

Lösung: $\dfrac{51\,y^4-204\,y^2}{340\,y^4-85\,y^6}=\dfrac{51y^2(y^2-4)}{85y^4(4-\ y^2)}=\dfrac{-3\cdot 17(4-y^2)}{5\cdot 17y^2(4-\ y^2)}=-\dfrac{3}{5y^2}$

$D=\mathbb{Q}\setminus\{-2,0,2\}$

2. Kürze so weit wie möglich: $\dfrac{36a^3b-24a^2b^2}{18ab^2-27a^2b}$

Lösung: $\dfrac{36a^3b-24a^2b^2}{18ab^2-27a^2b}=\dfrac{12a^2b(3a-2b)}{9ab(2b-3a)}=\dfrac{-4a(2b-3a)}{3(2b-3a)}=-\dfrac{4a}{3}$

3. Bringe auf den jeweils in Klammern angegebenen Nenner! Gib auch jeweils den Erweiterungsfaktor an!

   (a) $\dfrac{10}{21a^2b^2c}\qquad(126a^4b^3c)$

   (b) $\dfrac{-3}{4a-5b}\qquad(24a^2b-30ab^2)$

   (c) $\dfrac{2a-b}{a-b}\qquad(2b^2-2a^2)$

Lösung: (a): $\dfrac{60a^2b}{126a^4b^3c}$; EWF$=6a^2b$ (b): $\dfrac{-18ab}{24a^2b-30ab^2}$; EWF$=6ab$

(c): $\dfrac{2b^2-2ab-4a^2}{2b^2-2a^2}$; EWF$=-2\cdot(a+b)$

4. Mache die beiden Bruchterme gleichnamig!

$$\frac{x+3}{2x-6}\text{ und }\frac{15}{9-x^2}$$

Lösung: $\dfrac{-(x+3)^2}{18-2x^2}$ und $\dfrac{30}{18-2x^2}$

5. Mache die beiden Bruchterme gleichnamig!

$$\frac{x+2}{2x-4}\text{ und }\frac{14}{4-x^2}$$

Lösung: $\dfrac{-(x+2)^2}{8-2x^2}$ und $\dfrac{28}{8-2x^2}$

6. Kürze vollständig:

$$\frac{-a^2+a^3+2ab-2a^2b-b^2+ab^2}{a^2-ab-a+b}$$

Lösung: $a - b$

7. Kürze soweit wie möglich: $$\frac{60\,a\,x - 45\,b\,x + 24\,a\,y - 18\,b\,y}{24\,a\,x + 60\,a\,y - 18\,b\,x - 45\,b\,y}$$

Lösung: $\frac{5\,x + 2\,y}{2\,x + 5\,y}$

8. Bestimme die Definitionsmenge und kürze soweit wie möglich:
$$\frac{x-1}{2x^3 - 4x^2 + 2x}$$

Lösung: $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 1\}$; $\frac{1}{2x(x-1)}$

9. Kürze soweit wie möglich:
$$\frac{8v^3 - 24uv^2 + 18u^2v}{18u^3 - 8uv^2}$$

Lösung: $\frac{v(3u-2v)}{u(3u+2v)}$

10. Zerlege Zähler und Nenner in Faktoren und kürze vollständig:
$$\frac{42xy - 49y - 9x^2y}{9x^2y - 49y}$$

Lösung: $-\frac{3x-7}{3x+7}$

11. Kürze vollständig:
$$\frac{12x^2 - 108y^2}{24x^2y - 36xy^2 - 4x^3}$$

Lösung: $\frac{3(3y+x)}{x(3y-x)}$

12. Zerlege Zähler und Nenner in Faktoren und kürze vollständig:
$$\frac{-6xy + 8y^2}{54x^2y - 144xy^2 + 96y^3}$$

Lösung: $\frac{1}{3(4y-3x)}$

13. Bestimme die Definitionsmenge des Terms und kürze ihn vollständig:

$$\frac{45x^2 + 30x^3}{12x^3 - 27x}$$

Lösung: $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; \pm\frac{3}{2}\}$, Ergebnis: $\frac{5x}{2x-3}$

14. Kürze vollständig:

$$\frac{9xy^2 - 6x^2y - 6x^2y^2 + 4x^3y}{24x^3y - 81y - 16x^4 + 54x}$$

Lösung: $\dfrac{-xy}{4x^2 + 6x + 9}$

15. Fasse zusammen und vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{1 + \dfrac{3 + 5x}{x^2 - 4x - 5}}{1 - \dfrac{x^2 - 11x + 23}{x^2 - 10x + 25}}$$

Lösung: $\dfrac{(x-5)\cdot(x-1)}{x+1}$ (Linearfaktorzerlegung eines quadr. Terms nötig!)

16. Kürze den Term soweit wie möglich:

$$\frac{(2f-9)(4x^2 + 20x + 25)}{36x - 8xf + 90 - 20f}$$

Lösung: $-\frac{2x+5}{2}$

17. Kürze soweit wie möglich und gib die Definitionsmenge D_0 des ungekürzten sowie D_1 des gekürzten Bruches an:

$$\frac{(x^4 - 1)\,(x^2 - 6\,x + 9)}{(x^2 - 1)\,(x^2 - 9)}$$

Lösung: $\dfrac{\left(x^2+1\right)(x-3)}{x+3} = \dfrac{x^3-3\,x^2+x-3}{x+3}$
$D_0 = \mathbb{Q}\backslash\{-3\,;\,-1\,;\,1\,;\,3\}\quad;\quad D_1 = \mathbb{Q}\backslash\{-3\}$

18. Bestimme die Definitionsmenge D des Terms $T(x)$ und kürze den Term vollständig ($G = \mathbb{Q}$)! Gib auch für den gekürzten Term $T^*(x)$ die Definitionsmenge D^* an!

    (a) $T(x) = \dfrac{8x^4+24x^3+18x^2}{12x^3-27x}$

    (b) $T(x) = \dfrac{15x^2-20x}{48x-27x^3}$

Lösung: (a) $T^*(x) = \dfrac{2x(2x+3)}{3(2x-3)}, \quad D = \mathbb{Q}\setminus\{-\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\}, \quad D^* = \mathbb{Q}\setminus\{\frac{3}{2}\}$

(b) $T^*(x) = -\dfrac{5}{3(3x+4)}, \quad D = \mathbb{Q}\setminus\{-\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}\}, \quad D^* = \mathbb{Q}\setminus\{-\frac{4}{3}\}$

19. Kürze folgenden Term vollständig!

$$\frac{49ab^2-25a^3}{50a^3-140a^2b+98ab^2}$$

Lösung: $\dfrac{7b+5a}{2(7b-5a)}$

20. Bestimme die Definitionsmenge D des Terms $T(x)$ und kürze den Term vollständig! Gib auch für den gekürzten Term $T^*(x)$ die Definitionsmenge D^* an!

    (a) $T(x) = \dfrac{12x^3-60x^2+75x}{8x^4-50x^2}$

    (b) $T(x) = \dfrac{20x^2-12x}{27x-75x^3}$

Lösung: (a) $\dfrac{3(2x-5)}{2x(2x+5)} \quad D = \mathbb{Q}\setminus\{-\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{2}\} \quad D^* = \mathbb{Q}\setminus\{-\frac{5}{2}, 0\}$

(b) $-\dfrac{4}{3(5x+3)} \quad D = \mathbb{Q}\setminus\{-\frac{3}{5}, 0, \frac{3}{5}\} \quad D^* = \mathbb{Q}\setminus\{-\frac{3}{5}\}$

21. Kürze folgenden Term vollständig!

$$\frac{36b^3-25a^2b}{50a^2b-120ab^2+72b^3}$$

Lösung: $\dfrac{6b+5a}{2(6b-5a)}$

22. Kürze vollständig!

$$\frac{45a^3 - 60a^2b + 20ab^2}{40ab^3 - 90a^3b}$$

Lösung: $\dfrac{2b-3a}{2(2b+3a)}$

23. Kürze vollständig!

$$\frac{40a^2b - 120ab^2 + 90b^3}{45ab^3 - 20a^3b}$$

Lösung: $\dfrac{2(3b-2a)}{a(3b+2a)}$

24. (a) Bestimme die Definitionsmenge D für den Term

$$T(x) = \frac{24x^2 + 6 - 24x}{12x^2 - 3}$$

(b) Kürze den Bruchterm vollständig und gib für den gekürzten Term $T^*(x)$ die Definitionsmenge D^* an!

Lösung: (a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

(b) $T(x) = \frac{2(2x-1)}{2x+1}$, $D^* = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

25. (a) Bestimme die Definitionsmenge D ($G = \mathbb{Q}$) für den Term

$$T(x) = \frac{36x^2 + 4 - 24x}{18x^2 - 2}$$

(b) Kürze den Bruchterm vollständig und gib für den gekürzten Term $T^*(x)$ die Definitionsmenge D^* an!

Lösung: (a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$

(b) $T(x) = \frac{2(3x-1)}{3x+1}$, $D^* = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$

3.2.3 Multiplikation und Division

1. Vereinfache:

(a) $\left[\dfrac{a^2(bc)^4}{(ab)^4c^3}\right] \cdot \left[\dfrac{a^5b^0c^2}{a^7c^6}\right]^3$ (b) $\left[\left(\dfrac{2a^{-1}b^2}{3a^5c^{-3}}\right)^3 : \left(\dfrac{3a^6b^{-4}}{7a^{-2}c^4}\right)^{-2}\right] \cdot \left(\dfrac{-c^0}{7a}\right)^{-1}$

Lösung: (a) $a^{-8}c^{-11}$ (b) $-\dfrac{8c}{21ab^2}$

2. Vereinfache und schreibe das Ergebnis ohne Bruchstrich:

(a) $\dfrac{(3u^4v^{-1})^2}{(9u^{-2}v^{-3})^{-1}} : \dfrac{(2u^{-6}v^3)^{-3}}{(2u^5v^{-2})^4}$ (b) $\dfrac{0{,}8a^6b^{-5}c^3}{3^{-3}a^{-3}b^4} : \dfrac{9b^{-1}}{a^{-4}c^2}$

Lösung: (a) $2^7 \cdot 3^4 \cdot u^8 \cdot v^{-4}$ (b) $2{,}4a^5b^{-8}c^5$

3. Vereinfache ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$):

(a) $\dfrac{r^{3m+2}}{a^{m+3}} : \dfrac{r^{2m-2}}{a^{m+2}}$ (b) $(3a-7b)^{2n+1} \cdot (7b-3a)^{2n+1}$ (c) $\left[(-1)^{2n+1} - (-1)^{2n}\right]^5$

Lösung: (a) $r^{m+4}a^{-1}$ (b) $-(3a-7b)^{4n+2}$ (c) -32

3.2.4 Addition und Subtraktion

1. Das Ergebnis muss *ein möglichst einfacher* Bruch sein:

(a) $\left(\dfrac{1}{a}\right)^3 : b^2 - b \cdot \dfrac{1}{a^2}$ (b) $x - \dfrac{x}{1-\dfrac{1}{x}}$

Lösung: (a) $\left(\dfrac{1}{a}\right)^3 : b^2 - b \cdot \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{a^3b^2} - \dfrac{b}{a^2} = \dfrac{1}{a^3b^2} - \dfrac{b \cdot ab^2}{a^2 \cdot ab^2} = \dfrac{1-ab^3}{a^3b^2}$

(b) $x - \dfrac{x}{1-\dfrac{1}{x}} = x - \dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{x(x-1)-x^2}{x-1} = \dfrac{x^2-x-x^2}{x-1} = \dfrac{-x}{x-1} = \dfrac{x}{1-x}$

2. Das Ergebnis muss *ein* Bruch sein. Gib jeweils an, für welche Werte der Variablen der gegebene Term nicht definiert ist.

(a) $\dfrac{5x}{24a^2b^3} + \dfrac{7y}{18a^4b}$ (b) $1 - \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x^2}}$

Lösung: (a) $\frac{5x}{24a^2b^3} + \frac{7y}{18a^4b} = \frac{15a^2x + 28b^2y}{72a^4b^3}, \qquad a \neq 0,\, b \neq 0$

(b) $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 - \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1 - x^2}{x^2 - 1} = \frac{-1}{x^2 - 1} = \frac{1}{1 - x^2}, \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{-1, 0, 1\}$

3. Fasse zusammen und gib das Ergebnis in gekürzter Form an:

$$\frac{4x - 9y}{12x^2y} - \frac{3x + 5y}{15xy^2}$$

Lösung: $-\frac{15y^2+4x^2}{20x^2y^2}$

4. Bestimme den Hauptnenner, fasse zusammen und kürze soweit wie möglich:

$$\frac{5a - b}{15a^2b} + \frac{2a - 4b}{12ab^2}$$

Lösung: $\frac{5a^2-2b^2}{30a^2b^2}$

3.3 Bruchgleichungen

1. Das Auffüllen einer Badewanne mit Heißwasser dauert drei Minuten, aus dem getrennten Kaltwasserhahn nur zwei Minuten. Wie schnell ist die Wanne voll, wenn man beide Hähne aufdreht?

   Quelle: G. M. Ziegler, FOCUS 23/2006

Lösung: pro Minute: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, also dauert es $\frac{6}{5} = 1,2$ min

2. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung über $G = \mathbb{Q}$:

$$2 - \frac{2}{x} - \frac{4x}{2x + 1} = 0$$

Lösung: $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; -\frac{1}{2}\}$, $L = \{-1\}$

3. Bestimme jeweils Definitions- und Lösungsmenge:

   (a) $x - 2 - \frac{4}{x - 2} = x \cdot \frac{x - 4}{x - 2}$

(b) $\dfrac{-3x}{x+3} = \dfrac{-21}{x^2+3x} - \dfrac{3x-7}{x}$

(c) $\dfrac{x}{2x+3} = \dfrac{x-3}{2x-1}$

Lösung: (a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$, $L = D$

(b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; -3\}$, $L = \{\}$

(c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{0,5; -1,5\}$, $L = \{-4,5\}$

4. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichung:

$$\frac{2x}{3x-9} + \frac{2x-10}{12-4x} - \frac{x+3}{6x} = 0, \quad G = \mathbb{Q}$$

Lösung: $G = \mathbb{Q} \setminus \{3; 0\}$, $L = \{-\frac{3}{5}\}$

5. Löse die Gleichung $\left(p + \dfrac{a}{V^2}\right) \cdot (V - b) = n \cdot R \cdot T$ nach der Variablen a auf! Nenne auch die Bedingungen, unter denen dies nur möglich sein kann!

Lösung: $a = \frac{nRTV^2}{V-b} - pV^2$; $V \neq 0$; $V \neq b$

6. Löse nach der Variablen a auf:

$$\frac{a-c-ac}{ab+ac} = 1 + \frac{1}{a}$$

Lösung: $a = \dfrac{b+2c}{1-b-2c}$

7. Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems über der Grundmenge $\mathbb{Q}$!

(I) $5(x+y) - 3(x-y) = 26$

(II) $3(x-y) + 2(x+y) = 2$

Lösung: $x = 1$, $y = 3$

8. Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems über der Grundmenge $\mathbb{Q}$!

(I) $\dfrac{3}{3{,}5y + 0{,}15} + \dfrac{2}{0{,}6 - 4x} = 0$

(II) $\dfrac{2}{11} + \dfrac{2y-3}{8x+1} = 0$

Lösung: $x = 1{,}4,\ y = 0{,}9$

9. Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems über der Grundmenge $\mathbb{Q}$!

   (I) $\dfrac{33 - 22y}{8x + 1} = 2$

   (II) $\dfrac{2}{4x - 0{,}6} = \dfrac{3}{3{,}5y + 0{,}15}$

Lösung: $x = 0{,}7,\ y = 0{,}9$

10. Gib die Lösungsmenge des Gleichungssystems über $\mathbb{Q}$ an!

$$(I)\ \ \frac{1 - x}{\frac{y}{5} + 1} - 5\frac{3 - x}{y + 8} = 0 \qquad (II)\ \ \frac{5y + 7}{y + 1} + \frac{5x + 6}{\frac{1}{2}(-2x - 3)} = 0$$

Lösung: Beide Gleichungen mit dem Hauptnenner multiplizieren:

$(I) \cdot (y + 8)(\frac{y}{5} + 1) \Rightarrow -3x - 2y - 7 = 0$

$(II) \cdot (y + 1)(-2x - 3) \Rightarrow -4x - 3y - 9 = 0$

Das Gleichungssystem (I') $-3x - 2y - 7 = 0$ und (II') $-4x - 3y - 9 = 0$ liefert die Lösung $x = -3,\ y = 1$

11. Löse mit Hilfe einer Gleichung:
    Der Zähler eines Bruches ist um 8 größer als der Nenner. Addiert man zum Zähler eins und zum Nenner 25, so entsteht ein Bruch, dessen Wert gleich dem Kehrwert des ursprünglichen Bruches ist. Wie heißt dieser?

Lösung: Der Bruch heißt $\frac{17}{9}$

12. Ein Wasserbehälter kann durch drei Zuflußrohre gefüllt werden. Ist nur das erste Rohr geöffnet, so ist der Behälter in einer halben Stunde voll. Ist nur die zweite Röhre geöffnet, dauert das Füllen zwölf Minuten. Öffnet man alle drei Rohre gleichzeitig, dann ist der Behälter in sechs Minuten gefüllt.
    Nach welcher Zeit ist der Behälter voll, wenn nur das dritte Rohr geöffnet ist?

Lösung: 20 Minuten

13. Eine Röhre füllt einen Behälter in 3 Stunden. Die zweite Röhre braucht dafür drei mal so lang, wie wenn beide Röhren gleichzeitig geöffnet sind. Wie lange dauert es, bis beide Röhren den Behälter füllen? (x-Ansatz und Rechnung.)

Lösung: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3x} = \frac{1}{x}$ ergibt $x = 2$

14. Eine Kugel wird von einer Superkanone mit der Geschwindigkeit v von der Erdoberfläche aus senkrecht nach oben geschossen und erreicht die maximale Höhe h. Zwischen h und dem Erdradius R besteht die Beziehung

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} = z \qquad (1)$$

wobei z eine von v abhängige Größe ist.

(a) Löse (1) nach h auf und stelle das Ergebnis in der Form $h = R \cdot \dfrac{1}{y-1}$ dar!

(b) Für $v = 5000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ gilt $z = \dfrac{1}{32\,000\,\mathrm{km}}$, der Erdradius sei $R = 6400\,\mathrm{km}$.

Berechne für diesen Fall die Flughöhe der Kugel!

Lösung: (a) $h = \dfrac{z\,R^2}{1 - z\,R} = R \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{z\,R} - 1}$

(b) $z\,R = \frac{1}{5}; \quad h = \frac{R}{4} = 1600\,\mathrm{km}$

15. Wir suchen eine „Kehrwertregel“ für Ungleichungen:

$$a < b \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{a}\ \boxed{?}\ \frac{1}{b}$$

Experimentiere mit verschiedenen positiven und negativen Zahlen für a und b und schreibe dann die endgültige Regel hin. Achtung: Es gibt drei verschiedene Fälle!

Lösung:

$$\begin{aligned}
2 < 4 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{2} > \frac{1}{4} \\
-4 < -2 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4} > -\frac{1}{2} = \frac{1}{-2} \\
-2 < 4 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} < \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}
0 < a < b \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \\
a < b < 0 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \\
a < 0 < b \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{a} < \frac{1}{b}
\end{aligned}$$

3.4 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

1. **Warum 0^0 nicht definiert ist**

   Anna bringt folgendes Argument: „Da $a^0 = 1$ für alle $a \neq 0$ schon festgelegt ist, wäre es doch sinnvoll, auch $0^0 = 1$ zu definieren.“ Darauf antwortet Paul: „Da $0^n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ schon festgelegt ist, wäre es doch sinnvoll, auch $0^0 = 0$ zu definieren.“

   Zeige, dass beide Definitionen für 0^0 jeweils eines der Potenzgesetze verletzen.

Lösung: Aus Annas Definition $0^0 = 1$ folgt: $1 = \frac{1}{1} = \frac{2^0}{0^0} = \left(\frac{2}{0}\right)^0$

Der letzte Term $\left(\frac{2}{0}\right)^0$ ist aber wegen der Null im Nenner nicht definiert, damit ist das Potenzgesetz $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ verletzt.

Aus Pauls Definition $0^0 = 0$ folgt: $0 = 0^0 = 0^{2-2} = \frac{0^2}{0^2} = \frac{0}{0}$

Der letzte Term $\frac{0}{0}$ ist aber wegen der Null im Nenner nicht definiert, damit ist das Potenzgesetz $a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}$ verletzt.

2. **Lebensalter**

   „Berechne mit dem Taschenrechner die 5. Potenz deines Lebensalters. Sag mir die Endziffer deines Ergebnisses und ich sage dir, wie alt du bist.“ Quelle: Schnittpunkt 9 (1995)

Lösung: Endziffer bleibt in der fünften Potenz erhalten. Allerdings muss das Jahrzehnt geschätzt werden.

3. Das Universum hat ein Volumen wie ein Würfel mit einer Kantenlänge a von zwanzig Milliarden Lichtjahren (Lichtgeschwindigkeit: $c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$). Ein Proton beansprucht ein Volumen wie ein Würfel mit der Kantenlänge $b = 10^{-15}\,\mathrm{m}$. Wie viele Protonen passen in das Universum?

Lösung: $a = 1{,}89 \cdot 10^{26}\,\mathrm{m}$; $\quad V_{\text{Universum}} = 6{,}77 \cdot 10^{78}\,\mathrm{m}^3$

$V_{\text{Proton}} = 10^{-45}\,\mathrm{m}^3$; $\quad N = \frac{V_{\text{Universum}}}{V_{\text{Proton}}} = 6{,}77 \cdot 10^{123}$

4. Gegeben ist der Term:

$$\frac{(0{,}000\,000\,106\,5)^4 \cdot 0{,}000\,190\,0}{3\,560\,000}.$$

(a) Stelle den Term mit Zehnerpotenzen dar (jeweils eine Stelle vor dem Komma)!

(b) Berechne den Term mit dem Taschenrechner (Ergebnis mit zwei Stellen vor dem Komma und vier gültigen Ziffern)!

Lösung: (a): $\frac{1{,}065^4 \cdot 1{,}9}{3{,}56} \cdot 10^{-26}$

(b): $68{,}66 \cdot 10^{-28}$

4 Strahlensatz und Ähnlichkeit

4.1 Strahlensätze

4.1.1 Konstruktionsaufgaben

Teilungskonstruktionen

1. Gegeben ist ein Dreieck ABC durch $a = 9\,\text{cm}$, $b = 8\,\text{cm}$, $c = 11\,\text{cm}$. Konstruiere Transversalen des Dreiecks, welche von der Ecke C ausgehen und das Dreieck ABC in sieben inhaltsgleiche Teile zerlegen.

Lösung:

2. Der Punkt C teilt die Strecke [AB] von außen (vgl. Abbildung).
   Für die Streckenlängen gilt:
   $\overline{CA} = 2,5\,\text{cm}$
   $\overline{AB} = 4,0\,\text{cm}$

   (a) Gib das zugehörige Teilverhältnis an!
   (b) Konstruiere den inneren Teilpunkt D, so daß C und D die Strecke [AB] harmonisch teilen!
   (c) Berechne $\overline{AD}$!

Lösung: (a) $-\frac{5}{13}$; (b) $\overline{AD} \approx 1,1\,\text{cm}$

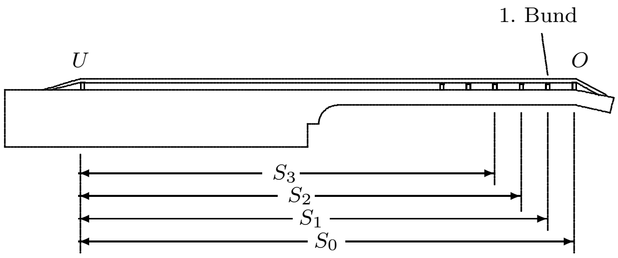
3. Konstruiere zu einer Strecke $[AB]$ der Länge $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$ Teilpunkte C und D, die die Strecke innen und außen im Verhältnis $3:5$ teilen.
   In welchem Verhältnis teilen dann die Punkte A und B die Strecke $[CD]$?
   Genaue Rechnung!

Lösung: Teilverhältnis $1:4$ bzw. $-1:4$

Sonstige Konstruktionsaufgaben

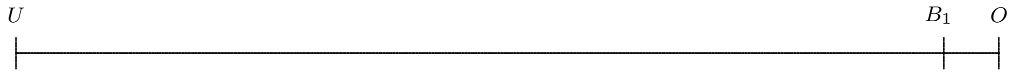
1. **Lage der Bünde bei Saiteninstrumenten:**

   Die Länge einer Gitarrensaite ist s_0 (Entfernung von Untersattel (U) bis zum Obersattel (O)). Die Längen vom Untersattel zu den Bünden bezeichnen wir mit s_1, s_2 usw.
   Für die Lage der Bünde gilt

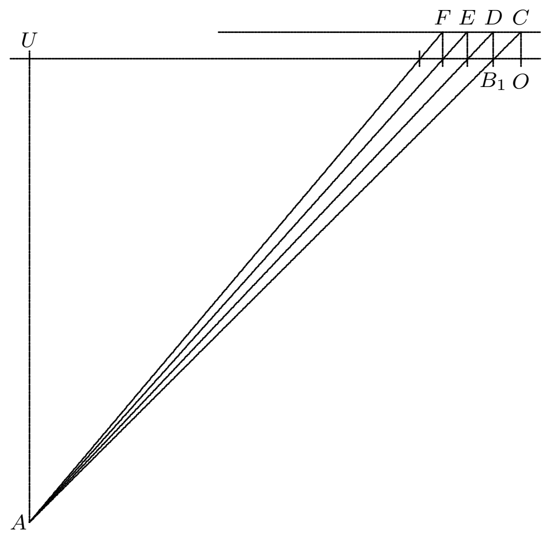
   $$\frac{s_1}{s_0} = \frac{s_2}{s_1} = \frac{s_3}{s_2} = ... = k = \text{konst.} \qquad (1)$$

   (a) Die folgende Abbildung zeigt die Lage von Untersattel, Obersattel und dem ersten Bund einer Gitarre im Maßstab 1 : 5.

   Übertrage die Zeichnung auf dein Blatt und konstruiere auf eine möglichst einfache Weise die Lage des zweiten, dritten und vierten Bundes! Entnimm deiner Konstruktion mit Hilfe einer kleinen Rechnung die tatsächliche Länge von s_4!

   (b) Jeder Bund entspricht einem Halbton, d. h. der zwölfte Bund entspricht einer Oktave und damit ist $s_{12} = \frac{s_0}{2}$. Drücke s_{12} mit Hilfe von Gleichung (1) durch k und s_0 aus! Berechne mit der so entstandenen Gleichung k auf eine Genauigkeit von vier geltenden Ziffern durch Probieren mit dem Taschenrechner! Verwende k zur Berechnung von s_4 aus $s_0 = 65,0\,\text{cm}$! Wie groß ist der prozentuale Fehler deines in Teilaufgabe (a) ermittelten Wertes von s_4?



Lösung: (a)

$L_1 =$ Lot auf UO in U
$L_2 =$ Lot auf UO in O
A beliebiger Punkt auf L_1
$C = L_2 \cap AB_1$
$p =$ Parallele zu UO durch C
$D = p \cap$ Lot auf UO durch B_1
$B_2 = AD \cap UO$
u.s.w.
$\overline{UB_4} \approx 10{,}3\,\text{cm} \mathrel{\widehat{=}} 51{,}5\,\text{cm}$

(b) $s_1 = k \cdot s_0\,,\quad s_2 = k \cdot s_1 = k^2 \cdot s_0\,,\,\ldots\,,\, s_{12} = k^{12} \cdot s_0 = \dfrac{s_0}{2}$

$k^{12} = 0{,}5 \quad\Longrightarrow\quad k \approx 0{,}9439 \quad\Longrightarrow\quad \overline{UB_4} = k^4 \cdot s_0 \approx 51{,}59\,\text{cm}$

2. Konstruiere x und überprüfe das Ergebnis durch Rechnung:

$$\text{(a) } 3 : x = 5 : 7 \qquad \text{(b) } x : 4 = 5 : 6 \qquad \text{(c) } \frac{5{,}5}{4} = \frac{x}{3{,}2}$$

Lösung: (a) $4{,}2$ (b) $\dfrac{10}{3}$ (c) $4{,}4$

3. Bestimme in der Proportion

$$\frac{4{,}5}{x} = \frac{3{,}6}{2{,}7}$$

die Proportionale x (ohne Rechnung) durch eine geeignete Konstruktion.

Lösung: $x \approx 3{,}4$

4. In einem kartesischen Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) sind durch die Punkte $A(2|1), B(5|3), C(1|2), D(2|5)$ zwei Strecken $[AB]$ und $[CD]$ gegeben. Konstruiere mit Hilfe des Strahlensatzes eine Strecke, deren Längenmaßzahl gleich dem Produkt der Maßzahlen von $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ ist!
Hinweis: Stelle zunächst eine geeignete Verhältnisgleichung auf!

Lösung:

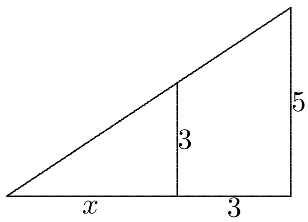
5. In einem kartesischen Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) sind durch die Punkte $A(1|-4), B(5|6), C(1|5), D(3|3)$ zwei Strecken $[AB]$ und $[CD]$ gegeben. Konstruiere mit Hilfe des Strahlensatzes eine Strecke, deren Längenmaßzahl gleich dem Quotienten der Maßzahlen von $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ ist!
   Hinweis: Stelle zunächst eine geeignete Verhältnisgleichung auf!

Lösung:

6. Für eine Strecke der Länge x gilt:

$$\frac{x}{3} = \frac{x+3}{5}$$

   Konstruiere x.



Lösung:

7. Konstruiere das Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) aus $\overline{AB} = 7\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$, $\overline{CD} = 3\,\text{cm}$ und $\overline{DA} = 5\,\text{cm}$ mit Hilfe der Strahlensätze. Verwende als Hilfspunkt den Schnittpunkt S der Geraden AD und BC! Berechne zur Kontrolle der Konstruktion die Streckenlängen $x = \overline{DS}$ und $y = \overline{BS}$!

Lösung: $x = 3,75\,\text{cm}$, $y = 7\,\text{cm}$

8. (a) Konstruiere ein Rechteck mit dem Umfang $U = 18\,\text{cm}$, dessen Seiten a und b sich wie $\sqrt{2} : 2$ verhalten.
   (b) Berechne a und b!

Lösung: Als Hilfslängen sind die Diagonale und die doppelte Seitenlänge eines beliebigen Quadrats zu verwenden; für diese gilt: $d : 2s = \sqrt{2} : 2$;
$a \approx 3,7\,\text{cm}$; $b \approx 5,3\,\text{cm}$

9. In einem Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) sind von einem Dreieck ABC folgende Stücke bekannt:

   $A(2|1)$; Schwerpunkt $S(5|6)$; $B(9|?)$; Seitenhalbierende $s_b = 7,5\,\text{cm}$.

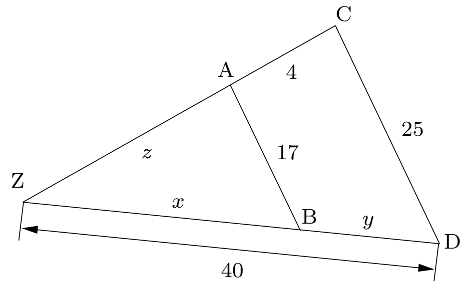
   Verlangt sind eine Konstruktionsbeschreibung und eine saubere Konstruktion!
   Hinweis: Beachte den Satz von den Schwerelinien im Dreieck!

Lösung:

4.1.2 Berechnungen mit Hilfe des Strahlensatzes

Strahlensatz allgemein

1. In nebenstehender Abbildung (nicht maßstabsgetreu) gilt AB||CD.
   (a) Berechne x, y und z.
   (b) Eine zentrische Streckung mit dem Zentrum Z, die A in C überführt, bildet ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $A = 578\,\text{cm}^2$ in ein Dreieck mit dem Flächeninhalt A' ab. Berechne A'.

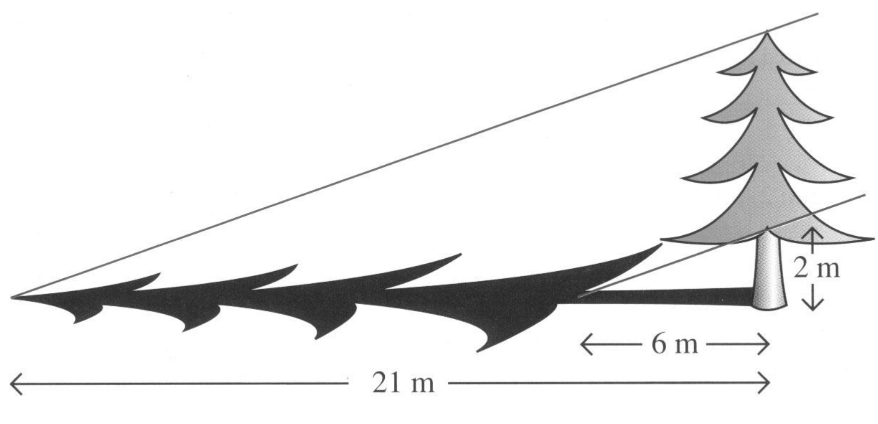


Lösung: (a) $\dfrac{x}{40} = \dfrac{17}{25} \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{17 \cdot 40}{25} = 27{,}2, \qquad y = 40 - x = 12{,}8$

$$\frac{z+4}{z} = 1 + \frac{4}{z} = \frac{25}{17} \quad \Longrightarrow \quad \frac{4}{z} = \frac{8}{17} \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{4 \cdot 17}{8} = 8{,}5$$

(b) $k = \dfrac{25}{17} \quad \Longrightarrow \quad A' = k^2 A = \dfrac{25^2 \cdot 578\,\text{cm}^2}{17^2} = 1250\,\text{cm}^2$

2. **Ein Baum und sein Schatten**
   Greta Grübel hat an einem Baum und an seinem Schatten Längen gemessen.
   Wie kann Greta die Höhe des Baumes berechnen?
   Funktioniert die Methode auch, wenn der Baum an einem (geraden) Hang steht? Begründe!

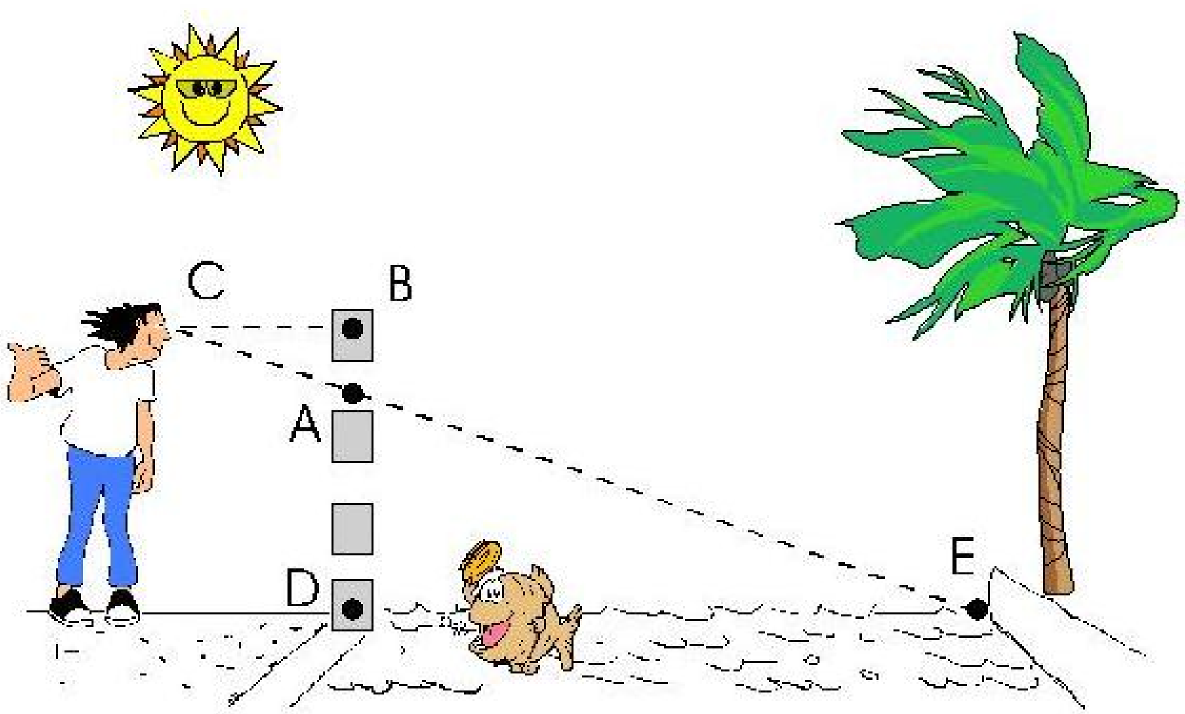


Quelle: Abakus 9, S.99

Lösung: $\frac{h}{2} = \frac{21}{6}$
$h = 7\,\mathrm{m}$

3. **Wie Leonardo da Vinci die Breite eines Flusses bestimmte**

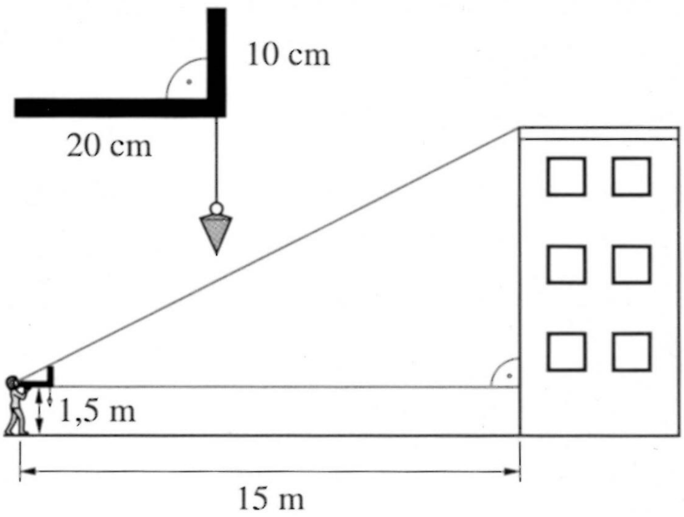
Der italienische Maler und Bildhauer Leonardo da Vinci $(1452 - 1519)$ schlug vor, die Breite eines Flusses wie in der Abbildung dargestellt zu bestimmen.



Quelle: Bigalke: Einführung in die Mathematik; Diesterweg

Lösung: Zahlenvorschlag: $|BC| = 1\,\mathrm{m}$; $|AB| = 20\,\mathrm{cm}$; $|AD| = 1,5\,\mathrm{m}$
$\frac{0,2}{1} = \frac{1,5}{x}$ wobei $x = 7,5$

4. **Das Försterdreieck**



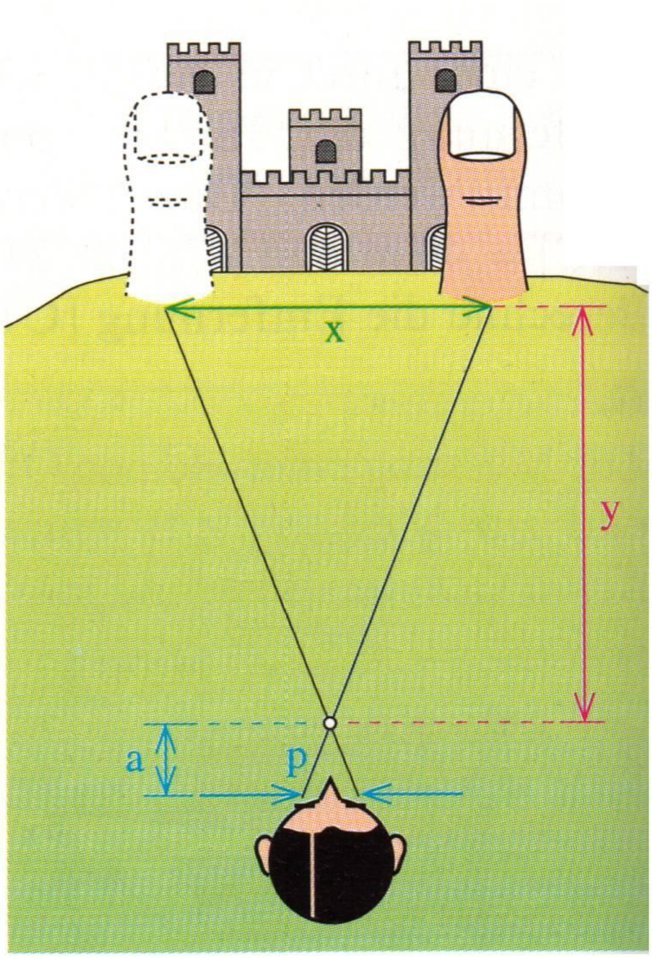
Martina findet in einem Bastelheft eine Anleitung zum Bau eines Peilgerätes, mit dem man Höhen messen kann. Die Anwendung des Peilgerätes wird dort durch die nebenstehende Zeichnung erklärt.
Martina erfährt von ihrem Vater, dass Förster mit einem ähnlichen Gerät die Höhe von Bäumen bestimmen. Ein solches „Försterdreieck“ ist ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck.

- Warum ist das Försterdreieck praktischer als das Peildreieck aus dem Bastelheft?
- Wie hoch ist ein 18 m entfernter Baum, den ein Förster aus 1,8 m Augenhöhe anpeilt?

Quelle: Mathematik 9, Cornelsen (1995)

Lösung:
- $\frac{1500}{20} = \frac{x}{10}$
- $\frac{1500}{20} = \frac{x}{20}$

5. **Der Daumensprung**



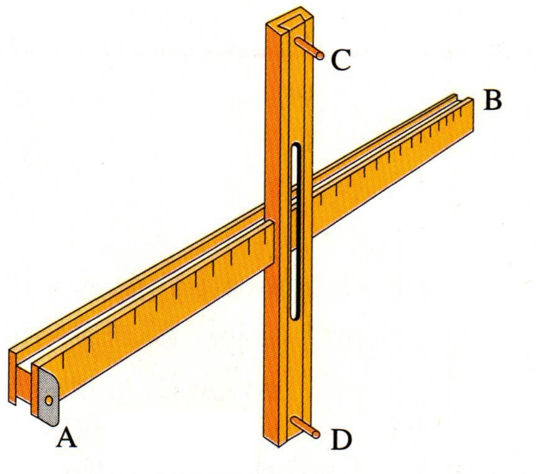
Strecke einen Arm aus und visiere den Daumen zunächst mit dem linken Auge, dann mit dem rechten Auge an.
Du bemerkst, dass der Daumen einen „Sprung“ im Gelände macht. Diese Tatsache benutzt man, um Entfernungen in der Landschaft zu schätzen (Daumensprungmethode).
Wie ist es möglich, die Entfernung zu dem Schloss zu „schätzen“??

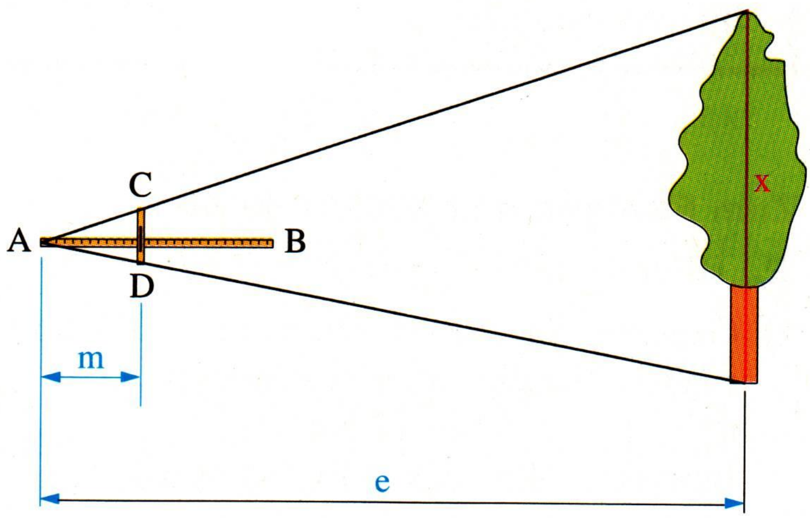
Quelle: Mathematik heute 9 (1996)

Lösung: $\frac{e}{l} = \frac{s}{a}$

6. **Der Jakobsstab**


AKG Berlin * AKG London * AKG Paris


C
B
A
D

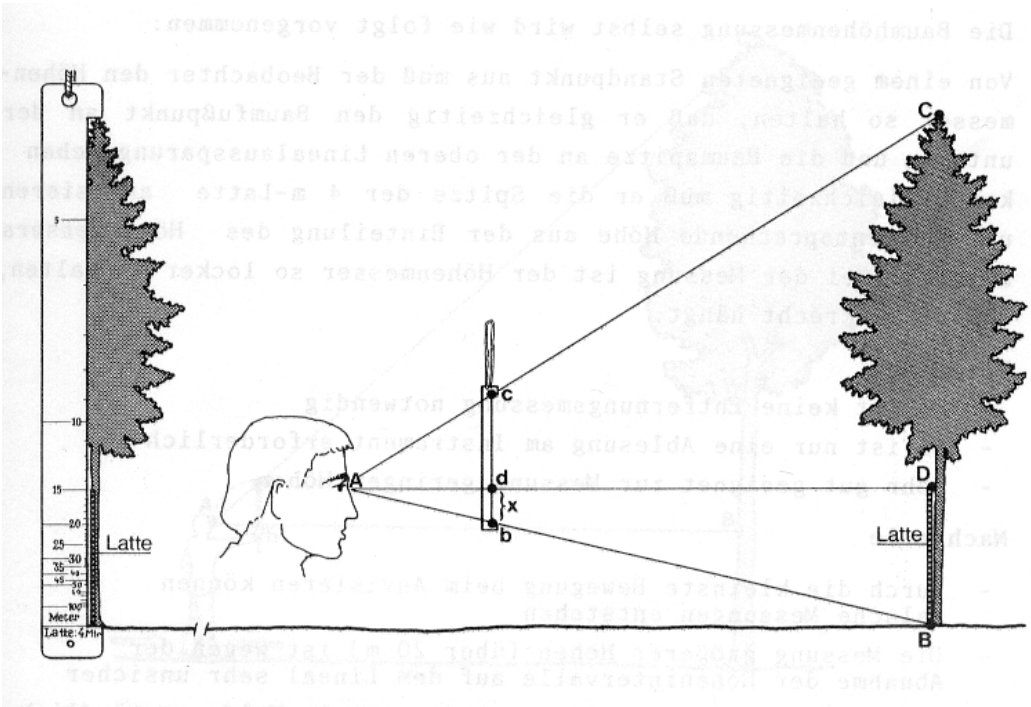


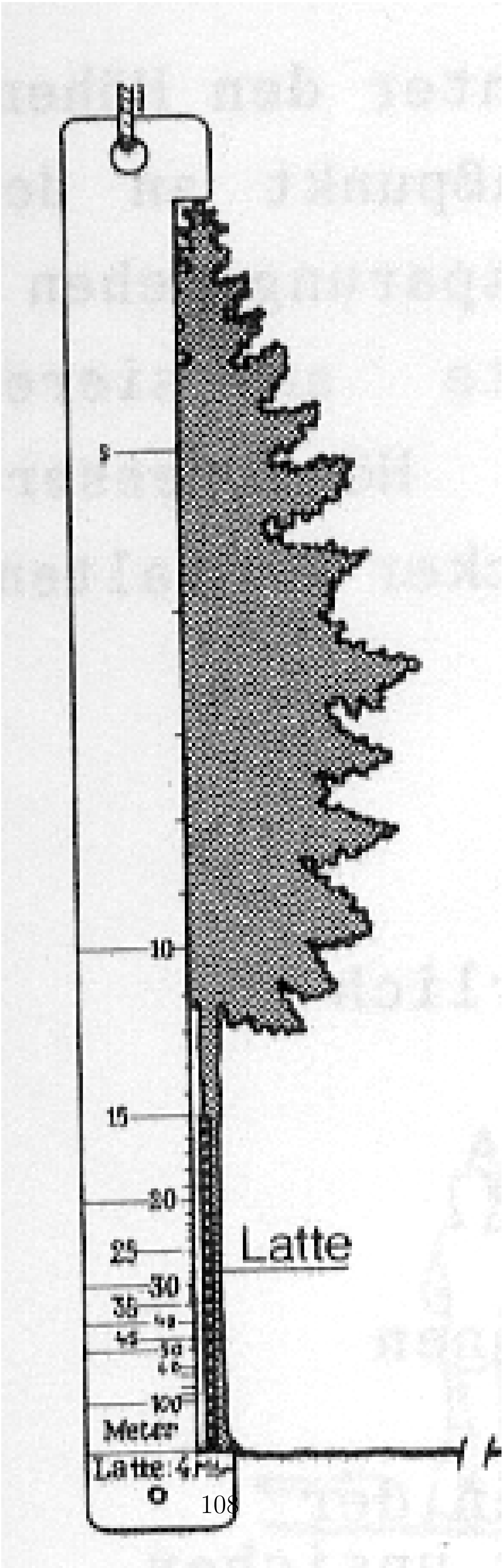
Die obigen Bilder zeigen in zeitgenössischen Darstellungen aus dem 16. Jahrhundert den Gebrauch des Jakobsstabs. Dieser ist ein kreuzförmiges Holz mit verschiebbarer Vertikalen. Beispielsweise wurde die Entfernung zwischen zwei Punkten (Stern und Mond) mit diesem Gerät angenähert ermittelt.
Wie kann dies geschehen? Welche Größen braucht man gegebenenfalls?

Quellen: Mathematik heute 9 (1996) Bigalke (1986), Diesterweg

Lösung: $\frac{x}{e} = \frac{|CD|}{m}$

7. **Der Baumhöhenmesser von Christen**


C
c
d
x
b
A
D
B
Latte
Latte
Meter
10
15
20
25
30
35

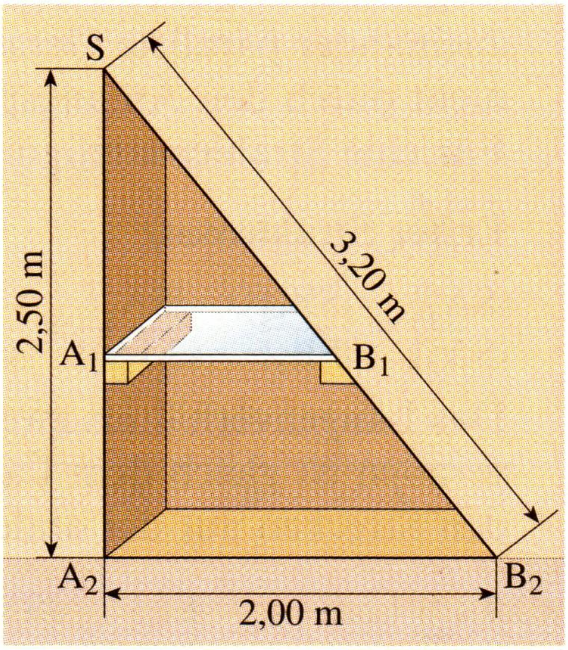

5
10
15
20
25
30
35
45
100
Meter
Latte
Latte: 4 m

In einem Leitfaden für Förster wird der Höhenmesser von CHRISTEN beschrieben. Er besteht aus einem einfachen Metall-Lineal mit einer 30 cm ($= |bc|$) langen Aussparung. Von einem geeigneten Standpunkt aus muss der Beobachter den Höhenmesser so halten, dass er gleichzeitig den Baumfußpunkt an der unteren und die Baumspitze an der oberen Linealaussparung sehen kann. Gleichzeitig muss er die Spitze der 4 m-Latte anvisieren und die entsprechende Höhe aus der Einteilung des Höhenmessers ablesen. Bei der Messung ist der Höhenmesser so locker zu halten, dass er senkrecht hängt.
Als Vorteil wird gepriesen, dass keine Entfernungsmessung notwendig und nur eine Ablesung am Instrument erforderlich ist. (Als Nachteil gilt der Transport einer 4 m-Latte durch das Dickicht, wobei schon so manches Wildschwein aufgeschreckt worden sein soll!)
Überprüfe diese Behauptung und kläre das Messverfahren auf!

Lösung: $\frac{0,3}{h} = \frac{x}{4}$; $h = \frac{1,2}{x}$; $x = \frac{1,2}{h}$
Für verschiedene Baumhöhen lassen sich folgende x-Werte berechnen:

Höhe in m	4	5	6	8	10	12	15	20	30	35	40
X in cm	30	24	20	15	12	10	8	6	4	3,4	3

8. **Das Regal im Dachgiebel**



In der Nische einer Dachschräge soll in $1,00\,\text{m}$ Höhe ein Boden aus Glas angebracht werden.

(a) An welcher Stelle des schrägen Brettes muss ein Träger für den Boden angebracht werden?

(b) Wie lang muss der Glasboden sein? Löse diese Aufgaben rechnerisch; begründe.

Quelle: Schroedel, Elemente 9

Lösung: (a) $\frac{1,5}{2,5} = \frac{x}{3,2}$, also $x = 1,92$

(b) $\frac{1,5}{2,5} = \frac{x}{2}$, also $x = 1,2$

9. **Anwendungen der Strahlensätze**

Eine Kleinbildkamera macht Negativbilder der Größe 24 mm × 36 mm.

(a) Geben die üblichen Vergrößerungsmaße das ganze Bild wieder? (7 cm×10 cm; 9 cm× 13 cm; 10 cm × 15 cm; 13 cm × 18 cm)

(b) Gib, falls möglich, den Vergrößerungsfaktor an.

Lösung: (a) gemeint: nur 10 × 15 tut's

(b) 2, 4

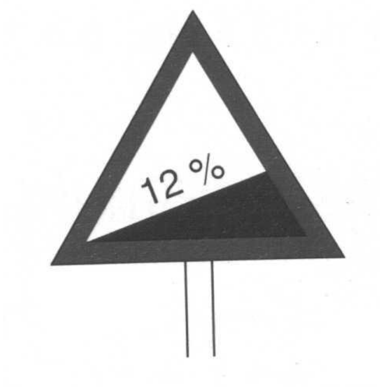
10. **Anwendungen der Strahlensätze**

Im Gebirge sieht man häufig Straßenschilder, die die Steigung bzw. das Gefälle einer Straße in Prozent angeben. 12% bedeutet z.B., dass die Straße auf 100 m horizontal gemessen um 12 m ansteigt.

(a) Welchen Höhenunterschied überwindet die Straße auf 2, 3 km?

(b) Was bedeutet 100% Steigung?

(c) Was steht auf dem Schild, wenn eine Straße auf 3, 8 km einen Höhenunterschied von 285 m überwindet.



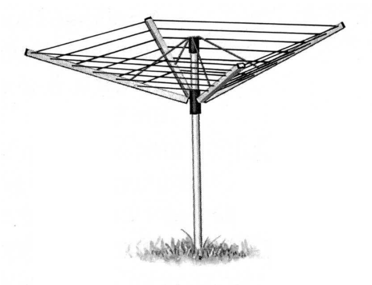
Lösung: $a = 276\,\mathrm{m}$; $c = 7,5\%$

11. **Anwendungen der Strahlensätze**

    Eine Wäschespinne hat sechs Leinen. Sie sind im Abstand von $12,5\,\mathrm{cm}$ gespannt. Die innerste Leine ist $30,5\,\mathrm{cm}$ vom Mittelpunkt entfernt und ist vier mal $40\,\mathrm{cm}$ lang.

    (a) Wie lang ist die äußerste Leine?

    (b) ie viel Meter Leine steht auf der Wäschespinne insgesamt zur Verfügung?



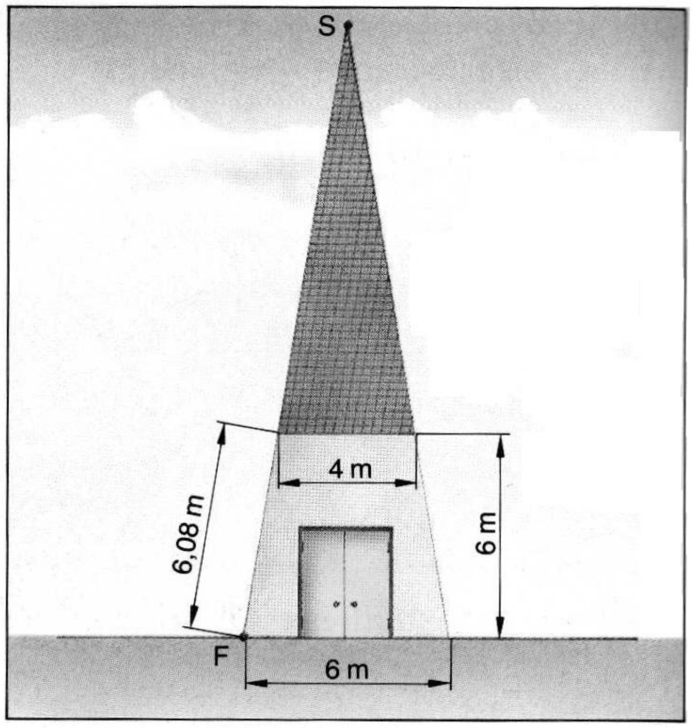
Lösung: ca. $1950\,\mathrm{m}$

12. **Anwendungen der Strahlensätze**

    Ein Kirchturm wird wie in der Zeichnung dargestellt vermessen.

    (a) Wie hoch ist der Turm?

    (b) Wie lang ist eine Kante?



Lösung: (a) 18 m

(b) 20, 4 m

13. **Anwendungen der Strahlensätze**

Ein Försterdreieck ist ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck. Du willst die Höhe eines Turmes mit Hilfe eines Försterdreiecks bestimmen. Beschreibe dein Vorgehen. Begründe, warum diese Methode funktioniert.
Benutze in deiner Erklärung den Begriff „ähnlich".

Lösung:

14. **Anwendungen der Strahlensätze**

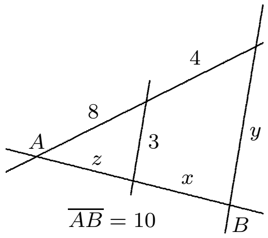
(a) Eine Kreisscheibe mit 8 cm Durchmesser bedeckt genau den Vollmond, wenn sie 8 m 84 cm 7 mm vom Auge entfernt ist. Zur gleichen Zeit wird die Entfernung Erde-Mond mit einem Radarstrahl zu 384400 km bestimmt. Berechne den Durchmesser des Mondes!

(b) Bei einer totalen Sonnenfinsternis bedeckt der Mond genau die Sonne, die zu dieser Zeit 149600000 km von der Erde entfernt ist. Welchen Durchmesser hat die Sonne, wenn die Entfernung Erde-Mond zum Zeitpunkt der Sonnenfinsternis 373600 km beträgt?

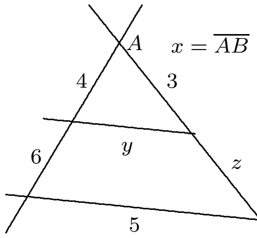
Lösung: (a) 3476 km
(b) 1392000 km

15. Berechne jeweils x, y und z:

(a)

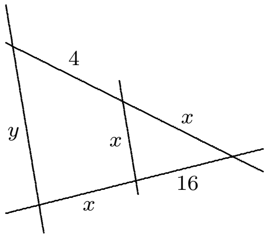


(b)



Lösung: (a) $x = \dfrac{10}{3}\,, \quad y = 4,5\,, \quad z = \dfrac{20}{3}$ (b) $x = 7,5\,, \quad y = 2\,, \quad z = 4,5$

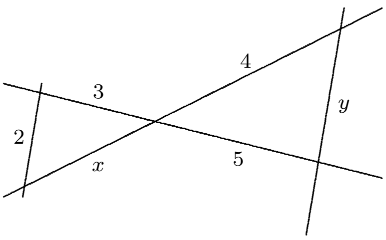
16. Berechne x und y:



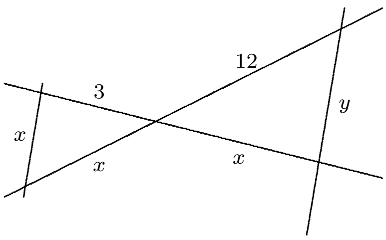
Lösung: $x = 8$, $y = 12$

17. Berechne jeweils x und y:

(a)



(b)

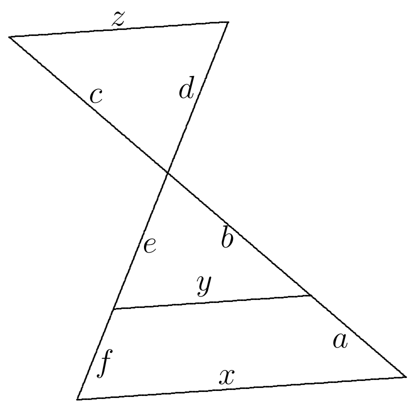


Lösung: (a) $x = 2,4\,, \quad y = \dfrac{10}{3}$ (b) $x = 6\,, \quad y = 12$

18. $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$ und $\overline{CD} < \overline{AB}$, S ist der Schnittpunkt der Geraden AD und BC. Drücke $x = \overline{DS}$ und $y = \overline{BS}$ durch die Trapezseiten $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$ und $d = \overline{DA}$ aus!

Lösung: $x = \dfrac{b\,c}{a-c}$ $y = \dfrac{d\,c}{a-c}$

19. Ergänze so oft, wie angegeben, zu Verhältnisgleichungen, die in der nebenstehenden (nicht maßstäblichen) Strahlensatzfigur gültig sind.



   (a) $\frac{e}{b} = \dots = \dots = \dots$

   (b) $\frac{x}{y} = \dots = \dots$

   (c) $\dfrac{f+e}{f} = \dots$

Lösung: (a) $\dfrac{e}{b} = \dfrac{d}{c} = \dfrac{f}{a} = \dfrac{e+f}{b+a}$

(b) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{f+e}{e} = \dfrac{a+b}{b}$

(c) $\dfrac{f+e}{f} = \dfrac{b+a}{a}$

20. Ein Trapez $ABCD$ hat die Seitenlängen $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{CD} = 2,5\,\text{cm}$. Es ist $AB \parallel CD$. S sei der Schnittpunkt der Geraden AD und BC, wobei $\overline{AS} = 4,8\,\text{cm}$ und $\overline{BS} = 7,2\,\text{cm}$.

   (a) Berechne die Seitenlängen $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$! Fertige dazu eine Skizze an!

   (b) Berechne des Verhältnis der Trapezfläche zur Fläche des Dreiecks DCS!

Lösung: (a): $\overline{BC} = 4,2\,\text{cm}$, $\overline{AD} = 2,8\,\text{cm}$ (b): $A_{ABCD} : A_{DCS} = 119 : 25$

21. Das Trapez $ABCD$ hat die Maße $\overline{AD} = 3\,\text{cm}$, $\overline{CD} = 3\,\text{cm}$ und $\overline{AB} = 5\,\text{cm}$. Die Seiten AD und BC schneiden sich in T, die Diagonalen in S. Ferner ist $\overline{AS} = 2,5\,\text{cm}$.

   (a) Berechne $\overline{DT}$.

   (b) In welchem Verhältnis teilen sich die Diagonalen? Berechne $\overline{AC}$.

(c) Die Parallele zu AB durch S schneidet AD in E. Berechne $\overline{AE}$.

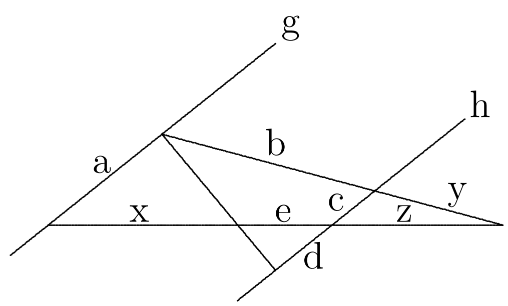
Lösung: $\overline{DT} = 4,5\,\text{cm}$. Die Diagonalen teilen sich im Verhältnis $5:3$, daraus ergibt sich $\overline{AC} = 4\,\text{cm}$. $\overline{AE} = \frac{5}{8} \cdot 3\,\text{cm}$.

22. $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$, $a = \overline{AB} = 7\,\text{cm}$ und $c = \overline{CD} = 4\,\text{cm}$. AB und CD haben den Abstand $d = 3\,\text{cm}$. S ist der Schnittpunkt der Geraden AD und BC. Berechne die Fläche des Dreiecks DCS zunächst in allgemeinen Größen und dann speziell für die angegebenen Zahlenwerte.

Lösung: $A = \dfrac{c^2\,d}{2\,(a-c)} = 8\,\text{cm}^2$

23. In der folgenden (nicht maßstabsgetreuen) Figur gilt $g||h$.

Gegeben sind die Streckenlängen:
$a = 3,5\,\text{cm}$
$b = 5,2\,\text{cm}$
$c = d = 1,5\,\text{cm}$
$e = 2,1\,\text{cm}$



(a) Berechne die Streckenlänge x!

(b) Berechne die Streckenlänge y!
(Falls Du (a) nicht lösen konntest, rechne mit dem Ersatzwert $x = 5,9\,\text{cm}$ weiter!)

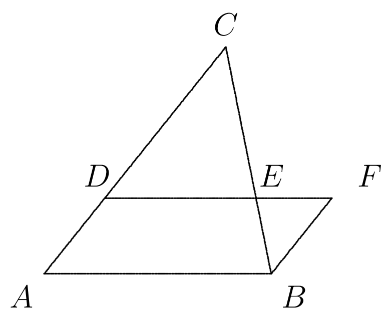
(c) Berechne die Streckenlänge z!

Lösung: (a) $x = 4,9\,\text{cm}$ (b) $y = 3,9\,\text{cm}$ (c) $z = 5,25\,\text{cm}$

24. Das Parallelogramm $ABCD$ hat die Seitenlängen $\overline{DF} = 10,5\,\text{cm}$ und $\overline{BF} = 2\,\text{cm}$.

(a) Berechne $\overline{DE}$ aus $\overline{DC} = 5\,\text{cm}$.

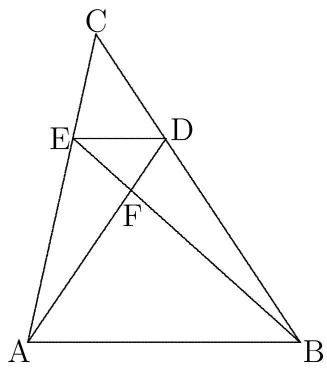
(b) Gib das Verhältnis $\overline{CE} : \overline{CB}$ an. Zeige, daß man dieses Verhältnis auf zwei verschiedene Weisen berechnen kann.



Lösung: $\overline{DE} = 7,5\,\text{cm}$, $\overline{CE} : \overline{CB} = \overline{DE} : \overline{AB} = \overline{DC} : \overline{AC} = \frac{5}{7}$

25. In der folgenden (nicht maßstabsgetreuen) Figur gilt $ED||AB$.

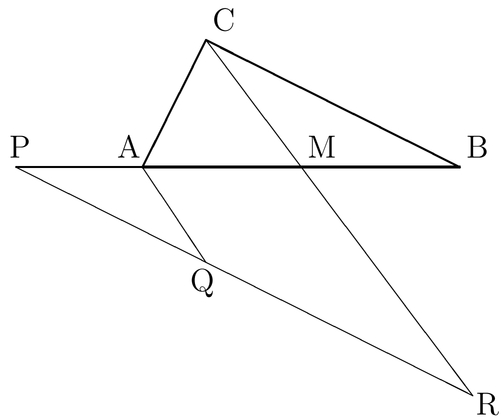
    Gegeben sind die Streckenlängen:
    $\overline{AB} = 6,0\,\mathrm{cm}$
    $\overline{ED} = 2,0\,\mathrm{cm}$
    $\overline{EB} = 6,7\,\mathrm{cm}$
    $\overline{FD} = 1,4\,\mathrm{cm}$
    $\overline{AE} = 4,7\,\mathrm{cm}$
    $\overline{BC} = 8,2\,\mathrm{cm}$



    Berechne die Streckenlängen $\overline{AF}$, $\overline{BF}$, $\overline{CD}$ und $\overline{AC}$!

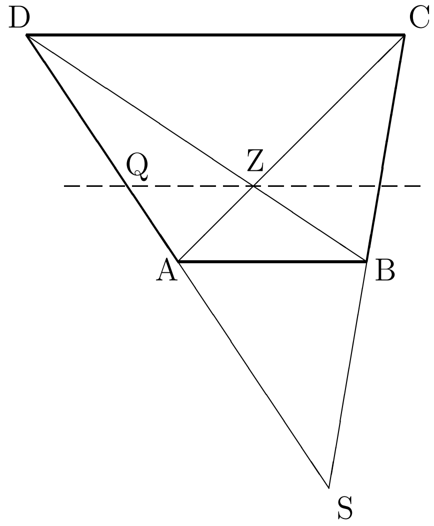
Lösung: $\overline{AF} = 4,2\,\mathrm{cm}$; $\overline{BF} \approx 5,0\,\mathrm{cm}$; $\overline{CD} \approx 2,7\,\mathrm{cm}$; $\overline{AC} \approx 7,0\,\mathrm{cm}$

26. In nebenstehender Figur ist M der Mittelpunkt der Seite $[AB]$ im Dreieck ABC. Ferner ist bekannt:
    $PR \parallel BC$, $AQ \parallel MR$.
    Gegeben sind außerdem die Streckenlängen:
    $\overline{BC} = 6,0\,\mathrm{cm}$; $\overline{CM} = 4,0\,\mathrm{cm}$;
    $\overline{AB} = 7,0\,\mathrm{cm}$; $\overline{MR} = 6,0\,\mathrm{cm}$.
    Man berechne:
    $\overline{PR}$, $\overline{AP}$ (Erg.: 1,75 cm), $\overline{AQ}$.



Lösung: $\overline{PR} = 9\,cm$; $\overline{AQ} = 2\,cm$

27. Die Parallele zu den Grundseiten eines Trapezes $ABCD$ durch den Diagonalenschnittpunkt Z schneidet die Seite $[AD]$ im Punkt Q. Die Geraden AD und BC schneiden sich im Punkt S. Für das Trapez ist gegeben:
$\overline{AB} = 14\,\text{cm}$; $\overline{DZ} : \overline{BZ} = 5 : 2$.



(a) Berechne $\overline{DC}$!

(b) In welchem Teilverhältnis teilt S die Strecke $[DA]$?

(c) Berechne $\overline{QZ}$!

Lösung: (a): $35\,cm$ (b): $-2,5$ (c): $10\,cm$

28. In einem Dreieck ABC wird durch einen Punkt D auf $[AB]$ eine Parallele zu BC gezogen. Sie schneidet AC im Punkt E. Es sei gegeben:
$\overline{AD} : \overline{DB} = 3 : 4$; $\overline{DE} = 3\,\text{cm}$; $\overline{CE} - \overline{AE} = 3\,\text{cm}$.

(a) Erstelle zunächst eine große und saubere Überlegungsskizze!

(b) Berechne $\overline{BC}$!

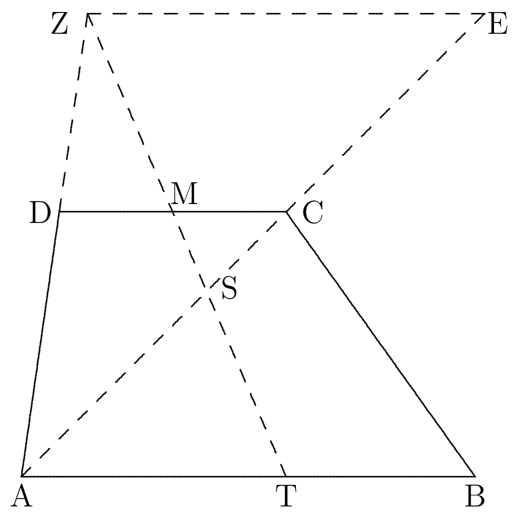
(c) Berechne $\overline{CE}$!

(d) Die Geraden BE und CD schneiden sich im Punkt F. Es gelte $\overline{CF} = 7\,\text{cm}$. Berechne $\overline{CD}$! (Ergebnis: $\overline{CD} = 10\,\text{cm}$)

(e) Die Parallele zu BC durch F schneidet AC im Punkt H.
Gib das Verhältnis $\overline{HC} : \overline{HE}$ an und begründe genau deine Antwort!

Lösung: (b): $7\,cm$ (c): $\overline{CE} = 12\,cm$ (e): $\overline{HC} : \overline{HE} = 7 : 3$

29. In der nebenstehenden, nicht maßstabsgetreuen Skizze ist $ABCD$ ein Trapez. Bekannt sind: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$; $\overline{AD} = 5,5\,\text{cm}$; $\overline{DC} = 3\,\text{cm}$.
M ist der Mittelpunkt von $[DC]$, Punkt T teilt die Strecke $[AB]$ innen im Verhältnis $3:2$. Ferner ist $[ZE] \parallel [AB]$.



   (a) Berechne $\overline{ZD}$! (Ergebnis: 2,5 cm)

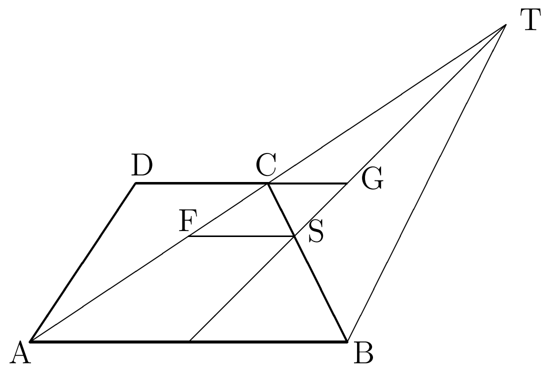
   (b) Berechne $\overline{ZE}$! (Ergebnis: $\frac{48}{11}$ cm)

   (c) In welchem Verhältnis teilt S die Strecke $[AE]$?

   (d) In welchem Verhältnis teilt C die Strecke $[SE]$?

Lösung: (c): $\overline{AS} : \overline{SE} = 11 : 10$
(d): $\overline{SC} : \overline{CE} = 11 : 21$

30. In nebenstehender Skizze ist $ABCD$ ein Trapez mit $\overline{AB} = 7,0\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 4,0\,\text{cm}$, $\overline{DC} = 2,5\,\text{cm}$ und $AB \parallel DC$. Der Punkt S ist der Schwerpunkt des Dreiecks ABT. Ferner gilt $FS \parallel CG \parallel AB$.



   (a) Berechne ausführlich die Streckenlängen $\overline{CG}$ und $\overline{FS}$! (Teilergebnis: $\overline{FS} = \frac{7}{3}$ cm)

   K sei der Schnittpunkt der verlängerten Trapezschenkel, H der Schnittpunkt der Geraden BF und DC. Trage K und H in die Skizze ein!

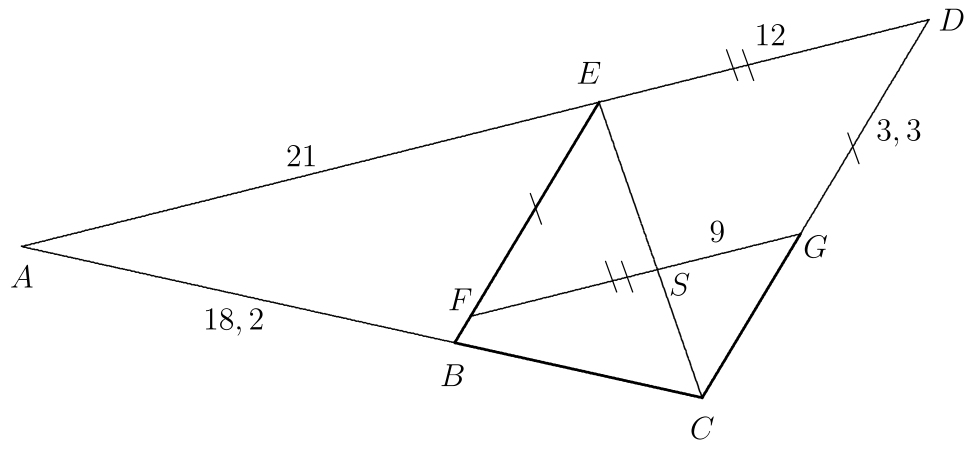
   (b) Berechne $\overline{KC}$! (Erg.: $\overline{KC} = \frac{20}{9}$ cm)

   (c) Berechne $\overline{HD}$!

   (d) Prüfe durch Rechnung, ob $AK \parallel BT$ ist!

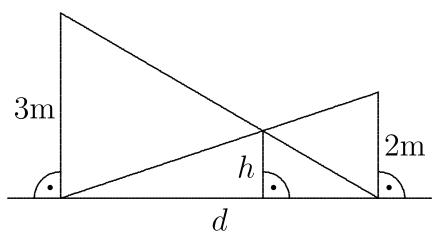
Lösung: (a): $\overline{CG} = 1,75\,cm$
(c): $\overline{HD} = 1\,cm$
(d): nein, da $\frac{\overline{KC}}{\overline{BC}} = \frac{5}{4} \neq \frac{1}{1} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CT}}$!

31. In der (nicht maßstabsgerechten) Figur ist $DEFG$ ein Parallelogramm. Berechne $x = \overline{BC}$, $y = \overline{CG}$ und $z = \overline{BE}$ mit den angegebenen Maßen ($\overline{AB} = 18,2\,\text{cm}$, $\overline{AE} = 21\,\text{cm}$, $\overline{ED} = 12\,\text{cm}$, $\overline{DG} = 3,3\,\text{cm}$, $\overline{GS} = 9\,\text{cm}$).



Lösung: $x = 10,4\,\text{cm}$, $y = 9,9\,\text{cm}$, $z = 8,4\,\text{cm}$

32. In einem Garten stehen im Abstand d zwei Pfähle mit den Höhen 3m und 2m. Jede Pfahlspitze ist mit dem Fuß des anderen Pfahls mit einer Schnur verbunden. In welcher Höhe h treffen sich die Schnüre? Wie hängt die Höhe h vom Abstand d der Pfähle ab?



Lösung: $h = 1,20$m, der Abstand d beeinflußt h nicht.

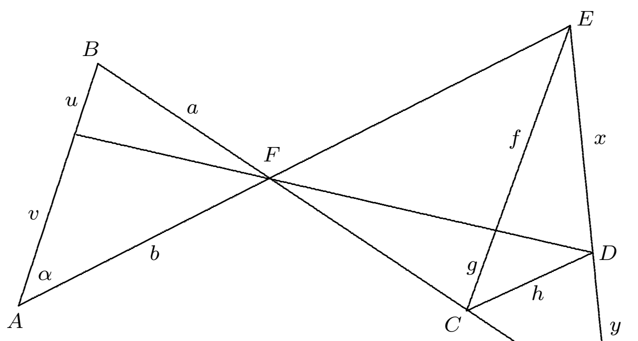
33. In nebenstehender (nicht maßstabsgetreuer) Abbildung ist folgendes bekannt:

$$\alpha = \beta$$

$$AB \| CE \quad , \quad CD \| FE$$

$$a = 6\,\text{cm} \quad , \quad b = 7,5\,\text{cm}$$

$$c = 10\,\text{cm} \quad , \quad x + y = 9,375\,\text{cm}$$



(a) Berechne $d + e$ und konstruiere die Figur! Verwende dazu ein ganzes Blatt im Querformat!

(b) Berechne in dieser Reihenfolge: d, e, x, y, h, $u + v$, $f + g$, g, f, u und v!

Lösung: (a) $\sphericalangle AFB = \sphericalangle EFG \implies \Delta AFB \sim \Delta EFG$, $d + e = 12,5\,\text{cm}$

(b) Alle Angaben in cm: $d = 8$; $e = 4,5$; $x = 6$; $y = 3,375$; $h = 3,6$; $u + v = 5,625$; $f + g = 7,5$; $g = 1\frac{67}{68}$; $f = 5\frac{35}{68}$; $u = 1\frac{133}{272}$ und $v = 4\frac{37}{272}$

Aufgaben speziell zum Teilverhältnis

1. Die Strecke $[UV]$ hat die Länge 4 cm. Der Punkt W teilt sie innen im Verhältnis $3 : 5$.
   (a) Berechne die Länge der Strecke $[UW]$.
   (b) Erläutere, wann vier Punkte in *harmonischer Lage* sind.
   (c) Sei T der vierte harmonische Punkt zu U, V und W. Berechne die Länge der Strecke UT.

Lösung: $\overline{UW} = 1,5\,\text{cm}$, $\overline{UT} = 6\,\text{cm}$

2. Konstruiere zu einer Strecke $[AB]$ der Länge $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$ Teilpunkte C und D, die die Strecke innen und außen im Verhältnis $3 : 5$ teilen.
   In welchem Verhältnis teilen dann die Punkte A und B die Strecke $[CD]$?
   Genaue Rechnung!

Lösung: Teilverhältnis $1 : 4$ bzw. $-1 : 4$

3. T_i und T_a teilen die Strecke $[AB]$ innen und außen im gleichen Verhältnis. Berechne $x = \overline{T_iB}$ und $y = \overline{BT_a}$ aus $a = \overline{AT_i} = 3\,\text{cm}$ und $b = \overline{T_iT_a} = 4\,\text{cm}$.

Lösung: $x = 1,2\,\text{cm}, \quad y = 2,8\,\text{cm}$

4. (a) T_i und T_a teilen die Strecke $[AB]$ innen und außen im gleichen Verhältnis. Beweise, daß $[T_iT_a]$ von A und B harmonisch geteilt wird!
   (b) $[AB]$ wird von T_i und T_a harmonisch im Verhältnis $7 : 5$ geteilt $\left(\frac{\overline{AT_i}}{\overline{T_iB}} = \frac{7}{5}\right)$. In welchem Verhältnis wird $[T_iT_a]$ von A und B geteilt?

Lösung: (b) $\dfrac{\overline{T_aB}}{\overline{BT_i}} = \dfrac{\overline{T_aA}}{\overline{AT_i}} = 6 : 1$

5. Gegeben ist eine Strecke $[AB]$ mit $\overline{AB} = 6,6\,\text{cm}$. $[AB]$ werde von den Punkten D bzw. E innen bzw. außen im Verhältnis $5 : 7$ geteilt.
   (a) Konstruiere D und E!
   (b) Berechne $\overline{BD}$ und $\overline{AE}$!

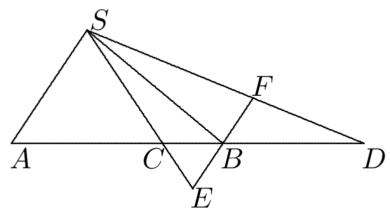
(c) In welchem Verhältnis wird die Strecke $[DE]$ von den Punkten A bzw. B innen bzw. außen geteilt? (genaue Rechnung!)

Lösung: (b): $\overline{BD} = 3,85\,cm$; $\overline{AE} = 16,5\,cm$ (c): $1 : 6$

6. Gegeben ist eine Strecke $[AB]$ mit $\overline{AB} = 5\,\text{cm}$ und ein Punkt $C \in [AB]$ mit $\overline{AC} = 1,5\,\text{cm}$.
   (a) C teilt $[AB]$ von innen. Wie groß ist das zugehörige Teilungsverhältnis?
   (b) Konstruiere den zu C passenden äußeren Teilpunkt D und gib das zu ihm gehörende Teilungsverhältnis an.
   (c) Wie wandert D, wenn C gegen B wandert? Kurze Begründung!

Lösung: (a) $\frac{3}{7}$; (b) $-\frac{3}{7}$ (c) D rückt von rechts gegen B.

7. Die Punkte A, B, C und D sind harmonische Punkte (vgl. Skizze). Die Stecke $[AB]$ der Länge $\overline{AB} = 7\,\text{cm}$ wird von C innen im Verhältnis $\tau = 6 : 5$ geteilt.
   (a) Berechne $\overline{CB}$
   (b) $[EF]$ ist parallel zu AS. Zeige durch Rechnung: $\overline{BE} = \overline{BF}$



Lösung: (a) $\overline{CB} = \frac{5}{11} \cdot 7\,\text{cm}$

(b) $\frac{\overline{AS}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{BE}}$

Herleitungen geometrischer Aussagen

1. Im Dreieck $\triangle ABC$ sind M_b und M_c die Seitenmitten von $[AC]$ bzw. $[AB]$.
   (a) Zeige, dass dann gilt: $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{M_cM_b}$ und $M_cM_b||BC$
   (b) Begründe, dass sich die Seitenhalbierenden $[M_bB]$ und $[M_cC]$ gegenseitig im Verhältnis $1 : 2$ teilen.

   nach: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 10 der Gymnasien

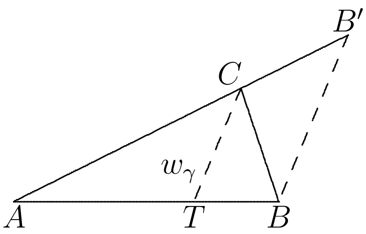
Lösung: (a) Strahlensatz am Zentrum A

(b) Strahlensatz am Zentrum S, dem Schnittpunkt von M_bB und M_cC

2. In einem beliebigen Dreieck werde zu einer Dreiecksseite eine Parallele gezeichnet, welche die beiden anderen Seiten in zwei verschiedenen Punkten schneidet. Zeige, daß deren Verbindungsstrecke von der Seitenhalbierenden der ursprünglichen Dreiecksseite halbiert wird.
   Hinweis: Verwende den Strahlensatz!

Lösung:

3. Im Dreieck ABC schneidet die Winkelhalbierende w_γ die Seite $[AB]$ im Punkt T. B' ist der Schnittpunkt der Geraden AC mit der Parallelen zu w_γ durch B.



   (a) Begründe durch Berechnung von Winkeln: Das Dreieck BCB' ist gleichschenklig.

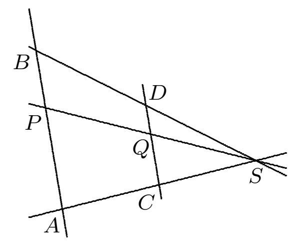
   (b) Beweise mit dem Strahlensatz: $\overline{AT} : \overline{BT} = \overline{AC} : \overline{BC}$

Lösung:

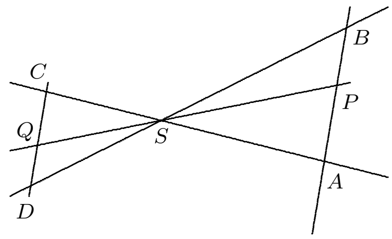
4. Beweise den **„T-Satz“:**

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{SP}}{\overline{SQ}}$$

(a)

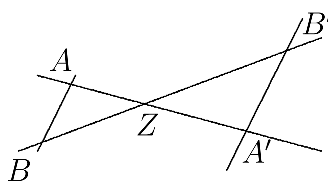


(b)



Lösung:

5. In der folgenden Strahlensatzfigur sind AB und $A'B'$ parallel, die Längen $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ und $\overline{AA'}$ seien bekannt. Leite Formeln zur Berechnung von $\overline{ZA}$ und $\overline{ZA'}$ her.



Lösung: $\overline{ZA} = \frac{\overline{AA'} \cdot \overline{AB}}{\overline{A'B'} + \overline{AB}}$, $\overline{ZA'} = \frac{\overline{AA'} \cdot \overline{A'B'}}{\overline{A'B'} + \overline{AB}}$

6. In einem beliebigen Dreieck ABC sei E ein Punkt auf $[BC]$ und F ein Punkt auf $[AC]$. Es gelte

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{1}{2}.$$

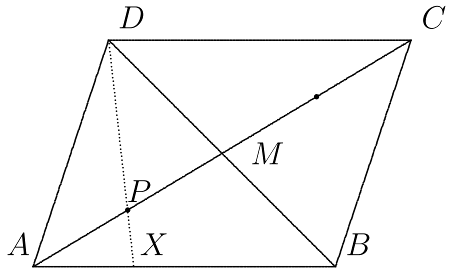
   (a) Fertige eine saubere beschriftete Skizze an.

(b) Begründe: Die Gerade FE ist parallel zur Geraden AB.

(c) In welchem Verhältnis teilt $[BF]$ die Strecke $[AE]$?

Lösung: (b) $S_{C;\frac{3}{2}}$ bildet F auf A und E auf B ab $\Longrightarrow FE \parallel AB$ (c) $3:2$

7. Im Parallelogramm $ABCD$ ist M der Schnittpunkt der Diagonalen und P der Mittelpunkt der Strecke $[AM]$. In welchem Verhältnis teilt die Gerade DP die Parallelogrammseite $[AB]$? Zeichne eine Planfigur und begründe genau.

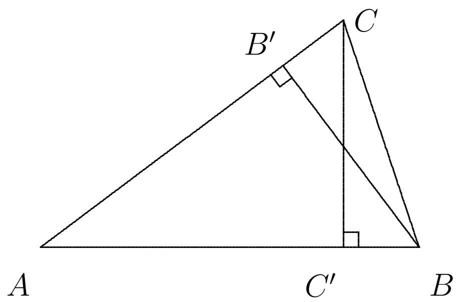


Lösung: Aus der Zeichnung entnimmt man $\overline{AX} : \overline{CD} = 1 : 3$. Also teilt X die Seite $[AB]$ im Verhältnis $1:2$.

8. Die Strecken $[BB']$ und $[CC']$ sind Höhen des Dreiecks ABC.

   (a) Beweise $ABB' \sim ACC'$.

   (b) Begründe an einem Beispiel, daß die Dreiecke $BB'C$ und $CC'B$ nicht immer ähnlich sind.



Lösung: (a) Die Dreiecke stimmen im Winkel bei A und dem rechten Winkel überein.

(b) Wähle z. B. $\alpha = 30^0$, $\sphericalangle CBB' = 10^0$, so ergibt sich $\sphericalangle C'CB = 20^0$. Die Dreiecke haben also verschiedene Winkel.

4.1.3 Anwendungen in anderen Gebieten

Vermessungsaufgaben

1. Eine Person (Augenhöhe 1,70 m) steht in einer Entfernung von 10,0 m vor einer Skulptur, welche auf einem Sockel steht. Um die Höhe der Skulptur zu bestimmen, dreht sich die Person auf der Stelle mit dem Rücken zur Skulptur und hält sich einen 25 cm hohen, ebenen Spiegel vertikal so vor das Gesicht, daß sie darin die Skulptur gerade formatfüllend (ohne den Sockel!) sieht. Der Spiegel muß sich dabei genau 50 cm vor dem Gesicht befinden.

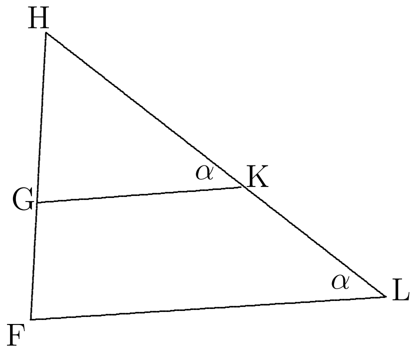
(a) Erstelle zunächst eine (nicht maßstabsgetreue) Überlegungsskizze! Beachte dabei, daß das Spiegelbild eines Gegenstandes in derselben Entfernung hinter dem Spiegel zu sein scheint, in welcher sich der Gegenstand vor dem Spiegel befindet.

(b) Berechne die Höhe der Skulptur!

(c) Berechne die Höhe des Sockels, wenn sich die Spiegelunterkante genau 1,67 m über dem Boden befindet!

Lösung: (b): $5,5\,m$ (c): $1,04\,m$

2. Zwischen H und K soll ein Tunnel gebaut werden. Die Strecke $[HK]$ ist aber nicht meßbar. Meßbar sind jedoch die Strecken $\overline{LF} = 104\,\mathrm{m}$, $\overline{KG} = 91\,\mathrm{m}$ und $\overline{KL} = 25\,\mathrm{m}$. Berechne die Länge der Strecke $[HK]$.

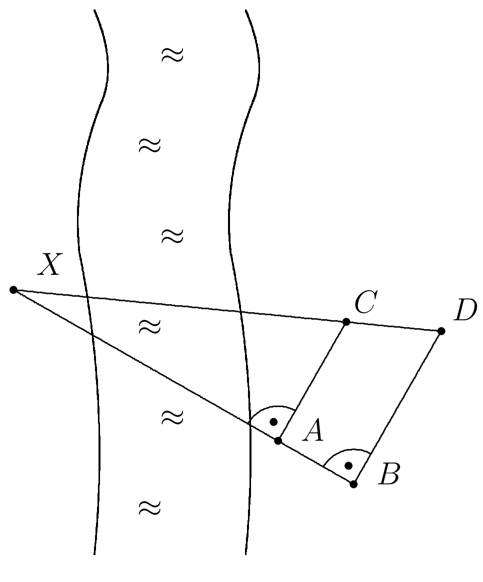


Lösung: $\overline{HK} = 175\,\mathrm{m}$

3. Um die Entfernung eines unzugänglichen Punktes X zu bestimmen kann man folgendermaßen vorgehen:
Man legt zwei Punkte A und B fest, die mit X auf einer Geraden liegen („fluchten"). Mit einfachen optischen Geräten werden Lotgeraden zu AB festgelegt und auf diesen zwei Punkte C und D, die wieder in einer Flucht mit X stehen.

   (a) Berechne aus $\overline{AC} = 60\,\mathrm{m}$, $\overline{BD} = 67\,\mathrm{m}$ und $\overline{AB} = 35\,\mathrm{m}$ den Abstand $\overline{XA}$.

   (b) Wie groß ist der prozentuale Fehler des Ergebnisses, wenn $\overline{AC}$ um 1% zu groß gemessen wurde?



Lösung: $\overline{XA} = 300\,\mathrm{m}$, absoluter Fehler $26,4\,\mathrm{m}$ von $273,55\,\mathrm{m}$, relativer 10%.

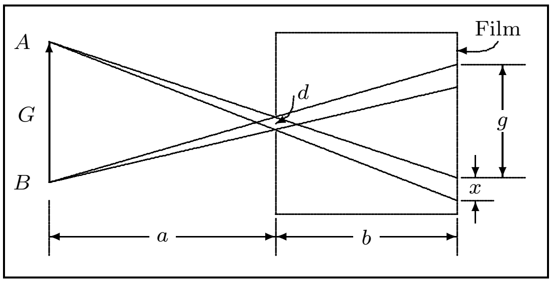
4. (a) Eine Kreisscheibe mit 8 cm Durchmesser bedeckt genau den Vollmond, wenn sie 8 m 84 cm 7 mm vom Auge entfernt ist. Zur gleichen Zeit wird die Entfernung Erde-Mond mit einem Radarstrahl zu 384 400 km bestimmt.
Berechne den Durchmesser des Mondes!

   (b) Bei einer totalen Sonnenfinsternis bedeckt der Mond genau die Sonne, die zu dieser Zeit 149 600 000 km von der Erde entfernt ist. Welchen Durchmesser hat die Sonne, wenn die Entfernung Erde-Mond zum Zeitpunkt der Sonnenfinsternis 373 600 km beträgt?

Lösung: (a) 3476 km (b) 1 392 000 km

Strahlenoptik

1. Das Objektiv einer Lochkamera ist nur eine kleine, kreisförmige Öffnung mit dem Durchmesser d. Ein leuchtender Punkt (z.B. A) im Abstand a von der Kamera erzeugt auf dem Film einen „unscharfen Punkt“, d. h. einen Kreis mit dem Durchmesser x.



   (a) Berechne x aus a, b und d!

   (b) Wie groß darf d höchstens sein, damit x für $a = 1\,\text{m}$ und $b = 5\,\text{cm}$ kleiner als $0,1\,\text{mm}$ ist?

   (c) Wie berechnet sich die Bildgröße g aus der Gegenstandsgröße G?

   (d) Wie weit muß die Kamera mindestens von einem 40 m hohen Kirchturm entfernt sein, damit die Bildgröße des Turmes mit der „Brennweite“ $b = 80\,\text{mm}$ die Filmgröße 36 mm nicht überschreitet?

Lösung: (a) $x = d \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right)$ (b) $d < 0,0952\,\text{mm}$ (c) $g = G \cdot \frac{b}{a}$

(d) $a > 88\frac{8}{9}\,\text{m}$

2. Bekanntlich läßt sich mit Hilfe einer Sammellinse von einem leuchtenden Gegenstand, der sich in einer Entfernung vor der Linse befindet, welche größer als deren Brennweite ist, ein auf einem Schirm auffangbares Bild erzeugen.

   (a) Erstelle zunächst eine saubere Zeichnung, welche die Entstehung des Bildes mit Hilfe des Lichstrahlenmodells verdeutlicht! Verwende dazu den Mittelpunktstrahl, den zur optischen Achse parallelen Strahl und den Brennpunktstrahl! Ferner sind folgende Bezeichnungen in der Zeichnung zu verwenden:

G: Gegenstandsgröße, B: Bildgröße
g: Gegenstandsweite, b: Bildweite (jeweils zum Linsenmittelpunkt gemessen)
f: Linsenbrennweite

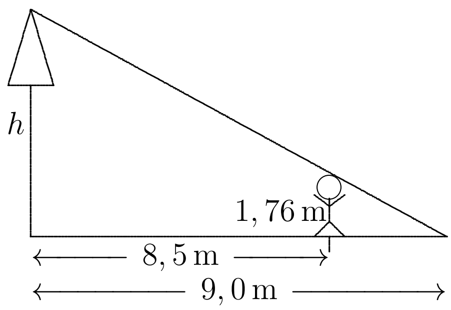
(b) Zeige mit Hilfe des Strahlensatzes die Gültigkeit der Beziehung $\frac{G}{B} = \frac{g}{b}$!

(c) Zeige ebenfalls mit Hilfe des Strahlensatzes (V-Figur verwenden!) die Gültigkeit der sogenannten *Linsengleichung* $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$!

Lösung:

Sonstiges

1. Ein Maibaum wirft im ebenen Gelände bei einem bestimmten Sonnenstand einen Schatten von $9,0\,\text{m}$.
   Hans (Körpergröße $1,76\,\text{m}$) stellt sich so auf, daß seine Schattengrenze mit der des Maibaums übereinstimmt. Er ist dann $8,5\,\text{m}$ vom Maibaum entfernt. Wie hoch ist der Maibaum?



Lösung: $h = 31,68\,\text{m}$

2. Eine 6 m hohe Mauer wirft einen 7,2 m langen Schatten. Wie groß ist ein Mann, der sich gerade noch ganz im Schatten befindet, wenn er 5,1 m vor der Mauer steht? (Skizze!)

Lösung: $1,75\,m$

3. Ein Wanderer erblickt zwei Bergspitzen S und T.
   Er hält sich einen Bleistift so vor ein Auge (das andere Auge ist geschlossen), daß der Bleistift parallel zu ST liegt und die Bleistiftspitze A mit der Bergspitze S und das Bleistiftende B mit der Bergspitze T jeweils in einer Blickrichtung liegt.

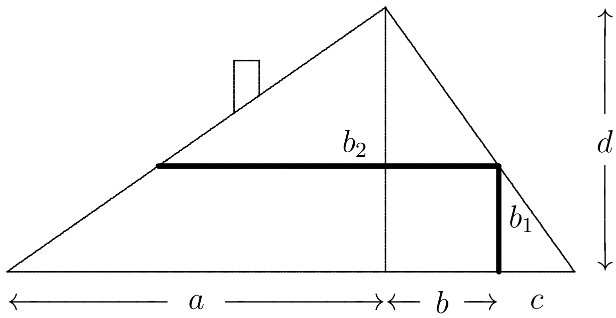
   Wie weit ist der Wanderer vom Berg S entfernt, wenn die Entfernung der Bergspitzen $\overline{ST} = 25\,\text{km}$, die Länge des Bleistifts $\overline{AB} = 20\,\text{cm}$ und die Entfernung der Bleistiftspitze A vom Auge $40\,\text{cm}$ beträgt.
   (Überlegungsskizze mit Entfernungsangaben!)

Lösung: $50\,km$

4. Hält man einen Stecknadelkopf von 3 mm Durchmesser 33 cm vom Auge entfernt, so verdeckt er gerade den Vollmond. Wie verhalten sich Mond- und Erdradius, wenn der Mond 60 Erdradien entfernt ist?

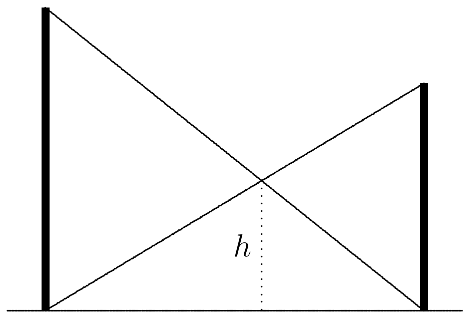
Lösung: $r_M : r_E = 3 : 11$

5. Für den Bau eines Hauses ist eine Fachwerkkonstruktion im Giebel geplant. Berechne die Länge der Balken b_1 und b_2 aus den gegebenen Größen ($a = 18$m, $b = 5$ m, $c = 4$ m und $d = 8,1$m).



Lösung: $b_1 = 3,6$m, $b_2 = 15$m

6. Die Seitenteile eines Regals sind $1,80$ m bzw. $1,50$ m lang. Zur Stabilisierung des Regals sollen zwei Diagonalstreben festgeschraubt werden. In welcher Höhe h treffen sich die beiden Streben?



Lösung: $h \approx 82$ cm

7. Hält man eine Erbse (Durchmesser $d = 5$ mm) mit ausgestrecktem Arm vor das Auge (Abstand $l = 55$ cm), so wird die Erbse etwa genauso groß gesehen wie der Vollmond (Entfernung von der Erde: $s = 384\,000$ km).

(a) Fertige so einfach wie möglich eine Zeichnung zur Erklärung der Situation. Leite mit ihrer Hilfe eine Formel zur Berechnung des Monddurchmessers D her und berechne diesen.

(b) Um wie viele km ändert sich das Ergebnis, wenn die Größe der Erbse um 10% falsch geschätzt war.

Lösung: (a) $D = 3500\,\text{km}$, (b) um 350 km.

4.2 Ähnlichkeit von Dreiecken

4.2.1 Dreieckskonstruktionen

1. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit:
$a : c = 3 : 5$, $\gamma = 90^o$ und $h_c = h = 5\,\text{cm}$.
Beschreibe deine Konstruktion!

Lösung:

2. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck ABC (Spitze C) mit
$a : c = 5 : 7$ und $w_\alpha = 7\,\text{cm}$

Lösung:

3. Für die Seitenverhältnisse eines Dreiecks gilt:

$$a : b : c = 3 : 5 : 7$$

Die Höhen h_a und h_c sind zusammen 10 cm lang. Konstruiere das Dreieck.

Lösung:

4. Konstruiere ein Dreieck ABC mit $c : b = 5 : 9$, $\beta = 110^0$ und $s_a - h_a = 2,5\,\text{cm}$ (Planfigur und Konstruktion). Gib die zentrische Streckung an, die du verwendet hast. (Platzbedarf: 1 Seite)

Lösung:

5. Konstruiere ein Dreieck ABC mit $c : s_c : h_c = 7 : 5 : 4$ und $b - a = 5\,\text{cm}$.

Lösung:

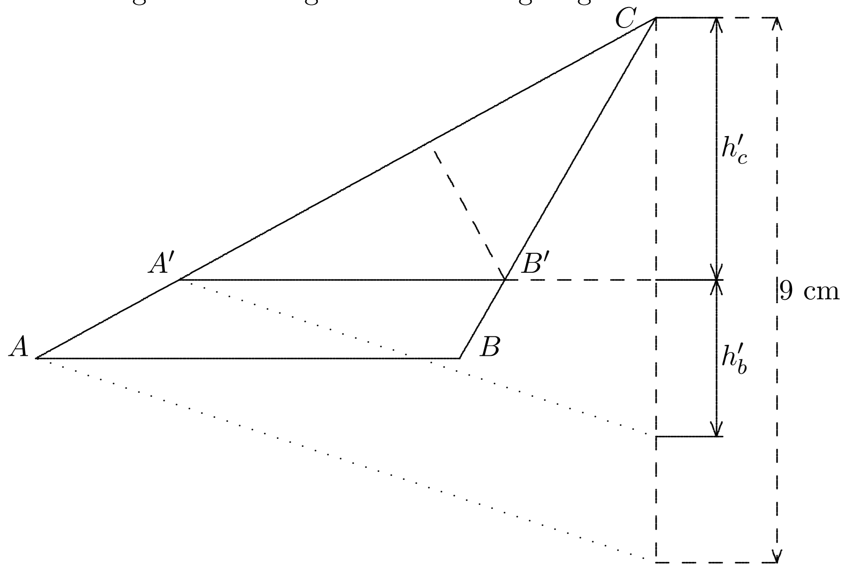
6. Konstruiere ein Dreieck ABC mit $a : b : c = 3 : 4 : 6$ und dem Umkreisradius $r = 5\,\text{cm}$. Beschreibe die Konstruktion.

Lösung:

7. Aus folgenden Angaben soll ein Dreieck ABC konstruiert werden:
   i) $a : b = 5 : 9$
   ii) $\beta = 120^0$
   iii) $h_c + h_b = 9\text{cm}$

   Fertige zunächst eine Planfigur, konstruiere anschließend das Dreieck.

Lösung: Man konstruiert z.B. $A'B'C$, und streckt im Verhältnis $9cm : (h_{B'} + h'_C)$. Der Platzbedarf hängt stark vom gewählten Lösungsweg ab.



8. Konstruiere Dreieck ABC aus folgenden gegebenen Stücken:
   $a : b : c = 8 : 5 : 7$; $h_c + c - a = 6{,}5\,\text{cm}$.
   Knappe, aber genaue Konstruktionsbeschreibung und saubere Konstruktion!

Lösung: Konstruiere $\triangle A'B'C'$ mit $a' = 8\,cm$; $b' = 5\,cm$; $c' = 7\,cm$.
Bilde $\triangle A'B'C'$ auf $\triangle ABC$ ab unter der zentr. Streckung $S(Z; m)$ mit $Z = A'$ und $m = \frac{h_c + c - a}{h'_c + c' - a'}$.

9. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a + b = 9\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$ und $a : b = 3 : 5$.

Lösung:

10. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b : c = 2 : 5$, $\alpha = 105°$ und $s_c = 8\,\text{cm}$.

Lösung:

11. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a + b + c = 15\,\text{cm}$ und $a : b : c = 4 : 3 : 5$.

Lösung:

12. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a + c = 7\,\text{cm}$, $\beta = 120°$ und $b : c = 2 : 1$.

Lösung:

13. Konstruiere das Dreieck ABC aus $h_c : h_b : h_a = 4 : 3 : 8$ und $h_a - a = 3\,\text{cm}$!
Verlangt sind eine Konstruktionsbeschreibung und eine saubere Konstruktion!

Lösung: Es ist $c : b : a = 6 : 8 : 3$.
Man konstruiere $\triangle A'B'C'$ aus $c' = 6\,cm;\ b' = 8\,cm;\ a' = 3\,cm.$
Bilde $\triangle A'B'C'$ auf $\triangle ABC$ ab unter der zentr. Streckung $S(Z; m)$ mit $Z = C'$ und $m = \frac{h_a - a}{h'_a - a'}$.

14. Konstruiere ein Dreieck ABC aus

$$b : a = 4 : 7\,;\quad \gamma = 70°\,;\quad \text{Umkreisradius}\quad r = 6,0\,\text{cm}$$

Verlangt ist auch eine Konstruktionsbeschreibung!

Lösung:

4.2.2 Einbeschreibungskonstruktionen

1. Einem gleichseitigen Dreieck ABC mit der Seitenlänge 10 cm ist ein Rechteck $PQRS$ einzubeschreiben, dessen Seitenlängen sich wie 2 : 1 verhalten. Verlangt sind eine knappe Konstruktionsbeschreibung und eine saubere Konstruktion!

Lösung:

2. Einem gegebenen Kreis k vom Radius 6 cm soll ein Dreieck ABC mit $\alpha = 75^0$ einbeschrieben werden, dessen Seiten b und c sich wie 2 : 3 verhalten.

Lösung: Lösungsschritte: Man konstruiert ein zu ABC ähnliches Dreieck $A'B'C'$ mit seinem Umkreis k'. Durch eine zentrische Streckung wird k' auf k und $A'B'C'$ auf ABC abgebildet. Der Platzbedarf hängt stark von einer günstigen Wahl von $A'B'C'$ ab.

3. Gegeben ist ein Dreieck ABC durch $\overline{AB} = 10\,\text{cm}$, $\overline{AC} = 9\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 12\,\text{cm}$. P sei derjenige Punkt auf $[AB]$ mit $\overline{PB} = 1\,\text{cm}$, Q derjenige Punkt auf $[AC]$ mit $\overline{CQ} = 4\,\text{cm}$.
   Dem Dreieck ABC ist ein Parallelogramm $DEFG$ so einzubeschreiben, daß der bei der Ecke D liegende Innenwinkel des Parallelogramms $120°$ beträgt und die Diagonale $[EG]$ parallel zur Geraden PQ verläuft.

Lösung:

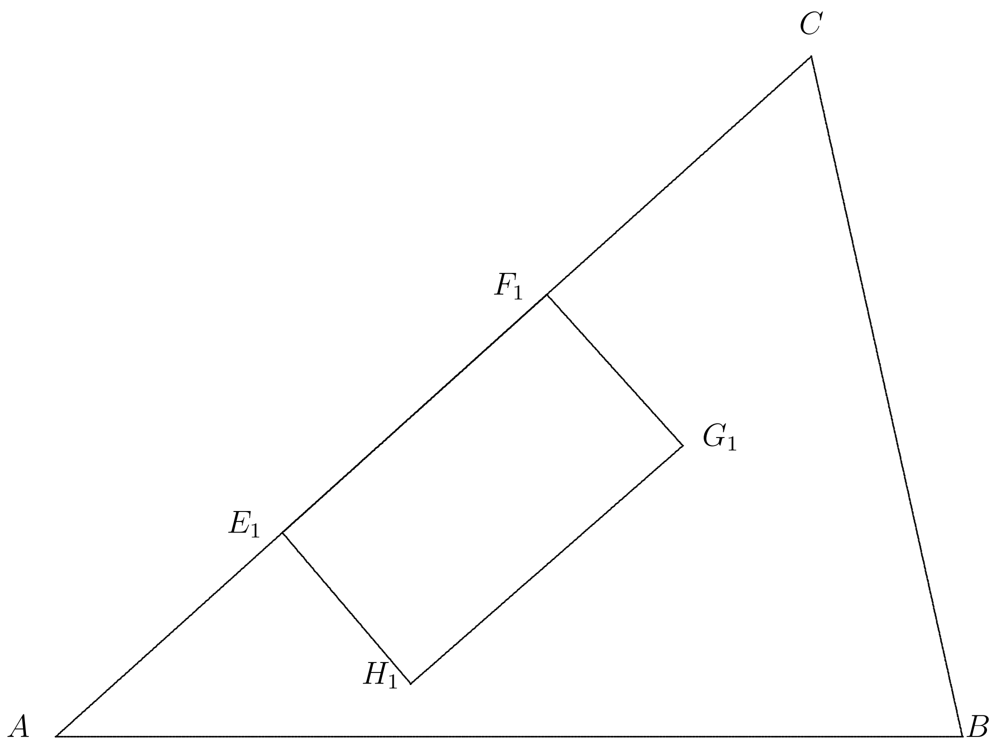
4. Ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten sich wie $2:1$ verhalten, soll einem Kreis mit Radius $r = 4\,\text{cm}$ einbeschrieben werden.
   Beschreibe kurz deine Konstruktion.

Lösung:

5. Zeichne ein Quadrat $ABCD$ der Seitenlänge $8\,\text{cm}$. Dem Quadrat $ABCD$ soll ein weiteres Quadrat $EFGH$ so einbeschrieben werden, daß E auf $[AB]$ und F auf $[BC]$ liegt, und daß $\overline{EB} : \overline{BF} = 5 : 4$ ist.

Lösung:

6. Dem Dreieck ABC soll ein Rechteck $EFGH$ einbeschrieben werden, welches ähnlich ist zu $E_1F_1G_1H_1$, dabei soll die Seite $[EF]$ auf $[AC]$ liegen.



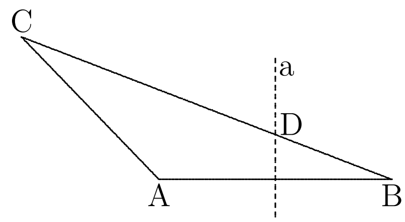
Lösung:

4.2.3 Rein rechnerische Aufgaben

1. Gegeben sind die Punkte $A(0|-3)$, $B(6|-6)$ und $C(3|3)$, sowie $P(8|5)$, $Q(10|4)$ und $R(9|7)$.
Entscheide durch Rechnung, ob die Dreiecke ABC und PQR zueinander ähnlich sind.
(Achtung: Hier ist keine Zeichnung verlangt!)

Lösung: Die Berechnung der Seitenlängen liefert den Nachweis der Ähnlichkeit.

2. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit $\alpha = 120^o$; $\beta = 30^o$ und $\overline{AB} = 6\sqrt{3}\,\text{cm}$. Die Symmetrieachse a zu A und B schneidet BC im Punkt D. Die dabei entstehende Strecke $[BD]$ ist 6 cm lang.



   (a) Begründe genau, wieso die beiden Dreiecke ABC und ABD zueinander ähnlich sind.

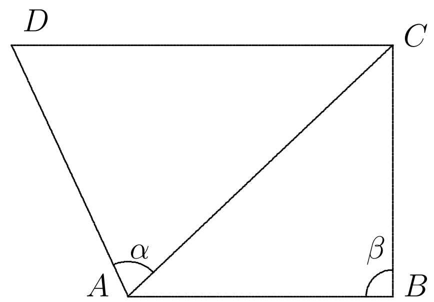
   (b) Berechne $\overline{BC}$.

Lösung: WWW; 18 cm

3. In einem Dreieck ABC gilt $a = 75\,\text{cm}$ und $b = 60\,\text{cm}$. Wie lang sind die zugehörigen Höhen h_a und h_b, wenn deren Längenunterschied 5 cm beträgt?

Lösung: $h_a = 20\,cm$; $h_b = 25\,cm$

4. Im Viereck $ABCD$ (Abbildung nicht maßstabsgerecht) sind folgende Streckenlängen gegeben: $\overline{AB} = 5\,\text{cm}$, $\overline{CD} = 7,2\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = 6\,\text{cm}$. Ferner ist bekannt, daß die Winkel $\alpha = \sphericalangle CAD$ und β gleich groß sind.

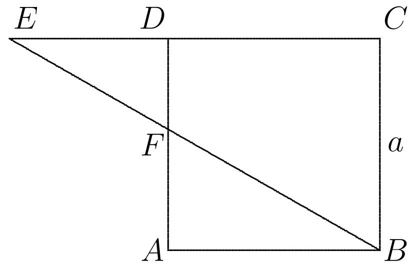


   (a) Zeige daß die Teildreiecke zueinander ähnlich sind. Gib den verwendeten Ähnlichkeitssatz an.

   (b) Berechne $\overline{AD}$ aus $\overline{CB} = 3,3\,\text{cm}$.

Lösung: $\overline{AD} = 3,96\,\text{cm}$

5. Das Quadrat $ABCD$ hat die Seitenlänge a. Die Gerade BF schneidet die Gerade DC im Punkt E (Skizze).



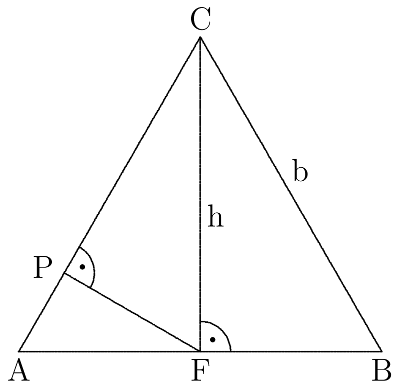
   (a) Begründe $\Delta ABF \sim \Delta EBC$.

   (b) Berechne die Streckenlänge $\overline{CE}$ in Abhängigkeit von a wenn $a = 1,5\overline{AF}$

Lösung: (a) Die Dreiecke stimmen in den Winkeln überein (rechte Winkel, Z-Winkel).

(b) $\overline{CE} = \frac{3}{2}a$

6. Im gleichseitigen Dreieck ABC mit der Seitenlänge b wird vom Höhenfußpunkt F aus das Lot auf die Seite $[AC]$ gefällt (s. Skizze).

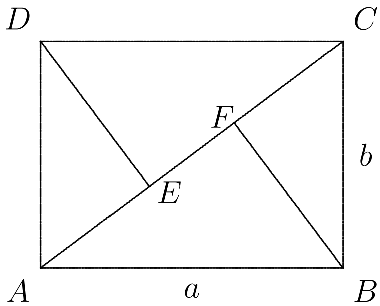


   (a) Gib alle ähnlichen Dreiecke an, die in nebenstehender Figur auftreten (mit kurzer Begründung)!

   (b) Berechne allgemein, jeweils ausgedrückt durch die Seitenlänge b, die Streckenlängen $\overline{AP}$, $\overline{CP}$ und $h = \overline{CF}$!

Lösung: (a): $\triangle AFC \sim \triangle FBC \sim \triangle AFP \sim \triangle PFC$;
(Übereinstimmung in allen Winkeln)
(b): $\overline{AP} = \frac{b}{4}$, $\overline{CP} = \frac{3}{4}b$, $h = \frac{b}{2}\sqrt{3}$

7. In einem Rechteck $ABCD$ werden von zwei gegenüberliegenden Ecken die Lote auf eine Diagonale gefällt. Berechne die Längen $x = \overline{EF}$ und $y = \overline{BF}$, wenn für die Seitenlängen $a = 24$ und $b = 7$ gilt.



Lösung: $x = \frac{527}{25}$ und $y = \frac{168}{25}$

8. In einem Dreieck ABC ist $a = 78\,\text{mm}$; $b = 111\,\text{mm}$; $c = 143\,\text{mm}$.
   Wie lang sind die Seiten eines ähnlichen Dreiecks A′B′C′, in dem die größte Seite um 138 mm kleiner ist als die Summe der Längen der beiden anderen Seiten?

Lösung: Der Ansatz $c' = k \cdot c$; $b' = k \cdot b$; $a' = k \cdot a$ liefert $k = 3$,
also $c' = 429\,mm$; $b' = 333\,mm$; $a' = 234\,mm$.

9. In dem größeren von zwei ähnlichen Dreiecken sind die Seiten 10 cm, 14 cm und 18 cm länger als die entsprechenden Seiten des kleineren Dreiecks. Die beiden entsprechenden Höhen h_a und h'_a verhalten sich wie 5 : 3.
   Berechne die Seitenlängen der beiden Dreiecke.

Lösung: $a' = 21\,\text{cm}$; $b' = 27\,\text{cm}$; $c' = 15\,\text{cm}$; $a = 35\,\text{cm}$; $b = 45\,\text{cm}$; $c = 25\,\text{cm}$

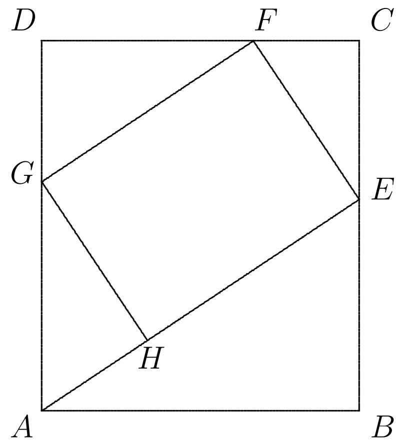
10. Die Flächeninhalte zweier ähnlicher Vierecke verhalten sich wie 64 : 25, ihre Umfänge unterscheiden sich um 12 cm. Berechne die Umfänge der beiden Vierecke.

Lösung: 20 cm und 32 cm

11. Im Dreieck ABC schneidet die Winkelhalbierende w_γ die Seite [AB] im Punkt D. Es sei $\overline{\text{AC}} = b = 4\,\text{cm}$, $\overline{\text{BC}} = a = 8\,\text{cm}$. Der Flächeninhalt A_1 des Teildreiecks ADC beträgt $A_1 = 5\,\text{cm}^2$. Berechne den Flächeninhalt A_2 des Teildreiecks BCD.

Lösung: $A_2 = 10\,\text{cm}^2$.

12. Das Rechteck $ABCD$ hat die Seitenlängen $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 7\,\text{cm}$, ferner ist $\overline{BE} = 4\,\text{cm}$. $EFGH$ ist ein Rechteck.
    (a) Begründe, daß die vier eingezeichneten Teildreiecke ähnlich sind.
    (b) Berechne die Längen der Abschnitte, in welche die Seiten $[CD]$ und $[DA]$ durch die Punkte F und G zerlegt werden.



Lösung: (a) Sie stimmen jeweils in den Winkeln überein. (b) $\overline{CF} = 2\,\text{cm}$ (c) $\overline{DG} = \frac{8}{3}\,\text{cm}$

13. Im Dreieck ABC gilt $\gamma = 2\,\alpha$.

(a) Erstelle eine übersichtliche Planfigur und drücke die Länge w_γ der Winkelhalbierenden von γ durch die Seitenlängen a, b und c aus.

(b) In welchem Verhältnis, ausgedrückt durch die Seitenlängen, wird [AB] von der Winkelhalbierenden von γ geteilt?

(c) Für welche spezielle Wahl des Winkels α teilt die Winkelhalbierende von γ die Seite [AB] im goldenen Schnitt? Verwende die Ergebnisse der Teilaufgaben (a) und (b).

Lösung: (a) $D = w_\gamma \cap [AC]$: $\Delta ABC \sim \Delta CBD$ und $\overline{AD} = w_\gamma$ ergibt $w_\gamma = \dfrac{a\,b}{c}$

(b) $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \dfrac{b}{a}$

(c) $\dfrac{c}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \overset{(b)}{=} \dfrac{b}{a} \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{w_\gamma}{a} = \dfrac{\overline{AD}}{a} = \dfrac{c}{b} \quad\overset{(a)}{\Longrightarrow}\quad \dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{b}$

$b^2 = c^2 \;,\; b = c \quad\Longrightarrow\quad \beta = \gamma = 2\,\alpha \quad\Longrightarrow\quad 5\,\alpha = 360° \;,\; \alpha = 72°$

14. Die Gewichtskraft eines Lebewesens ist seinem Volumen, die Muskelkraft der Querschnittsfläche des Muskels proportional. Wir nehmen an, daß ein „normaler“ Mensch der Größe 180 cm zusätzlich zu seinem eigenen Gewicht noch das 1,5fache seines Körpergewichts tragen kann. Wie groß darf ein „normal proportionierter“ Riese höchstens sein, damit er gerade noch mit eigener Kraft gehen kann? „Normal proportioniert“ heißt, daß der Riese durch eine zentrische Streckung aus dem „normalen“ Menschen hervorgeht.

Lösung: F =Muskelkraft, G =Gewichtskraft: $F = 2,5\,G$, $F' = G' \quad\Longrightarrow$
$k^2\,F = k^3\,G \quad\Longrightarrow\quad F = k\,G \quad\Longrightarrow\quad k = 2,5 \;,\; k \cdot 180\,\mathrm{cm} = 450\,\mathrm{cm}$

15. Ein Dreieck ABC mit $c = 4\,\mathrm{cm}$, $h_c = 3\,\mathrm{cm}$ und $\alpha = 60^0$ wird durch eine Ähnlichkeitsabbildung auf ein Dreieck $A'B'C'$ mit dem Flächeninhalt $13,5\,\mathrm{cm}^2$ abgebildet. Wie groß sind c', h_c' und α' im Bilddreieck.

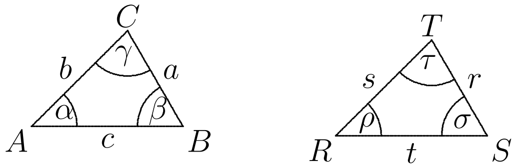
Lösung: Der Winkel ist invariant, die Längen wachsen um den Faktor $\frac{3}{2}$.

4.2.4 Herleitungen geometrischer Aussagen

1. Untersuche, ob man aus den angegebenen Beziehungen auf die Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und RST schließen kann. Wenn ja, nach welchem Ähnlichkeitssatz?

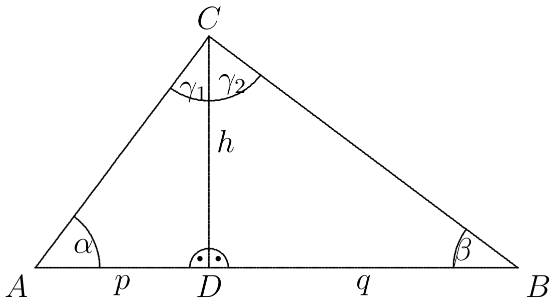
   (a) $b : c = s : r, \quad \alpha = \tau$

   (b) $\alpha = \rho, \quad \beta = \tau$



Lösung:

2. Das Dreieck ABC ist rechtwinklig mit einem rechten Winkel bei C. Der Fußpunkt D der Höhe h zerlegt $[AB]$ in zwei Abschnitte der Längen p und q.
   (a) Zeige: Die Dreiecke ADC und CDB sind ähnlich.
   (b) Folgere daraus: $h^2 = pq$.



Lösung:

3. Beweise folgende Aussagen anhand <u>einer</u> übersichtlichen Skizze:
   (a) Die Längen der Höhen von zwei Ecken eines beliebigen Dreiecks aus verhalten sich umgekehrt wie die Längen der zugehörigen Seiten.
   (b) Die Längen der Höhen von zwei Ecken eines beliebigen Dreiecks aus verhalten sich wie die Entfernungen der Höhenfußpunkte von der dritten Ecke.

Lösung:

4. Im Dreieck ABC betragen die Winkel $\alpha = 40^0$ und $\beta = 60^0$. Beweise: Die Winkelhalbierende w_γ zerlegt das Dreieck in zwei Teildreiecke, von denen eines zum ganzen Dreieck ähnlich ist.

Lösung: Die Winkelhalbierende schneidet die Seite c in D. Dann ist $CBD \sim ABC$, weil die Dreiecke in den Winkelmaßen übereinstimmen.

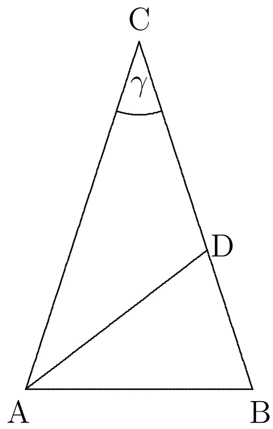
5. In einem Dreieck ABC gilt die Winkelbeziehung $\gamma = 2\alpha$. Die Winkelhalbierende w_γ trifft [AB] in D.
   (a) Begründe anhand einer übersichtlichen Skizze genau, dass eines der beiden entstehenden Teildreiecke zum ganzen Dreieck ähnlich ist.
   (b) Gib die entsprechenden Streckenverhältnisse im jeweils ähnlichen Dreieck an:
   $\overline{\mathrm{CD}} : \overline{\mathrm{BC}} = \ ?\,; \qquad \overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}} = \ ?$

Lösung: (a): $\triangle \mathrm{CBD} \sim \triangle \mathrm{ABC}$
(b): $\overline{\mathrm{CD}} : \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{AB}}$; $\qquad \overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{BC}} : \overline{\mathrm{BD}}$

6. Beweise den Satz: Die Längen der Höhen von zwei Ecken eines Dreiecks verhalten sich wie die Abstände ihrer Fußpunkte von der dritten Ecke.

Lösung: Beweis mit Hilfe der Ähnlichkeit geeigneter Dreiecke.

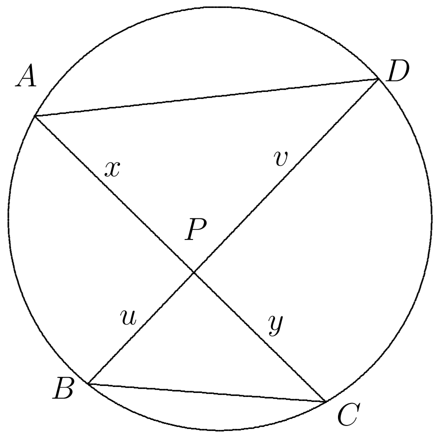
7. Im gleichschenkligen Dreieck ABC ist $\gamma = 36^o$, $\overline{AB} = 3,0\,\mathrm{cm}$ und $\overline{AC} = 4,9\,\mathrm{cm}$.
   (a) Zeige, daß die Halbierende des Basiswinkels $\measuredangle BAC$ das Dreieck ABC so zerlegt, daß ein Teildreieck dem ganzen Dreieck ähnlich ist.
   (b) Berechne $\overline{AD}$, $\overline{DC}$ und $\overline{BD}$!



Lösung: (a) $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ nach WW-Satz
(b) $\overline{AD} \approx 3\,\mathrm{cm}$, $\overline{DC} \approx 3\,\mathrm{cm}$ und $\overline{BD} \approx 1,9\,\mathrm{cm}$

8. Zwei Kreissehnen $[AC]$ und $[DP]$ schneiden sich in einem Punkt P.
   (a) Beweise: Die Dreiecke BCP und DPA sind ähnlich.
   (b) Leite daraus folgende Gleichung her:

$$u \cdot v = x \cdot y$$



Lösung: (a) Übereinstimmung in zwei Winkelmaßen (Scheitelwinkel und Umgangswinkel über $[CD]$).
(b) Strahlensatz

9. Gegeben sei ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck. S bezeichne den Schnittpunkt der Basishöhe mit der Winkelhalbierenden eines Basiswinkels. Beweise anhand einer übersichtlichen Skizze (Schenkellänge a) folgende Aussagen:
   (a) S teilt die Winkelhalbierende eines Basiswinkels im Verhältnis $(\sqrt{2}+1) : 1$,

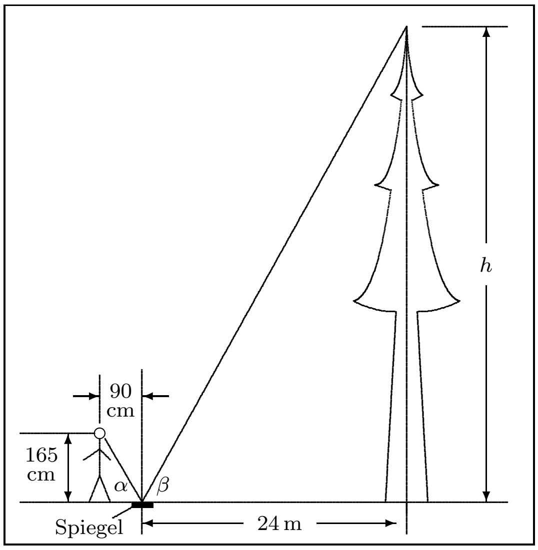
(b) S teilt die Basishöhe im Verhältnis $\sqrt{2}+1$.

Hinweis: Beachte zunächst, daß die Winkelhalbierende des Innenwinkels eines Dreiecks die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt und verwende dann ähnliche Dreiecke!

Lösung:

4.2.5 Anwendungsaufgaben

1. Der Schüler in nebenstehender Abbildung hält seinen Kopf so, daß er die Baumspitze in dem am Boden liegenden Spiegel sehen kann.
   Bei der Reflexion des Lichtes am Spiegel gilt das **Reflexionsgesetz**: $\boxed{\alpha = \beta}$.
   (a) Berechne die Höhe h des Baumes!
   (b) Bei einem Sturm brechen die oberen $35,75\,\text{m}$ des Baumes ab. In welcher Entfernung x vom Schüler muß jetzt der Spiegel liegen, damit er darin, bei gleichem Standort wie vorher, die neue Baumspitze sehen kann?



Lösung: (a) $h = 44\,\text{m}$ (b) $x = 4,15\,\text{m}$