SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Jahrgangsstufe 7 (Gymnasium)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

5. Juni 2012

Inhaltsverzeichnis

I. Neuer Lehrplan G8 3

1. Symmetrie und Winkel 4
1.1. Achsensymmetrie . . . 4
1.1.1. Eigenschaften, Konstruktion von Bildpunkt und Achse . . . 4
1.1.2. Mittelsenkrechte, Lot . . . 4
1.1.3. Winkel, Winkelübertragung, Winkelhalbierende . . . 5
1.1.4. Transversalen im Dreieck . . . 7
1.2. Punktsymmetrie . . . 8
1.2.1. Eigenschaften, Konstruktion von Bildpunkt und Zentrum . . . 8
1.2.2. Übersicht über symmetrische Vierecke . . . 8
1.3. Winkelbetrachtungen an Figuren . . . 9
1.3.1. Geraden- und Doppelkreuzungen . . . 9
1.3.2. Innenwinkel beim Dreieck und Viereck . . . 12

2. Terme und Variable 13
2.1. Terme und ihre Werte . . . 13
2.2. Aufstellen und Interpretieren von Termen . . . 15
2.3. Veranschaulichung von Termen . . . 21

3. Umformen von Termen 23
3.1. Rechengesetze für rationale Zahlen . . . 23
3.2. Terme mit Produkten . . . 23
3.3. Terme mit Potenzen . . . 23
3.4. Summen, Klammerregeln, Zusammenfassen . . . 24
3.5. Multiplizieren von Summen . . . 27
3.6. Binomische Formeln . . . 29

4. Gleichungen 30
4.1. Aufstellen linearer Gleichungen . . . 30
4.2. Lösen linearer Gleichungen . . . 30
4.3. Anwendungsaufgaben . . . 33

5. Daten, Diagramme und Prozentrechnung 36
5.1. Auswerten von Daten, Mittelwerte . . . 36

5.2. Prozentrechnen 38

6. Dreiecke **42**
6.1. Kongruenz 42
6.1.1. Begriff der Kongruenz 42
6.1.2. Kongruenzsätze für Dreiecke, grundlegende Konstruktionen 42
6.2. Besondere Dreiecke 44
6.2.1. gleichschenkliges und gleichseitiges Dreieck 44
6.2.2. rechtwinkliges Dreieck, Satz von Thales 46
6.2.3. Konstruktion von Kreistangenten 47
6.3. Konstruktionen 49
6.3.1. Besondere Linien im Dreieck 49
6.3.2. Dreieckskonstruktionen 49
6.3.3. Viereckskonstruktionen 53

7. Vertiefen der Algebra und Geometrie **55**
7.1. Terme und Gleichungen 55
7.2. Anwendungsaufgaben 56
7.3. Geometrie 57

II. Alter Lehrplan G9 - Algebra **61**

8. Erweiterung des Zahlenbereichs: die rationalen Zahlen **62**
8.1. Negative Zahlen 62
8.2. Grundrechenarten mit rationalen Zahlen 62

9. Ungleichungen **64**
9.1. Lösen linearer Ungleichungen 64

Teil I.

Neuer Lehrplan G8

1. Symmetrie und Winkel

1.1. Achsensymmetrie

1.1.1. Eigenschaften, Konstruktion von Bildpunkt und Achse

1. Z. B. symmetrisch, wenn $[PQ]$ von g senkrecht halbiert wird.
2. (a) Rechteck, Quadrat, Raute
   (b) Kreis (unendlich viele Symmetrieachsen)

1.1.2. Mittelsenkrechte, Lot

1. (a) Gerade PQ, Parallelen zu PQ, Mittelsenkrechte der STrecke [PQ] und Geraden durch den Mittelpunkt M der Strecke [PQ]
   (b) 1. Fall: P,Q,R liegen auf einer Geraden $\Rightarrow$ Gerade PQ und Parallelen zu PQ
   2. Fall: P, Q und R nicht auf einer Geraden $\Rightarrow$ Mittelparallelen des Dreiecks $\triangle PQR$
   (c) Der Abstand eines Punktes von einem Kreis ist das Minimum aller Entfernungen zwischen diesem Punkt und einem Punkt des Kreises.
   Kreise um Mittelpunkt der Strecke [PQ] liegt mit beliebigem Radius und Kreise um beliebigem Punkt M mit Radius $r = \frac{1}{2}(\overline{PM} + \overline{QM})$
2. 2 gleichlange Seiten, zwei gleichgroße Winkel, achsensymmetrisch; es handelt sich um ein gleichschenkliges Dreieck.
3. (a) Kreise um Anatevka und Berta mit Radius 28 mm schneiden sich in zwei Punkte P_1 und P_2 der Mittelsenkrechten von Anatevka und Berta. Die Punkte der Strecke $[P_1P_2]$ sind die möglichen Treffpunkte.
   (b) 56 mm
4. Mittelsenkrechte auf AB, Pfütze berücksichtigen!

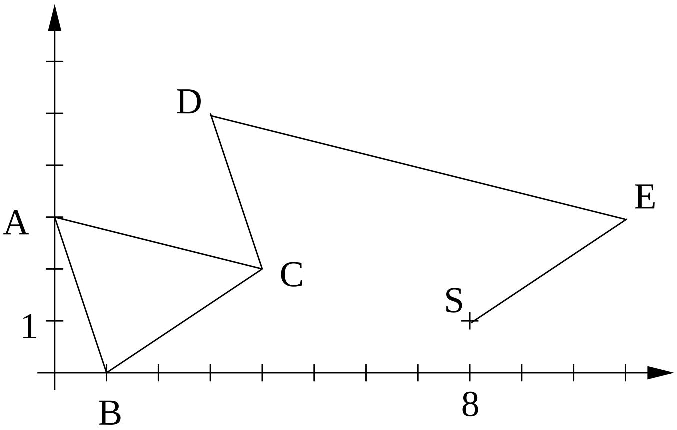
1.1.3. Winkel, Winkelübertragung, Winkelhalbierende

1.

2. S(8|1)

   $\overline{\mathrm{AS}} = 8{,}2\,\mathrm{cm}$

   $8{,}2\,\mathrm{cm} \cdot 1500 = 123\,\mathrm{m}$



3. (a) $\mathrm{k(B;}\, r = \overline{\mathrm{BA}}) \cap [\mathrm{BC}] = \{\mathrm{E}\}$

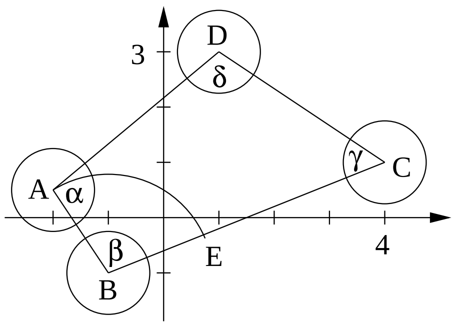
   $\overline{\mathrm{BC}} - \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{EC}} = 3{,}6\,\mathrm{cm}$

   (b) $\alpha = 96°$, $\beta = 102°$

   $\gamma = 55{,}5°$, $\delta = 106{,}5°$

   $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

   (c) $(360° - \beta) + (360° - \gamma) + (360° - \delta) + (360° - \alpha) = 3 \cdot 360° = 1080°$



4. (a) $120°$, $144°$, $150°$, $247{,}5°$, $187{,}2°$

   (b) $15°$, $22{,}5°$, $37{,}5°$, $33{,}75°$, $\left(38\frac{4}{7}\right)^{\circ}$

5. (a) $30°42''$; $55°39'36''$; $240°5'6''$; $22'12''$; $3{,}6''$; $9''$; $4°3'0{,}72''$; $5'$

   (b) $35{,}3°$; $200{,}4°$; $0{,}007\overline{3}^{\circ}$; $0{,}0002\overline{7}^{\circ}$; $18{,}305°$; $0{,}02°$; $12{,}015°$; $1{,}0169\overline{4}^{\circ}$

6. (a) $303°$, $94{,}35° = 94°21'$, $202°59'13'' = 202{,}9869\overline{4}^{\circ}$

$346°21'45{,}7'' = 346{,}3626\overline{94}°$

(b) $146°44'32''$, $81°28'55''$, $194°45'23''$

7. (a) $17°23'15'' = \left(17 + \frac{23}{60} + \frac{15}{3600}\right)^\circ = \left(17\frac{31}{80}\right)^\circ = 17{,}3875°$

(b) $50{,}101° = 50° + 0{,}101 \cdot 60' = 50° + 6{,}06' = 50°6' + 0{,}06 \cdot 60'' = 50°6'3{,}6''$

8. $0{,}0072'' = \frac{0{,}0072°}{3600} = \frac{1°}{500\,000} = 0{,}000\,002°$

9. (a) $12{,}35°$ (b) $35°16'12''$

10. (a) $27{,}9°$ (b) $14°21'$

11. (a)

	1 h	1 min	1 s
großer Zeiger	$360°$	$6°$	$0{,}1° = 6'$
kleier Zeiger	$30°$	$0{,}5° = 30'$	$0{,}5' = 30''$

(b)

$$\begin{array}{lcl}
13{:}00 & : & 30°, \qquad 04{:}00 \; : \; 120° \\
16{:}15 & : & 120° + 15 \cdot 0{,}5° - 90° = 37{,}5° \\
08{:}45 & : & 270° - (8 \cdot 30° + 45 \cdot 0{,}5°) = 7{,}5° \\
01{:}42 & : & \underbrace{42 \cdot 6°}_{252°} - \underbrace{(30° + 42 \cdot 0{,}5°)}_{51°} = 201°, \quad 360° - 201° = 159° \\
00{:}00{:}09 & : & 9 \cdot 6' - 9 \cdot 0{,}5' = 49{,}5' = 0{,}825° \\
07{:}42{:}51 & : & \underbrace{42 \cdot 6° + 51 \cdot 0{,}1°}_{257{,}1°} - \underbrace{(7 \cdot 30° + 42 \cdot 0{,}5° + 51 \cdot 0{,}5')}_{231{,}425°} = \underbrace{25°40'30''}_{25{,}675°} \\
03{:}47{:}05 & : & \underbrace{47 \cdot 6° + 5 \cdot 0{,}1°}_{282°30'} - \underbrace{(3 \cdot 30° + 47 \cdot 0{,}5° + 5 \cdot 0{,}5')}_{113°32'30''} = \underbrace{168°57'30''}_{168{,}958\overline{3}°}
\end{array}$$

12. (a) $95°$ (b) $130°$

13. $\alpha = 31{,}1°$, $\beta = 39{,}4°$, $\gamma = 36{,}6°$, $\delta = 146{,}5°$, $\delta - \gamma = 110{,}0°$

14. (a) Halbierung des Winkels $\alpha = 130°$ liefert $\alpha' = 65°$.

(b) Halbierung des Winkels $\alpha = 110°$ liefert $\alpha' = 55°$.

15. (a) Den Winkel $\beta = 40°$ halbieren und an $\gamma = 75°$ antragen.

(b) Den Winkel $\beta = 60°$ halbieren und an $\gamma = 85°$ antragen.

16. (a) $\alpha = \sphericalangle \mathrm{DEF} + \sphericalangle \mathrm{GHL}$ (b) $\beta = \sphericalangle \mathrm{GHL} - 2\sphericalangle \mathrm{DEF}$

17. (a) $\alpha = \sphericalangle \mathrm{FGH} + \sphericalangle \mathrm{ABC}$ (b) $\beta = \sphericalangle \mathrm{ABC} - 2 \sphericalangle \mathrm{FGH}$

18. (a) $75° = 90° - 60° : 4$
    (b) $52{,}5° = 90° : 4 + 60° : 2$

19. $60° + \frac{1}{2} \cdot 45°$

20. $\alpha = 112{,}5° = 90° + \dfrac{90°}{4}$, $\beta = 225° = 180° + \dfrac{90°}{2}$
    $\gamma = 78{,}75° = 90° - \dfrac{90°}{8}$, $\delta = 292{,}5° = 270° + \dfrac{90°}{4}$

1.1.4. Transversalen im Dreieck

1. (a) $360° - 2 \cdot 90° - 40° = 140°$
   (b) $\gamma > 90°$

2. (a) Winkelhalbierenden
   (b) In stumpfwinkligen Dreiecken liegt der Höhenschnittpunkt außerhalb des Dreiecks.
   (c) Umkreis; Thaleskreis, die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite ist Durchmesser des Umkreises.
   (d) b: Hypotenuse; a, c: Katheten

   $h_a = c$, $h_c = a$, s_b: Radius des Thaleskreises/Umkreises.

3. (a) Die drei Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt M.
   (b) Alle drei Städte liegen auf dem Kreis, d.h. alle drei Städte sind gleich weit vom Sender entfernt.

4. (a) Die drei Höhen schneiden sich in einem Punkt.
   $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{AB}} \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 6\,\mathrm{cm} \cdot 5\,\mathrm{cm} = 15\,\mathrm{cm}^2$
   (b) Die drei Höhen schneiden sich wieder in einem Punkt, allerdings außerhalb des Dreiecks.

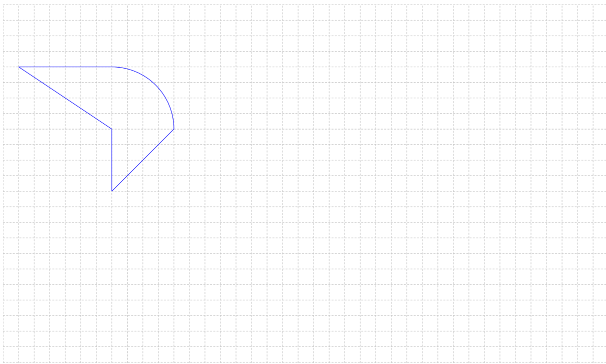
5. (a) Die drei Winkelhalbierenden schneiden sich in einem Punkt S.

(b) k berührt alle Dreiecksseiten.

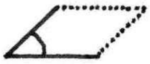
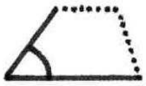
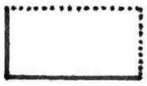
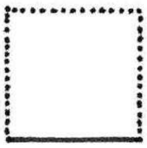
(c) S hat von allen Dreiecksseiten den gleichen Abstand.

1.2. Punktsymmetrie

1.2.1. Eigenschaften, Konstruktion von Bildpunkt und Zentrum

1. 

1.2.2. Übersicht über symmetrische Vierecke

1.
   - Parallelogramm: 3 Stücke (z.B.:  nach SWS, Rest aufgrund Parallelität)
   - Trapez: 4 Stücke (z.B.:  nach SWS, dann noch ein Winkel erforderlich, es sei denn Trapez ist gleichschenklig)
   - Rechteck: 2 Stücke (Seitenlängen, z.B.:  nach SWS, wobei W 90° ist, Rest aufgrund Parallelität)
   - Quadrat: 1 Stück (Seitenlänge, z.B.:  nach SWS, wobei W 90° und 2. Seite gleich lang ist, Rest aufgrund Parallelität)
   - Raute: 2 Stücke (Seitenlänge und einer der Winkel, z.B.  nach SWS, wobei 2. Seite gleich lang ist, Rest aufgrund Parallelität)

- Drachenviereck: 3 Stücke (z.B.  nach SWS, wobei 2. Seite gleich lang ist, und dann noch eine davon verschiedene Seite nach SSS)

2. (a)

	punktsymmetrisch	achsensymmetrisch
Jedes Drachenviereck ist		X
Jedes Rechteck ist	X	X

   (b) Zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel.

1.3. Winkelbetrachtungen an Figuren

1.3.1. Geraden- und Doppelkreuzungen

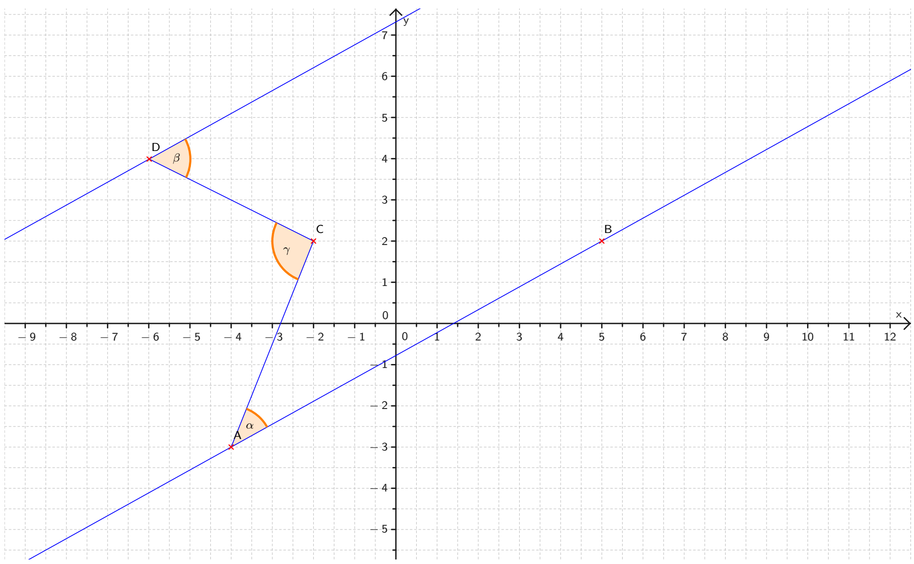
1. (a) $50°$, (b) $80°$, (c) Innenwinkel im rechten Dreieck sind $90°$ und $48°$, daraus kann der Winkel unten zu $42°$ berechnet werden, woraus die Parallelität wegen gleicher Z-Winkel folgt.

2. $\alpha = 50°$ $\quad \beta = 40°$ $\quad \varphi = 140°$ $\quad \varepsilon = 50°$ $\quad \delta = 40°$

3. (a) $114{,}5°$, $\quad 129°15'$, $\quad 14{,}75°$, $\quad 165{,}25°$

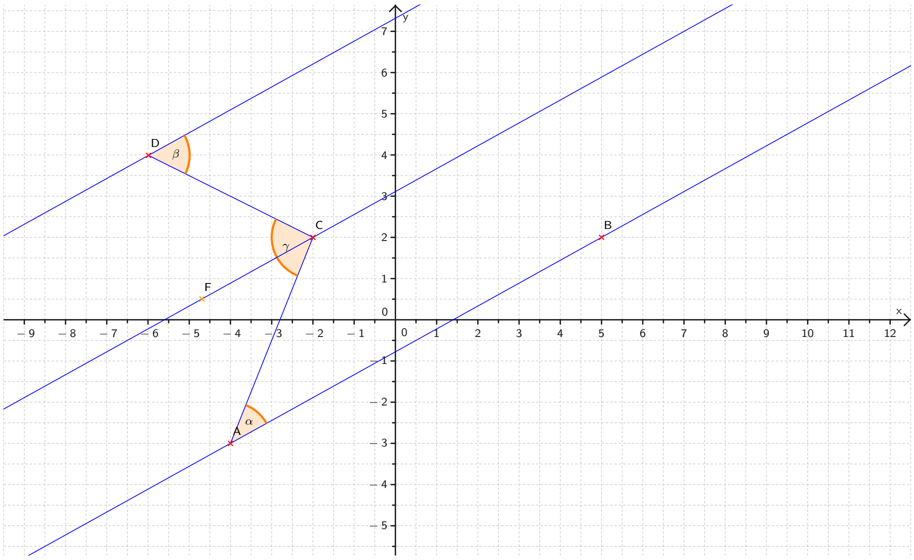
   (b) $\alpha = 56°$, $\beta = 31°$, $\gamma = 93°$

4. (a)

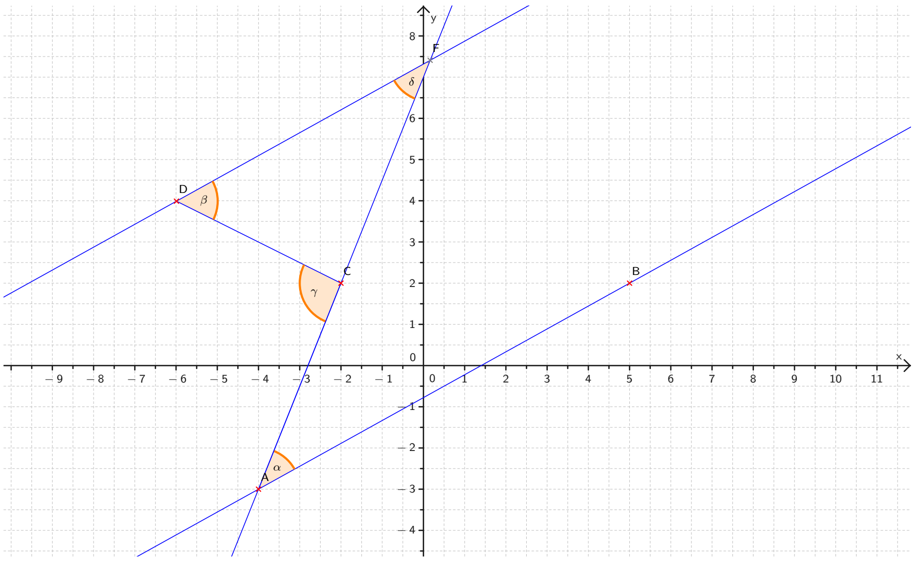


(b)

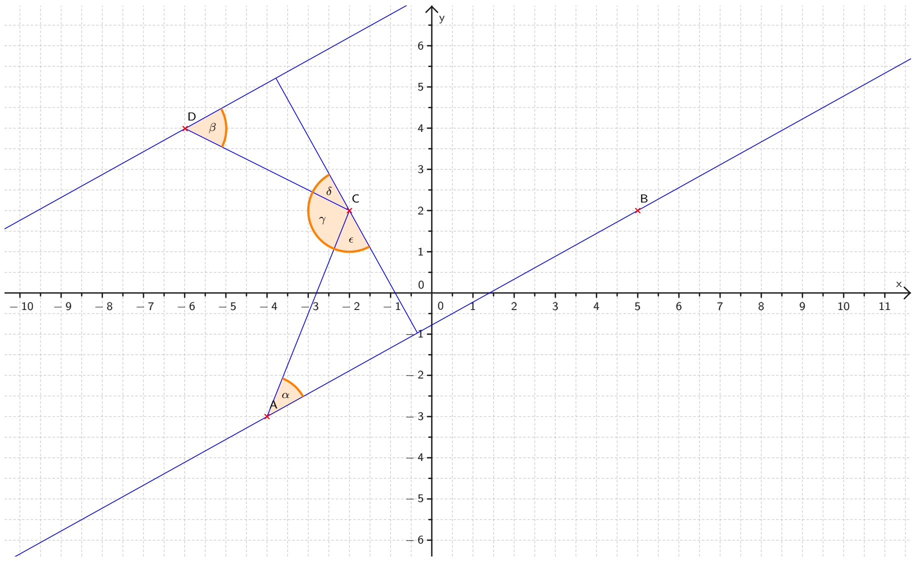
- Lösung 1: $\alpha = \sphericalangle \mathrm{DCF}$, $\beta = \sphericalangle \mathrm{FCA}$ (Wechselwinkel an parallelen Geraden) $\Longrightarrow$ $\gamma = \sphericalangle \mathrm{DCF} + \sphericalangle \mathrm{FCA} = \alpha + \beta$



- Lösung 2: $\delta = \beta$ (Wechselwinkel an parallelen Geraden) $\Longrightarrow$ $\gamma = \alpha + \beta$ (Außenwinkel im Dreieck)



- Lösung 3: $\delta = 90° - \alpha$, $\epsilon = 90° - \beta$ (Winkelsumme im Dreieck) $\Longrightarrow$ $\gamma = 180° - \delta - \epsilon = \alpha + \beta$



(c) vgl. (b)

5. (a) $\alpha = \beta = \gamma = 90°$
   (b) $\alpha = 60°$, $\gamma = 40°$, $\beta = \delta = 80°$
   (c) $\beta = 20°$, $\varepsilon = \alpha = \varphi = \gamma = 90° - 20° = 70°$
   $\sigma = \delta = 90° - \varphi = 20°$

6. (a) $\alpha + 2\alpha + 4\alpha + 8\alpha = 15\alpha = 180° \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 12°$
   $\beta = 24°$, $\gamma = 48°$ und $\delta = 96°$
   (b) $\alpha + 3\alpha + \frac{9}{2}\alpha + 6\alpha = \frac{29}{2}\alpha = 180° \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \left(\frac{360}{29}\right)^\circ = \left(12\frac{12}{29}\right)^\circ$
   $\beta = \left(37\frac{7}{29}\right)^\circ$, $\gamma = \left(55\frac{25}{29}\right)^\circ$ und $\delta = \left(74\frac{14}{29}\right)^\circ$

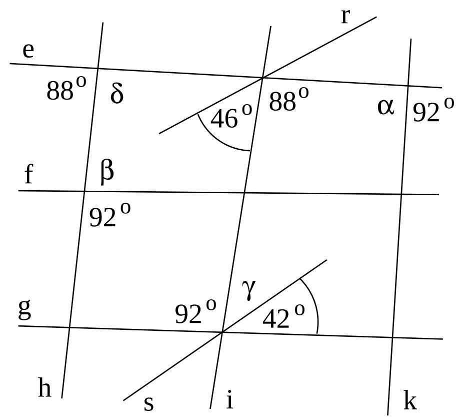
7. e und f, g und h, l und m

8. Die beiden Winkel an der Geraden g müssen gleich sei.

9. $\alpha = 180° - 92° = 88°$
   $\Longrightarrow \quad h \| k$ (Stufenwinkel)

   $\beta = 180° - 92° = 88°$
   $\Longrightarrow \quad e \| f$ (Wechselwinkel)

   $\gamma = 180° - 92° - 42° = 46°$
   $\Longrightarrow \quad r \| s$ (Wechselwinkel)



1.3.2. Innenwinkel beim Dreieck und Viereck

1. (a) $(n-2) \cdot 180°$
   (b) $144°$

2. (a) $(n-2) \cdot 180°$
   (b) $720°$
   (c) Fünfeck ($n = 5$)
   (d) Achteck ($n = 8$)

3. Bedingung für Eckenzahl n: $(n-2) \cdot 180° = 1620°$
   $\Rightarrow n = 11$

4. (c) $\varepsilon = 90° + \frac{1}{2}\beta$

2. Terme und Variable

2.1. Terme und ihre Werte

1. (a) $-\frac{1}{5}$, (b) z. B. $(0; 0)$, (c) z. B. $(1; -1)$

2. (a) $\frac{4}{21}$
   (b) $0,25$

3. $5,7s$; $7,7s$; $10,5s$; $7,6s$; $9,1s$; $9,4s$

4. (a) 972 (b) 676 (c) 523 (d) 2
   (e) 930 (f) 216 (g) 125

5. (a) $T(1) = -\frac{1}{2} = -0,5$, $T(2) = \frac{1}{4} = 0,25$, $T(3) = -\frac{1}{8} = -0,125$, $T(4) = -\frac{1}{16} = 0,0625$
   (b)
   (c) Der Punkt liegt halb so weit vom Nullpunkt entfernt und zwar so, dass der Nullpunkt zwischen den beiden Punkten liegt.

6. (a) -14 (b) 10 (c) -72
   (d) -8 (e) -5 (f) $7x^2 + 20y^3$

7. (a) $T(-2; 3) = -1$
   (b) $T(-5; -7) = 12$
   (c) $T(3; -2) = -1$
   (d) $T(-9; -2) = 11$

8. $4\frac{6}{25}$

9. $2\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$, 2

10.

a	-1	-3	$+1$	$+3$
b	$+5$	-5	$+5$	-5
$a-b$	-6	$+2$	-4	$+8$
$a+b$	$+4$	-8	$+6$	-2
$\lvert a\rvert-\lvert b\rvert$	-4	-2	-4	-2

11.

a	-2	-4	$+1$	$+6$
b	$+5$	-5	-5	-5
$a-b$	-7	$+1$	$+6$	$+11$
$a+b$	$+3$	-9	-4	$+1$
$\lvert a\rvert-\lvert b\rvert$	-3	-1	-4	$+1$

12. Gleichung gilt u. a. für $a=-2,\ b=-5;\ a=2,\ b=5$
Gleichung gilt u. a. nicht für $a=-2,\ b=5;\ a=2,\ b=-5$

13. (a)

x	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{2}{3}$	1	$1{,}5$
$T(x)$	-12	-2	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{2}{9}$	0	$-0{,}75$

(b)

x	-5	-2	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{7}$	1	$2{,}5$	7
$p(x)$	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	1	$2{,}5$	7

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{für } x<0\\ x & \text{für } x\geqq 0\end{cases}$$

14. (a) $D_1=\mathbb{N}\setminus\{3\}$
(b) $D_2=\mathbb{Q}\setminus\left\{3,\frac{5}{3}\right\}$
(c) $D_3=\mathbb{Q}\setminus\left\{-\frac{3}{2},-\frac{1}{4},1\right\}$

15. (a) $x+|x|=\begin{cases}2x & \text{für } x>0\\ 0 & \text{für } x\leqq 0\end{cases}$ $\qquad D_1=\mathbb{Q}^+=\{x|x>0\}$
(b) $D_2=\mathbb{N}$
(c) $x-|x|=\begin{cases}0 & \text{für } x\geqq 0\\ 2x & \text{für } x<0\end{cases}$ $\qquad D_3=\mathbb{Q}^-=\{x|x<0\}$
(d) $D_4=\{\,\}$

16. $D=\mathbb{Q}\setminus\left\{\frac{7}{2}\right\},\quad T(0)=-\dfrac{4}{7},\quad T(-1)=-\dfrac{1}{9},\quad T\left(\dfrac{11}{3}\right)=\dfrac{11+4}{\frac{22}{3}-\frac{21}{3}}=3\cdot 15=45$

17. $D=\mathbb{Q}\setminus\{-2;2\},\quad T(0)=-\dfrac{5}{2},\quad T(-1)=-6,\quad T\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-2}=-\dfrac{16}{5}=-3{,}2$

2.2. Aufstellen und Interpretieren von Termen

1. (a) 4, 7, 10, 13 bzw. 37 Streichhölzer
   (b) $s(k) = 4 + 3 \cdot (k - 1)$

2. (a) Ja, $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$, z. B. $\frac{1}{7} = \frac{1}{14} + \frac{1}{14}$
   (b) Ja, $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$, z. B. $\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$
   (c) Ja, denn der zweite Stammbruch aus (b) lässt siche wieder als Summer zweier verschiedener Stammbrüche darstellen; analog bei vier oder mehr Stammbrüchen
   (d) Nein, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$
   (e) Ja, $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{n \cdot m}$
   (f) Ja, $\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1}$
   (g) Nein, denn die Summer ist immer < 2.
   (h) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$, für $\frac{4}{5}$ folgt aus dem Nenner $a = 1$ oder $a = 5$, woraus für b ein Widerspruch folgt
   (i) $\frac{a}{b}$ ist Summe von a Summanden $\frac{1}{b}$
   (j) Ja, z.B. indem man sie sukzessive durch den jeweils größten Stammbruch ausschöpft. Beispiel: $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$
   (k) Wegen $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+i} = \frac{i}{n \cdot (n+i)}$ können nur Brüche dieser Form als Differenz von Stammbrüchen dargestellt werden.

3. C

4. (a) 27%, (b) $y = 4x + 158$
   (c) z. B. in den alten Bundesländern gibt es mehr Zuschauer als in den neuen Bundesländern

5. (a)

Name	Weite	W-Pkt	K1	K2	K3	K4	K5	H-Pkt	Pkt	Rang
Müller	113m	51,6	17,5	17,0	18,0	17,5	18,5	53	104,6	4
Meier	127m	68,4	18,0	17,5	18,0	18,0	18,0	54	122,4	2
Schluze	131m	73,2	19,0	17,5	19,5	20,0	18,5	57	130,2	1
Huber	118m	57,6	17,5	18,5	18,5	19,0	19,0	56	113,6	3

   (b) W: Weitenpunkte; w: gesprungene Weite; n: Normweite; s: Schanzenfaktor
   $\Rightarrow W(w) = 60 + s \cdot (w - n)$

6. (a) nach vier Stunden: 5cm, nach zehn Stunden: 12,5cm
   (b) $t \to t \cdot 1,25cm$
   (c) 16 Stunden

7. Anzahl der Diagonalen in Abhängigkeit der Eckenzahl:

Ecken	3	4	5	6
Diagonalen	0	2	5	9

Anzahl der zusätzlichen Diagonalen bei der n-ten Ecke: $n - 2$ für $n \geq 4$

Anzahl Diagonalten bei 16-Eck: $14 + 13 + 12 + \cdots 3 + 2 = 104$

8. (a) Dir dritte Windung ist um acht Längeneinheiten länger als die zweite Windung.
   (b) $T(n) = 6 + (n - 1) \cdot 8 = 8n - 2$

9. (a) i. $2x$ ii. $x : 2 - 3$ iii. $(x - 3) : 2$ iv. x^2
   v. $\frac{1}{x}$ vi. $x - 1$ vii. $3 \cdot \frac{1}{x}$ viii. $\frac{1}{3x}$
   (b) i. $3 \cdot n$ ii. $2 \cdot n - 1$ iii. n^2
   (c) i. Beide Pakete haben zusammen die Masse 10 kg.
   ii. Paket a hat um 10kg mehr Masse als Paket b.
   iii. Paket b hat die halbe Masse von Paket a.
   (d) (i) Z. B.: Subtrahiert man die Summe zweier Zahlen b und c von einer Zahl erhält man den gleichen Wert, wie wenn die beiden Zahlen nacheinander subtrahiert werden.

10. x ist eine beliebige Zahl:

(a)

0,1	2,6	$-0{,}7$
x	0,4	$1{,}6 - x$
$1{,}9 - x$	-1	$1{,}1 + x$

z.B.

$\frac{1}{10}$	2,6	$-\frac{7}{10}$
$-0{,}4$	40%	2
2,3	-1	0,7

(b)

x	$3{,}875 - x$	$-0{,}875$
0,475	0,15	2,375
$2{,}525 - x$	$x - 1{,}025$	1,5

z.B.

$-1{,}2$	5,075	$-\frac{7}{8}$
0,475	15%	$2\frac{3}{8}$
3,725	$-2{,}225$	1,5

(c)

$-0{,}2$	x	1,25
$8{,}25 + x$	0,75	$-7{,}95$
-7	0,3	$7{,}75 + x$

z.B.

$-0{,}2$	$-6{,}05$	$\frac{5}{4}$
2,2	0,75	$-7{,}95$
-7	30%	1,7

11. (a)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Randteile R(n)	1	4	8	12	16	20	24	28	32
Innenteile I(n)	0	0	1	4	9	16	25	36	49

(b) $R(n) = (n - 1) \cdot 4$

(c) $I(n) = (n - 2)^2$

(d) $R(6) > I(6)$, $R(7) < I(7)$ aus Tabelle oder Graphen

12. (a) $u = 23\,\text{cm}$
    (b) $A = 25\,\text{cm}^2$
    (c) Das Rechteck wird breiter und niedriger.
    (d) Z.B. $x = 6$: Das Rechteck entartet zur Strecke.
    Oder $x = 7$, dann hätte die Strecke $[AB]$ eine negative Länge.
    Hinweis: Manche Schüler/innen sind der Ansicht, dass der Fall $x = 1$ eine richtige Antwort sei, denn ein Quadrat ist eben nach ihrer Ansicht kein Rechteck.

13. (a) 39 und 156
    (b) 15 und 180
    (c) $x + y = 195$ und $x = ny \Rightarrow y = \frac{195}{n+1} \Rightarrow$ lösbar für $n = 2, 4, 12, 14, 38, 64, 194$

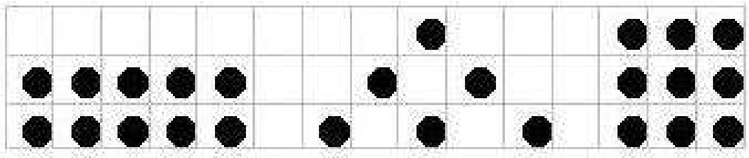
    $n = 2 \Rightarrow 65$ und 130, $n = 4 \Rightarrow 39$ und 156, $n = 12 \Rightarrow 15$ und 180,
    $n = 14 \Rightarrow 13$ und 182, $n = 38 \Rightarrow 5$ und 190, $n = 64 \Rightarrow 3$ und 192,
    $n = 194 \Rightarrow 194$ und 1
    (d) Problemstellungen, die sich um die Verteilung bestimmter unteilbarer Güter drehen, können eine Beschränkung der Grundmenge notwendig machen.
    (e) „Besser" als 195 wären beispielsweise die Zahlen 360 und 720 geeignet, da ihre Primzahlzerlegung deutlich mehr Lösungskombinationen zulässt.
    (f) Primzahlen lassen nur eine Lösungskombination zu.

14. Umkehraufgabe: Gegeben ist ein Graph, wie könnte ein zugehöriges Gefäß aussehen?
    Begründungen: Warum/wann tritt ein Knick auf usw. offen

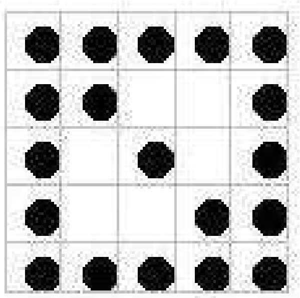
15. (a) i. $2x$ ii. $x : 2 - 3$ iii. $(x - 3) : 2$ iv. x^2
    v. $\frac{1}{x}$ vi. $x - 1$ vii. $3 \cdot \frac{1}{x}$ viii. $\frac{1}{3x}$
    (b) i. $3 \cdot n$ ii. $2 \cdot n - 1$ iii. n^2
    (c) i. Beide Pakete haben zusammen die Masse 10 kg.
    ii. Paket a hat um 10kg mehr Masse als Paket b.
    iii. Paket b hat die halbe Masse von Paket a.
    (d) (i) Z. B.: Subtrahiert man die Summe zweier Zahlen b und c von einer Zahl erhält man den gleichen Wert, wie wenn die beiden Zahlen nacheinander subtrahiert werden.

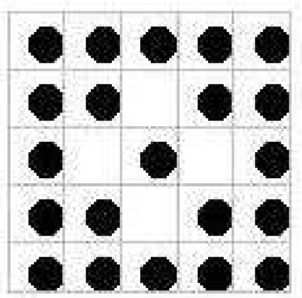
16. (a) n: Anzahl der Plättchen auf der Grundseite. N: Anzahl der Gesamtplättchen. Dann gilt: $N = 4n - 4 = 4(n - 1)$. Für $N = 28$ gilt: $n = 8$. Für $N = 68$ gilt: $n = 18$.

(b) jeweils fortgesetzt...(Dreieck innen leer)



(c) Z. B.





$2n + 3(n - 2) = 5n - 6$ $\qquad$ $2n + 3(n - 2) + n - 3 = 6n - 9$

17. (a) A: $2l + 4b + 6h + 20\,\text{cm} = 2(l + 2b + 3h) + 20\,\text{cm} = 262\,\text{cm}$
B: $4l + 2b + 6h + 20\,\text{cm} = 2(2l + b + 3h) + 20\,\text{cm} = 282\,\text{cm}$
C: $4l + 4b + 8h + 20\,\text{cm} = 2(2l + 2b + 4h) + 20\,\text{cm} = 356\,\text{cm}$
D: $2l + 2b + 4h + 20\,\text{cm} = 2(l + b + 2h) + 20\,\text{cm} = 188\,\text{cm}$

(b) vgl. (a)

(c) $4l+6b+10h+15\,\text{cm}$: zwei parallele Schnürungen entlang l, drei parallele Schnürungen entlang b, Schleife 15 cm
$3l + 2b + 4h + 10\,\text{cm}$: nicht möglich

18. $U = a+b+c+d+(a+c)+(d+b) = 2a+2b+2c+2d = 2(a+b+c+d)$ $A = a\cdot(b+d)+c\cdot d = (a + c) \cdot d + a \cdot b = (a + c) \cdot (b + d) - b \cdot c = ab + ad + cd$

19. $T(M) = (3 \cdot 2 + 2) \cdot M/4 = 2M$

20. (a) $\dfrac{c + ab}{3(a - b)}$ (b) $(x + y)^2 - \dfrac{x}{z}$

21. (a) Es entstehen jeweils 10 Dreiecke.

(b) Es entstehen 2, 4, 6 und 8 Dreiecke.

(c) Es entstehen jeweils 42 Dreiecke.

(d) $2k + 2$

(e) $(k \cdot 360° + 4 \cdot 90°) : 180° = 2k + 2$

22. (a) i. $T(x) = 13{,}60 + (x - 12) \cdot 0{,}11$

ii. Für die sinnvolle Grundmenge $G = \mathbb{N}_0$ ist $D = \{12; 13; 14; \cdots\}$
Z. B. $T(15) = 13{,}93$, $T(62) = 19{,}10$, ...

(b) i. $T(x; y) = 13{,}60 + (x - 8) \cdot 0{,}05 + y \cdot 0{,}15$
Z. B. $T(0; 50) = 21{,}10$, $T(50; 0) = 15{,}70$, $T(25{,}25) = 18{,}20$

ii. Z. B.: Es ist besser beim Anbieter FONO zu telefonieren, wenn für mindestens 12 Nahgespräche die Anzahl der Ferngespräche mehr als $\frac{6x-92}{15}$ (x: Anzahl der Ortsgespräche) ist.

23. (b) 6 cm und 3 cm

24. (a) Quadratzahlen (b) gerade Zahlen (c) ungerade Zahlen (d) $\mathbb{Q}$
(e) $\mathbb{N}_0$

25. (a) $A = xz + \dfrac{1}{2}(y - x)z = \dfrac{x + y}{2} \cdot z, \quad A = \dfrac{3}{2}x^2$

(b) $A = 4 \cdot \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}a^2, \quad A = 4{,}5\,\text{cm}^2$

(c) $A = a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 = 14a^2, \quad A = 87{,}5\,\text{cm}^2$

26. (a) $A = (a + b)(c + d) - \dfrac{1}{2}bc - \dfrac{1}{2}(a + b - e)(c + d) = \dfrac{(a + e)(c + d) + bd}{2}$

(b) $A = 36\,\text{cm}^2$

(c) Parallelogramm: $a = e$, $d = 0$ oder wie beim Rechteck
Rechteck: $a = e$, $b = 0$ oder $a + b = e$, $c = 0$
Quadrat: $a = e$, $b = 0$, $c + d = e$ oder $a + b = e$, $c = 0$, $d = e$

(d) Zwei Beispiele, alle Maße in cm: $a = d = e = 10$, $b = c = 0$ oder
$a = 7$, $b = 5$, $c = 4$, $d = 6$ und $e = 10$

(e) Zwei Beispiele: $a = e$, $b = 0$, $c = 0$ und $d = e$ oder $a = e$, $b = e$, $c = e$ und $d = 0$

27. (a) $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(b)

Name	S_{ges}	M_{ges}	N
Huber	3,75	4,10	3,87
Maier	4,75	5,00	4,83
Müller	1,50	1,40	1,47

(c) Nein, mit $E_4 = 1$ und $m_2 = 1$ wäre $M = 4,10$ und $N = 4,53$.

28. (a) Ein halbes Quadrat mit der Seitenlänge n plus n halbe Quadrate mit der Seitenlänge 1:

$$A(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

(b) $A(10) = 55, \quad A(100) = 5050, \quad A(5000) = 12\,502\,500$

(c) $A(9999) = \dfrac{9999 \cdot 10000}{2} = 49\,995\,000$

29. „Rechteck mit den Seitenlängen $n+1$ und $n+2$ minus zwei kleine Quadrate mit der Fläche 1“

oder

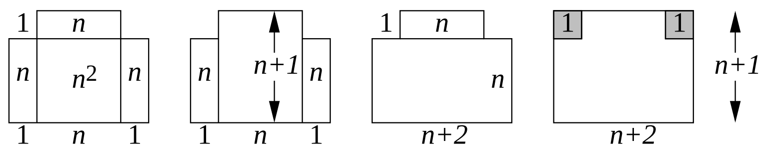
„Rechteck mit den Seitenlängen n und $n+2$ plus Rechteck mit den Seitenlängen n und 1“

oder

„Rechteck mit den Seitenlängen n und $n+1$ plus zwei Rechtecke mit den Seitenlängen n und 1“

oder

„Quadrat mit der Seitenlänge n plus drei Rechtecke mit den Seitenlängen n und 1“



$$A(n) = (n+1)(n+2) - 2 = n(n+2) + n = n(n+1) + 2n = n^2 + 3n$$

$$A(7) = 70, \qquad A(20) = 460, \qquad A(99) = 100 \cdot 101 - 2 = 10098$$

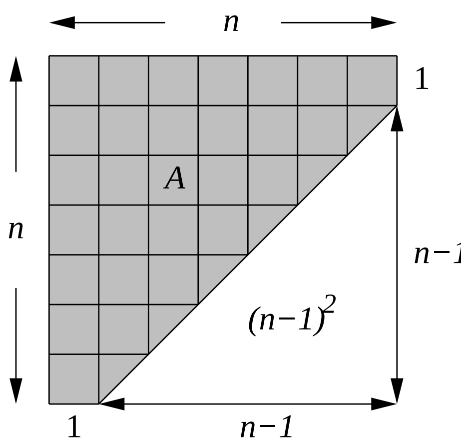
30. „Quadrat mit der Seitenlänge n minus halbes Quadrat mit der Seitenlänge $n-1$.“

$$A(n) = n^2 - \frac{1}{2} \cdot (n-1)^2$$

$A(7) = 49 - \dfrac{36}{2} = 31$

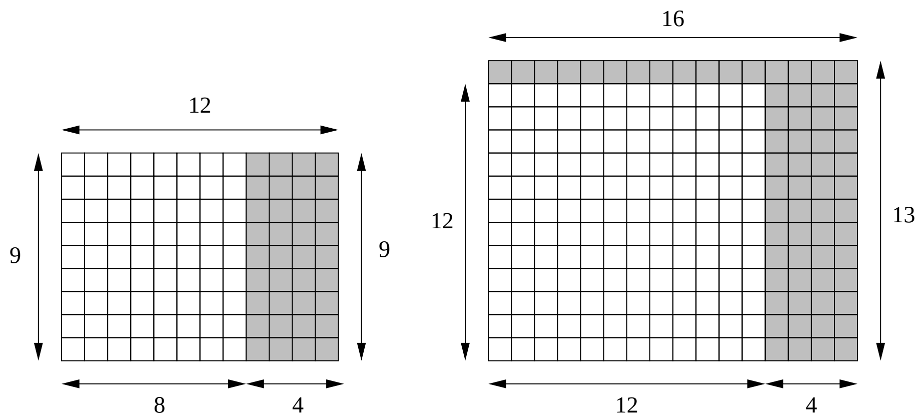
$A(30) = 900 - \dfrac{841}{2} = 479{,}5$

$A(101) = 10201 - \dfrac{10000}{2} = 5201$



31. $A(x) = x(x-3) - \frac{3}{4}x(x-4) = x^2 - 3x - \frac{3}{4}x^2 + 3x = \frac{1}{4}x^2$

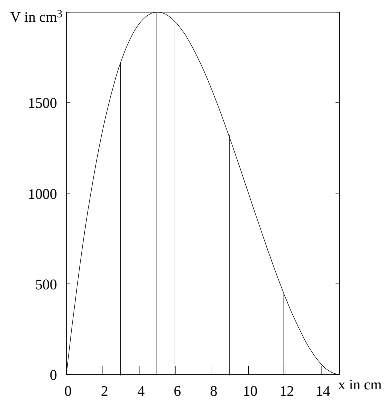
$A(12) = \frac{12^2}{4} = \frac{144}{4} = 36, \quad A(16) = \frac{16^2}{4} = \frac{256}{4} = 64$



Die Figur ist nur für $x \geqq 12$ zeichenbar, da sonst $\frac{3}{4}x > x - 3$ wäre.

2.3. Veranschaulichung von Termen

1.



(a) $V(x) = (30\,\text{cm} - x)^2 \cdot x$

(b) $D_V = \{\, x \,|\, 0 \leqq x \leqq 15\,\text{cm}\}$

(c)

$\frac{x}{\text{cm}}$	0	3	6	9	12	15
$\frac{V(x)}{\text{cm}^3}$	0	1728	1944	1296	432	0

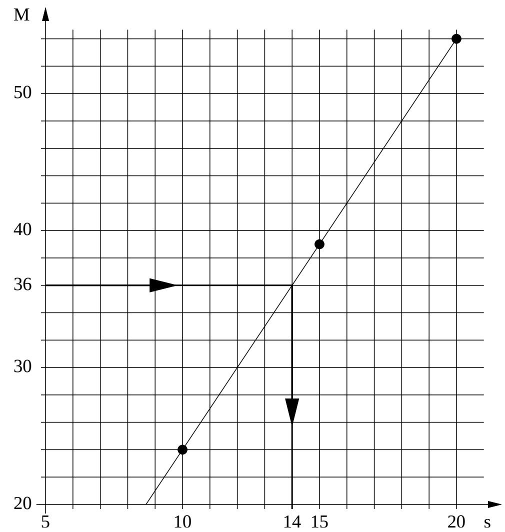
(d) maximaler Wert: $V(5\,\text{cm}) = 2000\,\text{cm}^3$

2.

(a) $M(s) = 3(s-2) = 3s-6$

$M(10) = 24,\ M(15) = 39,\ M(20) = 54$

(b) $M(14) = 36$

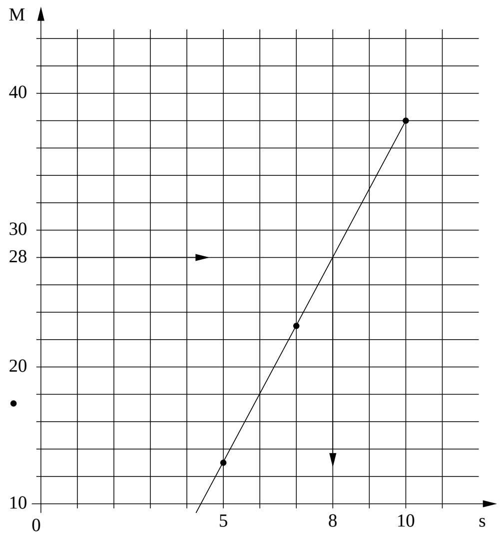


3.

(a) $M(s) = 5(s-3)+3 = 5s-12$

$M(5) = 13,\ M(7) = 23,\ M(10) = 38$

(b) $M(8) = 5\cdot 8 - 12 = 28$



3. Umformen von Termen

3.1. Rechengesetze für rationale Zahlen

1. (a) 99 (b) 61 (c) 75 (d) 42
   (e) 222 (f) 19 (g) 76

3.2. Terme mit Produkte

1. (a) - -
   (b) - -
   (c) $a^2 = (a-1)^2 + (a-1) + a$
   (a) - -
   (b) - -
   (c) $a^2 = (a-1) \cdot (a+1) + 1$

2.
   (a) –
   (b) $A = ax + bx - x^2$
   (c) [**X**] [ ]
   [**X**] [ ]
   [**X**] [**X**]
   (d) $x \in]0\,\mathrm{cm}; 8\,\mathrm{cm}[_{\mathbb{Q}}$

3. $x^2 - (3-x)^2 = x^2 - (9 - 6x + x^2) = 6x - 9 = 3(2x-3)$

4. (a) $\frac{x^2}{2}$ (b) $\frac{2x^2+4}{x}$

3.3. Terme mit Potenzen

1. (a) $L = \{5\frac{1}{6}\}$
   (b) $L_1 = \{5\frac{1}{6}\}$, $L_2 = \{\}$, $L_3 = \{\}$, $L_4 = \{5\frac{1}{6}\}$.

(c) z. B. $\frac{2}{5}(x-7)-\frac{3}{5}(2-3x)=x+9\frac{1}{5}$
$\frac{2}{5}(x-7)-\frac{3}{5}(2-3x)=x-4$
$\frac{2}{5}(x-7)-\frac{3}{5}(2-3x)=2\frac{1}{5}x$
$\frac{2}{5}(x-7)-\frac{3}{5}(2-3x)=2\frac{1}{5}x-4$

(d) Nein

(e) Genau eine Lösung für $a \neq \frac{11}{5} \Longrightarrow L=\left\{\frac{31}{11-5a}\right\}$
Für $a=\frac{11}{5}$ folgt $L=\{\}$

(f) b hat keinen Einfluss auf die Anzahl der Lösungen.

2. (a) i. $T(x)=13{,}60+(x-12)\cdot 0{,}11$
ii. Für die sinnvolle Grundmenge $G=\mathbb{N}_0$ ist $D=\{12;13;14;\cdots\}$
Z. B. $T(15)=13{,}93$, $T(62)=19{,}10$, ...
(b) i. $T(x;y)=13{,}60+(x-8)\cdot 0{,}05+y\cdot 0{,}15$
Z. B. $T(0;50)=21{,}10$, $T(50;0)=15{,}70$, $T(25{,}25)=18{,}20$
ii. Z. B.: Es ist besser beim Anbieter FONO zu telefonieren, wenn für mindestens 12 Nahgespräche die Anzahl der Ferngespräche mehr als $\frac{6x-92}{15}$ (x: Anzahl der Ortsgespräche) ist.

3. Die Feuerstelle ist Mittelpunkt des Feuerbachschen Neunpunktekreises und liegt zusammen mit M und H auf der Eulerschen Geraden.

4. (a) -1 (b) 1 (c) x^2 (d) $-x^9$
(e) $-32b^5$ (f) $81z^4$ (g) $125c^3$ (h) $-625e^4$

5. $a=1{,}89\cdot 10^{26}\,\text{m}$; $V_{\text{Universum}}=6{,}77\cdot 10^{78}\,\text{m}^3$
$V_{\text{Proton}}=10^{-45}\,\text{m}^3$; $N=\dfrac{V_{\text{Universum}}}{V_{\text{Proton}}}=6{,}77\cdot 10^{123}$

6. (a): $\dfrac{1{,}065^4\cdot 1{,}9}{3{,}56}\cdot 10^{-26}$
(b): $68{,}66\cdot 10^{-28}$

3.4. Summen, Klammerregeln, Zusammenfassen

1. (a) $(3x-4y)-[(2x+5y)-(x-10y)]=2x-19y$
(b) $[(2b-\frac{2}{3}y)-(-3b+a)]-[(2b-y)-(a-\frac{1}{6}y)]=3b+\frac{1}{6}y$

2. $[(a-5b)-(7a-5b)]-[(4a-3b)-(5b+4a)]=-6a+8b$

3. (a) $4x-6y+1{,}6z=2\cdot(2x-3y+0{,}8z)$

(b) $x^2 \cdot x^5 + 3 : \frac{1}{2} = 6 + x^7$

(c) $-(3x - 2x^2 + 7a) = -3x + 2x^2 - 7a$

4. Zur Kontrolle:

$2a - 4a = -2a$	$(r+s) - (r+s) = 0$
$196 : 14^2 = 1$	$a^3 = a \cdot a \cdot a$
$x \cdot y \cdot y \cdot x = x^2y^2$	$-15 - 17 + 21 = -11$
$r + s - 1r + 1s = 2s$	$-7 \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{35}{10}$
$(x+y) + y = x + 2y$	$-4x + 3y - 2x - 3y = -6x$
$9x^2 - 5x^2 = 4x^2$	$3xz + 4xz - xz = 6xz$
$4 \cdot (x+y) = 4x + 4y$	$5z - 1 + 14x - 2 = 14x + 5z - 3$
$3 \cdot (a - 2b) = 3a - 6b$	$2 \cdot (a + 2b) = 2a + 4b$
$a - b + c = c - b - 3a + 4a$	$5y^2 \cdot x = 5xy^2$
$A_{Rechteck} = a \cdot b$	$-\frac{9}{16} = -(\frac{5}{4})^2 + 1$

5. (a) Z. B.: $2 \cdot 2x + 8$, $x \cdot 4 + 4 \cdot 2$, $x + x \cdot 2 + 8 + x$, $2x + 4$, $x + 2 + x + 2$

(b) Z. B.: $-7 + 2x - x + 2 + 7x - 7$, $12x + 3 - 4x - 15$, $4 + 4x - 6 + 4x - 10$, $7x - 7 - 3x + 1$, $-2 + 4x - 4$

6. (a) $A(n) = (n-1) \cdot 14 + 20 = 14n + 6$

(b) $a(n) = (n-1) \cdot 14 + 15 = 14n + 1$

(c) $A(n) = (7+6) \cdot (n-2) + 2 \cdot (7+11) = 13n + 10$
$a(n) = (7+1) \cdot (n-2) + 2 \cdot (7+3) = 8n + 4$

(d) $A(n) = 4 \cdot (n-2) \cdot 13 + 4 \cdot 15 = 52n - 44$
$a(n) = 4 \cdot (n-2) \cdot 8 + 4 \cdot 6 = 32n - 40$

(e) $A(n) = 4 \cdot (n-2) \cdot 11 + 4 \cdot 15 + (n-2)^2 \cdot 6 = 6n^2 + 20n - 4$
$a(n) = 4 \cdot (n-2) \cdot 3 + 4 \cdot 6 + (n-2)^2 = n^2 + 8n + 4$

(f) $A(n) = (n-1)^2 \cdot 7 + 2 \cdot (n-1) \cdot 18 + 20 = 7n^2 + 22n - 9$
$a(n) = (n-1)^2 \cdot 7 + 2 \cdot (n-1) \cdot 10 + 15 = 7n^2 + 6n + 2$

7. (a) $2{,}5a$

(b) $2{,}5c$

(c) $a - b + c - d - e - f + g$

(d) $x - y + z - m - n - k + g$

8. $b + 1\frac{4}{5}b^2 + 5{,}74ab$

9. (a) 13 (b) $-0{,}8b - 1{,}4a - 5{,}2$

10. (a) $-4{,}6$ (b) 3 (c) $83a - 38b - 4b^2$

11. (a) $-9{,}6$ (b) 3 (c) $83a - 38b - 4b^2$

12. (a) $1 + a + b - c$ (b) $3 + b + e - f$ (c) 1
(d) $-4\frac{1}{30}x - \frac{2}{15}y + \frac{1}{2}$ (e) $0{,}2a - 9{,}8b + 1{,}2x$

13. $14abc(3ac - 2d + d^2)$

14. $39ax(2b - 7 + 3abx)$

15. (a) $11m + n$ (b) b^2

16. (a) $13\frac{2}{15}x - \frac{2}{15}$ (b) $0{,}2a + 12{,}4b + 1{,}9c$ (c) $-7a^2x^2 + 2ax^2 + 22a^2b^2xy$

17. (a) $5ab + 7\frac{1}{5}b$ (b) $4xy + 10\frac{2}{5}y$

18. (a) $-12x^2 - 5x^2 + 12x - 14x = -17x^2 - 2x$
(b) $8a^3 + 12a^3 - 27a^3 = -7a^3$
(c) $\frac{z^2}{16} - \frac{z^2}{4} - \frac{z^2}{8} - \frac{3z^2}{16} = \frac{z^2 - 4z^2 - 2z^2 - 3z^2}{16} = \frac{-8z^2}{16} = -\frac{z^2}{2}$

19. (a) $-18x^3 + 18x^2 - 7x^3 + 12x^3 = 18x^2 - 13x^3$
(b) $\frac{a^2}{36} - \frac{a^2}{9} - \frac{a^2}{12} - \frac{3a^2}{9} = \frac{a^2 - 4a^2 - 3a^2 - 12a^2}{36} = -\frac{18a^2}{36} = -\frac{a^2}{2}$

20. (a) $5am^2 - 5am - 5a^2m - 6am + 15a^2m - 8am^2 = -3am^2 - 11am + 10a^2m$
(b) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)x^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)x - \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{13}{6}$
(c) $0{,}6xy - 0{,}1x^2 - \frac{1{,}1y^2}{7} - 0{,}6xy + 0{,}1x^2 - \frac{y^2}{7} = -\frac{2{,}1y^2}{7} = -0{,}3y^2$

21. (a) $-a^3 - a^3 - a^2 - a^2 = -2a^3 - 2a^2$
(b) $\left(-a^3\right) \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot (-a^2) = a^{10}$
(c) $x^2x^2 \cdot 2x^4x\left(-x^3\right) = -2x^{12}$
(d) $x^4 - 2x^4 - x\left(-x^3\right) = x^4 - 2x^4 + x^4 = 0$
(e) Wenn n gerade ist, ist $n-1$ ungerade, wenn n ungerade ist, ist $n-1$ gerade, d.h. eine der beiden Potenzen $(-1)^n$ oder $(-1)^{n-1}$ ist -1, die andere ist 1:
$a(-a)^n(-a)^{n-1} = a(-1)^n a^n (-1)^{n-1} a^{n-1} = -a^{2n}$

(f) $a(-a)^n + (-a)^{n+1} = a(-1)^n a^n + (-1)^{n+1} a^{n+1} = (-1)^n a^{n+1} - (-1)^n a^{n+1} = 0$

22. (a) $3x(4x^2 - 3xy + 6y^2)$ (b) $u^3(u^2 - u + 1)$

(c) $12x^3\left(1 - \frac{3y}{4x} + \frac{3y^2}{2x^2}\right)$ (d) $u^5\left(1 - \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}\right)$

(e) $\frac{x}{4}\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3} - 1\right)$ (f) $2z(4z^2 - 2z + 1)$

(g) $-\frac{x}{24}(-3x + 2y + 6)$ (h) $8z^3\left(1 - \frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^2}\right)$

23. (a) $18x^3y(2y - 3x + 4y^2)$ (b) $16u^3(2u^2 - 4u^3 - 1)$
(c) $a^2b^2c^3(-c + ac^2 - ab)$ (d) $42ay(2x - 3z + 5b)$

24. (a) $\frac{1}{8}(2x - 4y - z)$ (b) $\frac{ab}{6}(2b + 3a - 1)$

(c) $\frac{1}{231}(33rs + 77rt + 21st)$ (d) $\frac{a^2}{630}(27a - 40 + 54a^2)$

25. $\frac{u^2w^3}{24}(8uw - 3u + 24)$

26. $\frac{a^3b^3}{28}(7ab^2 - 2a - 28b)$

3.5. Multiplizieren von Summen

1. (a) $2y + 2x - xy - x^2$
   (b) $-a - 5b - a^2 + b^2 + 6$

2. $-2x^2y$

3. (a) $-x^3 + 4\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$
   (b) $-a^3 + 4\frac{1}{2}a^2 + a - 1\frac{1}{2}$
   (c) $24x^3 - 6x^2 - 24x + 6$
   (d) $24a^3 - 14a^2 - 11a + 6$
   (e) $\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{125}u^3$

4. 0

5. (a) $-x+2x^2+x^3-2x^4$ (b) $5ax^2-5a^2x$

6. (a) $3a+3b-a^2-ab$
   (b) $12-5x-10y+3xy-2x^2+2y^2$

7. Vereinfache soweit wie möglich:
   (a) $7a-\{2z-[5x^2+(7a-4x^2)-x^2+2x]\}$
   (b) $-5x\,(2a+3b)-(8b-5a)\cdot 2x-4x\,(7a-5b)$

   (a) $14a+2x-2z$ (b) $-11bx-28ax$

8. (a) $-47\frac{1}{2}$ (b) $-6{,}49a-2{,}37b-13{,}9c+2$ (c) $-57a^2+30ab+9a-54b^2$

9. $-a^2b-a^2+\frac{2}{3}ab^2+12\frac{1}{2}ab-14ac-5b^2$

10. Vereinfache soweit wie möglich:
    (a) $7a-\{2z-[5x^2+(7a-4x^2)-x^2+2x]\}$
    (b) $-5x\,(2a+3b)-(8b-5a)\cdot 2x-4x\,(7a-5b)$

    (a) $14a+2x-2z$ (b) $-28ax-11bx$

11. (a) $55a$ (b) $-a^2-4ab-3ac-11b^2-11bc+2c^2$

12. $7axz-28bxz-3ay+12by+4byz-84bx-ayz+21ax$

13. (a) $x^2-x-x^2-x=-2x$
    (b) $ax^2-\dfrac{x^3}{2}-ax^2+\dfrac{x^3}{3}=\dfrac{-3x^3+2x^3}{6}=\dfrac{-x^3}{6}=-\dfrac{x^3}{6}$

14. (a) $x^2-x-x^2-x+x^2+x=x^2-x$
    (b) $-2u^2+4uy-2uy-2y^2=-2u^2+2uy-2y^2$
    (c) $-\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{5ef}{8}-\dfrac{3ef}{8}+2f+\dfrac{e^2}{4}-2f=-\dfrac{e^2}{4}-ef$

15. (a) $6a^2-13ab+6b^2$ (b) $1-a-b-c+ab+ac+bc-abc$
    (c) $ax^2-a^2xy-xy+ay^2$ (d) $1-x-x^2+x^3$
    (e) $u^4-2u^2w^2+w^4$ (f) $6-11x+6x^2-x^3$
    (g) $x^2-\dfrac{13}{6}xy+y^2$ (h) $1-\dfrac{x^4}{16}$

16. $\dfrac{a^2}{4} - 1 + \dfrac{1}{8} - \dfrac{a^2}{2} = -\dfrac{a^2}{4} - \dfrac{7}{8}$

17. $\dfrac{1}{4} - b^2 + \dfrac{b^2}{8} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{7}{8}b^2$

3.6. Binomische Formeln

1. (a) $2 \cdot 3 = 6$, also 625
   (b) $(10x+5)^2 = 100x^2 + 100x + 25 = 100 \cdot x(x+1) + 25$

2. (a) Es muss $100b^2$ heißen.
   (b) richtig
   (c) Es muss $0{,}25x^2 - 6x + 36$ heißen.

3. (a) $\frac{1}{4} - x^2$
   (b) $100x^2 - 80xy + 16y^2$
   (c) $81 - 18x^2 + x^4$
   (d) $(15+3)(15-3) = 216$

4. $-68x^2 + 6{,}84y^4 + 19{,}2xy^2$

5. (a) $(9a^2 - 12ab - 4b^2)(x-y)$ (b) $(a-b)(a+b)(\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}xy + \frac{1}{4}y^2)$

6. (a) $3 \cdot (m-n)(4-3a)$ (b) $(3+4a)(x-1)(x+1)(x^2+1)$

7. (a) $-108a^3 - 13a^2b + 186ab^2$
   (b) $40ax^3 - 196a^2x^2 + 112a^3x - 16ax + 54a^4 + 3a^2$
   (c) 0

8. (a) $(3x-y)(3x+y)(9x^2+y^2)$
   (b) $(0{,}7a - 0{,}1b)^2$
   (c) $(3p-2q)(3p+2q)(2x+y)(2x-y)$

9. $-0{,}97x^3 + 11\frac{4}{5}x^2y - 29\frac{2}{3}xy^2 - 48\frac{7}{9}y^3$

4. Gleichungen

4.1. Aufstellen linearer Gleichungen

1. $h = 8$ cm, $g_1 = 12$ cm, $g_2 = 20$ cm

2. $h = 5{,}5$ cm, $g_1 = 19{,}25$ cm und $g_2 = 13{,}75$ cm

4.2. Lösen linearer Gleichungen

1. (a) $x = -5$ (b) $x = 1\frac{1}{5}$ (c) $x = 3\frac{3}{16}$ (d) $x = 2,84$
2. (a) 12 (b) 2 (c) 112 (d) 150 (e) $\frac{1}{5}$
3. (a) angenommen, 12 Flaschen *à* 0,7 *l* kosten 7,60 € (ohne Pfand)

   (b) Jedes Kind eine Flasche, Eltern zusammen 3 bis 4 am Tag: ca. 6 Flaschen. 3 − 4 Kisten pro Woche, fast 30 *l*

   (c)

	100 *l*	200 *l*	300 *l*
Aquamaxx	160,85 €	201,70 €	242,55 €
Kasten	90,48 €	180,96 €	271,44 €

   (d) $90{,}48 \cdot x = 40{,}85x + 120$
   Nach 240 l (bzw. 8 Monaten) sind die Kosten für Kasten und Aquamaxx gleich. Danach ist Aquamaxx billiger, also stimmt die Aussage von Aquamaxx.

4. $L = \{\frac{6}{11}\}$

5. (a) Einsetzen (b) z.B.: $13 - 2x = x + 7$

6. (a) Entweder $x = -1$ einsetzen oder die Gleichung nach x auflösen.
   (b) z.B. $G = \mathbb{N}$ wählen oder $7 - x = 3x + 12$ usw.

7. Es ergibt sich $4 - 0 \cdot x = 33$. Das ist für keine Belegung von x erfüllbar.

8. Es ergibt sich $x^2 = -2$. Es gibt keine Zahl, die mit sich selbst multipliziert einen negativen Produktwert ergibt.

9. (a) $(a-0{,}5)^2 = a^2 - a + 0{,}25$
   (b) $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$
   (c) $(4-x)(x+4) = 16 - x^2$

10. $x = -3$

11.
   (a) –
   (b) Es gilt: $\overline{AD} = 2 \cdot \overline{HG} = 4x\,\text{cm}$ und $\overline{AB} = 5x\,\text{cm}$.
   Dann folgt für den Umfang u: $u(x) = 18x\,\text{cm}$.
   $18x = 108 \quad \Rightarrow \quad x = 6 \quad \text{und} \quad 2x = 12 \quad \text{sowie} \quad 3x = 18.$
   Damit folgt für den Flächeninhalt A eines dieser Rechtecke im Inneren: $A = 12\,\text{cm} \cdot 18\,\text{cm} = 216\,\text{cm}^2$

12. (a) $L = \{\,\}$ (b) $L = \{-1\}$ (c) $L = \{-1{,}1\}$

13. (a) $x = -2\frac{13}{16}$ (b) $x = 0$ (c) $x = 1\frac{1}{5}$

14. (a) $L_1 = \{\}$, $L_2 = \{\frac{7}{11}\}$ (b) $L_1 = G_1$, $L_2 = G_2$ (c) $L_1 = L_2 = \{\}$

15. $L = \{\frac{18}{31}\}$

16.

$x = 1{,}2$	$z = 10$	$b = 1\frac{1}{3}$
$t = 3\frac{2}{5}$	$x = -2$	$x = \frac{2}{a-2}$, $a = \frac{2}{x} + 2$
$x = -\frac{1}{5}$	$y = 7$	$\frac{1}{2}$
$b_1 = \frac{11}{14}$, $b_2 = -\frac{3}{14}$	$a = -\frac{bc}{b+c}$ $b = -\frac{ac}{a+c}$ $c = -\frac{ab}{a+b}$	$f = \frac{bg}{b+g}$ $b = \frac{fg}{g-f}$ $g = \frac{bf}{b-f}$
$h = \frac{2A}{a+b}$ $a = \frac{2A}{h} - b$ $b = \frac{2A}{h} - a$	$w = -5$	$s_1 = \frac{2}{3}$, $s_2 = \frac{5}{8}$
$x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$		

17. (a) $L = \{5\frac{1}{6}\}$

(b) $L_1 = \{5\frac{1}{6}\}$, $L_2 = \{\}$, $L_3 = \{\}$, $L_4 = \{5\frac{1}{6}\}$.

(c) z. B. $\frac{2}{5}(x-7) - \frac{3}{5}(2-3x) = x + 9\frac{1}{5}$
$\frac{2}{5}(x-7) - \frac{3}{5}(2-3x) = x - 4$
$\frac{2}{5}(x-7) - \frac{3}{5}(2-3x) = 2\frac{1}{5}x$
$\frac{2}{5}(x-7) - \frac{3}{5}(2-3x) = 2\frac{1}{5}x - 4$

(d) Nein

(e) Genau eine Lösung für $a \neq \frac{11}{5} \Longrightarrow L = \left\{\frac{31}{11-5a}\right\}$
Für $a = \frac{11}{5}$ folgt $L = \{\}$

(f) b hat keinen Einfluss auf die Anzahl der Lösungen.

18. (a) $L = \{2\,;\,4\}$, (b) $L = \{4\,;\,1{,}5\}$, (c) $L = \{5\,;\,2{,}5\}$, (d) $L = \{-4\,;\,6\}$

19. (a) $L = \{19; -5\}$ (b) $L = \{17; -7\}$
(c) $L = \{12{,}8; 1{,}96\}$ (d) $L = \{10{,}8; 3{,}98\}$

20. $L = \{55{,}6; 11{,}8\}$

21. (a) $L = \{-2\frac{1}{4}\}$ (b) $L = \{-0{,}5; +7{,}5\}$

22. (a) $L = \{\,\}$ (b) $L = \{-14; 14\}$ (c) $L = \{-2; 12\}$

23. $-4\frac{23}{48}$

24. $L = \{-2\frac{41}{74}\}$

25. (a) $L = \{13\frac{1}{2}\}$ (b) $L = \{\frac{3}{16}\}$

26. (a) $L = \{13\frac{1}{2}\}$ (b) $L = \{\frac{3}{16}\}$

27. $x = 6\frac{1}{3}$

28. $x = \frac{355}{624}$

29. $\frac{1}{8}$

30. (a) $-5x = 20, \quad x = -4 \in G \quad \Longrightarrow \quad L = \{-4\}$
(b) $\dfrac{6}{7}x = \dfrac{6}{4}, \quad x = \dfrac{6}{4} : \dfrac{6}{7} = \dfrac{7}{4} = 1{,}75 \in G \quad \Longrightarrow \quad L = \{1{,}75\}$

(c) $0 = \frac{1}{x} \implies L = \{\}$

(d) $0 = 0 \implies L = G = \mathbb{Z}$

(e) $x - 3 = 0$ oder $x + 5 = 0 \implies L = \{-5; 3\}$

31. (a) $-7x = 17, \quad x = -\frac{17}{7} \notin G \implies L = \{\,\}$

(b) $\frac{9}{8}x = \frac{9}{7}, \quad x = \frac{9}{7} : \frac{9}{8} = \frac{8}{7} \in G \implies L = \left\{\frac{8}{7}\right\}$

(c) $-3 - 3x = -3 - 3x \implies L = G = \mathbb{N}$

(d) $x^2 \geqq 0$ für alle $x \implies L = \{\,\}$

(e) $x = -4$ oder $x = 1$ oder $x = 2 \implies L = \{1; 2\}$

4.3. Anwendungsaufgaben

1. B1: III, B2: V, B3: IV, B4: VI, B5: VII

2. Es sei p% der prozentuale Volumenanteil des Alkohols im Kirschwein.

   Volumen des Alkohols: $1l \cdot \frac{p}{100}$

   Masse des Alkohols: $0,785\frac{kg}{l} \cdot 1l \cdot \frac{p}{100} = 0,785kg \cdot \frac{p}{100}$

   Volumen des Wassers: $1l \cdot \frac{100-p}{100}$

   Masse des Wassers: $1\frac{kg}{l} \cdot 1l \cdot \frac{100-p}{100} = 1kg \cdot \frac{100-p}{100}$

   Masse des Kirschweins: $0,785kg \cdot \frac{p}{100} + 1kg\frac{100-p}{100} = 0,973125kg$

   Durch Auflösen nach p ergibt sich ein Prozentsatz von $12,5\%$.

3. (a) $x \cdot 90 \cdot (1 + 30\%) + x \cdot 60 \cdot (1 + 20\%) = x \cdot 189 = 1776{,}6$
   $x = 9{,}4$, d.h. 9,40 € pro Flasche im Einkauf

   (b) Gesamter Einkaufspreis: $9{,}4 \cdot (90 + 60) = 1410$, 26% Gewinn

4. (a) $((x + 2) \cdot 3 - 4) \cdot 3 + 6x = 366 \Rightarrow 15x + 6 = 366 \Rightarrow x = 24$

5. Verschiedene Lösungsmöglichkeiten:

   - Aufstellen einer Gleichung:
     Sei x die gesuchte Minutenzahl. Der Minutenzeiger überstreicht pro Minute $360° : 60 = 6°$, d. h. in x Minuten $6° \cdot x$. Der Stundenzeiger überstreicht pro Minute $(360° : 12) : 60 = 0{,}5°$, d. h. in x Minuten $0{,}5° \cdot x$. Da der kleine Zeiger um 8 Uhr gegenüber dem großen Zeiger einen Vorsprung von $8 \cdot 30° = 240°$ hat, gilt die Gleichung $6° \cdot x = 0{,}5° \cdot x + 240°$, deren Lösung $x = 43\frac{7}{11}$ ist.

- Aufstellen von Funktionstermen:
  $w_{\text{gr. Zeiger}}(x) = 6° \cdot x$ und $w_{\text{kl. Zeiger}}(x) = 0{,}5° \cdot x + 240°$. Das Gleichsetzen der Terme führt zu obiger Gleichung; alternativ bringt eine graphische Lösung (mit nichttrivialer Achsenskalierung) eine Näherungslösung.
- Lösung ohne Gleichung:
  Der große Zeiger legt pro Minute 6° zurück, der kleine Zeiger 0,5°. Der kleine Zeiger hat um 8 Uhr einen Vorsprung von 240°. Pro Minute verringert sich der Vorsprung des kleinen Zeigers um 5,5°. In $240° : 5{,}5° = 43\frac{7}{11}$ Minuten hat damnach der große den kleinen Zeiger eingeholt.

6. Anzahl der Vögel nach dem Flug auf dem ersten, zweiten, dritten Baum: x, $2x$, $4x \Rightarrow 7x = 56 \Rightarrow x = 8$;
   Anzahl der Vögel nach dem Flug auf dem ersten, zweiten, dritten Baum: 8, 16, 32 $\Rightarrow$
   Anzahl der Vögel vor dem dem Flug auf dem ersten, zweiten, dritten Baum: 12, 21, 23.

7. Alter der Mutter jetzt: 32 Jahre
   Alter des Sohns jetzt: 8 Jahre

8. (a) jüngster Sohn: x, Tochter $x+6$, älterer Bruder $2x$, $x + (x+6) + 2x = 50 \Rightarrow$ jüngster Sohn: 11, Tochter 17, älterer Bruder 22
   (b) jüngster Sohn: x, Tochter $x+5$, älterer Bruder $3x$, $x + (x+5) + 3x = 60 \Rightarrow$ jüngster Sohn: 11, Tochter 16, älterer Bruder 33

9. Alter der Tochter: 12 Jahre, Alter der Mutter: 36 Jahre

10. Sohn: $x - 3000$ €, jüngste Tochter: x, ältere Tochter: $x + 2000$ €
    $(x - 3000\,€) + x + (x + 2000\,€) = 14000\,€ \quad \Longrightarrow$
    Sohn: 2000 €, jüngste Tochter: 5000 €, ältere Tochter: 7000 €

11. $x \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \cdot (1 + 0{,}2)^2 = 852{,}48\,€$
    $$x \cdot \frac{16 \cdot 12^2}{15 \cdot 10^2} = x \cdot \frac{16 \cdot 144}{15 \cdot 100} = x \cdot \frac{16 \cdot 12}{5 \cdot 25} = x \cdot \frac{192}{125} = 852{,}48\,€$$
    $$x = 852{,}48\,€ : \frac{192}{125} = \frac{852{,}48 \cdot 125}{192}\,€ = \frac{106\,560}{192}\,€ = 555{,}\text{-}\,€$$

12. $x \cdot 1{,}1^2 = 5154{,}60\,€ \Longrightarrow x = 4260\,€$

13. $x \cdot (1 + 20\,\%)^3 = x \cdot 1{,}2^3 = 63\,936\,€ \quad \Longrightarrow \quad x = 37\,000\,€$

14. Ohne MWS: x, $\quad x \cdot (1 + 15\,\%) = x \cdot 1{,}15 = 2875\,€ \quad \Longrightarrow \quad x = 2500\,€$
    Mit 16 % MWS: $y = 2500\,€ \cdot 1{,}16 = 2900\,€$

15. $\underbrace{x + 5\% \cdot x}_{\text{Franz}} = \underbrace{x + 5\%}_{\text{Susi}} + 10, \quad 5\% \cdot x = 5\% + 10 = 10{,}05, \quad x = 201$

16. $x \cdot \left(1 - \dfrac{42}{100}\right) = 812\,\text{kg} \quad \Longrightarrow \quad x = 1400\,\text{kg}$

17. $20\,\%$ Dreier, Durchschnitt $= \dfrac{10 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 30 \cdot 4 + 15 \cdot 5 + 5 \cdot 6}{100} = 3{,}35$

    Ist x die Zahl der Schüler, dann muss $5\,\% \cdot x$ ganzzahlig sein, d.h. x ist ein Vielfaches von 20. Wegen $x \leqq 33$ ist $x = 20$.

18. $x \cdot \left(1 + \dfrac{1}{25}\right)^3 = x \cdot \left(\dfrac{26}{25}\right)^3 = x \cdot \dfrac{17576}{15625} = 351520\,\text{Cent} \quad \Longrightarrow \quad x = 3125\,€$

19. $x \cdot \left(1 + \dfrac{1}{7}\right)^3 = 1024\,€ \quad \Longrightarrow \quad x = 686\,€$

20. $x \cdot \left(1 + \dfrac{1}{10}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{1}{20}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{1}{14}\right) = \dfrac{99}{80} \cdot x = 2475\,€ \quad \Longrightarrow \quad x = 2000\,€$

21. $x \cdot \left(1 + \dfrac{1}{15}\right)^2 \cdot \left(1 + \dfrac{1}{14}\right) = 1408\,€ \quad \Longrightarrow \quad x = 1155\,€$

22. $x \cdot (1 + 2\,\%) \cdot (1 + 3\,\%) = 8825{,}04\,€ \quad \Longrightarrow \quad x = 8400\,€$

23. 1. Seite: x, 2. Seite: $5x$

$$\begin{aligned} 2 \cdot (x + 5x) &= 30 \qquad (4.1) \\ 12x &= 30 \\ x &= \frac{30}{12} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \end{aligned}$$

    Die Seitenlängen sind 2,5 cm und 12,5 cm.

24. x ist das Alter der Tochter.

$$\begin{aligned} x + 5x + 28 &= 10x \\ 28 &= 10x - x - 5x \\ 28 &= 4x \\ x &= 7 \end{aligned}$$

    Tochter: 7 a Mutter: 35 a Opa: 70 a

5. Daten, Diagramme und Prozentrechnung

5.1. Auswerten von Daten, Mittelwerte

1. (a) letzte Reihe, linkes Diagramm;

   $(5 + 7 + 6 + 4) : (5 + 7 + 6 + 4 + 5 + 1) = 22 : 28 = 78,6\%$

   (b) zweite Reihe, linkes Diagramm;

   $(5 + 18 + 30 + 12 + 5) : (5 + 9 + 10 + 3 + 1) = 70 : 28 = 2,5$

   (c) erste Reihe, rechtes Diagramm;

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Diog.	2	5	9	14	20	27	35	44	54

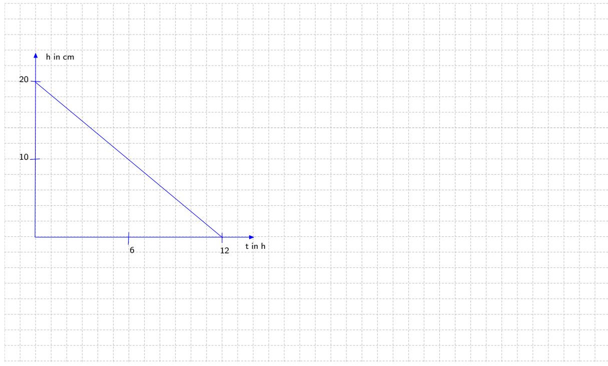
   (d) erste Reihe, linkes Diagramm; $2 : 7 = \frac{2}{7}$

   (e) zweite Reihe, rechtes Diagramm;

A	B	C	D
Würfel	Kreis	Tetraeder	vierseitige Pyramide

   (f) dritte Reihe, rechtes Diagramm;

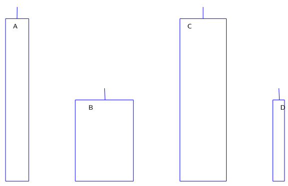
2. (a) Diagramm:



(b) gleichmäßiges Abbrennen, Kerze brennt durchgehend, Kerze erlischt bei Höhe Null

(c) Kerze A und C gleich hoch, Kerze C ist dicker.

Kerze B und D gleich hoch, Kerze B ist dicker.



3. (a) 80%

   (b) Ca. 600 Kinder antworten auf die Frage „Waren die Außerirdischen schon auf der Erde?" mit „sicher". 1200 Kinder antworten mit „ja" auf die Frage „Gibt es Außerirdische". Bezogen auf diese wären es in der Tat 50%.

   Die Hälfte <u>aller</u> befragten Kinder wären aber ca. $(1200 + 300) : 2 = 750$ Kinder!

4. (a) $3500km^2$ (b) 17% (c) 1647

5. $\dfrac{N_5 \cdot 110 + 3{,}5 \cdot 100 + 3{,}8 \cdot 90}{110 + 100 + 90} = 3{,}59, \quad 110 \cdot N_5 + 692 = 3{,}59 \cdot 300$

   $N_5 = \dfrac{1077 - 692}{110} = 3{,}5$

6. (a) $\dfrac{50 \cdot G_{\mathrm{A}} + 30 \cdot 3200}{50 + 30} = 2500, \quad 50 \cdot G_{\mathrm{A}} + 96\,000 = 80 \cdot 2500 = 200\,000$

   $50 \cdot G_{\mathrm{A}} = 104\,000, \quad G_{\mathrm{A}} = \dfrac{104\,000}{50} = 2080$

(b) $3150 \leqq G_\mathrm{B} < 3250, \quad 2450 \leqq G < 2550 \quad \Longrightarrow$

$$G_\mathrm{Amin} = \frac{80 \cdot 2450 - 30 \cdot 3250}{50} = \frac{196\,000 - 97\,500}{50} = \frac{98\,500}{50} = 1970$$

$$G_\mathrm{Amax} = \frac{80 \cdot 2550 - 30 \cdot 3150}{50} = \frac{204\,000 - 94\,500}{50} = \frac{109\,500}{50} = 2190$$

Mögliche Werte für G_A: 2000, 2100, 2200

5.2. Prozentrechnen

1. Z. B. ohne Mehrwertsteuer kostete die Digitalkamera 199EUR : $1,16$; mit 19% Mehrwertsteuer kostet sie 199EUR : $1,16 \cdot 1,19$

2. 125 g Crème Fraiche enthalten 37,5 g Fett. 45,73 g Butter enthalten die gleiche Menge Fett wie ein Becher mit 125 g Crème Fraiche.

3. (a) 597,35 EUR
   (b) 550,46 EUR
   (c) Elfriede hat nicht recht. Ein Rabatt von 8 % auf den in a) berechneten Grundwert ergibt 549,56 EUR. Der Rabatt ist also kleiner als 8 %.

4. (a) 40% (b) 12 Liter (c) 60 EUR

5. (a) Karin verdient um 13 % weniger als Eva.
   (b) Eva verdient um $14\frac{82}{87}$ % mehr als Karin.

6. $10000 \cdot (1 - 0{,}02) \cdot (1 - 0{,}005) = 9751$

7. (a) 110% von 620 € = 620 € $\cdot 1,1 =$ 682 €
   115% von 682 € = 682 € $\cdot 1,15 =$ 784,30 €

   Nach der zweiten Mieterhöhung zahlt die Familie Maier monatlich 784,30 €.

   (b) 620 € $\cdot 12 \cdot 3 +$ 682 € $\cdot 12 \cdot 2 +$ 784,30 € $\cdot 12 =$ 48099,60 €

   In den sechs Jahren zahlt die Familie Maier 48099,60 € Miete.

8. 25%

9. Z. B.: Die Behauptung ist falsch. Bei der Verlängerung bildet die ursprüngliche Streckenlänge den Grundwert, bei der Verkürzung ist es aber die Länge der verlängerten Strecke.

10.

a) $G = \frac{100}{p} \cdot P$, $p = 100 \cdot \frac{P}{G}$	b) $P = 101{,}4$ €	c) $p = 6$
d) $G = 1280\,\text{kg}$	e) 25%	f) 5,6 kg
g) 19 g	h) 3328 €, 3072 €	i) 154 €
j) 45000	k) 1912,84 €	

11. 6 5-€-Scheine (30 €) , 18 1-€-Münzen (18 €), 1 2-€-Münze (2 €)

12. Der abgesenkte Preis beträgt 80% des ursprünglichen Preises.

$$\frac{\text{ursprünglicher Preis}}{\text{abgesenkter Preis}} = \frac{100\%}{80\%} = 1{,}25 = 125\%$$

Der abgesenkte Preis muss um 25% erhöht werden, um den alten Preis zu erzielen.

13. Sonderangebotspreis = 80% des Normalpreises = 0,8 · Normalpreis

Barpreis = 95% des Sonderangebotspreises = 0,95 · Sonderangebotspreis

Barpreis = 0,8 · 0,95 · Normalpreis = 0,76 · Normalpreis

Der Käufer spart bei Barzahlung des Sonderangebotes 24% des Normalpreises.

14. $R = 1{,}36 \cdot A$, $S = 0{,}85 \cdot A$
$R = 1{,}6 \cdot S$, d.h. Resi hat um 60% mehr als Simmerl.
$S = 0{,}625 \cdot R$, d.h. Simmerl hat um 37,5% weniger als Resi.

15. $25\,000 \cdot (1 + x\%)^2 = 30\,250 \quad \Longrightarrow \quad x\% = 10\%$

16. (a) $1{,}65 \cdot 10^9$

(b)

	1900	1988	Steigerung
Welt	$1{,}65 \cdot 10^9$	$5{,}115 \cdot 10^9$	210 %
Europa	$2{,}97 \cdot 10^8$	$4{,}95 \cdot 10^8$	$66\frac{2}{3}$ %

17. (a) $H \cdot (1 - 10\,\%) \cdot (1 + 10\,\%) = H \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}1 = 23{,}76\,\text{m} \quad \Longrightarrow \quad H = 24\,\text{m}$

(b) $23{,}76 = 0{,}99 \cdot H = (1 - 1\,\%) \cdot H \quad \Longrightarrow$ um 1 % kleiner

18. 1994 hatten die Farblosen 57 Punkte und es gingen 30 000 000 Leute zur Wahl.

19. $36\,000 \cdot (1 + x)^2 = 51\,840, \quad (1 + x)^2 = 1{,}44, \quad x = 0{,}2 = 20\,\%$

20. (a) $x \cdot 90 \cdot (1 + 30\%) + x \cdot 60 \cdot (1 + 20\%) = x \cdot 189 = 1776{,}6$
$x = 9{,}4$, d.h. 9,40 € pro Flasche im Einkauf

(b) Gesamter Einkaufspreis: $9{,}4 \cdot (90 + 60) = 1410$, 26% Gewinn

21. Jedes Jahr wächst das Kapital um den Faktor $1 + 10\% = 1{,}1$.

n	2	3	4	5	6	7	8
$1{,}1^n$	1,21	1,331	1,4641	1,61051	1,771561	1,9487171	2,14358881

Nach 8 Jahren. $10\,000 \cdot 2{,}14358881 \cdot 1{,}21 \approx 25937{,}42$

22.

23. (a) $11\% \cdot 100000$ Euro $= 11000$ Euro
Davon sind 10%, also 10000 Euro Zinsen und 1%, also 1000 Euro Tilgung.

(b)

Zeitraum in Jahren	Jahreszins in Euro	Tilgung in Euro	Restschuld in Euro
1	10000	1000	99000
2	9900	1100	97900
3	9790	1210	96690
4	9669	1331	95359
5	9535,90	1464,10	93894,90

24. Susi: 35 € Heidi: 40,25 € Eva: 59,57 €

25. 1. Lösungsschritt: Bestimmung der Salzmenge in den beiden Bestandteilen:
4% von $12\,\mathrm{l} = 12\,\mathrm{l} \cdot 0{,}04 = 0{,}48\,\mathrm{l}$

6% von $18\,\mathrm{l} = 18\,\mathrm{l} \cdot 0{,}06 = 1{,}08\,\mathrm{l}$

$0{,}48\,\mathrm{l} + 1{,}08\,\mathrm{l} = 1{,}56\,\mathrm{l}$

2. Lösungsschritt: Bestimmung des Prozentgehaltes der Mischung

$$\frac{1{,}56\,\mathrm{l}}{30\,\mathrm{l}} = 0{,}052$$

Die Mischung hat einen Salzgehalt von 5,2%.

26. Benötigte Salzmenge: 2% von $120\,\mathrm{l} = 120\,\mathrm{l} \cdot 0{,}02 = 2{,}4\,\mathrm{l}$

Benötigte Menge L an 6%-iger Salzlösung:

$$\frac{L}{2{,}4\,\mathrm{l}} = \frac{100\%}{6\%} \qquad L = 2{,}4\,\mathrm{l} \cdot \frac{100}{6} = 40\,\mathrm{l}$$

Benötigte Menge an destilliertem Wasser: $120\,\mathrm{l} - 40\,\mathrm{l} = 80\,\mathrm{l}$

27. Salzgehalt von 25 ml Sole:

11% von $25\,\mathrm{ml} = 25\,\mathrm{ml} \cdot 0{,}11 = 2{,}75\,\mathrm{ml}$

Die gesuchte Menge an 2,2%-ger Salzlösung enthält also 2,75 ml reines Salz.

$$\frac{\text{Menge an Lösung}}{2{,}75\,\mathrm{ml}} = \frac{100\%}{2,2\%}$$

$$\text{Menge an Lösung} = 2{,}75\,\mathrm{ml} \cdot \frac{100}{2{,}2} = 125\ \mathrm{ml}$$

Aus 25 ml Sole stellt er 125 ml 2,2%-ger Lösung her. Zu diesem Zweck gibt zu den 25 ml Sole noch 100 ml reines Wasser dazu.

28. (a) $88\,\mathrm{cm} \cdot 1{,}125 = 99\,\mathrm{cm}$

(b) $x\% \cdot 480 = 480 - 408 = 72, \qquad x\% = \frac{72}{480} \cdot 100\% = 15\%$

(c) $x \cdot 1{,}1 = 2706\,€, \qquad x = \frac{2706\,€}{1{,}1} = 2460\,€$

29. Ohne MWSt.: $x \cdot (1 + 16\%) = x \cdot 1{,}16 = 58\,€ \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{58\,€}{1{,}16} = 50\,€$

Mit 18% MWSt.: $50\,€ \cdot (1 + 18\%) = 50\,€ \cdot 1{,}18 = 59\,€$

$58 \cdot (1 + p\%) = 59 \quad \Longrightarrow \quad p\% = \frac{59}{58} - 1 = \frac{1}{58} = \frac{100\%}{58} \approx 1{,}7\%$

30. Die 20% bei der Preissenkung beziehen sich auf den höheren Preis, d.h. die Senkung ist größer als die Erhöhung $\Longrightarrow$ der neue Preis ist kleiner als der ursprüngliche Preis.

$n = (1 + 20\%)(1 - 20\%)u = 1{,}2 \cdot 0{,}8u = 0{,}96u = (1 - 4\%) \cdot u$

Der neue Preis ist um 4% kleiner als der ursprüngliche Preis.

6. Dreiecke

6.1. Kongruenz

6.1.1. Begriff der Kongruenz

1. –

6.1.2. Kongruenzsätze für Dreiecke, grundlegende Konstruktionen

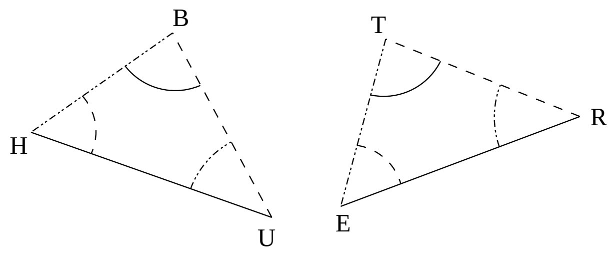
1. Dreiecke $\triangle$ABC und $\triangle$ADC sind kongruent nach SSS.

2. (a) $\overline{\text{AB}} = \overline{\text{AD}}$, $\overline{\text{BC}} = \overline{\text{DC}}$, $\overline{\text{AC}} = \overline{\text{AC}}$, $\Rightarrow$ Dreiecke kongruent nach SSS
   (b) $\overline{\text{AB}} = \overline{\text{AD}}$, $\overline{\text{AM}} = \overline{\text{AM}}$, $\sphericalangle$MAD $=\sphericalangle$BAM, wegen (a) $\Longrightarrow$ Dreiecke kongruent nach SWS

3. Anregungen zum Öffnen der Aufgabe:
   (a) Angaben weglassen (unterbestimmte Aufgabe)
   (b) ein vorgegebenes Dreieck auf verschiedene Arten konstruieren (überbestimmte Aufgabe)
   (c) In welchen Fällen ist es nicht möglich, ein Dreieck zu konstruieren?

   offen

4. (a) $\overline{\text{HU}} = \overline{\text{ER}}$, $\quad \overline{\text{UB}} = \overline{\text{RT}}$
   $\overline{\text{ET}} = \overline{\text{HB}}$
   $\sphericalangle$BUH $=\sphericalangle$TRE
   $\sphericalangle$RET $=\sphericalangle$UHB
   $\sphericalangle$ETR $=\sphericalangle$HBU
   $\sphericalangle$HUB $=\sphericalangle$ERT



   (b) $\triangle$BUH $\cong$ $\triangle$RET (falsch), $\quad \triangle$UHB $\cong$ $\triangle$RET (richtig)
   $\triangle$TER $\cong$ $\triangle$BUH (falsch)

5. $\overline{KA} = \overline{WA} = \overline{SE} = 5\,\mathrm{cm}$

   $\overline{SK} = \overline{SW} = \overline{SR} = 3\,\mathrm{cm}$

   $\overline{SA} = \overline{ER} = 4\,\mathrm{cm}$

6. $\triangle MPD \cong \triangle REI$

7. $\gamma = \sigma,\ \delta = \pi,\ \mu = \varphi,\ \triangle CDU \cong \triangle SPD$

8. $\gamma = \sigma,\ \delta = \pi,\ \mu = \varphi,\ \triangle CDU \cong \triangle SPD$

9. $\sphericalangle BSA = \sphericalangle CSD$ (Scheitelwinkel) $\implies$ $\overline{BA} = \overline{CD}$, $\overline{BS} = \overline{SC}$, $\overline{AS} = \overline{SD}$

   $\triangle ASB \cong \triangle DSC$

10.

(a)	$a=d$	$b=f$	$c=e$	$\alpha=\delta$	$\beta=\varphi$	$\gamma=\varepsilon$	$A \widehat{=} D$	$B \widehat{=} F$	$C \widehat{=} E$
(b)	$a=d$	$b=f$	$c=e$	$\alpha=\delta$	$\beta=\varphi$	$\gamma=\varepsilon$	$A \widehat{=} D$	$B \widehat{=} F$	$C \widehat{=} E$
(c)	$a=f$	$b=d$	$c=e$	$\alpha=\varphi$	$\beta=\delta$	$\gamma=\varepsilon$	$A \widehat{=} F$	$B \widehat{=} D$	$C \widehat{=} E$
(d)	$a=e$	$b=f$	$c=d$	$\alpha=\varepsilon$	$\beta=\varphi$	$\gamma=\delta$	$A \widehat{=} E$	$B \widehat{=} F$	$C \widehat{=} D$
(e)	$a=d$	$b=f$	$c=e$	$\alpha=\delta$	$\beta=\varphi$	$\gamma=\varepsilon$	$A \widehat{=} D$	$B \widehat{=} F$	$C \widehat{=} E$

11.
$$\left.\begin{array}{c} a = b \\ \overline{CD} = \overline{CD} \\ \overline{AD} = \overline{DB} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \implies \triangle ADC \cong \triangle BDC \quad \text{(sss)} \\ \implies \alpha = \beta,\quad \underbrace{\sphericalangle CDA}_{\varphi} = \underbrace{\sphericalangle BDC}_{\delta} \\ \delta + \varphi = 2\varphi = 180^\circ \quad \implies \quad \varphi = \delta = 90^\circ \end{array}$$

In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich und die Seitenhalbierende der Basis ist zugleich Höhe.

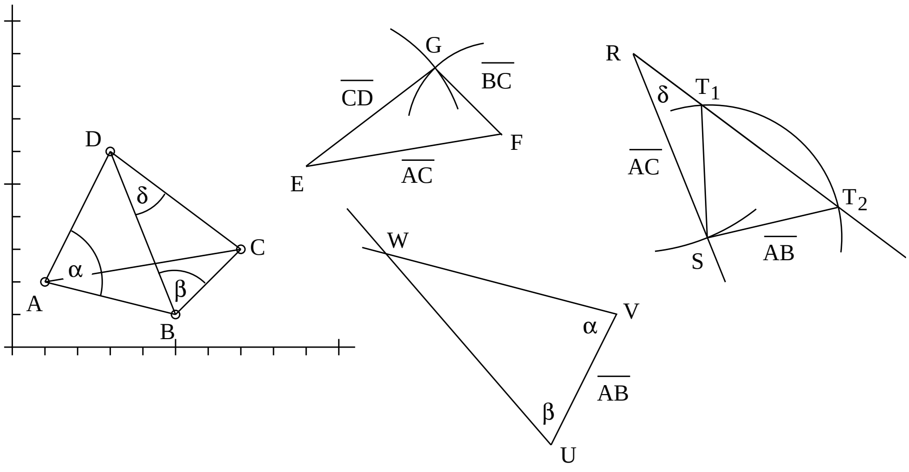
12.

(a)	$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (sws)	(b)	muss nicht kongruent sein (ssw)
(c)	nicht kongruent	(d)	$\triangle ABC \cong \triangle B'A'C'$ (sws)
(e)	$\triangle ABC \cong \triangle C'A'B'$ (wsw)	(f)	$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (wsw)
(g)	$\triangle ABC \cong \triangle C'A'B'$ (sws)	(h)	$\triangle ABC \cong \triangle C'B'A'$ (ssW)
(i)	$\triangle ABC \cong \triangle C'B'A'$ (wsw)	(k)	nicht kongruent
(l)	$\triangle ABC \cong \triangle B'C'A'$ (sws)	(m)	$\triangle ABC \cong \triangle B'A'C'$ (sws)
(n)	nicht kongruent	(o)	$\triangle ABC \cong \triangle C'B'A'$ (wsw)

13.
$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle HDG = \sphericalangle CDB \quad \text{(Scheitelw.)} \\ \overline{DG} = \overline{BD} = 4 \\ \sphericalangle DGH = \sphericalangle DBC = 60^\circ \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \implies \triangle BDC \cong \triangle GDH \quad \text{(wsw)} \\ \implies \overline{BC} = \overline{GH} = 2 \\ \implies \triangle ABC \cong \triangle GDF \quad \text{(sss)} \end{array}$$

Keines der Dreiecke ist zu $\triangle BED$ kongruent.

14.



15. Konstruktion: $\overline{\mathrm{MP}} \mathrel{\widehat{=}} 6{,}5\,\mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{MW}} \mathrel{\widehat{=}} 4{,}5\,\mathrm{cm} \quad \Longrightarrow \quad \overline{\mathrm{WP}} \mathrel{\widehat{=}} 6{,}9\,\mathrm{cm}$

    $\overline{\mathrm{WP}} = 6{,}9\,\mathrm{cm} \cdot 200\,000 = 13{,}8\,\mathrm{km}$

6.2. Besondere Dreiecke

6.2.1. gleichschenkliges und gleichseitiges Dreieck

1. $\triangle$ABC : spitzwinklig und gleichschenklig
   $\triangle$ABD : rechtwinklig
   $\triangle$ADC : stumpfwinklig
   $\triangle$BDC : stumpfwinklig

2. (a) E liegt auf dem Kreis um D mit Radius $\overline{AB}$ und auf dem Kreis um C mit Radius $\overline{AB}$ außerhalb des Quadrats.

   (b) $\delta = 90° + 30° = 150°$

   (c) $\varepsilon = 60° - 2 \cdot (180° - \delta) : 2 = 30°$

   (d) $\sphericalangle ADF = 30°$, $\sphericalangle DFA = (180 - 30) : 2 = 75°$, $\varepsilon' = 360° - 60° - 2 \cdot 75° = 150°$

3. (a) Verschiedene Möglichkeiten, z. B:
   A und B sind Endpunkte der Strecke $[AB]$, mit $\overline{AB} = 5cm$.

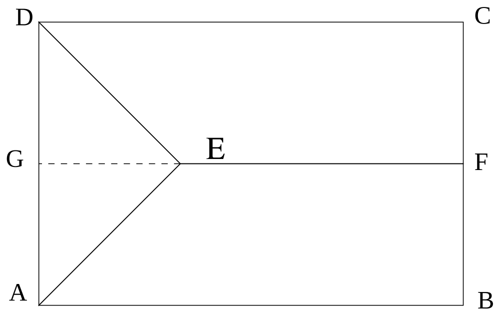
   C liegt auf der Mittelsenkrechten von $[AB]$ und auf der Parallele zu AB mit dem Abstand $6cm$.

   (b) i.

   ii. $A = 2{,}5cm \cdot 6cm = 15cm^2$

iii. Dreieck: Umfang $= \overline{AB} + 2\overline{AC}$
Rechteck: Umfang $= \overline{AB} + 2h_c$
Da $h_c < \overline{AC}$ ist, ist der Umfang des Dreiecks größer als der des Rechtecks.

4. (a)



1. Möglichkeit:
Die Strecke GE liegt auf der Halbierenden des Winkels $DEA. \Rightarrow \sphericalangle GEA = \sphericalangle BAE$ (Wechselwinkel) $= 52{,}8° : 2 = 26{,}4°$.
2. Möglichkeit: Das Dreieck AED ist gleichschenklig mit der Basis $[AD]$.
$\Rightarrow \sphericalangle EAD = (180° - 52{,}8°) : 2 = 63{,}6°$ und $\sphericalangle BAE = 90° - 63{,}6° = 26{,}4°$.

(b) –

(c) Es würde gelten: $\sphericalangle DEA = 60°$. Weil aber das Dreieck AED schon gleichschenklig ist, muss jetzt es sogar gleichseitig sein.

5. (a) Es ist ein gleichschenkliges Dreieck.
(b) Es ist ein gleichseitiges Dreieck.

6. w_α und h_c schneiden sich unter einem Winkel von $69°$.

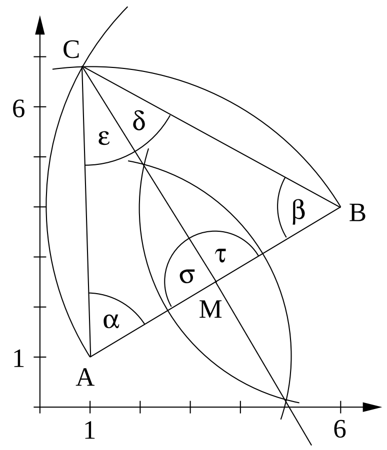
7. $a = \overline{AB} = \overline{BD}$, $\sphericalangle\, DBA = 90° \Rightarrow A = a^2$

8. $\triangle$RZP ist gleichschenklig $\Longrightarrow \beta = \gamma \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta$ (Scheitelwinkel).

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\alpha = \delta \\ \overline{\mathrm{IR}} = \overline{\mathrm{ZE}} \\ \overline{\mathrm{FR}} = \overline{\mathrm{TZ}}\end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle\mathrm{FRI} \cong \triangle\mathrm{TZE} \quad (\mathrm{sws}) \\ \left.\begin{array}{c}\alpha = \beta \\ \overline{\mathrm{FR}} = \overline{\mathrm{RZ}} \\ \overline{\mathrm{IR}} = \overline{\mathrm{RP}}\end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle\mathrm{TZE} \cong \triangle\mathrm{ZRP} \quad (\mathrm{sws})\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\triangle\mathrm{FRI} \cong \triangle\mathrm{TZE} \cong \triangle\mathrm{ZRP}$$

9. (a)



(b) $\left.\begin{array}{l}\overline{\mathrm{AM}} = \overline{\mathrm{MB}} \\ \overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}} \\ \overline{\mathrm{CM}} = \overline{\mathrm{CM}}\end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle\mathrm{AMC} \cong \triangle\mathrm{BMC}\,(\mathrm{sss})$

(c) $\alpha = \beta,\ \varepsilon = \delta,\ \sigma = \tau$

$\sigma + \tau = 2\sigma = 180° \quad \Longrightarrow \quad \sigma = \tau = 90°$

$\varepsilon = \delta \quad \Longrightarrow \quad [\mathrm{MC}] = w_\gamma$ mit $\gamma = \sphericalangle \mathrm{ACB}$

$\sigma = \tau = 90° \quad \Longrightarrow \quad [\mathrm{MC}] = h_c$

6.2.2. rechtwinkliges Dreieck, Satz von Thales

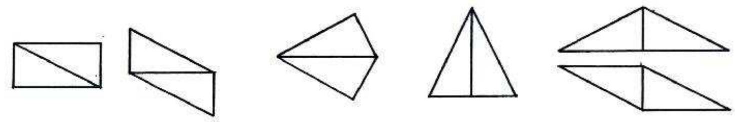
1. (a)

   (b) $\triangle PQR$ ist rechtwinklig, weil R auf dem Thaleskreis über $[PQ]$ liegt.

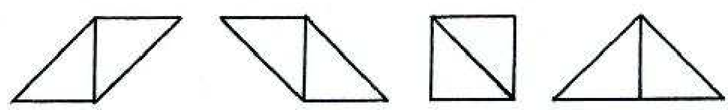
   (c) Die zweite und vierte Aussage sind richtig.

2. Mögliche Verallgemeinerung: Welche Drei- und Vierecke lassen sich aus zwei gegebenen Dreiecken legen?

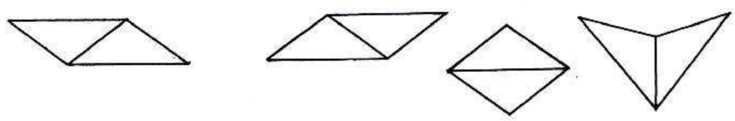
   - z. B. kann aus zwei rechtwinkligen (nicht gleichschenkligen) Dreiecken ein Rechteck, Drachen oder (zwei nicht-kongruente) Parallelogramme entstehen, ebenso zwei nicht-kongruente gleichschenklinge Dreiecke:

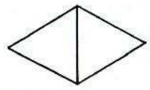
   - aus zwei rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecken ein Quadrat oder (zwei kongruente) Parallelogramme entstehen, ebenso ein rechtwinkliges Dreieck:

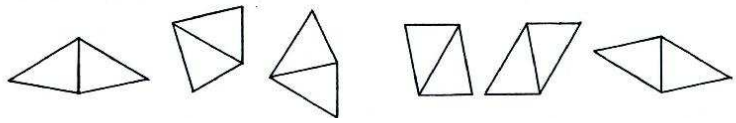
   - aus zwei rechtwinkligen Dreiecken: nur Raute, Drachen mit einspringender Ecke oder (zwei kongruente) Parallelogramme:

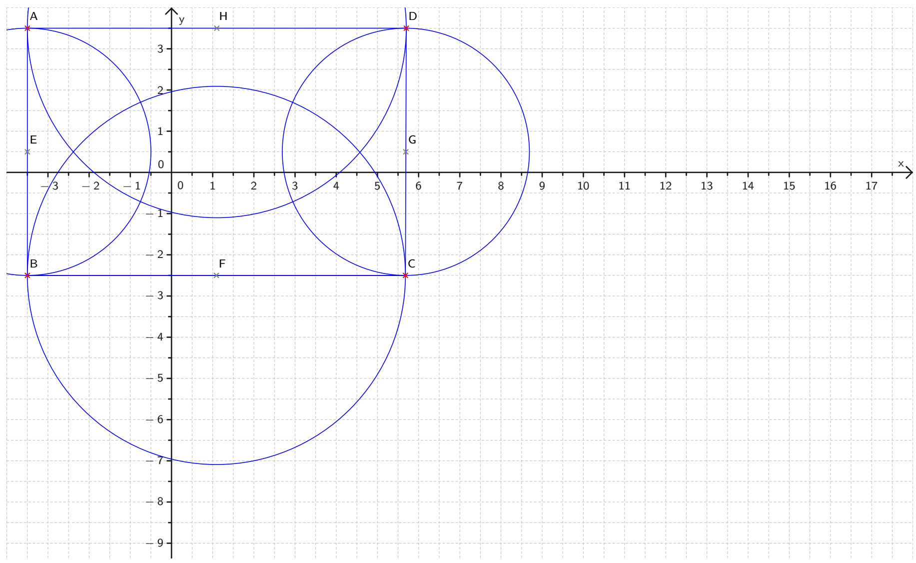
   - aus zwei glechseitigen Dreiecken: nur eine Raute:



- aus zwei beliebigen Dreiecken (nicht gleichwinkling, gleichschenkling und gleichseitig): drei nicht-konguente Drachen, ebenso (drei nicht-konguente) Parallelogramme:



3. (a) $4{,}6\,\text{m} \mathrel{\widehat{=}} 9{,}2\,\text{cm}$, $3\,\text{m} \mathrel{\widehat{=}} 6\,\text{cm}$
   Florian muss auf den Thaleskreisen über den jeweiligen Seiten des Rechtecks stehen.



   (b) Ja

4. $\delta = 90°$ $\alpha = 45°$ $\varepsilon = 126{,}86°$ $\varphi = 63{,}43°$ $\psi = 81{,}86°$

6.2.3. Konstruktion von Kreistangenten

1.

2.

3. (a) Die Mittelpunkte aller Kreise durch A und B liegen auf der Mittelsenkrechten zu $[AB]$.

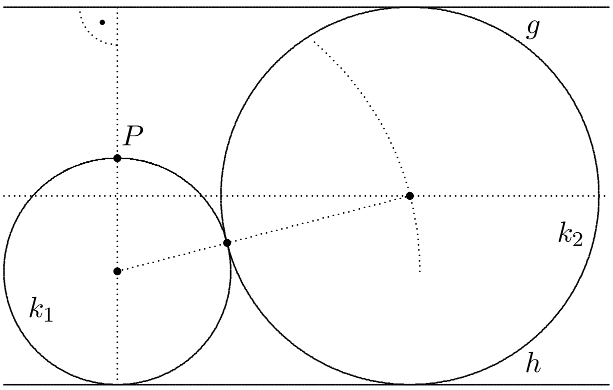
(b) Der Abstand des Mittelpunktes der gesuchten Kreise von A ist so groß wie der Abstand des Parallelenpaars.

(c) Der Schnittpunkt von h mit AB muß zwischen A und B liegen.

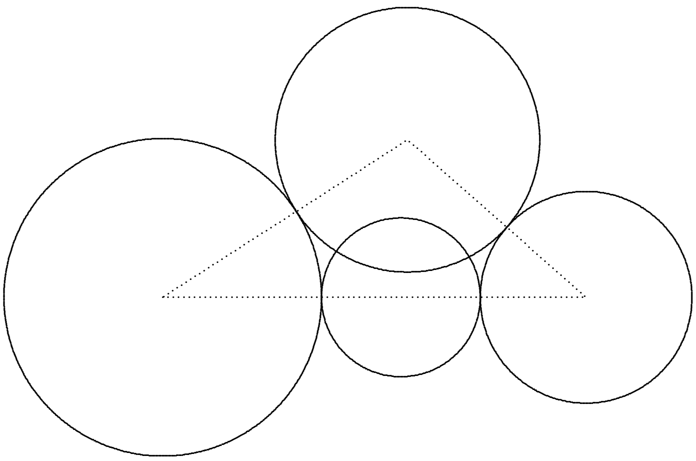
4.

5. Man konstruiert erst eine Tangente t_1 durch P und zeichnet eine beliebige Gerade g, die t_1 unter 40^0 schneidet. Ein Lot auf g durch M schneidet den Kreis im Berührpunkt der gesuchten Tangente t_2.

6. Konstruiere eine Tangente g zu k durch P und zeichne eine Gerade h', die g unter 40^0 schneidet. Das Lot zu h' durch A schneidet den Kreis $k'(A; r = 4\,\text{cm})$ in zwei Punkten X und Y. Die Tangenten an k' in X und Y sind die gesuchten Lösungen..



7.



8.

9. Inneres Tangentenpaar an die Kreise um A und B mit den Radien 4 cm bzw. 2 cm.

10. Die Mittelpunkte der Kreise liegen auf einer Parallelen zu g im Abstand 3 cm und zugleich auf dem Kreis um M mit Radius 5 cm.

11.

12. $d(g; M) = 1,5\,cm$

13.

14.

15.

16. (a) D' liegt auf der Tangente an den Kreis um B mit Radius 5,6 cm und auf AD. A' liegt auf der Parallele zu $D'C$ und auf AD.
    (b) Fläche des Parallelogramms mit verschiedenen Grundseiten berechnen: $5\,\text{cm} \cdot 7\,\text{cm} = 5{,}6\,\text{cm} \cdot \overline{A'B} \Rightarrow \overline{A'B} = 5\,cm$

6.3. Konstruktionen

6.3.1. Besondere Linien im Dreieck

1. Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

6.3.2. Dreieckskonstruktionen

1. ja, nein, ja, ja, nein

2. Eindeutige Konstruktionen für

   $(a,\ c,\ s_c)$, $(a,\ c,\ h_a)$, $(c,\ \alpha,\ h_a)$, $(c,\ \alpha,\ s_c)$

   Zwei Lösungsdreiecke für $(a,\ c,\ \alpha)$

   Keine Lösung: $(c,\ \alpha,\ w_\beta)$, da w_β zu kurz

3. (c) z.B. $c = 10{,}5\,\text{cm}$ oder $\alpha = 90{,}01°$

4. - -

5. 1. Fall: Beide Basiswinkel haben das Maß 70°. Dann hat der dritte Winkel das Maß 40°.
   2. Fall: Der Winkel an der Spitze hat das Maß 70°. Dann hat jeder Basiswinkel das Maß 55°.

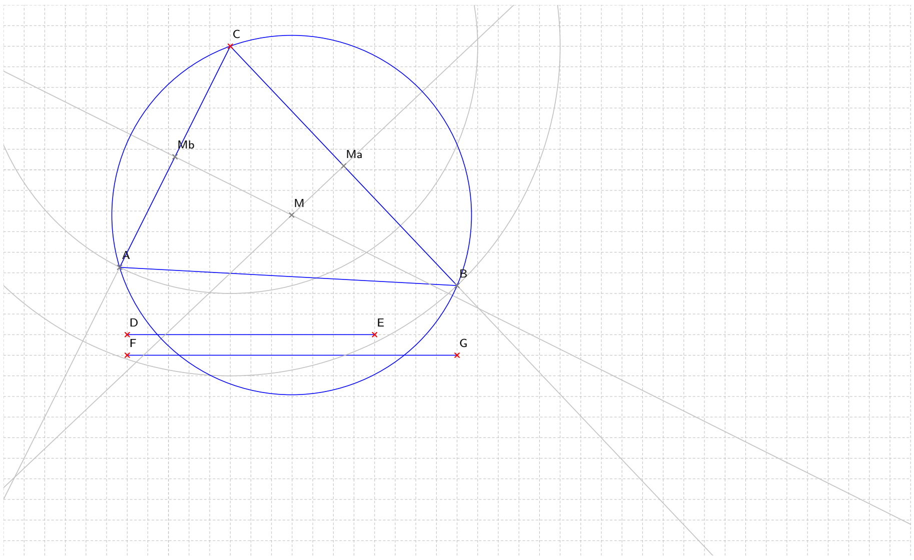
6. (b) z.B. $a = 7\,\text{cm}$ statt $\alpha = 35°$

7. (a) Das Dreieck ist gleichseitig.
   (b) Das Dreieck ist gleichschenklig: $\beta = \gamma = 66{,}5°$

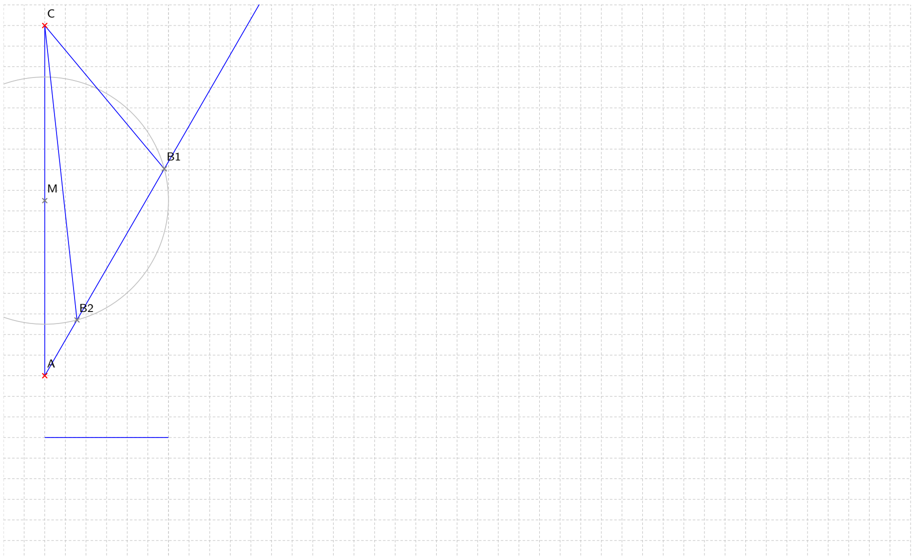
8. (b) z.B. statt $a = 8\,\text{cm}$: $\beta = 90°$
   oder $c = 9\,\text{cm}$ statt $c = 6\,\text{cm}$.

9. C ist Scheitel des Winkels γ, A liegt auf $\mathrm{k}(\mathrm{C}, b)$ und dem ersten Schenkel von γ. B liegt auf $\mathrm{k}(\mathrm{C}, a)$ und dem zweiten Schenkel von γ.

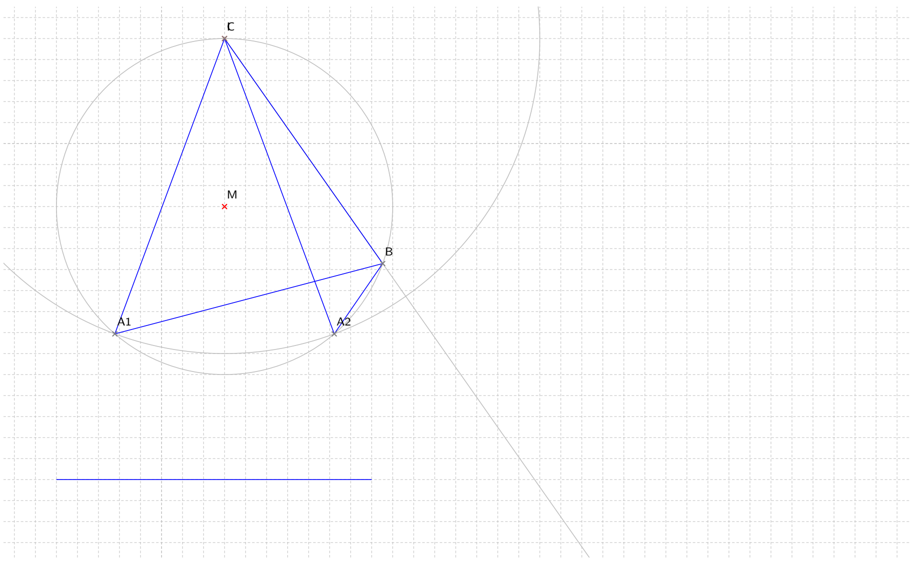
   M ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.



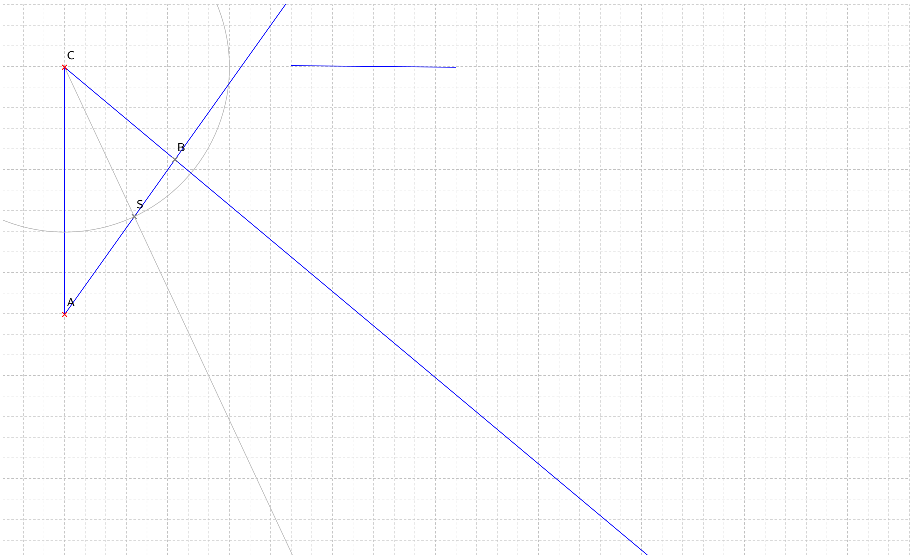
10. A und C sind Endpunkte der Seite b. M ist Mittelpunkt von b. B liegt an dem ersten Schenkel von α und auf dem Kreis um M mit Radius s_b. Zwei Lösungsdreiecke $\triangle \mathrm{AB_1C}$ und $\triangle \mathrm{AB_2C}$.



11. C liegt auf dem Kreis um M mit Radius r beliebig. A liegt auf dem Kreis um C mit Radius b und auf dem Kreis um M mit Radius r. B liegt auf dem zweiten Schenkel des Winkels $\tilde{\gamma}$ und auf dem Kreis um M mit Radius r.



12. A und C sind Endpunkte der Seite b. S liegt auf dem Kreis um C mit Radius $\overline{CS}$ und auf der Winkelhalbierenden von γ. B liegt auf der Halbgeraden [AS und auf dem zweiten Schenkel von γ.

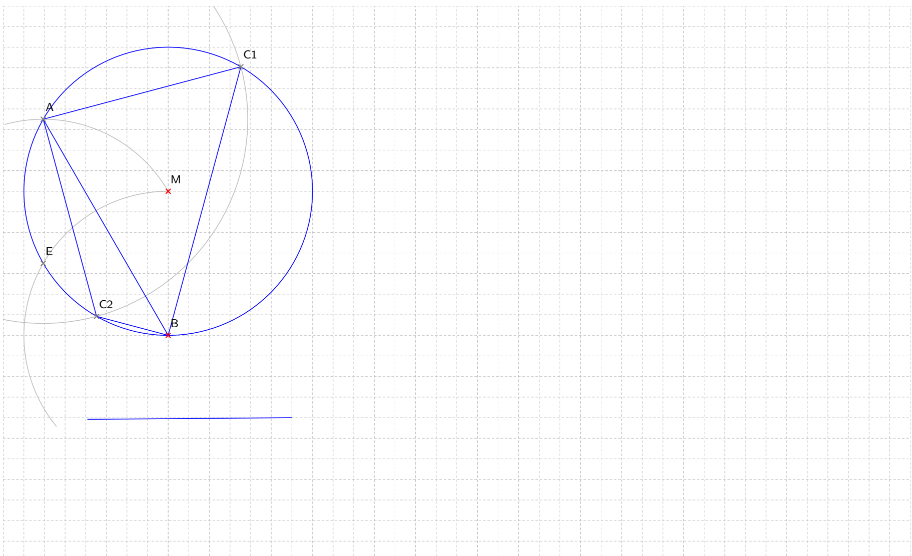


13.

14.

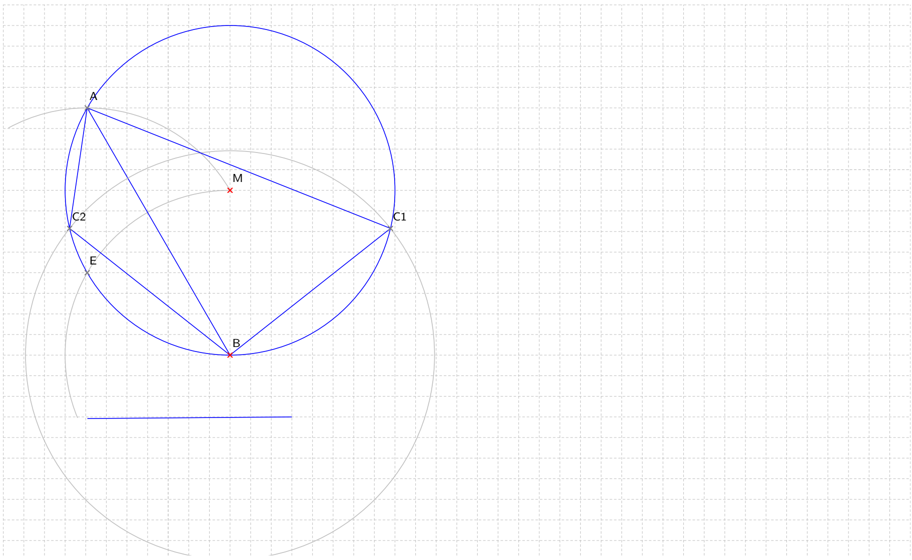
15. (a) B liegt auf $k(M, r)$. A liegt auf dem freien Schenkel des Winkels $\measuredangle AMB = 120°$ und auf $k(M, r)$. C auf $k(M, r)$ und auf $k(A, b)$.

Zwei Lösungsdreiecke $\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_2$



(b) B liegt auf $k(M, r)$. A liegt auf dem freien Schenkel des Winkels $\measuredangle AMB = 120°$ und auf $k(M, r)$. C auf $k(M, r)$ und auf $k(B, a)$.

Zwei Lösungsdreiecke $\triangle ABC_1$ und $\triangle ABC_2$.



6.3.3. Viereckskonstruktionen

1. ABC ist nach SsW eindeutig bestimmt, ABD nach SWS.

2. Man konstruiert zunächst ABM, die Konstruktion ist nach SsW eindeutig.

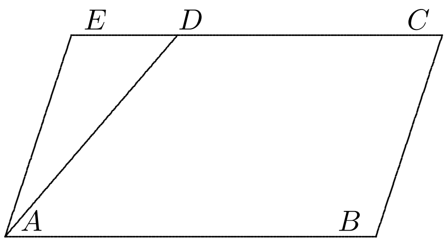
3. Man zeichnet den Winkel $\gamma = \alpha = 57^0$, dessen Scheitel ist die Ecke C. Die übrigen Ecken ergeben sich durch Konstruktion von Parallelen mit den gegebenen Abständen.

4. Man zeichnet den Winkel $\gamma = 50^0$ mit Scheitel C und erhält durch Konstruktion einer Parallelen den Punkt B. Mit Hilfe des Thaleskreises über $[BC]$ bestimmt man die Diagonale BD als Tangente an den Kreis um C mit Radius 5 cm (zwei Lösungen, großer Platzbedarf). Die Seite AD ergibt sich als Parallele zu BC durch D.

5.

6.

7.

8. 

Ausgehend vom Dreieck EDA mit den Seitenlängen $\overline{EA} = b$, $\overline{DA} = d$ und $\overline{DE} = a-c$ konstruiert man das Parallelogramm $ABCE$. $ABCD$ ist das gesuchte Trapez.

9. Durch die Angabe ist das Dreieck BCD nach SsW bestimmt.

10. Zeichne zuerst $[BC]$, trage bei B einen Winkel von 40^0 an, dann ist das Dreieck ABC nach SsW bestimmt. Spiegelung an AC liefert D.

11.

12. (a) Zwei Lösungen (b) Abstand $2,7\,\mathrm{cm}$

13. Der Abstand der Parallelen AB und CD beträgt $4,5\,\mathrm{cm}$, dies ermöglicht die Konstruktion (2 Lösungen). Der Abstand der Ecke C von BD ist $2,7\,\mathrm{cm}$.

7. Vertiefen der Algebra und Geometrie

7.1. Terme und Gleichungen

1. (a) $-4x = 1 \quad \Longrightarrow \quad L = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

   (b) $x^2 - 1 = -1 + x^2 \quad \Longrightarrow \quad L = \mathbb{Q}$

   (c) $x + \frac{10}{7} = \frac{6}{7}x + \frac{2}{7} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{7}x = -\frac{8}{7} \quad \Longrightarrow \quad L = \{-8\}$

2. Das Jahreseinkommen ist $12x$, die zu zahlenden Steuern pro Jahr sind

$$s = 25\% \cdot (12x - n \cdot 8000)$$

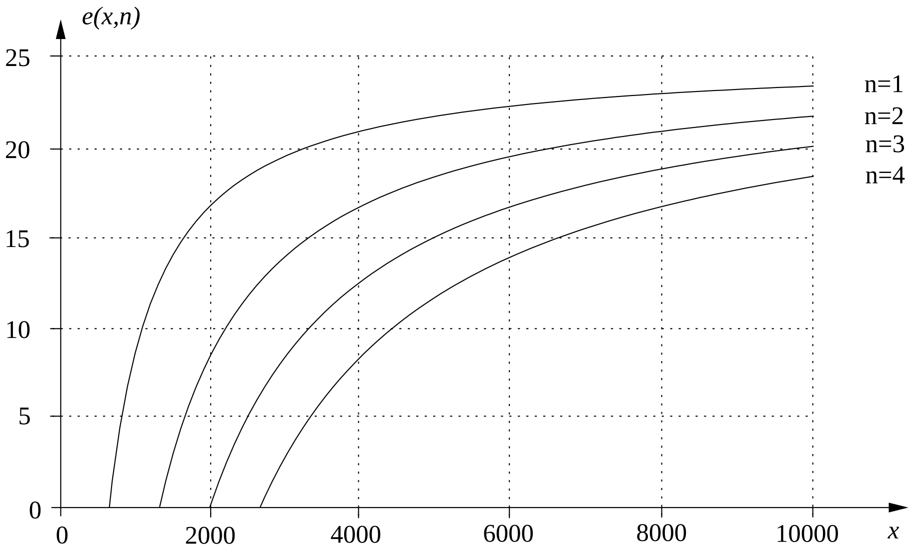
$$e = \frac{s}{12x} = 25\% \cdot \frac{12x - 8000n}{12x} = 25\% \cdot \left(1 - \frac{2000n}{3x}\right)$$

Diese Formel gilt nur, wenn $12x > 8000n$ ist, für $12x \leqq 8000n$ zahlt man keine Steuern:

$$\boxed{e(x,n) = \begin{cases} 25\% \cdot \left(1 - \frac{2000n}{3x}\right) & \text{für } x > \frac{2000n}{3} \\ 0 & \text{für } x \leqq \frac{2000n}{3} \end{cases}}$$

Die folgende Wertetabelle gibt den effektiven Steuersatz in Prozent an:

x	1000	2000	4000	6000	8000	10000
$n = 1$	8,3	16,7	20,8	22,2	22,9	23,3
$n = 2$	0	8,3	16,7	19,4	20,8	21,7
$n = 3$	0	0	12,5	16,7	18,8	20,0
$n = 4$	0	0	8,3	13,9	16,7	18,3



3. (a) $T(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + x - \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{8} = \frac{5}{4}x - \frac{5}{8} = \frac{5}{8}(2x - 1)$

   (b) $T\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $T(0) = -\frac{5}{8}$, $T\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$

4. (a) $L = \mathbb{Q}$ (b) $L = \{\}$ (c) $L = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$

7.2. Anwendungsaufgaben

1. Z. B.: Annahme: Bezinverbrauch 8l pro 100km

   Kosten für Fahrt zur Tankstelle: $1,21\frac{\text{EUR}}{\text{l}} \cdot 40\text{km} \cdot 0,08\frac{\text{l}}{\text{km}} = 3,88\,\text{EUR}$

   Ersparnis bei ganzer Tankfüllung (50l):

   $50 \cdot (1,30\,\text{EUR} - 1,21\,\text{EUR}) = 5,5\,\text{EUR}$

   Die Fahrt lohnt sich, wenn die dazu benötigte Zeit und Umweltgesichtspunkte keine Rolle spielen.

2. G: Betrag, den er zu Beginn hat,
   g: Betrag, den er im Moment hat,
   a Anteil, den er jeweils einsetzt,
   $a \cdot g$: Einsatz beim Spiel,
   Gewinnt er, hat er nach dem Spiel $(1+a)g$, erliert er hat er $(1+a)g$. D. g. bei Gewinn wird der Betrag mit $(1+a)$ multipliziert, beim Verlieren mit $(1-a)$. Wegen dem Kommutativgesetz ist die Reihenfolge der Faktoren unerheblich $\Rightarrow$

   Betrag nach n-mal Gewinn und n-mal Verlust:

   $G \cdot (1+a)^n \cdot (1-a)^n = G \cdot (1-a^2)^n$

Da $(1-a^2)^n < 1$ ist, hat er insgesamt Verlust gemacht!

3. Preis ohne MWSt.: p_0, alter Preis: $p_a = 1{,}16 p_0$

   neuer Preis: $p_n = 1{,}19 p_0 = \dfrac{1{,}19}{1{,}16} p_a = 1{,}0258 p_a \quad \Longrightarrow$ Erhöhung um 2,6%.

4. $50 \cdot (1 + x\%) = 200 \cdot (1 - x\%), \quad x\% = 60\%$

   Beide besitzen nach dem Spiel 50 € · 1,6 = 200 € · 0,4 = 80 €

5. x ist der gesuchte Prozentsatz:

$$\begin{aligned}(1+x)\cdot 360 &= (1-x)\cdot 640\\ 360 + 360x &= 640 - 640x\\ 1000x &= 280\\ x &= \frac{28}{100} = 28\%\end{aligned}$$

   Hans verdient 1,28 · 360 € = 460,80 € (oder 0,72 · 640 € = 460,80 €)

7.3. Geometrie

1. Die Feuerstelle ist Mittelpunkt des Feuerbachschen Neunpunktekreises und liegt zusammen mit M und H auf der Eulerschen Geraden.

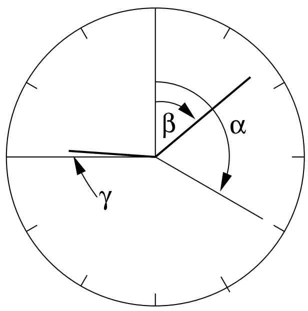
2. (a)

	1 min	1 s
Sekundenzeiger	$360°$	$6°$
großer Zeiger	$6°$	$0{,}1° = 6'$
kleiner Zeiger	$0{,}5° = 30'$	$\left(\frac{1}{120}\right)^{\circ} = 0{,}5' = 30''$

   (b) $\underbrace{x \cdot 6°}_{\alpha} - \underbrace{(8 \cdot 6° + x \cdot 0{,}1°)}_{\beta} = 70°$

   $x \cdot 5{,}9° = 118°$

   $x = \dfrac{118°}{5{,}9°} = 20 \qquad \Longrightarrow t_2 = 21:08:20$



   (c) $\alpha = 20 \cdot 6° = 120°$

   $\beta = 8 \cdot 6° + 20 \cdot 0{,}1° = 50°$

   $\gamma = 8 \cdot 0{,}5° + 20 \cdot 0{,}5' = 4°\,10'$

3. (a)

	1 h	1 min	1 s
großer Zeiger	$360°$	$6°$	$0{,}1° = 6'$
kleier Zeiger	$30°$	$0{,}5° = 30'$	$0{,}5' = 30''$

(b) $\underbrace{x \cdot 6^\circ}_{\beta} - \underbrace{(30^\circ + x \cdot 0{,}5^\circ)}_{\alpha} = 180^\circ$

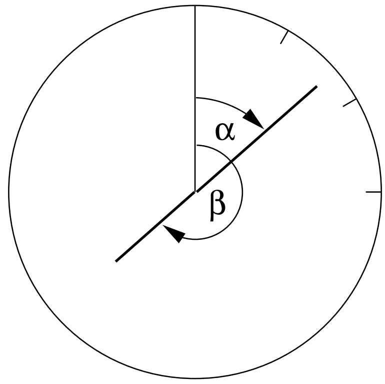
$x \cdot 5{,}5^\circ = 210^\circ$

$x = \frac{210^\circ}{5{,}5^\circ} = \frac{420}{11} = 38\frac{2}{11} = 38{,}\overline{18} \quad \Longrightarrow$

$\frac{2}{11}\,\text{min} = \frac{120}{11}\,\text{s} = 10\frac{10}{11}\,\text{s} = 10{,}\overline{90}\,\text{s}$

$t_0 = 13 : 38 : 10{,}\overline{90}$

$\alpha = 30^\circ + 38\frac{2}{11} \cdot 0{,}5^\circ = \left(49\frac{1}{11}\right)^\circ = 49{,}\overline{09}^\circ$



4. t bezeichnet im Folgenden die Zahl der Minuten nach der vollen Stunde.

(a) $180^\circ + t \cdot 0{,}5^\circ = t \cdot 6^\circ, \quad t = \frac{180^\circ}{5{,}5^\circ} = 32{,}\overline{72} \quad \Longrightarrow \quad 6\,\text{h}\,32\,\text{min}\,43{,}\overline{63}\,\text{s}$

(b) $270^\circ + t \cdot 0{,}5^\circ - t \cdot 6^\circ = 180^\circ, \quad t = \frac{90^\circ}{5{,}5^\circ} = 16{,}\overline{36} \quad \Longrightarrow \quad 21\,\text{h}\,16\,\text{min}\,21{,}\overline{81}\,\text{s}$

(c) $60^\circ + t \cdot 0{,}5^\circ - t \cdot 6^\circ = 50^\circ, \quad t = \frac{10^\circ}{5{,}5^\circ} = 1{,}\overline{81} \quad \Longrightarrow \quad 2\,\text{h}\,1\,\text{min}\,49{,}\overline{09}\,\text{s}$

$t \cdot 6^\circ - 60^\circ - t \cdot 0{,}5^\circ = 50^\circ, \quad t = \frac{110^\circ}{5{,}5^\circ} = 20 \quad \Longrightarrow \quad 2\,\text{h}\,20\,\text{min}$

(d) $240^\circ + t \cdot 0{,}5^\circ - t \cdot 6^\circ = 20^\circ, \quad t = \frac{220^\circ}{5{,}5^\circ} = 40 \quad \Longrightarrow \quad 8\,\text{h}\,40\,\text{min}$

$t \cdot 6^\circ - 240^\circ - t \cdot 0{,}5^\circ = 20^\circ, \quad t = \frac{260^\circ}{5{,}5^\circ} = 47{,}\overline{27} \quad \Longrightarrow \quad 8\,\text{h}\,47\,\text{min}\,16{,}\overline{36}\,\text{s}$

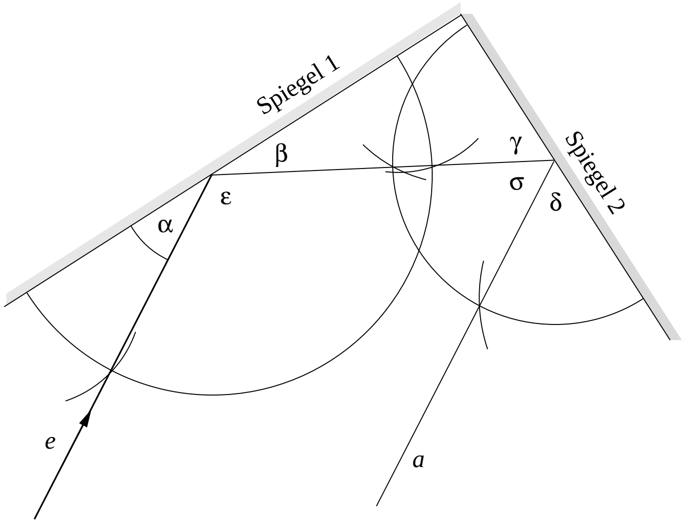
5. (a) Maßstab 1:250 000, d.h. $1\,\text{cm} \mathrel{\widehat{=}} 2{,}5\,\text{km}$

(b) $h = \overline{\text{CF}} = 3{,}9\,\text{cm} \mathrel{\widehat{=}} 9{,}8\,\text{km}$

(c) $\overline{\text{AC}} = 3{,}4\,\text{cm} \mathrel{\widehat{=}} 8{,}5\,\text{km} \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{8{,}5\,\text{km}}{1700\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}005\,\text{h} = 18\,\text{s}$

6. Für jeden beliebigen Ort G erhält man den gleichen Punkt S (8,5|4,5).
S liegt auf der Mittelsenkrechten von [AB] und hat von AB den Abstand $\frac{1}{2} \cdot \overline{\text{AB}}$.

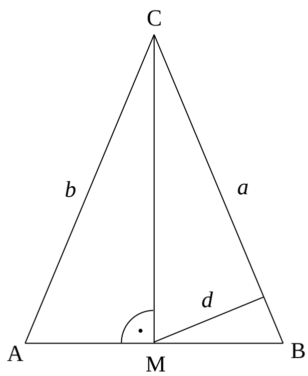
7. (a)



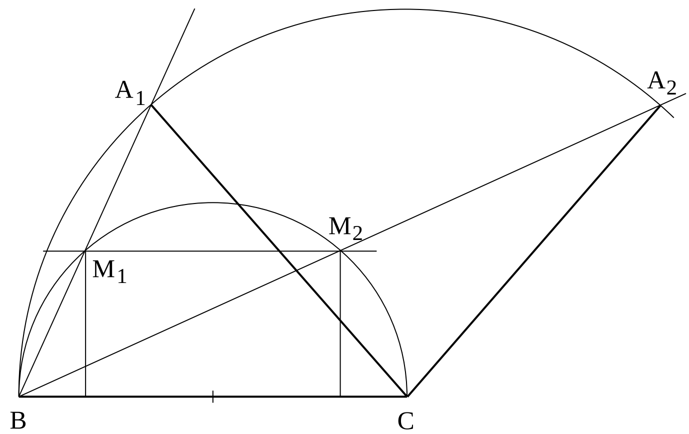
(b) $\beta = \alpha = 30°$ (Reflexion)
$\gamma = 180° - 90° - 30° = 60°$ (Winkelsumme im Dreieck)
$\delta = \gamma = 60°$ (Reflexion)
$\varepsilon = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$ (gestreckter Winkel)
$\sigma = 180° - 2 \cdot 60° = 60°$ (gestreckter Winkel)
$\varepsilon + \sigma = 120° + 60° = 180° \quad \Longrightarrow \quad a \| e$ (Nachbarwinkel)

8. (a) Im gleichschenkligen Dreieck ist die Seitenhalbierende der Basis zugleich Höhe auf die Basis. M liegt also auf dem Thaleskreis über [BC] und auf der Parallelen zu BC im Abstand d.

A liegt auf BM und auf k(C; $r = a$)



(b)



(c)
$0 < d < 4\,\text{cm}$	:	2 Lösungen
$d = 4\,\text{cm}$	:	1 Lösung
$d > 4\,\text{cm}$	:	keine Lösung

9. (a)

$\overline{\text{AC}} = \overline{\text{BC}}$	$\Longrightarrow$	$\beta = \alpha = 70°$ (Basiswinkel)
$\triangle$BDC gleichseitig	$\Longrightarrow$	$\delta = \rho = \varepsilon + \mu = 60°$
gestreckter Winkel	$\Longrightarrow$	$\sigma = 180° - \beta - \delta = 50°$
Außenwinkel	$\Longrightarrow$	$\lambda = 90° - \sigma = 40°$
Z-Winkel	$\Longrightarrow$	$\varepsilon + \mu + \tau = \beta \Longrightarrow \tau = \beta - 60° = 10°$

(b)

$$\left.\begin{array}{c}\overline{\text{CM}} = \overline{\text{CM}}\\ \delta = \rho \\ \sphericalangle\text{CMB} = \sphericalangle\text{DMC} = 90°\end{array}\right\} \begin{array}{l}\Longrightarrow \triangle\text{BMC} \cong \triangle\text{DMC}\,(\text{wws})\\ \Longrightarrow \overline{\text{BM}} = \overline{\text{MD}}\end{array}$$

Teil II.

Alter Lehrplan G9 - Algebra

8. Erweiterung des Zahlenbereichs: die rationalen Zahlen

8.1. Negative Zahlen

1. (a) $-\frac{17}{50} < -0,\overline{3} < -\frac{8}{25} < 0 < \frac{8}{25} < 0,\overline{3}$

   (b) $-\frac{7}{6} < -\frac{16}{15} < 0{,}9 < \left|-\frac{11}{10}\right| < \frac{7}{6}$

   (c) $-\frac{7}{30} < -\frac{41}{180} < -\frac{15}{66} < -0{,}2 < 0 < \frac{15}{66} < \frac{7}{30}$

2. (a) $-\frac{3}{8}$ (b) $-1\frac{2}{3}$

3. (a) $-\frac{1}{4}$ (b) $-\frac{1}{4}$ (c) $-\frac{9}{14}$ (d) $-\frac{9}{28}$

8.2. Grundrechenarten mit rationalen Zahlen

1.

$4\frac{1}{6}$	$1\frac{4}{15}$	0,27
48	$\frac{3}{16}$	7,20 €
$2\frac{1}{3}$ m	3	14
12,5 dm	$\frac{13}{19}$	0,15
$\frac{4}{27}$	Falsch	8%

2.

1,6	0	12
6	$10{,}8\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$	800 €
$\frac{8}{15}$ m	0,42	200
$34\frac{1}{2}$	$850\,\mathrm{cm}^2$	6
$8\frac{23}{81}$	Falsch	48 €

3. (a) 47, (b) −17, (c) 38, (d) 35

4. (a) −4 (b) 3 (c) $1\frac{1}{2}$ (d) $-1\frac{29}{30}$ (e) $-\frac{7}{24}$

5. $-6{,}\overline{6} - (-7\frac{2}{3}) + (-3\frac{4}{5}) - 7{,}2 + 3 = -7$

6. 6

7. a) $-0{,}24$ b) $-0{,}28$ c) $\frac{16}{25}$
   d) $\frac{9}{49}$ e) $\frac{1}{6}$ f) $\frac{1}{6}$

8. (a) $-6{,}25$ (b) $-69{,}9$ (c) 48

9. 50

10. $-3\frac{1}{3}$

11. (a) $1\frac{5}{28}$ (b) $-11\frac{3}{4}$ (c) $\frac{28}{33}$ (d) $-7\frac{49}{96}$

12. (a) 300 (b) 4 (c) 160
    (d) 10 (e) -29 (f) -110
    (g) 100

13. (a) -1 (b) 0,5

14. (a) 3 (b) 3

15. 119

16. (a) 0 (b) -7

17. (a) 1,5 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$

18. Es gibt zwanzig Kombinationen, davon acht mit ganzzahlige Summen:
    $-\frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$, $+\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$, $+\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}$, $+\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$, $+\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

9. Ungleichungen

9.1. Lösen linearer Ungleichungen

1. (a) $L =]-\infty; 11\frac{4}{7}[$ (b) $L =]-\infty; -\frac{5}{11}[$ (c) $L =]-\frac{30}{119}; \infty[$
2. $L = [-\frac{5}{11}; \infty[$
3. $L = [-\frac{5}{11}; \infty[$