SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Jahrgangsstufe 7 (Gymnasium)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

5. Juni 2012

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Neuer Lehrplan G8

1. Symmetrie und Winkel

1.1. Achsensymmetrie

1.1.1. Eigenschaften, Konstruktion von Bildpunkt und Achse

1. Auf einem Blatt Papier sind eine Gerade g und zwei Punkte P und Q gezeichnet, die nicht auf g liegen. Beschreibe, wie man feststellen kann, ob die Punkte P und Q bezüglich g im Rahmen der Zeichengenauigkeit zueinander symmetrisch sind.

   Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 10 der Gymnasien 2005

Lösung: Z. B. symmetrisch, wenn $[PQ]$ von g senkrecht halbiert wird.

2. (a) Welche Vierecke besitzen mindestens zwei Symmetrieachsen?
   (b) Welche der folgenden Figuren hat die meisten Symmetrieachsen: Rechteck, gleichseitiges Dreieck, Kreis

   Quelle: Jufo go (Spiel zum Wettbewerb Jugend forscht)

Lösung: (a) Rechteck, Quadrat, Raute
(b) Kreis (unendlich viele Symmetrieachsen)

1.1.2. Mittelsenkrechte, Lot

1. (a) Gegeben sind zwei verschiedene Punkte P und Q. Gesucht sind alle Geraden, von denen P und Q gleichen Abstand haben.
   (b) Gegeben sind drei verschiedene Punkte P,Q und R. Gesucht sind alle Geraden, von denen P, Q und R gleichen Abstand haben.
   (c) Gegeben sind zwei verschiedene Punkte P und Q. Gesucht sind alle Kreise, von denen P und Q gleichen Abstand haben.

Lösung: (a) Gerade PQ, Parallelen zu PQ, Mittelsenkrechte der STrecke [PQ] und Geraden durch den Mittelpunkt M der Strecke [PQ]
(b) 1. Fall: P,Q,R liegen auf einer Geraden $\Rightarrow$ Gerade PQ und Parallelen zu PQ
2. Fall: P, Q und R nicht auf einer Geraden $\Rightarrow$ Mittelparallelen des Dreiecks $\triangle PQR$

(c) Der Abstand eines Punktes von einem Kreis ist das Minimum aller Entfernungen zwischen diesem Punkt und einem Punkt des Kreises.
Kreise um Mittelpunkt der Strecke [PQ] liegt mit beliebigem Radius und Kreise um beliebigem Punkt M mit Radius $r = \frac{1}{2}(\overline{PM} + \overline{QM})$

2. Nenne 2 Eigenschaften eines Dreiecks, bei dem eine Höhe gleichzeitig Mittelsenkrechte ist.

   Quelle: Jufo go (Spiel zum Wettbewerb Jugend forscht)

Lösung: 2 gleichlange Seiten, zwei gleichgroße Winkel, achsensymmetrisch; es handelt sich um ein gleichschenkliges Dreieck.

3. **Die gehfaulen Ameisen**

   Die gemütliche Anatevka and die dicke Berta stehen 50 mm voneinander entfernt. Sie wollen sich zwar treffen, aber keine will weiter als 28 mm laufen.

   (a) Kennzeichne das Gebiet ihrer möglichen Treffpunkte!

   (b) Wie weit müssten sie voneinander entfernt sein, damit es nur einen einzigen Treffpunkt gibt?

Lösung: (a) Kreise um Anatevka und Berta mit Radius 28 mm schneiden sich in zwei Punkte P_1 und P_2 der Mittelsenkrechten von Anatevka und Berta. Die Punkte der Strecke $[P_1P_2]$ sind die möglichen Treffpunkte.

(b) 56 mm

4. **Die gehfaulen Ameisen**

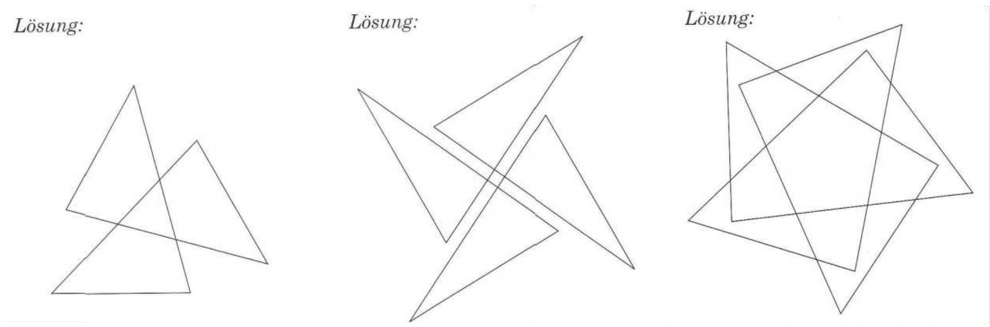
   Anatevka und Berta sind für Gehgerechtigkeit und achten deshalb genau darauf, dass keine weiter als die andere krabbeln muss, egal wie weit, Hauptsache beide gleich weit. Zeichne ihre möglichen Treffpunkte ein!

Lösung: Mittelsenkrechte auf AB, Pfütze berücksichtigen!

1.1.3. Winkel, Winkelübertragung, Winkelhalbierende

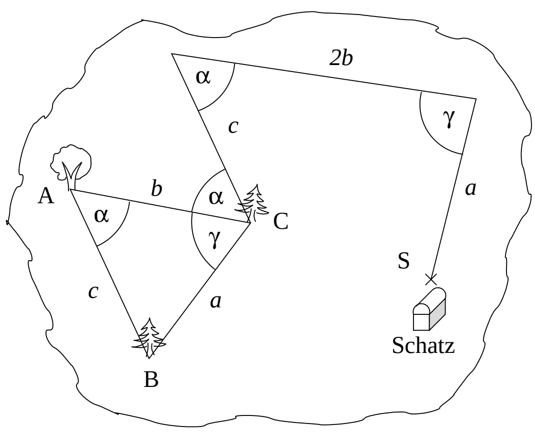
1. Zeichne den Weg exakt nach
   (a) $8cm$ gerade aus, Drehung um 105° nach links, $12cm$ gerade aus, Drehung um 135° nach links. Wieder hole diesen Vorgang, so oft es geht!
   (b) $10cm$ gerade aus, Drehung um 115° nach links, $14cm$ gerade aus, Drehung um 155° nach links. Wieder hole diesen Vorgang, so oft es geht!
   (c) $10cm$ gerade aus, Drehung um 95° nach links, $14cm$ gerade aus, Drehung um 121° nach links. Wieder hole diesen Vorgang, so oft es geht!

   Quelle: Andrea Herzog, Bernd Wiegand, Unterrichtsgestaltung an Modellversuchsschulen, Ein Beispiel: Geometrie in der Jahrgangsstufe 7, mathematiklehrer, August 2000, S. 19



Lösung:

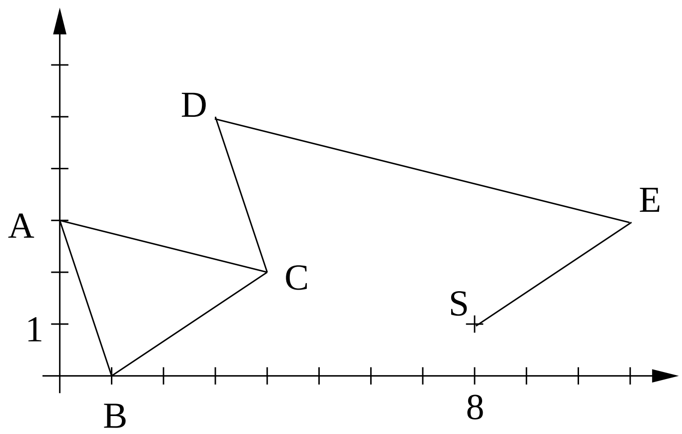
2. Die nebenstehend abgebildete Schatzkarte ist *nicht* maßstabsgetreu. Konstruiere die Lage des Schatzes nach den Angaben der Karte, wenn die Lage der drei Bäume durch A(0|3), B(1|0) und C(4|2) gegeben ist. Welche Koordinaten hat S? Wie weit ist der Schatz vom Baum A entfernt, wenn unsere konstruierte Karte im Maßstab 1 : 1500 gezeichnet ist?



Lösung: S(8|1)

$\overline{AS} = 8{,}2\,\text{cm}$

$8{,}2\,\text{cm} \cdot 1500 = 123\,\text{m}$



3. Zeichne die Punkte A $(-2|0{,}5)$, B $(-1|-1)$, C $(4|1)$ und D $(1|3)$ in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm).
   (a) Konstruiere die Differenz $\overline{BC} - \overline{AB}$.
   (b) Miss die Winkel $\alpha = \sphericalangle BAD$, $\beta = \sphericalangle CBA$, $\gamma = \sphericalangle DCB$ und $\delta = \sphericalangle ADC$ und berechne $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.
   (c) Berechne die Summe $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA + \sphericalangle DAB$.

Lösung: (a) $k(B; r = \overline{BA}) \cap [BC] = \{E\}$

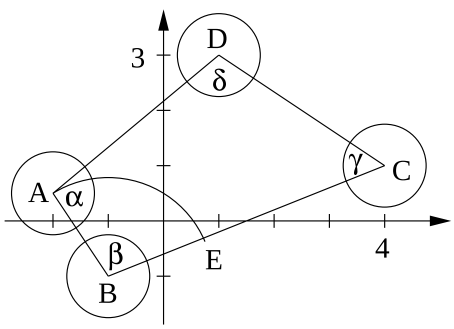
$\overline{BC} - \overline{AB} = \overline{EC} = 3{,}6\,\text{cm}$

(b) $\alpha = 96°$, $\beta = 102°$

$\gamma = 55{,}5°$, $\delta = 106{,}5°$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

(c) $(360° - \beta) + (360° - \gamma) + (360° - \delta) + (360° - \alpha) = 3 \cdot 360° = 1080°$



4. (a) Berechne im Gradmaß folgende Bruchteile des Vollwinkels:

$$\frac{1}{3}, \quad 40\%, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{11}{16}, \quad \frac{13}{25}.$$

   (b) Berechne im Gradmaß folgende Bruchteile des rechten Winkels:

$$\frac{1}{6}, \quad 25\%, \quad \frac{5}{18}, \quad \frac{3}{8}, \quad \frac{3}{7}.$$

Lösung: (a) $120°$, $144°$, $150°$, $247{,}5°$, $187{,}2°$

(b) $15°$, $22{,}5°$, $37{,}5°$, $33{,}75°$, $\left(38\frac{4}{7}\right)^{\circ}$

5. (a) Rechne in die Grad-Minuten-Sekunden-Schreibweise um:

$$30{,}7^\circ;\quad 55{,}66^\circ;\quad 240{,}085^\circ;\quad 0{,}37^\circ;\quad 0{,}001^\circ;\quad 0{,}0025^\circ;\quad 4{,}0502^\circ;\quad 0{,}08\overline{3}^\circ$$

(b) Rechne in die dezimale Schreibweise um:

$$35^\circ18';\quad 200^\circ24';\quad \left(\frac{11}{25}\right)';\quad 1'';\quad 18^\circ18'18'';\quad 1'12'';\quad 12^\circ54'';\quad 1^\circ1'1''$$

Lösung: (a) $30^\circ42''$; $55^\circ39'36''$; $240^\circ5'6''$; $22'12''$; $3{,}6''$; $9''$; $4^\circ3'0{,}72''$; $5'$

(b) $35{,}3^\circ$; $200{,}4^\circ$; $0{,}007\overline{3}^\circ$; $0{,}0002\overline{7}^\circ$; $18{,}305^\circ$; $0{,}02^\circ$; $12{,}015^\circ$; $1{,}0169\overline{4}^\circ$

6. (a) Berechne $\sphericalangle$BSA, wenn $\sphericalangle$ASB $= 57^\circ$ ($265^\circ39'$, $157^\circ47''$, $13^\circ38'14{,}3''$) ist.

(b) $47^\circ49'39'' + 98^\circ54'53''$, $174^\circ47'35'' - 93^\circ18'40''$, $218^\circ - 23^\circ14'37''$

Lösung: (a) 303°, $94{,}35^\circ = 94^\circ21'$, $202^\circ59'13'' = 202{,}9869\overline{4}^\circ$

$346^\circ21'45{,}7'' = 346{,}36269\overline{4}^\circ$

(b) $146^\circ44'32''$, $81^\circ28'55''$, $194^\circ45'23''$

7. (a) Rechne um auf die dezimale Schreibweise: $17^\circ23'15''$

(b) Rechne um auf die Grad-Minuten-Sekunden-Schreibweise: $50{,}101^\circ$

Lösung: (a) $17^\circ23'15'' = \left(17 + \frac{23}{60} + \frac{15}{3600}\right)^\circ = \left(17\frac{31}{80}\right)^\circ = 17{,}3875^\circ$

(b) $50{,}101^\circ = 50^\circ + 0{,}101 \cdot 60' = 50^\circ + 6{,}06' = 50^\circ6' + 0{,}06 \cdot 60'' = 50^\circ6'3{,}6''$

8. Das Hubble-Weltraumteleskop hat zwei Sterne fotografiert, deren Winkelabstand nur $\alpha = 0{,}0072''$ beträgt. Welcher Bruchteil eines Grades ist das?

Lösung: $0{,}0072'' = \dfrac{0{,}0072^\circ}{3600} = \dfrac{1^\circ}{500\,000} = 0{,}000\,002^\circ$

9. Rechne folgende Winkel in Dezimalschreibweise bzw. in Grad, Winkelminuten und Winkelsekunden um: (a) $12^\circ21'$ (b) $35{,}27^\circ$

Lösung: (a) $12{,}35^\circ$ (b) $35^\circ16'12''$

10. Rechne folgende Winkel in Dezimalschreibweise bzw. in Grad, Winkelminuten und Winkelsekunden um:

    (a) $27°54'$ (b) $14{,}35°$

Lösung: (a) $27{,}9°$ (b) $14°21'$

11. (a) Stelle in einer Tabelle die Winkel zusammen, die der große bzw. der kleine Zeiger einer Uhr in 1 h, in 1 min bzw. in 1 s überstreicht.

    (b) Berechne den kleineren der beiden Winkel, den der große und der kleine Uhrzeiger zu folgenden Zeiten einschließen:

    13:00, 04:00, 16:15, 08:45, 01:42, 00:00:09, 07:42:51, 03:47:05

Lösung: (a)

	1 h	1 min	1 s
großer Zeiger	$360°$	$6°$	$0{,}1° = 6'$
kleier Zeiger	$30°$	$0{,}5° = 30'$	$0{,}5' = 30''$

(b)

$$
\begin{array}{lcl}
13{:}00 & : & 30°, \qquad 04{:}00 \ : \ 120° \\
16{:}15 & : & 120° + 15 \cdot 0{,}5° - 90° = 37{,}5° \\
08{:}45 & : & 270° - (8 \cdot 30° + 45 \cdot 0{,}5°) = 7{,}5° \\
01{:}42 & : & \underbrace{42 \cdot 6°}_{252°} - \underbrace{(30° + 42 \cdot 0{,}5°)}_{51°} = 201°, \quad 360° - 201° = 159° \\
00{:}00{:}09 & : & 9 \cdot 6' - 9 \cdot 0{,}5' = 49{,}5' = 0{,}825° \\
07{:}42{:}51 & : & \underbrace{42 \cdot 6° + 51 \cdot 0{,}1°}_{257{,}1°} - \underbrace{(7 \cdot 30° + 42 \cdot 0{,}5° + 51 \cdot 0{,}5')}_{231{,}425°} = \underbrace{25°40'30''}_{25{,}675°} \\
03{:}47{:}05 & : & \underbrace{47 \cdot 6° + 5 \cdot 0{,}1°}_{282°30'} - \underbrace{(3 \cdot 30° + 47 \cdot 0{,}5° + 5 \cdot 0{,}5')}_{113°32'30''} = \underbrace{168°57'30''}_{168{,}958\overline{3}°}
\end{array}
$$

12. Berechne den Winkel, den der Stunden- und der Minutenzeiger um

    (a) 17.10 Uhr (b) 8.20 Uhr bildet.

Lösung: (a) $95°$ (b) $130°$

13. Gegeben sind die Punkte R(0|3,5), A(4|3), D(7,5|0), L(6|8,5) und E(4,5|5,5).

    (a) Trage den Streckenzug RADLER in ein Koordinatensystem ein.

    (b) Vergleiche die Winkel $\alpha = \sphericalangle ARE$, $\beta = \sphericalangle LDA$ und $\gamma = \sphericalangle ELD$ durch Konstruktion!

    (c) Konstruiere $\delta - \gamma$, wenn $\delta = \sphericalangle RAD$.

Lösung: $\alpha = 31{,}1°$, $\beta = 39{,}4°$, $\gamma = 36{,}6°$, $\delta = 146{,}5°$, $\delta - \gamma = 110{,}0°$

14. (a) Zeichne den Winkel $\alpha = 130°$. Konstruieren daraus den Winkel $\alpha' = 65°$.

(b) Zeichne den Winkel $\alpha = 110°$. Konstruieren daraus den Winkel $\alpha' = 55°$.

Lösung: (a) Halbierung des Winkels $\alpha = 130°$ liefert $\alpha' = 65°$.

(b) Halbierung des Winkels $\alpha = 110°$ liefert $\alpha' = 55°$.

15. (a) Zeichne die beiden Winkel $\beta = 40°$ und $\gamma = 75°$.
Konstruiere aus ihnen den Winkel $\delta = 95°$.

(b) Zeichne die beiden Winkel $\beta = 60°$ und $\gamma = 85°$.
Konstruiere aus ihnen den Winkel $\delta = 115°$.

Lösung: (a) Den Winkel $\beta = 40°$ halbieren und an $\gamma = 75°$ antragen.

(b) Den Winkel $\beta = 60°$ halbieren und an $\gamma = 85°$ antragen.

16. Gegeben sind die Winkel $\sphericalangle\mathrm{DEF} = 27°$ und $\sphericalangle\mathrm{GHL} = 130°$.

(a) Konstruiere daraus den Winkel $\alpha = 157°$.

(b) Konstruiere aus den gegebenen Winkeln $\sphericalangle\mathrm{DEF}$ und $\sphericalangle\mathrm{GHL}$ den Winkel $\beta = 76°$.

Lösung: (a) $\alpha = \sphericalangle\mathrm{DEF} + \sphericalangle\mathrm{GHL}$ (b) $\beta = \sphericalangle\mathrm{GHL} - 2\sphericalangle\mathrm{DEF}$

17. Gegeben sind die Winkel $\sphericalangle\mathrm{FGH} = 37°$ und $\sphericalangle\mathrm{ABC} = 120°$.

(a) Konstruiere daraus den Winkel $\alpha = 157°$.

(b) Konstruiere aus den gegebenen Winkeln $\sphericalangle\mathrm{FGH}$ und $\sphericalangle\mathrm{ABC}$ den Winkel $\beta = 46°$.

Lösung: (a) $\alpha = \sphericalangle\mathrm{FGH} + \sphericalangle\mathrm{ABC}$ (b) $\beta = \sphericalangle\mathrm{ABC} - 2\sphericalangle\mathrm{FGH}$

18. Aus welchen konstruierbaren Winkeln läßt sich

(a) der Winkel 75° konstruieren.

(b) der Winkel 52,5° konstruieren.

Lösung: (a) $75° = 90° - 60° : 4$

(b) $52{,}5° = 90° : 4 + 60° : 2$

19. Konstruiere den Winkel α mit $\alpha = 82{,}5°$ (ohne Winkelmesser!).

Lösung: $60° + \frac{1}{2} \cdot 45°$

20. Konstruiere folgende Winkel: $\alpha = 112{,}5°$, $\beta = 225°$, $\gamma = 78{,}75°$ und $\delta = 292{,}5°$.

Lösung: $\alpha = 112{,}5° = 90° + \frac{90°}{4}$, $\beta = 225° = 180° + \frac{90°}{2}$

$\gamma = 78{,}75° = 90° - \frac{90°}{8}$, $\delta = 292{,}5° = 270° + \frac{90°}{4}$

1.1.4. Transversalen im Dreieck

1. In einem gleichschenkligem Dreieck $\triangle ABC$ ist γ der Winkel an der Spitze. Die Werte von γ liegen im Intervall $]0°; 180°[$.
   (a) Wie groß ist der stumpfe Winkel μ, unter dem sich die beiden Mittelsenkrechten der Schenkel des Dreiecks $\triangle ABC$ für $\gamma = 40°$ schneiden?
   (b) Für welche Werte von γ liegt der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Schenkel außerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$.

   nach Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 10 der Gymnasien 2005

Lösung: (a) $360° - 2 \cdot 90° - 40° = 140°$
(b) $\gamma > 90°$

2. Beantworte folgende Fragen:
   (a) Welche Transversalen in einem Dreieck treffen sich im Inkreismittelpunkt?
   (b) In welchen Dreiecken liegt der Höhenschnittpunkt außerhalb des Dreiecks?
   (c) Die Ecken eines Dreiecks liegen immer auf einem Kreis. Wie heißt dieser Kreis?

   Welche besondere Eigenschaft hat dieser Kreis bei einem rechtwinkligen Dreieck?
   (d) Welche Namen haben die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$
   (rechter Winkel bei B).
   Welche besondere Linien sind in diesem Dreieck h_a, h_c und s_b?

Lösung: (a) Winkelhalbierenden
(b) In stumpfwinkligen Dreiecken liegt der Höhenschnittpunkt außerhalb des Dreiecks.
(c) Umkreis; Thaleskreis, die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite ist Durchmesser des Umkreises.
(d) b: Hypotenuse; a, c: Katheten

$h_a = c$, $h_c = a$, s_b: Radius des Thaleskreises/Umkreises.

3. Drei Städte A, B und C haben auf einer Landkarte die Koordinaten A(1|1), B(7|1) und C(6|6) (Einheit 1 cm).
   (a) Konstruiere die Mittelsenkrechten m_a, m_b und m_c auf die Seiten des Städtedreiecks. Was stellst du fest? Überprüfe deine Vermutung noch an anderen Dreiecken!
   (b) Ein Ingenieur behauptet, der Schnittpunkt M von m_a und m_b wäre der günstigste Ort für einen gemeinsamen Radiosender der drei Städte. Zeichne zur Überprüfung dieser Behauptung den Kreis $\mathrm{k}(\mathrm{M}; r = \overline{\mathrm{MA}})$.

Lösung: (a) Die drei Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt M.
(b) Alle drei Städte liegen auf dem Kreis, d.h. alle drei Städte sind gleich weit vom Sender entfernt.

4. (a) Zeichne in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm) die Punkte A(1|1), B(7|1) und C(3|6). Konstruiere die drei Höhen des Dreiecks △ABC. Was stellst du fest? Welche Fläche hat das Dreieck?
   (b) Löse die Teilaufgabe (a) noch einmal für A(1|1), B(6|1) und C(3|2,5). Kannst du die gleiche Feststellung machen wie in Teilaufgabe (a)?

Lösung: (a) Die drei Höhen schneiden sich in einem Punkt.
$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{AB}} \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 6\,\mathrm{cm} \cdot 5\,\mathrm{cm} = 15\,\mathrm{cm}^2$
(b) Die drei Höhen schneiden sich wieder in einem Punkt, allerdings außerhalb des Dreiecks.

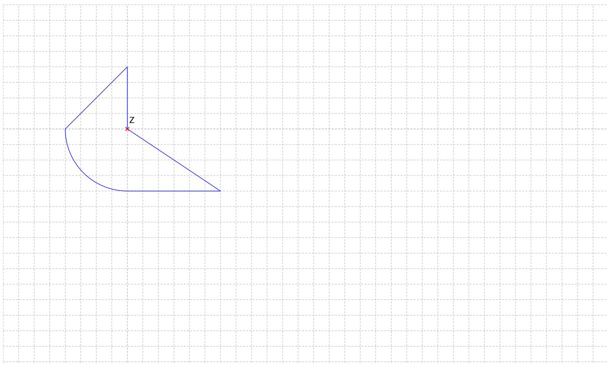
5. Zeichne die Punkte A(1|3), B(7|1) und C(8|8) in ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm.
   (a) Konstruiere die Winkelhalbierenden w_α, w_β und w_γ im Dreieck △ABC. Welche Eigenschaft haben die drei Winkelhalbierenden?
   (b) S sei der Schnittpunkt von w_α und w_β. Konstruiere das Lot von S auf BC und nenne den Fußpunkt dieses Lotes F. Zeichne den Kreis $\mathrm{k}(\mathrm{S}; r = \overline{\mathrm{SF}})$. Welche Eigenschaft hat k?
   (c) Welcher Punkt hat von allen Dreiecksseiten den gleichen Abstand? Überprüfe diese Eigenschaft an einem anderen Dreieck.

Lösung: (a) Die drei Winkelhalbierenden schneiden sich in einem Punkt S.
(b) k berührt alle Dreiecksseiten.
(c) S hat von allen Dreiecksseiten den gleichen Abstand.

1.2. Punktsymmetrie

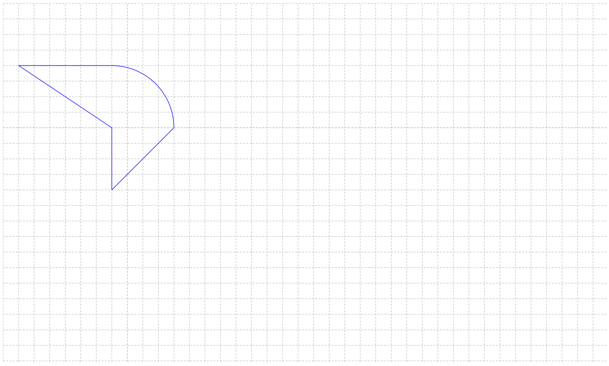
1.2.1. Eigenschaften, Konstruktion von Bildpunkt und Zentrum

1. Spiegle die folgende Figur am Punkt Z.



nach Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 8 der Gymnasien 2005

Lösung:

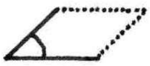
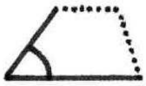


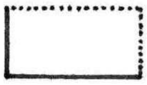
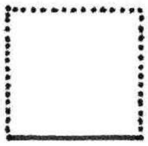
1.2.2. Übersicht über symmetrische Vierecke

1. **Was muss gegeben sein, um ein … konstruieren zu können?**

   Was muss eigentlich gegeben sein, um ein Quadrat konstruieren zu können? Klar, es genügt die Angabe einer Seitenlänge, denn die Seiten sind alle gleich lang und wir wissen, dass alle Winkel im Quadrat 90° groß sind.
   Aber wie ist das beim Rechteck, bei einer Raute, bei einem Drachen …?

Lösung:

- Parallelogramm: 3 Stücke (z.B.:  nach SWS, Rest aufgrund Parallelität)
- Trapez: 4 Stücke (z.B.:  nach SWS, dann noch ein Winkel erforderlich, es sei denn Trapez ist gleichschenklig)

- Rechteck: 2 Stücke (Seitenlängen, z.B.:  nach SWS, wobei W 90° ist, Rest aufgrund Parallelität)
- Quadrat: 1 Stück (Seitenlänge, z.B.:  nach SWS, wobei W 90° und 2. Seite gleich lang ist, Rest aufgrund Parallelität)
- Raute: 2 Stücke (Seitenlänge und einer der Winkel, z.B.  nach SWS, wobei 2. Seite gleich lang ist, Rest aufgrund Parallelität)
- Drachenviereck: 3 Stücke (z.B.  nach SWS, wobei 2. Seite gleich lang ist, und dann noch eine davon verschiedene Seite nach SSS)

2. (a) Kreuze alle Möglichkeiten an, bei denen sich wahre Aussagen ergeben.

	punktsymmetrisch	achsensymmetrisch
Jedes Drachenviereck ist		
Jedes Rechteck ist		

   (b) Im Allgemeinen hat ein Trapez keine Symmetrieeigenschaft. Wodurch ist dieser Vierecksttyp gekennzeichnet?

   Quelle: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 10 der Gymnasien, 2004

Lösung: (a)

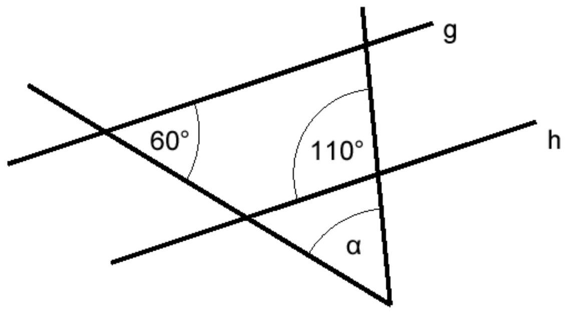
	punktsymmetrisch	achsensymmetrisch
Jedes Drachenviereck ist		X
Jedes Rechteck ist	X	X

(b) Zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel.

1.3. Winkelbetrachtungen an Figuren

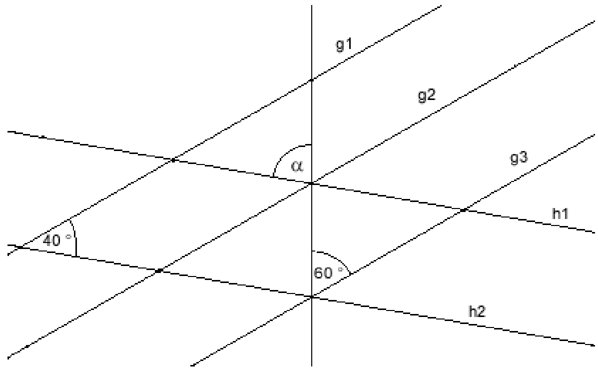
1.3.1. Geraden- und Doppelkreuzungen

1. (a) Die Geraden g und h verlaufen parallel zueinander.



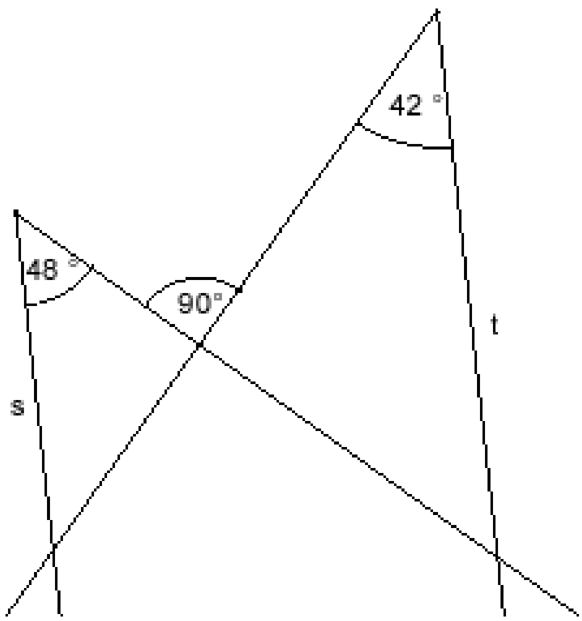
Wie groß ist α?

(b) Die Geraden g_1, g_2 und g_3 sowie h_1 und h_2 sind parallel zueinander.



Wie groß ist α?

(c) Begründe warum die Geraden s und t parallel zueinander sind.

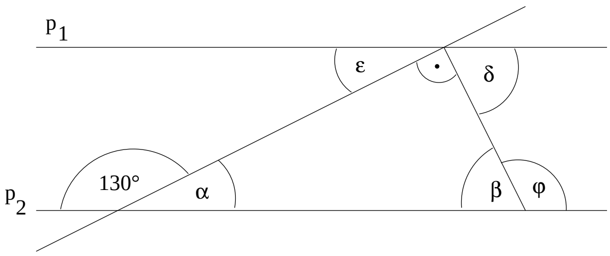


Quelle: Vergleichsarbeit bundesland- und schulartübergreifend in der Jahrgangsstufe

8, Materialien zur Weiterarbeit

Lösung: (a) 50°, (b) 80°, (c) Innenwinkel im rechten Dreieck sind 90° und 48°, daraus kann der Winkel unten zu 42° berechnet werden, woraus die Parallelität wegen gleicher Z-Winkel folgt.

2. Bestimme die mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße. Die nicht maßstabsgetreue Zeichnung brauchst du nicht auf dein Blatt zu übertragen. Die Geraden p_1 und p_2 sind parallel.
   Begründe jeweils durch eine kurze Rechnung oder ein passendes Stichwort.



Lösung: $\alpha = 50°$ $\beta = 40°$ $\varphi = 140°$ $\varepsilon = 50°$ $\delta = 40°$

3. (a) An einer Doppelkreuzung entstehen die Wechselwinkel $\alpha = 65{,}5°$ und $\beta = 50°45'$. Berechne, unter welchen Winkeln sich die Geraden noch schneiden.
   (b) In einem Dreieck ist α um 25° größer als β und γ ist dreimal so groß wie β. Berechne alle Winkel des Dreiecks.

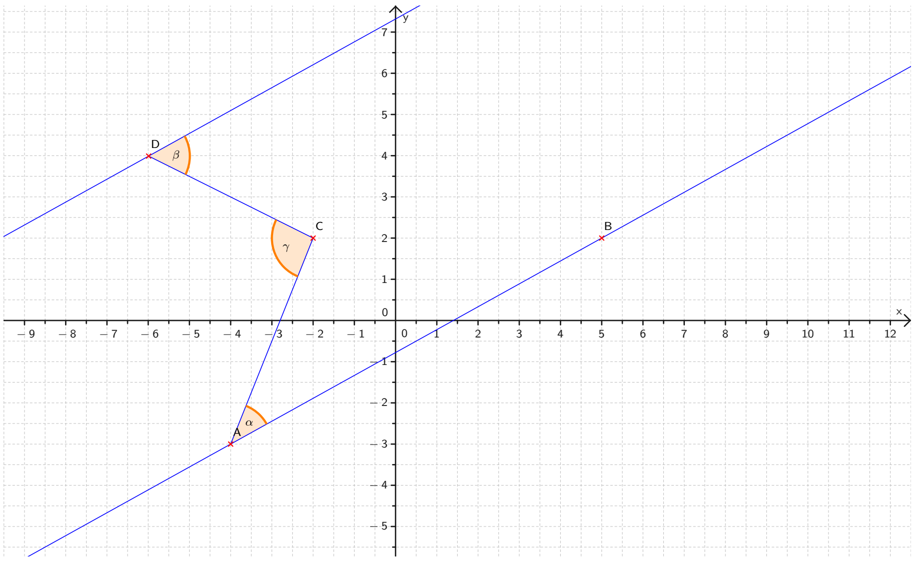
Lösung: (a) 114,5°, 129°15′, 14,75°, 165,25°

(b) $\alpha = 56°$, $\beta = 31°$, $\gamma = 93°$

4. Gegeben sind die Punkte A(−4| − 3), B(5|2), C(−2|2) und D(−6|4).
   (a) Zeichne die Punkte in ein Koordinatensystem ein und ergänze die Gerade $g = AB$, die Strecken [AC] und [CD].

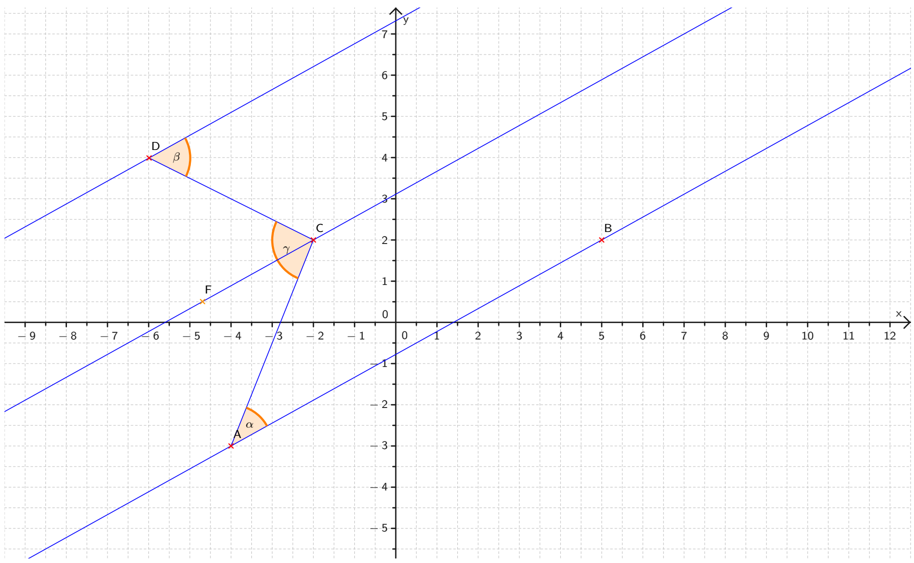
   Zeichne dann die Parallele h zur Geraden g durch den Punkt D. Trage die Winkel $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle DCA$ und $\gamma = \sphericalangle([CD], h)$ ein.
   (b) Drücke den Winkel γ durch α und β aus.
   (c) Suche andere Lösungswege zur Teilaufgabe (b)

Lösung: (a)

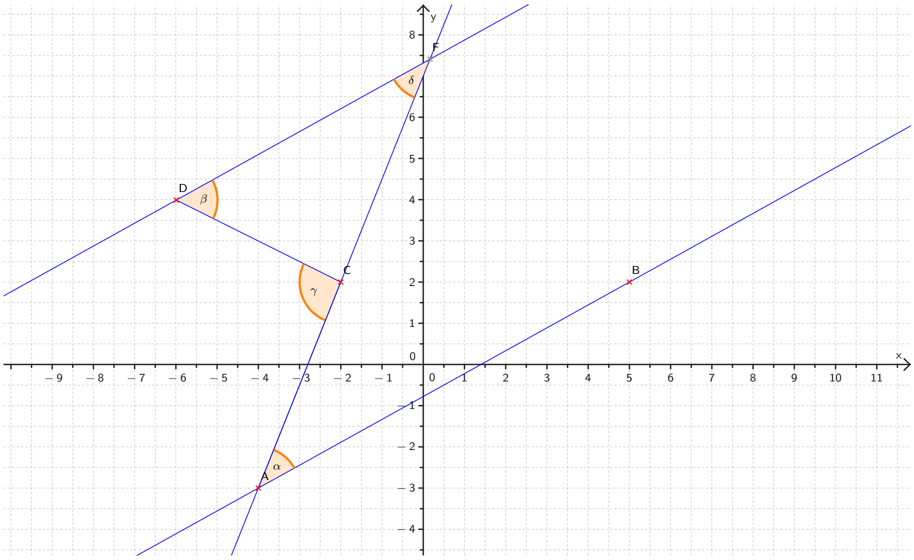


(b)

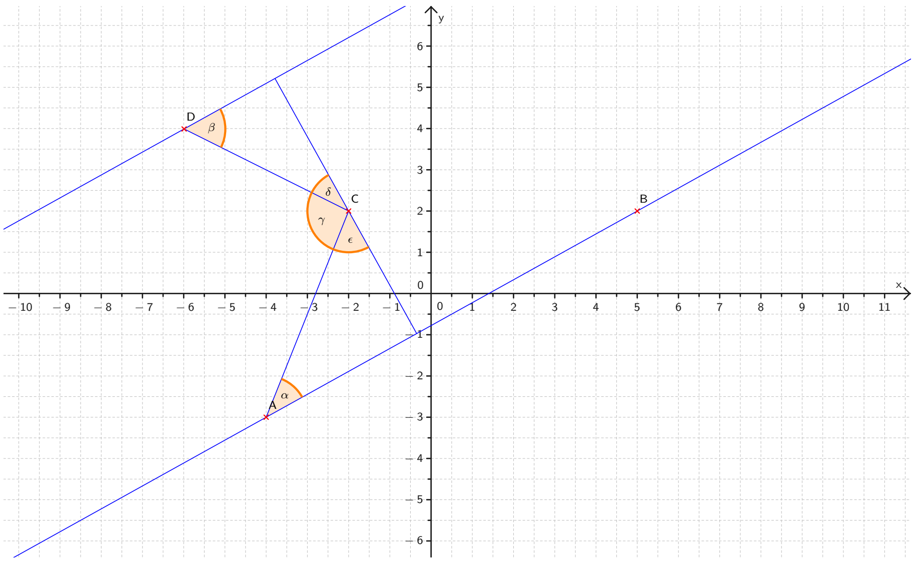
- Lösung 1: $\alpha = \sphericalangle \mathrm{DCF}$, $\beta = \sphericalangle \mathrm{FCA}$ (Wechselwinkel an parallelen Geraden) $\Longrightarrow$ $\gamma = \sphericalangle \mathrm{DCF} + \sphericalangle \mathrm{FCA} = \alpha + \beta$



- Lösung 2: $\delta = \beta$ (Wechselwinkel an parallelen Geraden) $\Longrightarrow$ $\gamma = \alpha + \beta$ (Außenwinkel im Dreieck)

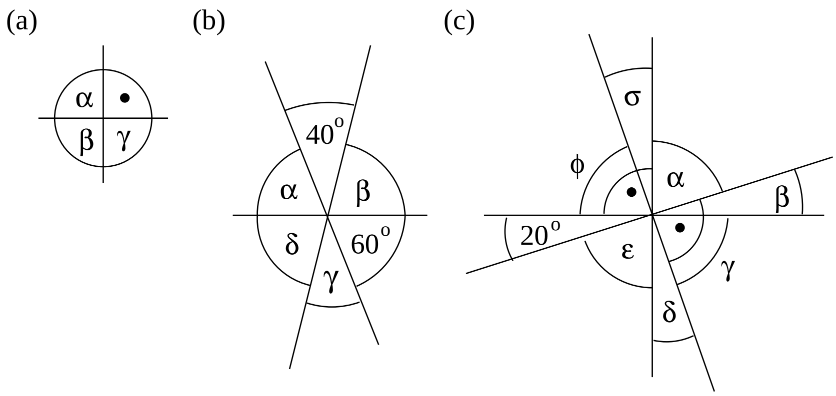


- Lösung 3: $\delta = 90° - \alpha$, $\epsilon = 90° - \beta$ (Winkelsumme im Dreieck) $\Longrightarrow \gamma = 180° - \delta - \epsilon = \alpha + \beta$



(c) vgl. (b)

5. Berechne alle eingezeichneten Winkel.



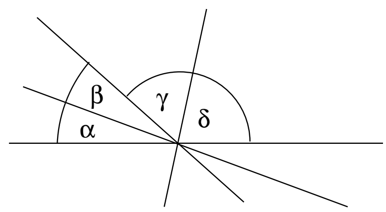
Lösung: (a) $\alpha = \beta = \gamma = 90°$

(b) $\alpha = 60°$, $\gamma = 40°$, $\beta = \delta = 80°$

(c) $\beta = 20°$, $\varepsilon = \alpha = \varphi = \gamma = 90° - 20° = 70°$

$\sigma = \delta = 90° - \varphi = 20°$

6. Berechne α, β, γ und δ, wenn
   (a) $\beta = 2\alpha$, $\gamma = 2\beta$ und $\delta = 2\gamma$
   (b) $\beta = 3\alpha$, $\gamma = \frac{3}{2}\beta$ und $\delta = \frac{4}{3}\gamma$



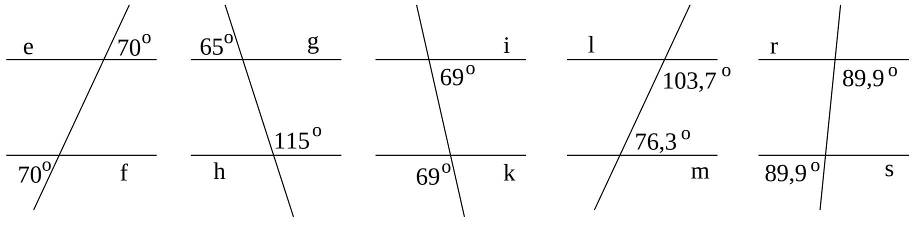
Lösung: (a) $\alpha + 2\alpha + 4\alpha + 8\alpha = 15\alpha = 180° \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 12°$

$\beta = 24°$, $\gamma = 48°$ und $\delta = 96°$

(b) $\alpha + 3\alpha + \dfrac{9}{2}\alpha + 6\alpha = \dfrac{29}{2}\alpha = 180° \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \left(\dfrac{360}{29}\right)^\circ = \left(12\dfrac{12}{29}\right)^\circ$

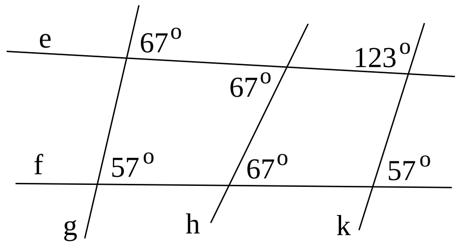
$\beta = \left(37\dfrac{7}{29}\right)^\circ$, $\gamma = \left(55\dfrac{25}{29}\right)^\circ$ und $\delta = \left(74\dfrac{14}{29}\right)^\circ$

7. Welche Geradenpaare sind parallel?



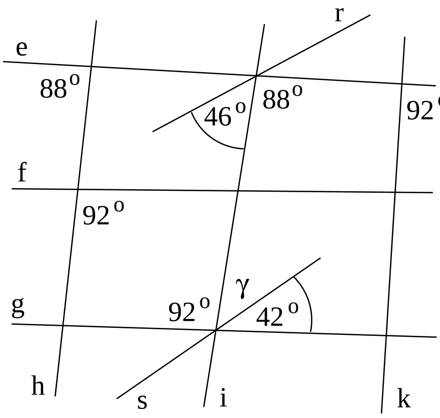
Lösung: e und f, g und h, l und m

8. Ein Winkel in nebenstehender Abbildung ist falsch, welcher könnte es sein? Genaue Begründung deiner Antwort!



Lösung: Die beiden Winkel an der Geraden g müssen gleich sei.

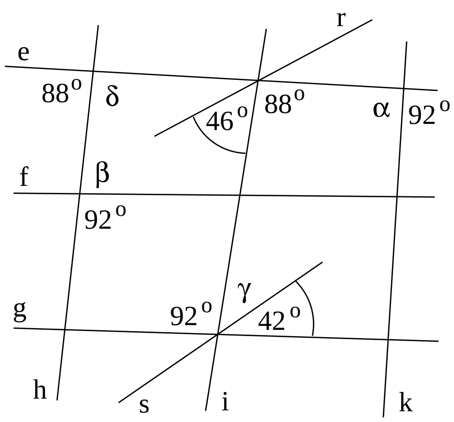
9. Welche Geradenpaare sind parallel? Genaue Begründung deiner Antworten!



Lösung: $\alpha = 180° - 92° = 88°$
$\Longrightarrow \quad h \| k$ (Stufenwinkel)

$\beta = 180° - 92° = 88°$
$\Longrightarrow \quad e \| f$ (Wechselwinkel)

$\gamma = 180° - 92° - 42° = 46°$
$\Longrightarrow \quad r \| s$ (Wechselwinkel)



1.3.2. Innenwinkel beim Dreieck und Viereck

1. Die Summe der Innenwinkel in einem n-Eck beträgt $(n-2) \cdot 180°$.
   (a) Wie viele Ecken hat ein n-Eck mit der Innenwinkelsumme 720°?

(b) Ein n-Eck mit lauter gleich langen Seiten und gleich großen Innenwinkeln heißt reguläres n-Eck. Berechne die Größe eines Innenwinkels im regulären Zehneck.

Quelle: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 8 der Gymnasien 2008

Lösung: (a) $(n-2) \cdot 180°$

(b) $144°$

2. Innenwinkel im n-Eck

   (a) Stelle einen Term auf, mit dem sich die Summe der Innenwinkel in einem n-Eck berechnen lässt.

   (b) Berechnen die Summe der Innenwinkel für ein 6-Eck.

   (c) Für welches n-Eck beträgt die Summe der Innenwinkel 540°?

   (d) In welchem n-Eck ist jeder Innenwinkel 135° groß?

   nach: Vergleichsarbeit bundesland- und schulartübergreifend in der Jahrgangsstufe 8, Materialien zur Weiterarbeit

Lösung: (a) $(n-2) \cdot 180°$

(b) $720°$

(c) Fünfeck $(n = 5)$

(d) Achteck $(n = 8)$

3. Bei einem Vieleck beträgt die Summe der Innenwinkel 1620°. Wie viele Eckpunkte hat das Vieleck? (Rechnung!)

Lösung: Bedingung für Eckenzahl n: $(n-2) \cdot 180° = 1620°$
$\Rightarrow n = 11$

4. Gegeben ist das Dreieck $\triangle$ABC durch A$(4; 1)$, B$(9; -1)$ und C$(5; 6)$.

   (a) Konstruiere die Winkelhalbierende w_β des Winkels bei B.

   (b) Konstruiere das Lot h_c durch C auf AB.

   (c) Kennzeichne den Punkt S $= w_\beta \cap h_c$ und zeichne den Winkel $\varepsilon = \sphericalangle$BSC ein. Drücke den Winkel ε durch β aus (Rechnung!).

Lösung: (c) $\varepsilon = 90° + \frac{1}{2}\beta$

2. Terme und Variable

2.1. Terme und ihre Werte

1. Gegeben ist der Term $T(a; b) = \frac{a+b}{a-b}$.

   (a) Berechne den Wert des Terms für $(a; b) = (-2; 3)$.

   (b) Gib ein Zahlenpaar $(a; b)$ an, das nicht in den Term eingesetzt werden darf.

   (c) Gib ein Zahlenpaar $(a; b)$ an, das den Termwert 0 liefert.

   Bayerischer Mathematik Test für die 10. Klasse, 2007

Lösung: (a) $-\frac{1}{5}$, (b) z. B. $(0; 0)$, (c) z. B. $(1; -1)$

2. (a) Berechne den Wert des Terms $(\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} - \frac{1}{3}) : 0,5$

   (b) Durch welche Zahl muss man die zahl $0,5$ ersetzen, damit man den doppelten Termwert erhält?

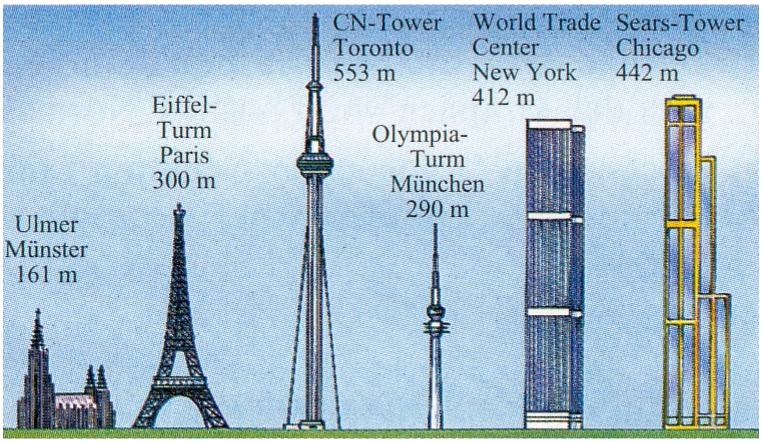
   Bayerischer Mathematik Test für die 8. Klasse, 2007

Lösung: (a) $\frac{4}{21}$

(b) $0,25$

3. **Anwendungen der quadratischen Funktionen und Gleichungen**

   Beim senkrechten Fall einer Kugel von einem hohen Gebäude gilt für die Funktion Fallzeit (in s) $\rightarrow$ Fallweg (in m) angenähert $t \rightarrow 5t^2$.
   Wie lange würde ein Stein fallen, wenn man ihn jeweils von der Spitze der Gebäude nach unten fallen lassen würde?



Lösung: $5,7s$; $7,7s$; $10,5s$; $7,6s$; $9,1s$; $9,4s$

4. Berechne zu den angegebenen Termen die zugehörigen Termwerte.
   (a) $T(x) = 2 \cdot x^3 - 52;\quad T(8)$
   (b) $T(x) = 10^2 + x^2;\quad T(24)$
   (c) $T(x) = 2x^2 - 535;\quad T(23)$
   (d) $T(x) = (x+1)^2 - 34;\quad T(5)$
   (e) $T(x) = x(x-1);\quad T(31)$
   (f) $T(x) = \frac{36(x^2+x)}{x-1};\quad T(2)$
   (g) $T(x) = x(6x-1) - x(x-1);\quad T(5)$

   Quelle: Kreuzzahlrätsel, Ulrike Schätz

Lösung: (a) 972 (b) 676 (c) 523 (d) 2
(e) 930 (f) 216 (g) 125

5. Gegeben ist der Term $T(n) = (-\frac{1}{2})^n$. Für n werden der Reihe nach die natürlichen Zahlen eingesetzt.
   (a) Berechne für $n = 1$, 2, 3 und 4 den Wert des Terms.
   (b) Trage die Termwerte für $n = 1$, 2, und 3 auf der Zahlengerade mit $1 \mathrel{\hat{=}} 4$ cm ein.
   (c) Für eine beliebige natürlich Zahl n sei der Termwert auf der Zahlengerade markiert. Beschreibe, wo dann der Punkt zum Termwert für die darauf folgende natürlich Zahl $n+1$ liegt.

   nach Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 8 der Gymnasien 2005

Lösung: (a) $T(1) = -\frac{1}{2} = -0,5$, $T(2) = \frac{1}{4} = 0,25$, $T(3) = -\frac{1}{8} = -0,125$, $T(4) = -\frac{1}{16} = 0,0625$
(b)

(c) Der Punkt liegt halb so weit vom Nullpunkt entfernt und zwar so, dass der Nullpunkt zwischen den beiden Punkten liegt.

6. Berechne folgende Terme:

(a) $(-12)^2 + (-94) + (-4)^3$ (b) $(-11)^2 + (-84) + (-3)^3$
(c) $[(-18) : (+3)]^2 : (-\frac{1}{2})$ (d) $[(-8) : (+4)]^2 : (-\frac{1}{2})$
(e) $\dfrac{-\frac{1}{2} - 2}{2 - \frac{3}{2}}$ (f)$(-2x)^2 - (-3y)^3 + 3 \cdot x^2 - 7y^3$

Lösung: (a) -14 (b) 10 (c) -72
(d) -8 (e) -5 (f) $7x^2 + 20y^3$

7. Setze in dem Term $T(x; y) = -x - y$ ein:

(a) $x = -2; y = +3;$

(b) $x = -5; y = -7;$

(c) $x = +4; y = -2;$

(d) $x = -9; y = -2;$

Lösung: (a) $T(-2; 3) = -1$

(b) $T(-5; -7) = 12$

(c) $T(3; -2) = -1$

(d) $T(-9; -2) = 11$

8. Gegeben ist der Term

$$T(x; y; z) = (x - y)^2 + 2xz$$

Berechne $T(2; \frac{1}{5}; \frac{1}{4})$.

Lösung: $4\frac{6}{25}$

9. Gegeben ist der Term

$$T(y) = |y - 2| + \frac{1}{2}$$

Berechne $T(0)$, $T(-4)$ und $T(\frac{1}{2})$.

Lösung: $2\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$, 2

10. Übertrage die Tabelle auf das Blatt und berechne folgende Terme für

a	-1	-3	$+1$	$+3$
b	$+5$	-5	$+5$	-5
$a-b$				
$a+b$				
$\lvert a\rvert-\lvert b\rvert$				

Lösung:

a	-1	-3	$+1$	$+3$
b	$+5$	-5	$+5$	-5
$a-b$	-6	$+2$	-4	$+8$
$a+b$	$+4$	-8	$+6$	-2
$\lvert a\rvert-\lvert b\rvert$	-4	-2	-4	-2

11. Übertrage die Tabelle auf das Blatt und berechne folgende Terme für

a	-2	-4	$+1$	$+6$
b	$+5$	-5	-5	-5
$a-b$				
$a+b$				
$\lvert a\rvert-\lvert b\rvert$				

Lösung:

a	-2	-4	$+1$	$+6$
b	$+5$	-5	-5	-5
$a-b$	-7	$+1$	$+6$	$+11$
$a+b$	$+3$	-9	-4	$+1$
$\lvert a\rvert-\lvert b\rvert$	-3	-1	-4	$+1$

12. Gib jeweils zwei Zahlen a und b ($\neq 0$) an, für die folgende Gleichung gilt und zwei, für die sie nicht gilt:

$$|a|+|b|=|a+b|$$

Lösung: Gleichung gilt u. a. für $a=-2$, $b=-5$; $a=2$, $b=5$
Gleichung gilt u. a. nicht für $a=-2$, $b=5$; $a=2$, $b=-5$

13. Berechne die Werte folgender Terme für alle Elemente der jeweiligen Grundmenge:
   (a) $T(x)=x-x^2,\quad G_T=\left\{-3\,;\,-1\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,\frac{2}{3}\,;\,1\,;\,1{,}5\right\}$
   (b) $p(x)=\dfrac{x+|x|}{2},\quad G_p=\left\{-5\,;\,-2\,;\,-\frac{1}{3}\,;\,0\,;\,\frac{2}{7}\,;\,1\,;\,2{,}5\,;\,7\right\}$

Lösung: (a)

x	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{2}{3}$	1	$1{,}5$
$T(x)$	-12	-2	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{2}{9}$	0	$-0{,}75$

(b)

x	-5	-2	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{7}$	1	$2{,}5$	7
$p(x)$	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	1	$2{,}5$	7

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geqq 0 \end{cases}$$

14. Berechne die Definitionsmengen folgender Terme:

(a) $T_1(x) = \dfrac{x^2}{3-x} + \dfrac{2x-7}{3x-5}, \quad G_1 = \mathbb{N}$

(b) $T_2(x) = \dfrac{x^2}{3-x} + \dfrac{2x-7}{3x-5}, \quad G_2 = \mathbb{Q}$

(c) $T_3(x) = \dfrac{2x-7}{(2x+3)(5x-5)(8x+2)}, \quad G_3 = \mathbb{Q}$

Lösung: (a) $D_1 = \mathbb{N}\backslash\{3\}$

(b) $D_2 = \mathbb{Q}\backslash\left\{3, \frac{5}{3}\right\}$

(c) $D_3 = \mathbb{Q}\backslash\left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, 1\right\}$

15. Berechne die Definitionsmengen folgender Terme:

(a) $T_1(x) = \dfrac{7}{x+|x|}, \quad G_1 = \mathbb{Q}$ (b) $T_2(x) = \dfrac{x}{x+|x|}, \quad G_2 = \mathbb{Z}$

(c) $T_3(x) = \dfrac{-2}{x-|x|}, \quad G_3 = \mathbb{Q}$ (d) $T_4(x) = \dfrac{-x^2}{x-|x|}, \quad G_4 = \mathbb{N}$

Lösung: (a) $x + |x| = \begin{cases} 2x & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leqq 0 \end{cases} \qquad D_1 = \mathbb{Q}^+ = \{x|x > 0\}$

(b) $D_2 = \mathbb{N}$

(c) $x - |x| = \begin{cases} 0 & \text{für } x \geqq 0 \\ 2x & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad D_3 = \mathbb{Q}^- = \{x|x < 0\}$

(d) $D_4 = \{\,\}$

16. Berechne die Definitionsmenge D des Terms $T(x) = \dfrac{3x+4}{2x-7}$ und die Termwerte $T(0)$, $T(-1)$ und $T\left(\frac{11}{3}\right)$.

Lösung: $D = \mathbb{Q}\backslash\left\{\frac{7}{2}\right\}, \quad T(0) = -\dfrac{4}{7}, \quad T(-1) = -\dfrac{1}{9}, \quad T\left(\dfrac{11}{3}\right) = \dfrac{11+4}{\frac{22}{3} - \frac{21}{3}} = 3 \cdot 15 = 45$

17. Berechne die Definitionsmenge D des Terms $T(x) = \dfrac{5-x}{|x|-2}$ und die Termwerte $T(0)$, $T(-1)$ und $T\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Lösung: $D = \mathbb{Q}\backslash\{-2; 2\}, \quad T(0) = -\dfrac{5}{2}, \quad T(-1) = -6, \quad T\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{5+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-2} = -\dfrac{16}{5} = -3{,}2$

2.2. Aufstellen und Interpretieren von Termen

1. **Streichholzkette**
   Mit Streichhölzern kann man Ketten mit Quadraten legen.

   (a) Wie viele Streichhölzer benötigt man für 1, 2, 3, 4 bzw. 12 Quadrate?

   (b) Gib eine Gleichung an, die den Zusammenhang zwischen der Anzahl k der Quadrate und der Anzahl s der benötigten Streichhölzer allgemein beschreibt.

   Quelle: VERA C 2008

Lösung: (a) 4, 7, 10, 13 bzw. 37 Streichhölzer

(b) $s(k) = 4 + 3 \cdot (k - 1)$

2. (a) Kann man jeden Stammbruch als Summe zweier Stammbrüche darstellen?

   (b) Kann man jeden Stammbruch als Summe von zwei verschiedenen Stammbrüchen darstellen?

   (c) Kann man jeden Stammbruch als Summe von drei, vier oder noch mehr verschiedenen Stammbrüche darstellen?

   (d) Ist die Summe zweier Stammbrüche stets wieder (ggf. nach Kürzen) ein Stammbruch?

   (e) Ist das Produkt zweier Stammbrüche stets wieder ein Stammbruch?

   (f) Ist jeder Stammbruch als Produkt zweier Stammbrüche darstellbar?

   (g) Ist jede Bruchzahl als Summe zweier Stammbrüche darstellbar?

   (h) Ist jede Bruchzahl < 1 als Summe zweier Stammbrüche darstellbar?

   (i) Ist jede Bruchzahl < 1 als Stammbruchsumme darstellbar?

   (j) Ist jede Bruchzahl < 1 als Summe von verschiedenen Stammbrüchen darstellbar? Ist eine solche Darstellung (bis auf Reihenfolge) eindeutig?

   (k) Ist jede Bruchzahl als Differenz zweier Stammbrüche darstellbar?

   Quelle: H. Schupp, Aufgabenvariation im Mathematikunterricht, sinus-transfer.uni-bayreuth.de/fileadmin/MaterialienBT/Themivarkurz.doc

Lösung: (a) Ja, $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$, z. B. $\frac{1}{7} = \frac{1}{14} + \frac{1}{14}$

(b) Ja, $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$, z. B. $\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$

(c) Ja, denn der zweite Stammbruch aus (b) lässt siche wieder als Summer zweier verschiedener Stammbrüche darstellen; analog bei vier oder mehr Stammbrüchen

(d) Nein, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

(e) Ja, $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{n\cdot m}$

(f) Ja, $\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1}$

(g) Nein, denn die Summer ist immer < 2.

(h) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$, für $\frac{4}{5}$ folgt aus dem Nenner $a = 1$ oder $a = 5$, woraus für b ein Widerspruch folgt

(i) $\frac{a}{b}$ ist Summe von a Summanden $\frac{1}{b}$

(j) Ja, z.B. indem man sie sukzessive durch den jeweils größten Stammbruch ausschöpft. Beispiel: $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$

(k) Wegen $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+i} = \frac{i}{n\cdot(n+i)}$ können nur Brüche dieser Form als Differenz von Stammbrüchen dargestellt werden.

3. Max möchte sich einen Computer für 1050 EUR kaufen. Von seiner Oma bekommt er dafür 350 EUR. Er selbst kann monatlich 140 EUR sparen.
Mit welcher Gleichung kann Max berechnen, wie viele Monate er sparen muss?

A: 1050 EUR = 140 EUR $\cdot\, x$
B: x + 350 EUR = 1050 EUR
C: 1050 EUR − 350 EUR = 140 EUR $\cdot x$
D: 140 EUR $\cdot\, x$ − 350 EUR = 1050 EUR
E: 350 EUR $\cdot\, x$+ 140 EUR = 1050 EUR

Quelle: Vergleichsarbeit bundesland- und schulartübergreifend in der Jahrgangsstufe 8, Materialien zur Weiterarbeit

Lösung: C

4. Die Tabelle zeigt für die Jahre 1992 bis 2004 die durchschnittliche tägliche Fernsehdauer für einen Zuschauer in Deutschland.

Jahr	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Minuten	158	166	167	175	183	183	188	185	190	192	201

(a) Um wie viel Prozent ist die tägliche Fernsehdauer im Jahr 2002 größer als im Jahr 1992?

(b) Welche der folgenden Geradengleichungen beschreiben die Entwicklung der täglichen Fernsehdauer am besten?
Dabei ist y die Maßzahl der täglichen durchschnittlichen Fernsehdauer in Minuten und $x + 1992$ die jeweilige Jahreszahl, d. h. beispielsweise für das Jahr 2002 ist $x = 10$.

$y = 4x + 158$	$y = -4x + 158$	$y = 4x - 158$
$y = 158x + 4$	$y = 2x + 158$	$y = 2x - 158$

(c) Die durchschnittliche tägliche Fernsehdauer für die Zuschauer in den alten Bundesländern 203 Minuten, für die Zuschauer in den neuen Budnesländern 238 Minuten.
Berechnen Sie den Mittelwert der Zahlen 203 und 238 und begründe, warum man mit dieser Information keine Aussage über die durchschnittliche tägliche Fernsehdauer für einen Zuschauer in Deutschland machen kann.

nach: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 8 der Gymnasien, 2006

Lösung: (a) 27%, (b) $y = 4x + 158$
(c) z. B. in den alten Bundesländern gibt es mehr Zuschauer als in den neuen Bundesländern

5. **Skispringen**

Bei Skispringern erfolgt die Bewertung durch Haltungsnoten und die Weite des Sprungs.

5 Sprungrichter geben Haltungsnoten von 0 bis 20, dabei können auch halbe Punkte gegeben werden. Die höchste und die niedrigste Punktzahl werden gestrichen. Die Summe der drei verbleibenden Wertungen ergibt die Haltungsnote.

Die Punktzahl für die Weite wird für jede Schanze mithilfe des Schanzenfaktors und der Normweite der Schanze unterschiedlich errechnet. Trifft man die Normweite genau, erhält man 60 Punkte. Jeder mehr gesprungene Meter wir mit dem Schanzenfaktor multipliziert und addiert, für jeden weniger gesprungenen Meter erhält man einen entsprechenden Abzug.

Die Summe von Haltungsnote und Weitenpunkten bestimmt die Rangfolge.

Name	Weite	W-Pkt	K1	K2	K3	K4	K5	H-Pkt	Pkt	Rang
Müller	113m		17,5	17,0	18,0	17,5	18,5			
Meier	127m		18,0	17,5	18,0	18,0	18,0			
Schluze	131m		19,0	17,5	19,5	20,0	18,5			
Huber	118m		17,5	18,5	18,5	19,0	19,0			

(a) Berechne für diese vier Springer für das oben angegebene Beispiel die Haltungsnoten, die Weitenpunkte, die Punktzahl und die Rangfolge. Der Schanzenfaktor beträgt 1,2 und die Normweite 120m.

(b) Entwickle und überprüfe durch Einsetzten eine Formel zur Berechnung der Weitenpunkte.

(c) Automatisiere die Berechnung mit einem Tabellenkalkulationsprogramm.

Quelle: Übungsheft zu den Bildungsstandards Mahtematik Klasse 9-10, Froum Verlag Herkert GmbH, Merching, 2006

Lösung: (a)

Name	Weite	W-Pkt	K1	K2	K3	K4	K5	H-Pkt	Pkt	Rang
Müller	113m	51,6	17,5	17,0	18,0	17,5	18,5	53	104,6	4
Meier	127m	68,4	18,0	17,5	18,0	18,0	18,0	54	122,4	2
Schluze	131m	73,2	19,0	17,5	19,5	20,0	18,5	57	130,2	1
Huber	118m	57,6	17,5	18,5	18,5	19,0	19,0	56	113,6	3

(b) W: Weitenpunkte; w: gesprungene Weite; n: Normweite; s: Schanzenfaktor

$\Rightarrow W(w) = 60 + s \cdot (w - n)$

6. Die Wintersaison im Skigebiet hat begonnen. Auf der Piste gibt es Schneeprobleme. Schon lange liegen die Temperautren ständig unter dem Gefrierpunkt, der für den Wintersport dringend benötigte Schnee lässt auf sich warten. Endlich setzte der Schneefall ein. Es schneit zwei Tage und Nächte nahezu mit der gleichen Intensität. Die Höhe des Schnees wächst stündlich um 1,25cm. Für den Liftbetrieb muss eine Mindesthöhe von 20cm Schnee vorliegen.

   (a) Welche Schneehöhe ist nach vier Stunden erreicht, welche nach zehn Stunden?

   (b) Gib eine Gleichung für die Zurodnung Zeit $\rightarrow$ Schneehöhe an und zeichen den Graphen.

   (c) Nach welcher Zeitspanne ist die für den Liftbetrieb erforderliche Schneehöhe erreicht?

   Quelle: Übungsheft zu den Bildungsstandards Mahtematik Klasse 9-10, Froum Verlag Herkert GmbH, Merching, 2006

Lösung: (a) nach vier Stunden: 5cm, nach zehn Stunden: 12,5cm

(b) $t \rightarrow t \cdot 1,25cm$

(c) 16 Stunden

7. Wie viele Diagonalen hat ein 16-Eck?

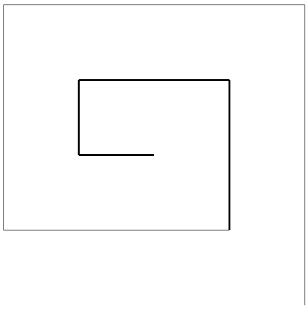
Lösung: Anzahl der Diagonalen in Abhängigkeit der Eckenzahl:

Ecken	3	4	5	6
Diagonalen	0	2	5	9

Anzahl der zusätzlichen Diagonalen bei der n-ten Ecke: $n - 2$ für $n \geq 4$

Anzahl Diagonalten bei 16-Eck: $14 + 13 + 12 + \cdots 3 + 2 = 104$

8. Die Skizze zeigt die erste Windung einer ,,Quadrat-Spirale", die innen am Punkt ,,Start" mit einer Strecke der Länge 1 beginnt.



   (a) Zeichne eine weitere Windung ein und gib an, um wie viele Längeneinheiten diese dritte Windung länger ist als die zweite Windung.
   (b) Ermittle eine Term T(n), der die Länge der n-ten Windung in Abhängigkeit von n angibt.

   Quelle: Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur, ISB 2001

Lösung: (a) Dir dritte Windung ist um acht Längeneinheiten länger als die zweite Windung.
(b) $T(n) = 6 + (n-1) \cdot 8 = 8n - 2$

9. **Wortform von Termen**
   (a) Gib einen Term mit einer Variablen an, der zu jeder Zahl, die man für die Variable einsetzt,
      i. das Doppelte der Zahl;
      ii. die Hälfte der Zahl, vermindert um 3;
      iii. die Hälfte der um drei verminderten Zahl;
      iv. das Quadrat der Zahl;
      v. den Kehrwert der Zahl;
      vi. den Vorgänger der Zahl;
      vii. das Dreifache des Kehrwerts;
      viii. den Kehrwert des Dreifachen der Zahl liefert.
   (b) Der Term $2 \cdot n$ für $n \in \mathbb{N}$ beschreibt eine beliebige gerade Zahl. Beschreibe durch einen Term
      i. eine beliebige durch 3 teilbare Zahl;
      ii. eine beliebige ungerade Zahl;
      iii. eine beliebige Quadratzahl.

iv. Finde weitere Beschreibungen und den dazugehörigen Term.

(c) Ein Paket hat die Masse a kg, ein anderes b kg. Was bedeuten die folgenden Aussagen?

i. $a + b = 10$

ii. $a = b + 10$

iii. $b = \frac{1}{2} \cdot a$

(d) Es seien a, b und c natürliche Zahlen, wobei $a > b + c$ ist.

i. Beschreibe die Aussage $a - (b + c) = (a - b) - c$.

ii. Stelle die Aussage mit Hilfe von Strecken dar.

iii. Erfinde eine Geschichte zu dieser Aussage, z.B.: „In einem Reisebus befinden sich a Personen...“.

Lösung: (a) i. $2x$ ii. $x : 2 - 3$ iii. $(x - 3) : 2$ iv. x^2
v. $\frac{1}{x}$ vi. $x - 1$ vii. $3 \cdot \frac{1}{x}$ viii. $\frac{1}{3x}$

(b) i. $3 \cdot n$ ii. $2 \cdot n - 1$ iii. n^2

(c) i. Beide Pakete haben zusammen die Masse 10 kg.

ii. Paket a hat um 10kg mehr Masse als Paket b.

iii. Paket b hat die halbe Masse von Paket a.

(d) (i) Z. B.: Subtrahiert man die Summe zweier Zahlen b und c von einer Zahl erhält man den gleichen Wert, wie wenn die beiden Zahlen nacheinander subtrahiert werden.

10. In den folgenden Quadraten ist jeweils die Summe der Zahlen in den Zeilen und in den Spalten gleich groß. Vervollständige die folgenden Quadrate:

(a)

$\frac{1}{10}$	2,6	$-\frac{7}{10}$
	40%	

(b)

		$-\frac{7}{8}$
0,475	15%	$2\frac{3}{8}$

(c)

		$\frac{5}{4}$
	0,75	
-7	30%	

Lösung: x ist eine beliebige Zahl:

(a)

0,1	2,6	$-0{,}7$
x	0,4	$1{,}6 - x$
$1{,}9 - x$	-1	$1{,}1 + x$

z.B.

$\frac{1}{10}$	2,6	$-\frac{7}{10}$
$-0{,}4$	40%	2
2,3	-1	0,7

(b)

x	$3{,}875 - x$	$-0{,}875$
0,475	0,15	2,375
$2{,}525 - x$	$x - 1{,}025$	1,5

z.B.

$-1{,}2$	5,075	$-\frac{7}{8}$
0,475	15%	$2\frac{3}{8}$
3,725	$-2{,}225$	1,5

(c)

$-0{,}2$	x	1,25
$8{,}25 + x$	0,75	$-7{,}95$
-7	0,3	$7{,}75 + x$

z.B.

$-0{,}2$	$-6{,}05$	$\frac{5}{4}$
2,2	0,75	$-7{,}95$
-7	30%	1,7

11. Viele fügen beim Puzzeln zuerst die Randteile zusammen. Bei einem quadratischen 3×3-Puzzle ist man damit bereits mit dem gesamten Puzzle fast fertig, da nur noch das mittlere Teil fehlt.

    (a) Stelle eine Tabelle auf, in der du die Anzahl der Randteile und die entsprechende Anzahl der Innenteile quadratischer $n \times n$-Puzzles gegenüberstellst.

    (b) Stelle einen Term zur Berechnung der Anzahl der Randteile eines $n \times n$-Puzzles auf. Stelle den Term graphisch dar.

    (c) Stelle einen Term zur Berechnung der Anzahl der Innenteile eines $n \times n$-Puzzles auf. Stelle den Term graphisch dar.

    (d) Für welche Zahl n bei einem $n \times n$-Puzzle hat man genauso viele Randteile wie Innenteile

    Quelle: Standard Mathematik von der Basis bis zur Spitze, Grundbildungsorientierte Aufgaben für den Mathematikunterricht, Christina Drüke-Noe, Dominik Leiß, Institut für Qualitätsentwicklung, Wiesbaden, 2005

Lösung: (a)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Randteile R(n)	1	4	8	12	16	20	24	28	32
Innenteile I(n)	0	0	1	4	9	16	25	36	49

(b) $R(n) = (n-1) \cdot 4$

(c) $I(n) = (n-2)^2$

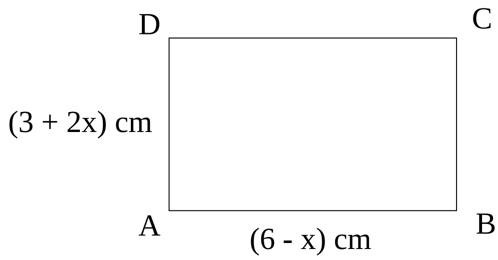
(d) $R(6) > I(6)$, $R(7) < I(7)$ aus Tabelle oder Graphen

12. (a) Berechne den Umfang des Rechtecks $ABCD$ für $x = 2{,}5$.

    (b) Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ für $x = 3{,}5$.

    (c) Wie ändert sich die Form des Rechtecks, wenn $x \in \mathbb{Q}^+$ immer kleiner wird?

    (d) Gib zwei verschiedene Belegungen von x an, so dass es jeweils dafür kein Rechteck gibt. Begründe deine Wahl.



Lösung: (a) $u = 23\,\text{cm}$

(b) $A = 25\,\text{cm}^2$

(c) Das Rechteck wird breiter und niedriger.

(d) Z.B. $x = 6$: Das Rechteck entartet zur Strecke.
Oder $x = 7$, dann hätte die Strecke $[AB]$ eine negative Länge.
Hinweis: Manche Schüler/innen sind der Ansicht, dass der Fall $x = 1$ eine richtige Antwort sei, denn ein Quadrat ist eben nach ihrer Ansicht kein Rechteck.

13. Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist 195. Um welche Zahlen handelt es sich,

(a) wenn die eine viermal so groß ist wie die andere?

(b) wenn die eine 12-mal so groß ist wie die andere?

(c) wenn die eine n-mal, $n \in \mathbb{N}$, so groß ist wie die andere? Für welche n ist die Aufgabe überhaupt lösbar?

(d) Welches Problem könnte in der Realität die Beschränkung der Grundmenge auf die Menge der natürlichen Zahlen notwendig machen?

(e) Anstelle der Zahl 195 wählt man eine andere dreistellige Zahl als Summe, um zu erreichen, dass die Aufgabe für mehr Werte von n lösbar ist. Nenne einige geeignete Zahlen. Erkläre, wie man solche Zahlen findet.

(f) Suche eine dreistellige Zahl, die an der Stelle von 195 für möglichst wenige Werte von n zu Lösungen führt und gib die Anzahl der möglichen n an.

Quelle: Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur, ISB 2001

Lösung: (a) 39 und 156

(b) 15 und 180

(c) $x + y = 195$ und $x = ny \Rightarrow y = \frac{195}{n+1} \Rightarrow$ lösbar für $n = 2, 4, 12, 14, 38, 64, 194$

$n = 2 \Rightarrow 65$ und 130, $n = 4 \Rightarrow 39$ und 156, $n = 12 \Rightarrow 15$ und 180,
$n = 14 \Rightarrow 13$ und 182, $n = 38 \Rightarrow 5$ und 190, $n = 64 \Rightarrow 3$ und 192,
$n = 194 \Rightarrow 194$ und 1

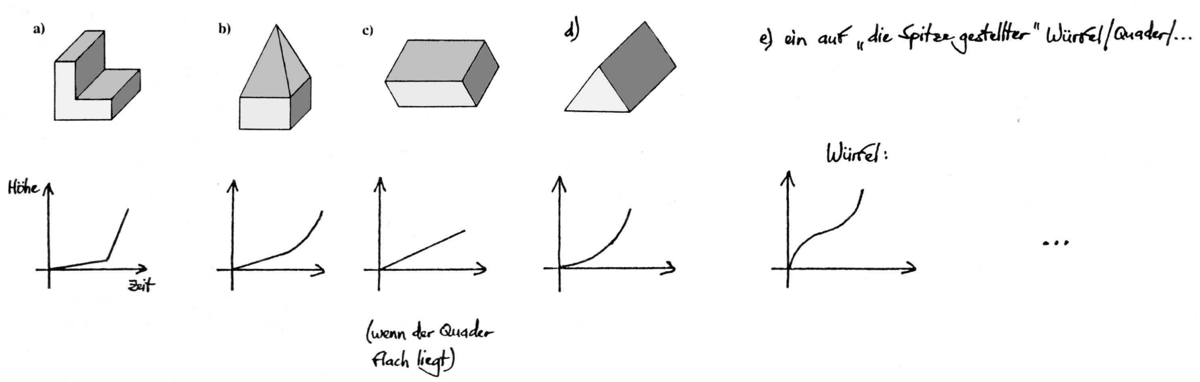
(d) Problemstellungen, die sich um die Verteilung bestimmter unteilbarer Güter drehen, können eine Beschränkung der Grundmenge notwendig machen.

(e) „Besser" als 195 wären beispielsweise die Zahlen 360 und 720 geeignet, da ihre Primzahlzerlegung deutlich mehr Lösungskombinationen zulässt.

(f) Primzahlen lassen nur eine Lösungskombination zu.

14. **Füll-Graphen**

Gegeben sind folgende Gefäße. Finde jeweils den zugehörigen Graphen, der die Wasserhöhe beim Befüllen des Gefäßes angibt.



Umkehraufgabe: Gegeben ist ein Graph, wie könnte ein zugehöriges Gefäß aussehen?

Begründungen: Warum/wann tritt ein Knick auf usw.

Lösung: offen

15. **Wortform von Termen**

(a) Gib einen Term mit einer Variablen an, der zu jeder Zahl, die man für die Variable einsetzt,

i. das Doppelte der Zahl;

ii. die Hälfte der Zahl, vermindert um 3;

iii. die Hälfte der um drei verminderten Zahl;

iv. das Quadrat der Zahl;

v. den Kehrwert der Zahl;

vi. den Vorgänger der Zahl;

vii. das Dreifache des Kehrwerts;

viii. den Kehrwert des Dreifachen der Zahl liefert.

(b) Der Term $2 \cdot n$ für $n \in \mathbb{N}$ beschreibt eine beliebige gerade Zahl. Beschreibe durch einen Term

i. eine beliebige durch 3 teilbare Zahl;

ii. eine beliebige ungerade Zahl;

iii. eine beliebige Quadratzahl.

iv. Finde weitere Beschreibungen und den dazugehörigen Term.

(c) Ein Paket hat die Masse a kg, ein anderes b kg. Was bedeuten die folgenden Aussagen?

i. $a + b = 10$

ii. $a = b + 10$

iii. $b = \frac{1}{2} \cdot a$

(d) Es seien a, b und c natürliche Zahlen, wobei $a > b + c$ ist.

i. Beschreibe die Aussage $a - (b + c) = (a - b) - c$.

ii. Stelle die Aussage mit Hilfe von Strecken dar.

iii. Erfinde eine Geschichte zu dieser Aussage, z.B.: „In einem Reisebus befinden sich a Personen...“.

Lösung: (a) i. $2x$ ii. $x : 2 - 3$ iii. $(x - 3) : 2$ iv. x^2
v. $\frac{1}{x}$ vi. $x - 1$ vii. $3 \cdot \frac{1}{x}$ viii. $\frac{1}{3x}$

(b) i. $3 \cdot n$ ii. $2 \cdot n - 1$ iii. n^2

(c) i. Beide Pakete haben zusammen die Masse 10 kg.

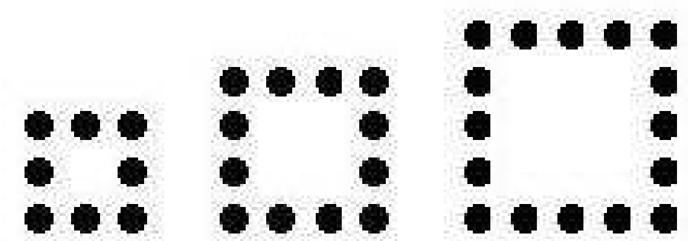
ii. Paket a hat um 10kg mehr Masse als Paket b.

iii. Paket b hat die halbe Masse von Paket a.

(d) (i) Z. B.: Subtrahiert man die Summe zweier Zahlen b und c von einer Zahl erhält man den gleichen Wert, wie wenn die beiden Zahlen nacheinander subtrahiert werden.

16. **Plättchenmuster**

(a) Schau dir die folgende Reihe aus regelmäßig wachsenden Plättchenmustern genau an und versuche, sie fortzusetzen. Wie viele Plättchen sind in einer Grundseite, wenn die gesamte Figur aus 28 (68) Plättchen besteht?



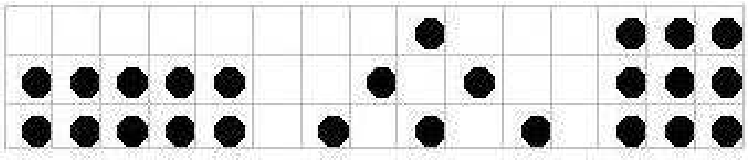
(b) Gegeben sind die Terme $2 \cdot n$, $3 \cdot n - 3$, $n \cdot n$, wobei n für irgendeine natürliche Zahl steht. Lege Figuren, bei denen sich die Gesamtzahl der Plättchen durch den vorgegebenen Term bestimmen lässt.

(c) Denkt euch andere Muster aus, bei denen ihr die Gesamtzahl der Plättchen gut mit einem Rechenausdruck bestimmen könnt. Notiert den Rechenausdruck und lasst die Nachbargruppe das Muster dazu raten.

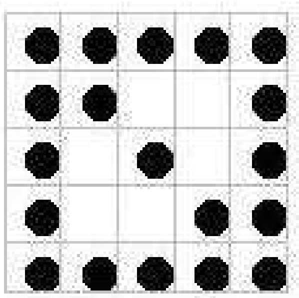
Quelle: Sinus-Transfer

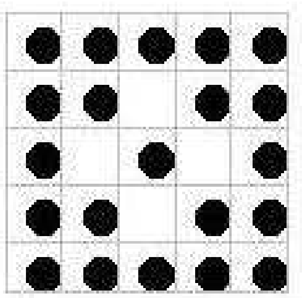
Lösung: (a) n: Anzahl der Plättchen auf der Grundseite. N: Anzahl der Gesamtplättchen. Dann gilt: $N = 4n - 4 = 4(n - 1)$. Für $N = 28$ gilt: $n = 8$. Für $N = 68$ gilt: $n = 18$.

(b) jeweils fortgesetzt...(Dreieck innen leer)



(c) Z. B.

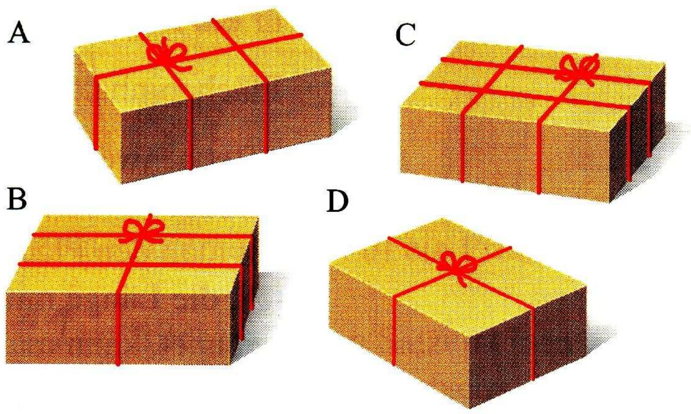




$2n + 3(n-2) = 5n - 6$ $\quad$ $2n + 3(n-2) + n - 3 = 6n - 9$

17. **Immer wieder gleiche Seiten und Flächen**

 (a) Ein Paket hat die Länge $l = 35$ cm, die Breite $b = 25$ cm und die Höhe $h = 12$ cm. Je nach Gewicht des Inhaltes soll es unterschiedlich verschnürt werden. Schätzt, für welches Paket ihr am meisten Schnur benötigt. Gebt noch 20 cm (insgesamt) für die Knoten hinzu und berechnet die jeweils benötigte Schnurlänge. Versucht, einen Schuhkarton wie in der Grafik dargestellt zu schnüren, die Kordel soll nirgends doppelt verlaufen.



 (b) Gebt die Schnurlängen auch allgemein für solche Pakete mit der Länge l, der Breite b und der Höhe h an.

 (c) Wie sieht eine Paket-Schnürung aus zu $4l + 6b + 10h + 15$ cm bzw. zu $3l + 2b + 4h + 10$ cm?

(d) Überlege dir weitere Terme und lass deinen Nachbarn die Pakete aufzeichnen.

Quelle: Sinus-Transfer

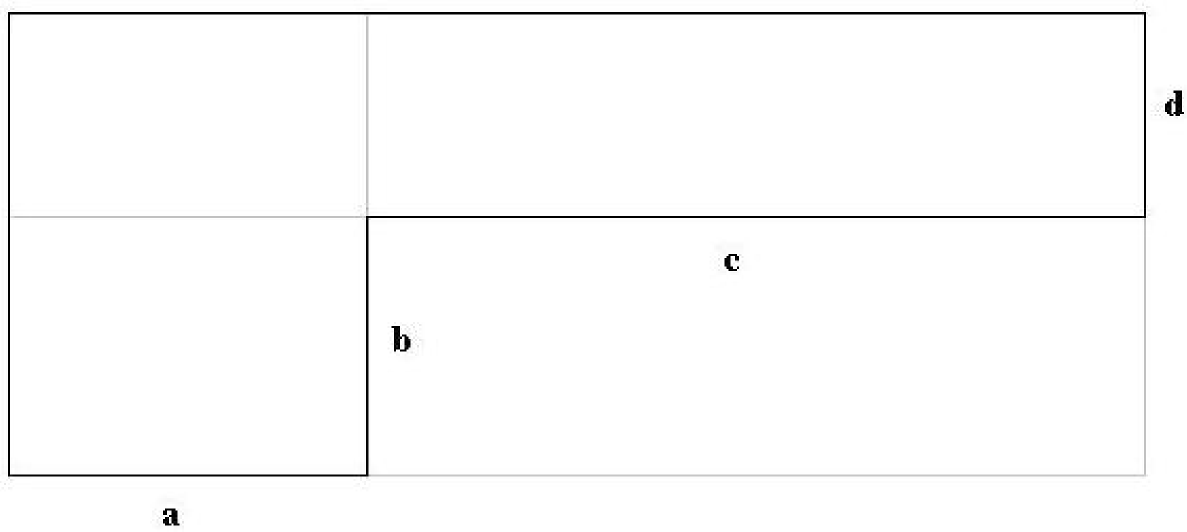
Lösung: (a) A: $2l + 4b + 6h + 20\,\text{cm} = 2(l + 2b + 3h) + 20\,\text{cm} = 262\,\text{cm}$
B: $4l + 2b + 6h + 20\,\text{cm} = 2(2l + b + 3h) + 20\,\text{cm} = 282\,\text{cm}$
C: $4l + 4b + 8h + 20\,\text{cm} = 2(2l + 2b + 4h) + 20\,\text{cm} = 356\,\text{cm}$
D: $2l + 2b + 4h + 20\,\text{cm} = 2(l + b + 2h) + 20\,\text{cm} = 188\,\text{cm}$

(b) vgl. (a)

(c) $4l + 6b + 10h + 15\,\text{cm}$: zwei parallele Schnürungen entlang l, drei parallele Schnürungen entlang b, Schleife 15 cm
$3l + 2b + 4h + 10\,\text{cm}$: nicht möglich

18. **Aufstellen von Formeln für Umfang und Flächeninhalt**

Stelle eine Formel für den Umfang und eine Formel für den Flächeninhalt der folgenden Figur auf:



Quelle: Sinus-Transfer

Lösung: $U = a+b+c+d+(a+c)+(d+b) = 2a+2b+2c+2d = 2(a+b+c+d)$ $A = a\cdot(b+d)+c\cdot d = (a + c) \cdot d + a \cdot b = (a + c) \cdot (b + d) - b \cdot c = ab + ad + cd$

19. Die Fußballmannschaft Champions trainiert an drei Werktagen in der Woche jeweils von 18 bis 20 Uhr. Jeden Sonntag findet ein Spiel statt, das genau 2 Stunden dauert. Die Mannschaftsmitglieder, die gerade nicht auf dem Spielfeld sind, trainieren

unterdessen. Jeder Spieler trägt ein Paar Socken, die nach vier Stunden Spiel oder Training durchgelaufen sind.

Stelle einen Term $T(M)$ für die Anzahl der durchgelaufenen Sockenpaare pro Woche auf, wenn die Mannschaft Champions aus M Mannschaftsmitgliedern besteht!

Lösung: $T(M) = (3 \cdot 2 + 2) \cdot M/4 = 2M$

20. Bilde den Term zu folgenden Gliederungen:
    (a) T ist ein Bruch; der Zähler ist die Summe aus c und dem Produkt aus a und b, der Nenner ist die dreifache Differenz aus a und b.
    (b) T ist eine Differenz; der Minuend ist das Quadrat der Summe aus x und y, der Subtrahend ist der Quotient aus x und z.

Lösung: (a) $\dfrac{c + ab}{3(a - b)}$ (b) $(x + y)^2 - \dfrac{x}{z}$

21. **Zerlegung eines Rechtecks in Dreiecke**

    Im Inneren eines Rechtecks sind Punkte gegeben. Sie heißen „verstreut“, wenn je drei Punkte, einschließlich der Eckpunkte des Rechtecks, nicht auf einer Geraden liegen. Das Rechteck wird in Dreiecke zerlegt, deren Eckpunkte nur die gegebenen „verstreuten“ Punkte oder Eckpunkte des Rechtecks sind.

    (a) Zeichne ein Rechteck mit vier „verstreuten“ Punkten. Trage zwei verschiedene Zerlegungen des Rechtecks in Dreiecke ein. Bestimme jeweils die Anzahl der entstandenen Dreiecke.
    Wähle in einer neuen Zeichnung andere Positionen für die vier ,,verstreuten” Punkte und bestimme erneut die Anzahl der Dreiecke bei zwei verschiedenen Zerlegungen.
    (b) Wie viele Dreiecke entstehen bei einer Zerlegung, wenn im Inneren kein, ein, zwei oder drei „verstreute“ Punkte liegen?
    (c) Wie viele Dreiecke entstehen bei einer Zerlegung, wenn im Inneren 20 „verstreute“ Punkte liegen?
    (d) Gib einen Term an, mit dem du die Anzahl der Dreiecke bestimmen kannst, wenn k die Anzahl der „verstreuten“ Punkte angibt.
    (e) Die Anzahl der Dreiecke bei einer Zerlegung kann auch mit einer anderen Überlegung gewonnen werden: Jeder Punkt im Inneren ist Eckpunkt mehrerer Dreiecke und jeder Eckpunkt des Rechtecks ist Eckpunkt von mindestens einem Dreieck. Addiere die Innenwinkel aller Dreiecke, indem du die Winkel an den inneren Punkten und an den Eckpunkten addierst. Berechne dann die Anzahl der Dreiecke.

Quelle: Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur, ISB 2001

Lösung:
(a) Es entstehen jeweils 10 Dreiecke.
(b) Es entstehen 2, 4, 6 und 8 Dreiecke.
(c) Es entstehen jeweils 42 Dreiecke.
(d) $2k + 2$
(e) $(k \cdot 360° + 4 \cdot 90°) : 180° = 2k + 2$

22. (a) Die monatlichen Telefongebüren berechnen sich beim Anbieter FONO aus der Grundgebühr und der Anzahl der Gespräche, wobei 12 Gespräche frei sind:

Grundgebühr:	13,60 €
1 Gespräch kostet:	0,11 €

i. Stelle einen Term für die Berechnung der monatlichen Telefongebühren auf.
ii. Bestimme die Definitionsmenge und berechne einige Werte des Terms.

(b) Die monatlichen Telefongebüren berechnen sich beim Konkurrenten von FONO aus der Grundgebühr und der Anzahl der Nah- und Ferngespräche, wobei 8 Nahgespräche frei sind:

Grundgebühr:	13,60 €
1 Nahgespräch kostet:	0,05 €
1 Ferngespräch kostet:	0,15 €

i. Stelle einen Term für die Berechnung der monatlichen Telefongebüren auf. Berechne einige Werte des Terms.
ii. Wann ist es besser beim Anbieter Fono bzw. dem Konkurrenten zu telefonieren?

(c) i. Finde die Telefongebühren verschiedener Anbieter heraus und stelle jeweils einen Term zur Berechnung der monatlichen Gebühren auf.
ii. Untersuche wie man am günstigsten telefoniert.

Lösung: (a) i. $T(x) = 13{,}60 + (x - 12) \cdot 0{,}11$
ii. Für die sinnvolle Grundmenge $G = \mathbb{N}_0$ ist $D = \{12; 13; 14; \cdots\}$
Z. B. $T(15) = 13{,}93$, $T(62) = 19{,}10$, ...

(b) i. $T(x; y) = 13{,}60 + (x - 8) \cdot 0{,}05 + y \cdot 0{,}15$
Z. B. $T(0; 50) = 21{,}10$, $T(50; 0) = 15{,}70$, $T(25{,}25) = 18{,}20$
ii. Z. B.: Es ist besser beim Anbieter FONO zu telefonieren, wenn für mindestens 12 Nahgespräche die Anzahl der Ferngespräche mehr als $\frac{6x-92}{15}$ (x: Anzahl der Ortsgespräche) ist.

23. (a) Was versteht man in Zusammenhang mit Flächenbestimmungen unter dem Prinzip der Zerlegungsgleichheit? Erläutere dies anhand eines skizzierten Beispiels.
    (b) Ein Trapez der Höhe $h = 5\,\text{cm}$ besitzt eine Fläche von $45\,\text{cm}^2$. Berechne die beiden Grundlinien, wenn eine von ihnen doppelt so lange wie die andere ist.

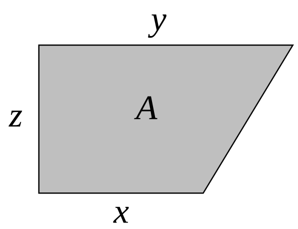
Lösung: (b) $6\,\text{cm}$ und $3\,\text{cm}$

24. Welche Mengen werden durch folgende Terme mit den jeweiligen Grundmengen beschrieben?
    (a) $T(x) = x^2, \quad G_T = \mathbb{N}$
    (b) $g(n) = 2n, \quad G_g = \mathbb{N}$
    (c) $u(n) = 2n - 1, \quad G_u = \mathbb{N}$
    (d) $B(a,b) = \dfrac{a}{b}, \quad a \in G_a = \mathbb{Z}, \quad b \in G_b = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
    (e) $n(y) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}, \quad G_n = \mathbb{N}$

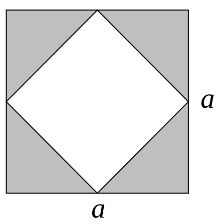
Lösung: (a) Quadratzahlen (b) gerade Zahlen (c) ungerade Zahlen (d) $\mathbb{Q}$
(e) $\mathbb{N}_0$

25. Stelle einen Term zur Berechnung der getönten Fläche A auf, der die aus der Zeichnung ersichtlichen Variablen enthält. Setze dann die angegebenen Werte für die Variablen ein.

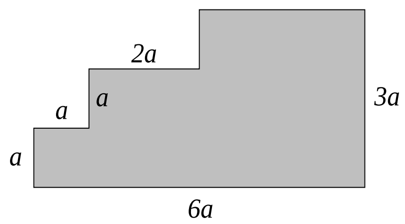
(a)



(b)



(c)



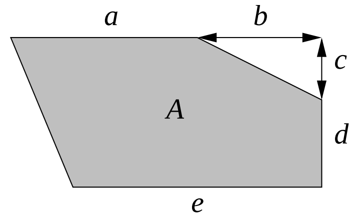
$z = x,\ y = 2x$ $\qquad a = 3\,\text{cm}$ $\qquad a = 2{,}5\,\text{cm}$

Lösung: (a) $A = xz + \dfrac{1}{2}(y - x)z = \dfrac{x + y}{2} \cdot z, \quad A = \dfrac{3}{2}x^2$

(b) $A = 4 \cdot \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}a^2, \quad A = 4{,}5\,\text{cm}^2$

(c) $A = a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 = 14a^2, \quad A = 87{,}5\,\text{cm}^2$

26. (a) Stelle einen Term zur Berechnung der getönten Fläche A auf, der die aus der Zeichnung ersichtlichen Variablen enthält.



(b) Berechne A dann für $a = 5\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $c = 2\,\text{cm}$, $d = 3\,\text{cm}$ und $e = 7\,\text{cm}$.

(c) Welche Bedingungen müssen zwischen den Variablen a, b, c, d und e bestehen, damit die Figur ein Parallelogramm, ein Rechteck oder gar ein Quadrat ist?

(d) Suche mindestens zwei verschiedene Ersetzungen für die Variablen a, b, c, d und e, für die $A = 100\,\text{cm}^2$ ist und zeichne die Figuren im Maßstab $1 : 2$.

(e) Suche mindestens zwei verschiedene Ersetzungen für die Variablen a, b, c und d, für die $A = e^2$ ist und skizziere die entsprechenden Figuren.

Lösung: (a) $A = (a+b)(c+d) - \frac{1}{2}bc - \frac{1}{2}(a+b-e)(c+d) = \frac{(a+e)(c+d)+bd}{2}$

(b) $A = 36\,\text{cm}^2$

(c) Parallelogramm: $a = e$, $d = 0$ oder wie beim Rechteck
Rechteck: $a = e$, $b = 0$ oder $a + b = e$, $c = 0$
Quadrat: $a = e$, $b = 0$, $c + d = e$ oder $a + b = e$, $c = 0$, $d = e$

(d) Zwei Beispiele, alle Maße in cm: $a = d = e = 10$, $b = c = 0$ oder
$a = 7$, $b = 5$, $c = 4$, $d = 6$ und $e = 10$

(e) Zwei Beispiele: $a = e$, $b = 0$, $c = 0$ und $d = e$ oder $a = e$, $b = e$, $c = e$ und $d = 0$

27. Die Berechnung der Jahresendnote in Mathematik könnte durch folgenden Term geschehen, wobei S_1 bis S_4 die Schulaufgabennoten, E_1 bis E_4 die Exnoten und m_1 und m_2 die reinen mündlichen Noten sind:

$$N(S_1, S_2, ..., m_2) = \frac{1}{3}\left(2 \cdot \underbrace{\frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{4}}_{S_{\text{gesamt}}} + \underbrace{\frac{2E_1 + 2E_2 + 2E_3 + 2E_4 + m_1 + m_2}{10}}_{M_{\text{gesamt}}}\right)$$

(a) Welche Grundmenge ist für die Variablen S_1 bis m_1 sinnvoll?

(b) Folgende Tabelle zeigt einen Ausschnitt aus dem Notenbuch des Lehrers. Berechne jeweils die gesamte schriftliche Note S_{ges}, die gesamte mündliche Note M_{ges} und die Endnote N, alle Werte auf zwei Dezimalen gerundet.

Name	S_1	S_2	S_3	S_4	E_1	E_2	E_3	E_4	m_1	m_2	S_{ges}	M_{ges}	N
Huber	3	4	3	5	6	3	4	4	3	4			
Maier	5	5	4	5	6	6	5	4	4	4			
Müller	1	2	1	2	2	1	1	2	1	1			

(c) Maier hat vor der vierten Ex und der zweiten rein mündlichen Note noch Nachhilfe genommen. Hätte er seine Endnote noch verbessern können?

Lösung: (a) $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

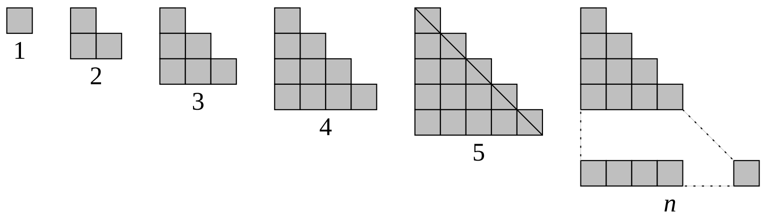
(b)

Name	S_{ges}	M_{ges}	N
Huber	3,75	4,10	3,87
Maier	4,75	5,00	4,83
Müller	1,50	1,40	1,47

(c) Nein, mit $E_4 = 1$ und $m_2 = 1$ wäre $M = 4,10$ und $N = 4,53$.

28. Die Flächen der folgenden Figuren sind

$$A(1) = 1, \quad A(2) = 1 + 2 = 3, \quad A(3) = 1 + 2 + 3 = 6 \quad \text{usw.}$$



(a) Suche mit Hilfe geometrischer Überlegungen einen Term zur Berechnung von $A(n)$.

(b) Berechne $A(10)$, $A(100)$ und $A(5000)$.

(c) Berechne die Sume $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 9999$.

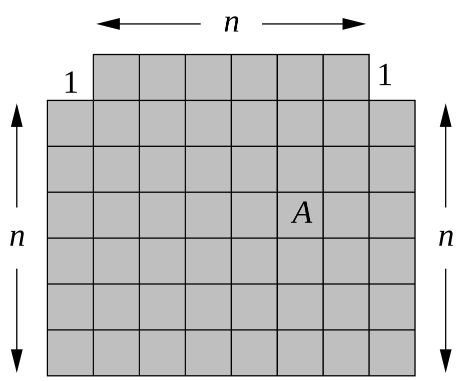
Lösung: (a) Ein halbes Quadrat mit der Seitenlänge n plus n halbe Quadrate mit der Seitenlänge 1:

$$A(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

(b) $A(10) = 55, \quad A(100) = 5050, \quad A(5000) = 12\,502\,500$

(c) $A(9999) = \dfrac{9999 \cdot 10000}{2} = 49\,995\,000$

29. Nebenstehende Abbildung zeigt die zu untersuchende Figur für $n = 6$. Stelle einen Term $A(n)$ für die Fläche der Figur auf. Erläutere in einem Satz und durch eine ausführlich beschriftete Zeichnung, wie dieser Term zustande kommt.
Berechne $A(7)$, $A(20)$ und $A(99)$.



Lösung: „Rechteck mit den Seitenlängen $n+1$ und $n+2$ minus zwei kleine Quadrate mit der Fläche 1“

oder

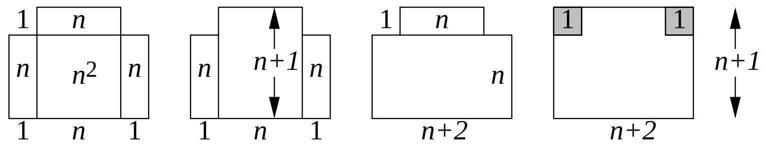
„Rechteck mit den Seitenlängen n und $n+2$ plus Rechteck mit den Seitenlängen n und 1“

oder

„Rechteck mit den Seitenlängen n und $n+1$ plus zwei Rechtecke mit den Seitenlängen n und 1“

oder

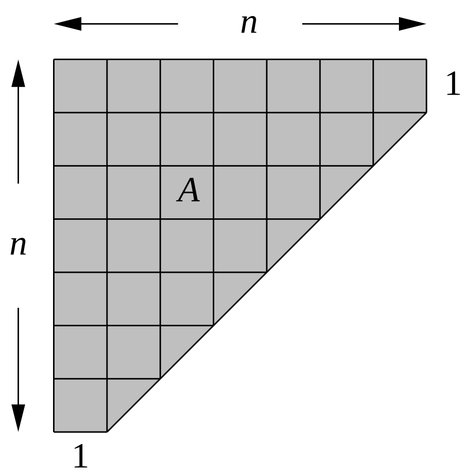
„Quadrat mit der Seitenlänge n plus drei Rechtecke mit den Seitenlängen n und 1“



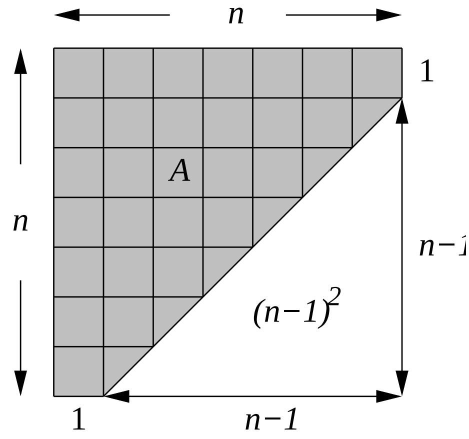
$$A(n) = (n+1)(n+2) - 2 = n(n+2) + n = n(n+1) + 2n = n^2 + 3n$$

$$A(7) = 70, \qquad A(20) = 460, \qquad A(99) = 100 \cdot 101 - 2 = 10098$$

30. Nebenstehende Abbildung zeigt die zu untersuchende Figur für $n = 7$. Stelle einen Term $A(n)$ für die Fläche der Figur auf. Erläutere in einem Satz und durch eine ausführlich beschriftete Zeichnung, wie dieser Term zustande kommt.
Berechne $A(7)$, $A(30)$ und $A(101)$.



Lösung: „Quadrat mit der Seitenlänge n minus halbes Quadrat mit der Seitenlänge $n-1$."



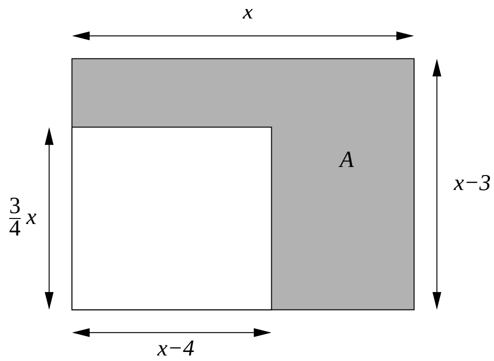
$$A(n) = n^2 - \frac{1}{2} \cdot (n-1)^2$$

$$A(7) = 49 - \frac{36}{2} = 31$$

$$A(30) = 900 - \frac{841}{2} = 479{,}5$$

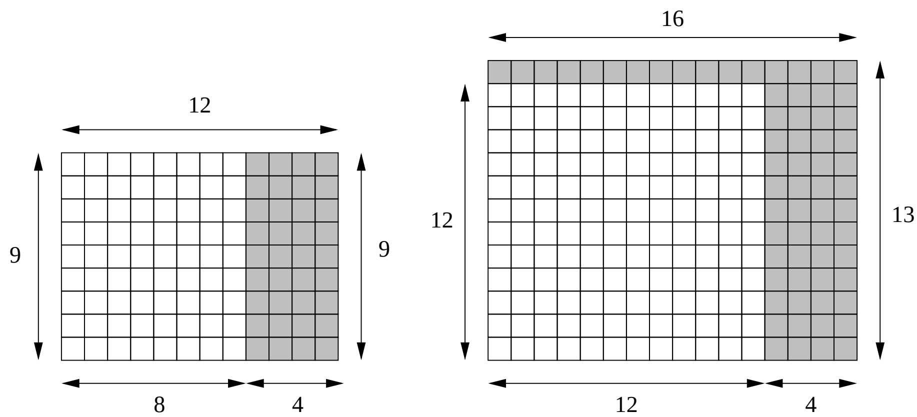
$$A(101) = 10201 - \frac{10000}{2} = 5201$$

31. Stelle den Term $A(x)$ für die schraffierte Fläche in nebenstehender Figur auf und vereinfache ihn so weit wie möglich.
Berechne $A(12)$ und $A(16)$.
Zeichne die Figur einmal für $x = 12$ und einmal für $x = 16$ (Einheit: ein Kästchen). Für welche $x \in \mathbb{Q}$ kann die Figur in der angegebenen Weise gezeichnet werden? Begründe deine Antwort.



Lösung: $A(x) = x(x-3) - \frac{3}{4}x(x-4) = x^2 - 3x - \frac{3}{4}x^2 + 3x = \frac{1}{4}x^2$

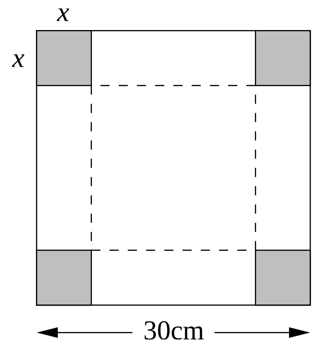
$A(12) = \frac{12^2}{4} = \frac{144}{4} = 36, \quad A(16) = \frac{16^2}{4} = \frac{256}{4} = 64$



Die Figur ist nur für $x \geqq 12$ zeichenbar, da sonst $\frac{3}{4}x > x - 3$ wäre.

2.3. Veranschaulichung von Termen

1. Von einem quadratischen Stück Pappe mit der Seitenlänge 30 cm werden an den Ecken vier Quadrate mit der Seitenlänge x abgeschnitten. Die entstehenden Rechtecke werden entlang der gestrichelten Linien gefaltet, so dass eine quaderförmige Schachtel entsteht.



   (a) Stelle einen Term $V(x)$ für das Volumen der Schachtel auf.

   (b) Welche Definitionsmenge D_V ist für diesen Term sinnvoll? Begründe deine Wahl!

   (c) Berechne den Wert des Terms $V(x)$ für $x = 0$, $x = 3\,\text{cm}$, $x = 6\,\text{cm}$, $x = 9\,\text{cm}$, $x = 12\,\text{cm}$ und $x = 15\,\text{cm}$. Veranschauliche diese Werte in einem Koordinatensystem mit einer waagrechten x-Achse ($x = 1\,\text{cm}$ entspricht einem Kästchen und $V = 100\,\text{cm}^3$ entspricht einem Käschen).

   (d) Suche den x-Wert, für den $V(x)$ maximal wird. Wie groß ist das maximale Volumen der Schachtel? Ergänze das gezeichnete Diagramm mit diesem Wert.

Lösung:

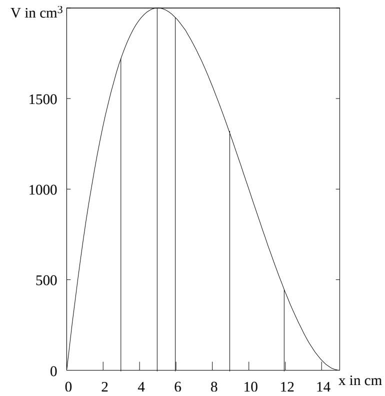
(a) $V(x) = (30\,\text{cm} - x)^2 \cdot x$

(b) $D_V = \{\, x \,|\, 0 \leqq x \leqq 15\,\text{cm}\}$

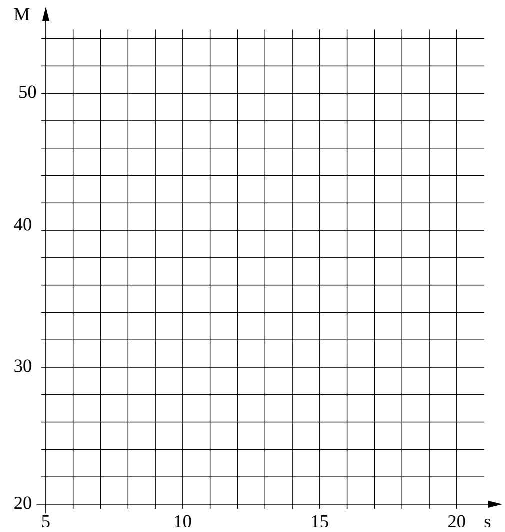
(c)

$\frac{x}{\text{cm}}$	0	3	6	9	12	15
$\frac{V(x)}{\text{cm}^3}$	0	1728	1944	1296	432	0

(d) maximaler Wert: $V(5\,\text{cm}) = 2000\,\text{cm}^3$



2. Mutter und Sohn haben heute Geburtstag. Die Mutter sagt zu ihrem Sprössling: „Ich bin heute genau dreimal so alt, wie du es vor zwei Jahren warst.“



   (a) Stelle einen Term $M(s)$ auf, der das jetzige Alter der Mutter in Abhängigkeit vom jetzigen Alter s des Sohnes angibt. Berechne den Wert des Terms dann für $s = 10$, $s = 15$ und $s = 20$ (alle Angaben in Jahren). Zeichne die Werte in nebenstehendes Diagramm und überprüfe, ob die drei Punkte auf einer Geraden liegen.

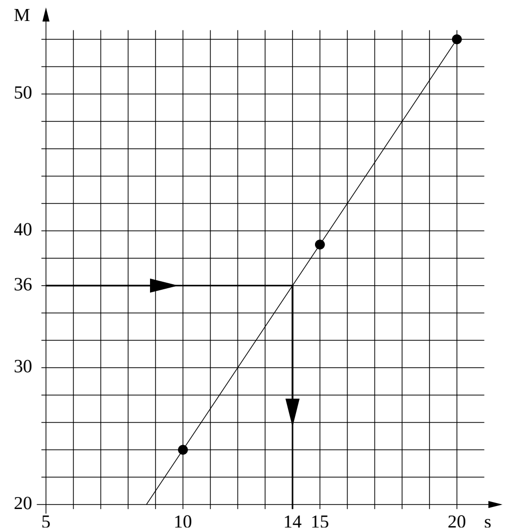
   (b) Die Mutter verrät, dass sie heute 36 Jahre alt ist. Ermittle in nachvollziehbarer Weise (zusätzliche Beschriftung, farbige Linien, aber nicht rot!) mit Hilfe des Diagramms das Alter des Sohnes und überprüfe diesen Wert durch Rechnung.

Lösung:

(a) $M(s) = 3(s - 2) = 3s - 6$

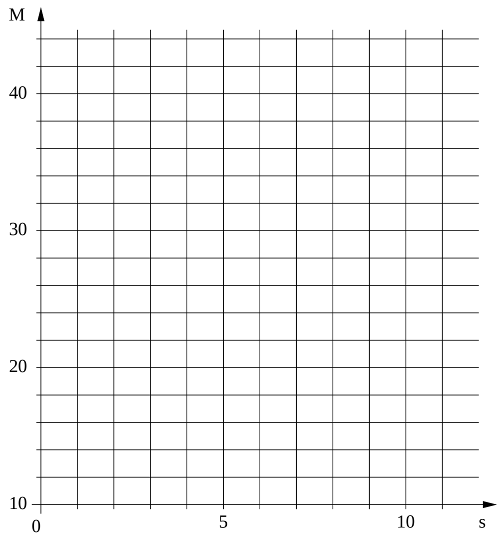
$M(10) = 24$, $M(15) = 39$, $M(20) = 54$

(b) $M(14) = 36$



3. Mutter und Sohn haben heute Geburtstag. Die Mutter sagt zu ihrem Sprössling: „Ich war heute vor drei Jahren genau fünfmal so alt, wie du es vor drei Jahren warst.“

   (a) Stelle einen Term $M(s)$ auf, der das jetzige Alter der Mutter in Abhängigkeit vom jetzigen Alter s des Sohnes angibt. Berechne den Wert des Terms dann für $s = 5$, $s = 7$ und $s = 10$ (alle Angaben in Jahren). Zeichne die Werte in nebenstehendes Diagramm und überprüfe, ob die drei Punkte auf einer Geraden liegen.



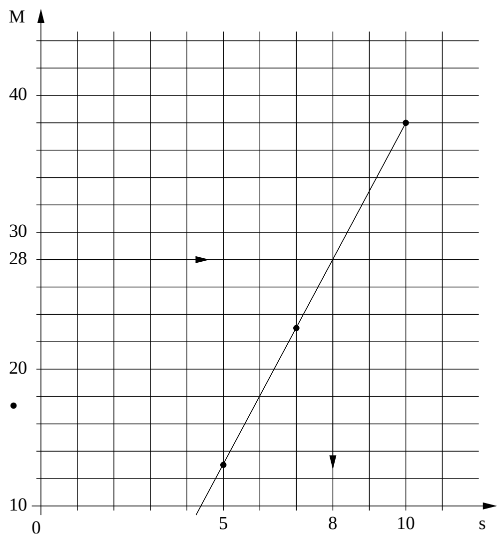
   (b) Die Mutter verrät, dass sie heute 28 Jahre alt ist. Ermittle in nachvollziehbarer Weise (zusätzliche Beschriftung, farbige Linien, aber nicht rot!) mit Hilfe des Diagramms das Alter des Sohnes und überprüfe diesen Wert durch Rechnung.

Lösung:

(a) $M(s) = 5(s - 3) + 3 = 5s - 12$

$M(5) = 13$, $M(7) = 23$, $M(10) = 38$

(b) $M(8) = 5 \cdot 8 - 12 = 28$



3. Umformen von Termen

3.1. Rechengesetze für rationale Zahlen

1. Welche Zahl kann man für $\triangle$ einsetzen?
   (a) $\frac{1}{11} + \frac{2}{3} = \frac{75}{\triangle}$
   (b) $\frac{11}{12} + \frac{1}{10} = \frac{\triangle}{60}$
   (c) $\frac{387}{516} = \frac{\triangle}{100}$
   (d) $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{20}{\triangle}$
   (e) $\frac{1}{37} + \frac{2}{3} = \frac{154}{\triangle}$
   (f) $\frac{7}{10} + \frac{1}{4} = \frac{\triangle}{20}$
   (g) $\frac{1}{2} + \frac{3}{19} = \frac{50}{\triangle}$

   Quelle: Kreuzzahlrätsel, Ulrike Schätz

Lösung: (a) 99 (b) 61 (c) 75 (d) 42
(e) 222 (f) 19 (g) 76

3.2. Terme mit Produkten

1. Fritz Zweistein sagt: Ich habe da was rausgefunden:

   $3^2 = 2^2 + 2 + 3$
   $4^2 = 3^2 + 3 + 4$
   $5^2 = 4^2 + 4 + 5$

   (a) Schreibe die nächste Zeile hin.
   (b) Schreibe auf, welchen Zusammenhang du entdeckt hast.
   (c) Finde einem Term, der für jede Gleichung passt.

   Bearbeite die obigen Aufträge auch für folgende Gleichungen:

   $3^2 = 2 \cdot 4 + 1$
   $4^2 = 3 \cdot 5 + 1$
   $5^2 = 4 \cdot 6 + 1$

Lösung: (a) - -

(b) - -

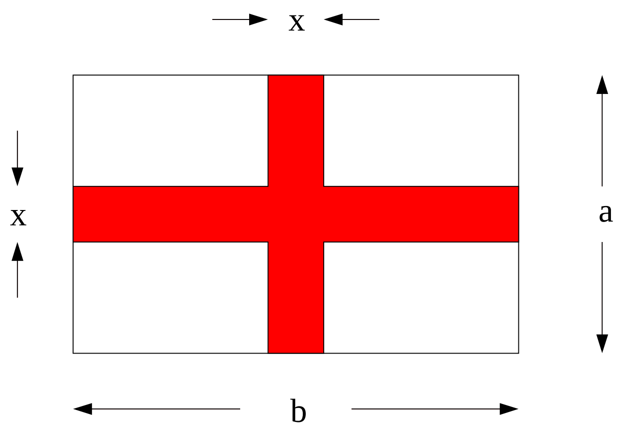
(c) $a^2 = (a-1)^2 + (a-1) + a$

(a) - -

(b) - -

(c) $a^2 = (a-1) \cdot (a+1) + 1$

2. Das ist ein Bild der Nationalflagge von England.



(a) Zeichne die Figur für $b = 10\,\text{cm}$, $a = 5\,\text{cm}$ und $x = 1\,\text{cm}$.

(b) Berechne den Flächeninhalt A des Kreuzes in der Figur in Abhängigkeit von a, b und x.

(c) Die folgenden Terme sollen den Flächeninhalt des weißen Anteils der Flagge darstellen. Kreuze die Terme an, deren Darstellung korrekt ist:

[ ]	$ab - ax - bx + x^2$	[ ]	$ab - ax + bx - x^2$
[ ]	$4[(0{,}5a - 0{,}5x)(0{,}5b - 0{,}5x)]$	[ ]	$\frac{3}{4}ab$
[ ]	$(a-x)(b-x)$	[ ]	$ab - (ax + bx - x^2)$

(d) Gib für $a = 8\,\text{cm}$ und $b = 12\,\text{cm}$ die Menge aller sinnvollen Belegungen von x an.

Lösung:

(a) –

(b) $A = ax + bx - x^2$

(c)

[**X**]	[ ]
[**X**]	[ ]
[**X**]	[**X**]

(d) $x \in \,]0\,\text{cm}; 8\,\text{cm}[_{\mathbb{Q}}$

3. Vereinfache den Term $x^2 - (3-x)^2$ so weit wie möglich.

   Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 8 der Gymnasien 2005

Lösung: $x^2 - (3-x)^2 = x^2 - (9 - 6x + x^2) = 6x - 9 = 3(2x-3)$

4. Schreibe jeweils als einen (gegebenenfalls vereinfachten)Bruch.
   (a) $2x : \frac{4}{x}$ (b) $2x + \frac{4}{x}$

   Quelle: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 10 der Gymnasien 2004

Lösung: (a) $\frac{x^2}{2}$ (b) $\frac{2x^2+4}{x}$

3.3. Terme mit Potenzen

1. Gegeben ist die Gleichung

$$\frac{2}{5}(x-7) - \frac{3}{5}(2-3x) = x + 2\frac{1}{5}, \quad G = \mathbb{Q}$$

   (a) Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung.
   (b) Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung für die Grundmengen $G_1 = \mathbb{Q}^+$, $G_2 = \mathbb{Z}$, $G_3 = \mathbb{N}$ und $G_4 = \{5; 5\frac{1}{2}; 5\frac{1}{3}; 5\frac{1}{4}; 5\frac{1}{5}; 5\frac{1}{6}\}$.
   (c) Verändere die rechte Seite der Gleichung so, dass $L_1 = \{11\}$, $L_2 = \{0\}$, $L_3 = \{\}$ und $L_4 = G$.
   (d) Lässt sich die Gleichung so abändern, dass $L_5 = \{1; 2\}$?
   (e) Betrachte nun die Gleichung

$$\frac{2}{5}(x-7) - \frac{3}{5}(2-3x) = ax + 2\frac{1}{5}, \quad G = \mathbb{Q}, \quad a \in \mathbb{Q}.$$

   Für welche a gibt es genau eine Lösung? Wie lautet dann die Lösungsmenge? Wie sieht die Lösungsmenge in den übrigen Fällen aus?
   (f) Betrachte nun die Gleichung

$$\frac{2}{5}(x-7) - \frac{3}{5}(2-3x) = x + b \cdot 2\frac{1}{5}, \quad G = \mathbb{Q}, \quad b \in \mathbb{Q}.$$

   Welche Einfluss auf die Anzahl der Lösungen hat b?

Lösung: (a) $L = \{5\frac{1}{6}\}$

(b) $L_1 = \{5\frac{1}{6}\}$, $L_2 = \{\}$, $L_3 = \{\}$, $L_4 = \{5\frac{1}{6}\}$.

(c) z. B. $\frac{2}{5}(x-7) - \frac{3}{5}(2-3x) = x + 9\frac{1}{5}$
$\frac{2}{5}(x-7) - \frac{3}{5}(2-3x) = x - 4$
$\frac{2}{5}(x-7) - \frac{3}{5}(2-3x) = 2\frac{1}{5}x$
$\frac{2}{5}(x-7) - \frac{3}{5}(2-3x) = 2\frac{1}{5}x - 4$

(d) Nein

(e) Genau eine Lösung für $a \neq \frac{11}{5} \implies L = \left\{\frac{31}{11-5a}\right\}$
Für $a = \frac{11}{5}$ folgt $L = \{\}$

(f) b hat keinen Einfluss auf die Anzahl der Lösungen.

2. (a) Die monatlichen Telefongebüren berechnen sich beim Anbieter FONO aus der Grundgebühr und der Anzahl der Gespräche, wobei 12 Gespräche frei sind:

Grundgebühr:	13,60 €
1 Gespräch kostet:	0,11 €

i. Stelle einen Term für die Berechnung der monatlichen Telefongebühren auf.

ii. Bestimme die Definitionsmenge und berechne einige Werte des Terms.

(b) Die monatlichen Telefongebüren berechnen sich beim Konkurrenten von FONO aus der Grundgebühr und der Anzahl der Nah- und Ferngespräche, wobei 8 Nahgespräche frei sind:

Grundgebühr:	13,60 €
1 Nahgespräch kostet:	0,05 €
1 Ferngespräch kostet:	0,15 €

i. Stelle einen Term für die Berechnung der monatlichen Telefongebüren auf. Berechne einige Werte des Terms.

ii. Wann ist es besser beim Anbieter Fono bzw. dem Konkurrenten zu telefonieren?

(c) i. Finde die Telefongebühren verschiedener Anbieter heraus und stelle jeweils einen Term zur Berechnung der monatlichen Gebühren auf.

ii. Untersuche wie man am günstigsten telefoniert.

Lösung: (a) i. $T(x) = 13{,}60 + (x-12) \cdot 0{,}11$

ii. Für die sinnvolle Grundmenge $G = \mathbb{N}_0$ ist $D = \{12; 13; 14; \cdots\}$
Z. B. $T(15) = 13{,}93$, $T(62) = 19{,}10$, ...

(b) i. $T(x; y) = 13{,}60 + (x-8) \cdot 0{,}05 + y \cdot 0{,}15$
Z. B. $T(0; 50) = 21{,}10$, $T(50; 0) = 15{,}70$, $T(25{,}25) = 18{,}20$

ii. Z. B.: Es ist besser beim Anbieter FONO zu telefonieren, wenn für mindestens 12 Nahgespräche die Anzahl der Ferngespräche mehr als $\frac{6x-92}{15}$ (x: Anzahl der Ortsgespräche) ist.

3. Vor langer Zeit lebten einmal drei Kobolde mit Namen Asam, Bela und Calvin in den Wäldern um den Feuerbach. Die Höhlen der drei Kobolde waren durch gerade Wege miteinander verbunden. Eines Tages fanden die Kobolde die verschlüsselte Botschaft eines Druiden, die sie zu einer verhexten Feuerstelle am Feuerbach führen sollte. Sie waren sich über den genauen Verlauf des Flusses nicht einig, deshalb nahmen sie ein Fell daher, das ihnen als Karte dienen sollte. Auf diesem Fell wollten sie die Wege nach der Botschaft des Druiden einzeichnen.

   Sofort machten sich die drei Kobolde an die Arbeit die Botschaft zu entschlüsseln.

   - *Ein jeder gehe von seiner Höhle senkrecht auf den gegenüberliegenden Weg. Der gemeinsame Treffpunkt am Fluss werde durch Hölzer mit einem H gekennzeichnet.*
   - *Nun gehe jeder Kobold von H zu seiner Höhle zurück und markiere dabei die Hälfte des Weges ebenfalls mit einem Stöckchen.*
   - *Weiter finde jeder die Senkrechte auf die Mitte des Weges, der zu seinem Nachbar führt. Auch hier werde der gemeinsame Treffpunkt, wieder am Fluss, durch Hölzer markiert, diesmal durch ein M.*
   - *Sucht die Mitte von M und H. Dort findet Ihr die verhexte Feuerstelle.*

   Sofort machten Asam, Bela und Calvin sich auf und waren schließlich überglücklich, die verschlüsselte Botschaft des Druiden enträtselt zu haben, denn von dieser Feuerstellt am Fluss ging wahrhaftig ein Zauber aus.

   Spür auch du dem Zauber nach, dem Asam, Bela und Calvin erlegen sind, indem Du die Fellzeichnung der Kobolde nachzeichnest.

   Literatur: PM 4/43, Jg. 2001

Lösung: Die Feuerstelle ist Mittelpunkt des Feuerbachschen Neunpunktekreises und liegt zusammen mit M und H auf der Eulerschen Geraden.

4. Vereinfache:

(a)	$(-1)^7$	(b)	$(-1)^{1234}$	(c)	$(-x)^2$	(d)	$(-x)^9$
(e)	$(-2b)^5$	(f)	$(-3z)^4$	(g)	$-(-5c)^3$	(h)	$-(-5e)^4$

Lösung:

(a)	-1	(b)	1	(c)	x^2	(d)	$-x^9$
(e)	$-32b^5$	(f)	$81z^4$	(g)	$125c^3$	(h)	$-625e^4$

5. Das Universum hat ein Volumen wie ein Würfel mit einer Kantenlänge a von zwanzig Milliarden Lichtjahren (Lichtgeschwindigkeit: $c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$). Ein Proton beansprucht ein Volumen wie ein Würfel mit der Kantenlänge $b = 10^{-15}\,\text{m}$. Wie viele Protonen passen in das Universum?

Lösung: $a = 1{,}89 \cdot 10^{26}\,\text{m}$; $\quad V_{\text{Universum}} = 6{,}77 \cdot 10^{78}\,\text{m}^3$

$V_{\text{Proton}} = 10^{-45}\,\text{m}^3$; $\quad N = \dfrac{V_{\text{Universum}}}{V_{\text{Proton}}} = 6{,}77 \cdot 10^{123}$

6. Gegeben ist der Term:

$$\frac{(0{,}000\,000\,106\,5)^4 \,\cdot\, 0{,}000\,190\,0}{3\,560\,000}.$$

   (a) Stelle den Term mit Zehnerpotenzen dar (jeweils eine Stelle vor dem Komma)!

   (b) Berechne den Term mit dem Taschenrechner (Ergebnis mit zwei Stellen vor dem Komma und vier gültigen Ziffern)!

Lösung: (a): $\dfrac{1{,}065^4 \cdot 1{,}9}{3{,}56} \cdot 10^{-26}$

(b): $68{,}66 \cdot 10^{-28}$

3.4. Summen, Klammerregeln, Zusammenfassen

1. Bilde zum Text den zugehörigen Term und vereinfache ihn soweit wie möglich:

   (a) Vermindere $3x - 4y$ um die Differenz der Terme $2x + 5y$ und $x - 10y$.

   (b) Vermindere die Differenz der Terme $2b - \frac{2}{3}y$ und $-3b + a$ um die Differenz der Terme $2b - y$ und $a - \frac{1}{6}y$.

Lösung: (a) $(3x - 4y) - [(2x + 5y) - (x - 10y)] = 2x - 19y$

(b) $[(2b - \frac{2}{3}y) - (-3b + a)] - [(2b - y) - (a - \frac{1}{6}y)] = 3b + \frac{1}{6}y$

2. Gib den Term an und berechne:
Von der Differenz der Terme $a - 5b$ und $7a - 5b$ ist die Differenz der Terme $4a - 3b$ und $5b + 4a$ zu subtrahieren.

Lösung: $[(a - 5b) - (7a - 5b)] - [(4a - 3b) - (5b + 4a)] = -6a + 8b$

3. Fritz hat bei den folgenden Termumformungen Fehler gemacht. Berichtige sie farbig (nicht mit roter Farbe):

(a) $4x - 6y + 1{,}6z = 2 \cdot (x + 3y + 3{,}2z)$
(b) $x^2 \cdot x^5 + 3 : \frac{1}{2} = 6 + x^{10}$
(c) $-(3x - 2x^2 + 7a) = -3x - 2x^2 - 7x$

Lösung: (a) $4x - 6y + 1{,}6z = 2 \cdot (2x - 3y + 0{,}8z)$
(b) $x^2 \cdot x^5 + 3 : \frac{1}{2} = 6 + x^7$
(c) $-(3x - 2x^2 + 7a) = -3x + 2x^2 - 7a$

4. **Termdomino**

$5z - 1 + 14x - 2$	$r + s - 1r + 1s$	$9x^2 - 5x^2$	$3xz + 4xz - xz$
1	$2a - 4a$	$-2a$	$4x^2$
$-\frac{9}{16}$	$3 \cdot (a - 2b)$	$6xz$	$14x + 5z - 3$
$4 \cdot (x + y)$	$2 \cdot (a + 2b)$	$a - b + c$	$5y^2 \cdot x$
$-6x$	$c - b - 3a + 4a$	$2a + 4b$	$(x + y) + y$
$5xy^2$	$4x + 4y$	$3a - 6b$	$A_{Rechteck}$
-11	$-7 \cdot (-\frac{1}{2})$	$x + 2y$	$(r + s) - (r + s)$
$a \cdot b$	$196 : 14^2$	a^3	$x \cdot y \cdot y \cdot x$
x^2y^2	$-15 - 17 + 21$	0	$a \cdot a \cdot a$
$\frac{35}{10}$	$-(\frac{5}{4})^2 + 1$	$2s$	$-4x + 3y - 2x - 3y$

Schneidet die Dominosteine entlang der Doppellinien auseinander. Teilt die Dominosteine in eurer Gruppe auf und bestimmt, wer anfängt. Jetzt versucht jeder Spieler nacheinander, einen seiner Steine anzulegen. Dazu müssen die Terme allerdings wertgleich sein. Wer nicht anlegen kann, muss eine Runde aussetzen.

Quelle: Sinus-Transfer

Lösung: Zur Kontrolle:

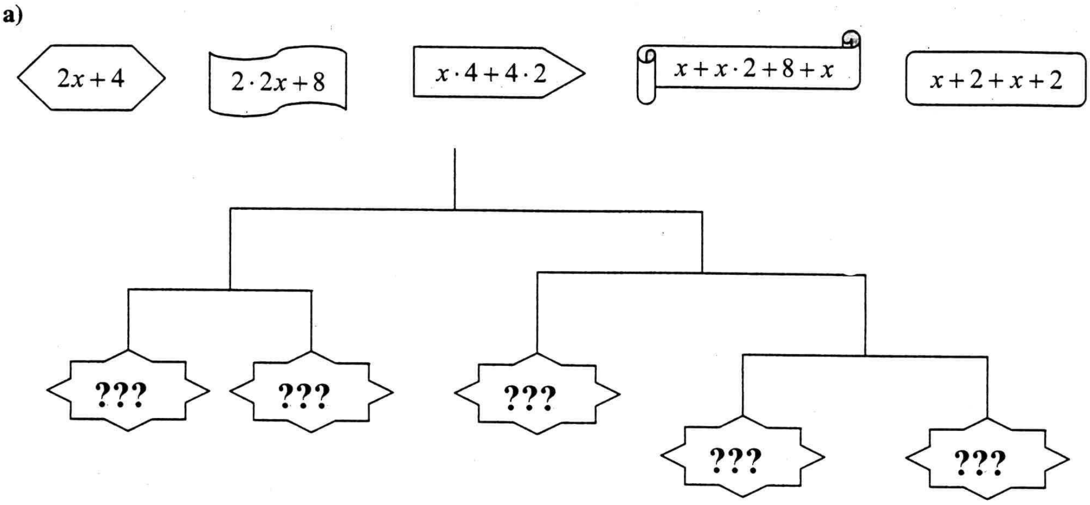
$2a - 4a = -2a$
$196 : 14^2 = 1$
$x \cdot y \cdot y \cdot x = x^2y^2$
$r + s - 1r + 1s = 2s$
$(x + y) + y = x + 2y$
$9x^2 - 5x^2 = 4x^2$
$4 \cdot (x + y) = 4x + 4y$
$3 \cdot (a - 2b) = 3a - 6b$
$a - b + c = c - b - 3a + 4a$
$A_{Rechteck} = a \cdot b$

$(r + s) - (r + s) = 0$
$a^3 = a \cdot a \cdot a$
$-15 - 17 + 21 = -11$
$-7 \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{35}{10}$
$-4x + 3y - 2x - 3y = -6x$
$3xz + 4xz - xz = 6xz$
$5z - 1 + 14x - 2 = 14x + 5z - 3$
$2 \cdot (a + 2b) = 2a + 4b$
$5y^2 \cdot x = 5xy^2$
$-\frac{9}{16} = -(\frac{5}{4})^2 + 1$

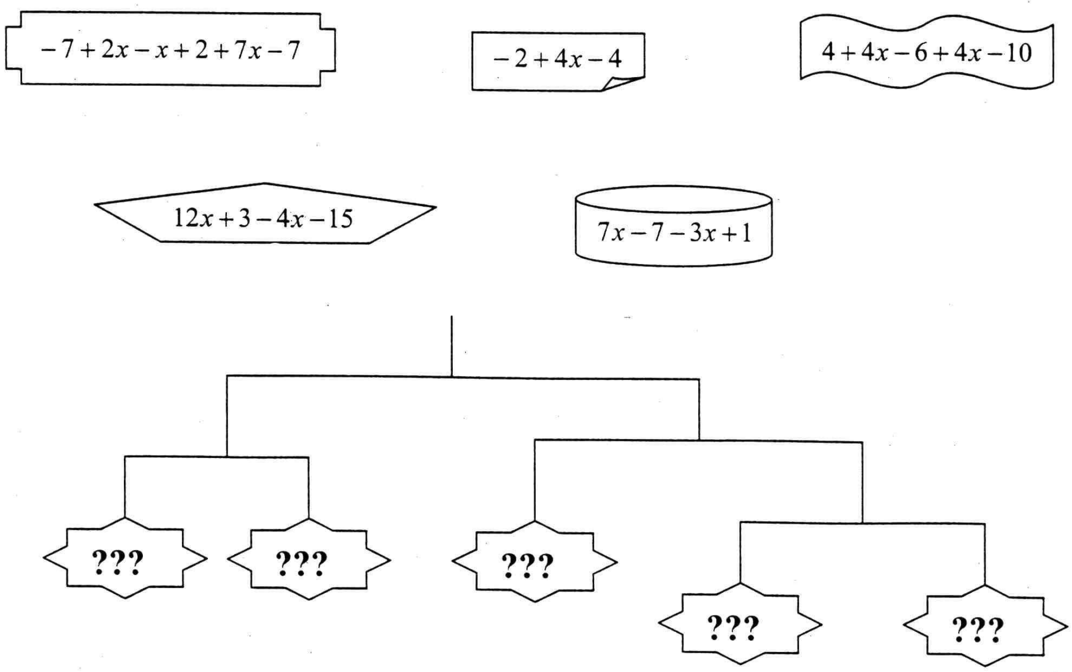
5. **Term-Mobile**

   Das Term-Mobile ist im Gleichgewicht, wenn an beiden Enden eines Balkens insgesamt wertgleiche Terme vorhanden sind. Bringe die Mobiles mit den jeweils vorhandenen Elementen ins Gleichgewicht. Färbe dazu die entsprechenden Felder in gleicher Farbe.

a)



b)



Stelle selbst ein Term-Mobile her. Verwende dabei u.a. die folgenden Terme:

(a) $3(x+4)+x$

(b) $2x+6$

(c) $8(x+1)+4(1-x)$

Quelle: Sinus-Transfer

Lösung: (a) Z. B.: $2\cdot 2x+8$, $x\cdot 4+4\cdot 2$, $x+x\cdot 2+8+x$, $2x+4$, $x+2+x+2$

(b) Z. B.: $-7+2x-x+2+7x-7$, $12x+3-4x-15$, $4+4x-6+4x-10$, $7x-7-3x+1$, $-2+4x-4$

6. (a) Es werden n Würfel übereinander gestellt. Die nun sichtbaren Augenzahlen werden addiert.
Wie kann man die Würfel so anordnen, dass die Augensumme maximal wird?
Stelle einen Term $A(n)$ auf, der die maximale Augensumme in Anhängigkeit der Anzahl n der Würfel angibt.

(b) Es werden n Würfel übereinander gestellt. Die nun sichtbaren Augenzahlen werden addiert.
Wie kann man die Würfel so anordnen, dass die Augensumme minimal wird?
Stelle einen Term $a(n)$ auf, der die minimale Augensumme in Anhängigkeit der Anzahl n der Würfel angibt.

(c) Es werden n Würfel nebeneinander in eine Reihe gelegt. Die nun sichtbaren Augenzahlen werden addiert.
Wie erhält man die maximale bzw. minimale Augensumme?
Stelle die Terme $A(n)$ und $a(n)$ für die maximale und minimale Augensumme in Anhängigkeit der Anzahl n der Würfel auf.

(d) Es werden Würfel in Form eines quadratischen Rahmens gelegt. n Würfel bilden eine Seite. Die nun sichtbaren Augenzahlen werden addiert.
Wie erhält man die maximale bzw. minimale Augensumme?
Stelle die Terme $A(n)$ und $a(n)$ für die maximale und minimale Augensumme in Anhängigkeit von n auf.

(e) Obiger Rahmen wird mit Würfeln gefüllt zu einem Quadrat. Die nun sichtbaren Augenzahlen werden addiert.
Wie erhält man die maximale bzw. minimale Augensumme?
Stelle die Terme $A(n)$ und $a(n)$ für die maximale und minimale Augensumme in Anhängigkeit von n auf.

(f) Es werden Würfel in mehreren Reihen aufeinander in Dreiecksform gelegt, und zwar in der obersten Reihe ein Würfel, in der zweiten Reihe drei Würfel, in der dritten Reihe fünf u. s. w. n ist die Anzahl der Reihen. Die nun sichtbaren Augenzahlen werden addiert.
Wie erhält man die maximale bzw. minimale Augensumme?

Stelle die Terme $A(n)$ und $a(n)$ für die maximale und minimale Augensumme in Anhängigkeit von n auf.

Literatur: H. Schupp, Thema mit Variationen, in: mathematiklehren 100, Juni 2000

Lösung: (a) $A(n) = (n-1)\cdot 14 + 20 = 14n + 6$

(b) $a(n) = (n-1)\cdot 14 + 15 = 14n + 1$

(c) $A(n) = (7+6)\cdot(n-2) + 2\cdot(7+11) = 13n + 10$
$a(n) = (7+1)\cdot(n-2) + 2\cdot(7+3) = 8n + 4$

(d) $A(n) = 4\cdot(n-2)\cdot 13 + 4\cdot 15 = 52n - 44$
$a(n) = 4\cdot(n-2)\cdot 8 + 4\cdot 6 = 32n - 40$

(e) $A(n) = 4\cdot(n-2)\cdot 11 + 4\cdot 15 + (n-2)^2\cdot 6 = 6n^2 + 20n - 4$
$a(n) = 4\cdot(n-2)\cdot 3 + 4\cdot 6 + (n-2)^2 = n^2 + 8n + 4$

(f) $A(n) = (n-1)^2\cdot 7 + 2\cdot(n-1)\cdot 18 + 20 = 7n^2 + 22n - 9$
$a(n) = (n-1)^2\cdot 7 + 2\cdot(n-1)\cdot 10 + 15 = 7n^2 + 6n + 2$

7. Vereinfache soweit wie möglich:

(a) $-2{,}5a - [-(5a+2b) - (-2a+3b)] - (-2a+5b)$

(b) $-2{,}5c - [-(-2c+3b) - (5c+2b)] - (-2c+5b)$

(c) $a - \{b - [c - (d+e) - f] - g\}$

(d) $x - \{y - [z - (m+n) - k] - g\}$

Lösung: (a) $2{,}5a$

(b) $2{,}5c$

(c) $a - b + c - d - e - f + g$

(d) $x - y + z - m - n - k + g$

8. Vereinfache soweit wie möglich:

$$0{,}5b + 4b^2 + 5{,}74ab - b - 2\frac{1}{5}b^2 + \frac{3}{2}b$$

Lösung: $b + 1\frac{4}{5}b^2 + 5{,}74ab$

9. Vereinfache soweit wie möglich!

(a) $-(5-18)$

(b) $0{,}8b + (-2{,}4a) - |-3{,}2| - (+1{,}6b) + a + (-2)$

Lösung: (a) 13 (b) $-0{,}8b - 1{,}4a - 5{,}2$

10. Berechne folgende Terme:
    (a) $-8{,}1 - (4{,}8 - 8{,}3)$
    (b) $4 - |3 - 4 - 7| + | - 14 + 7|$
    (c) $-25b - 12a - 13b + 97a + 18a^2 - 2a + 6a^2 - 4b^2 - 24a^2$

Lösung: (a) $-4{,}6$ (b) 3 (c) $83a - 38b - 4b^2$

11. Berechne folgende Terme:
    (a) $-7{,}1 + (4{,}8 - 7{,}3)$
    (b) $4 - | - 4 + 3 - 7| + | - 12 + 5|$
    (c) $-12a - 13b + 97a - 25b + 18a^2 - 2a + 6a^2 - 4b^2 - 24a^2$

Lösung: (a) $-9{,}6$ (b) 3 (c) $83a - 38b - 4b^2$

12. Löse die Klammern auf und fasse soweit wie möglich zusammen:
    (a) $1 - [-(a) - (b - c)]$
    (b) $3 - [-(b) - (e - f)]$
    (c) $\left(\frac{3}{4}ab - \frac{5}{3}a^2b + 1\right) - \left(-\frac{1}{4}ab + \frac{2}{3}a^2b\right) + \left(- ab + \frac{7}{3}a^2b\right)$
    (d) $\left(-\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y - 2\right) - \left(-\frac{3}{10}x + \frac{4}{5}y - \frac{5}{2}\right) - \frac{23}{6}x$
    (e) $-[(-1{,}9a + 2{,}1b - 0{,}2x) - (15x - 6a - 4{,}8b)] - (-4{,}3a + 2{,}9b + 14x)$

Lösung: (a) $1 + a + b - c$ (b) $3 + b + e - f$ (c) 1
(d) $-4\frac{1}{30}x - \frac{2}{15}y + \frac{1}{2}$ (e) $0{,}2a - 9{,}8b + 1{,}2x$

13. Klammere aus: $42a^2bc^2 - 28abcd + 14abcd^2$

Lösung: $14abc(3ac - 2d + d^2)$

14. Klammere aus: $78abx - 273ax + 117a^2bx^2$

Lösung: $39ax(2b - 7 + 3abx)$

15. Vereinfache soweit wie möglich:

(a) $-\{-[(6m-9n)-(-p-q)]-(1+5m+10n)\}-(1+p+q)$

(b) $2ax-\{-2a^2+[-b^2+2ax+2a^2-(2ax-b^2)]+2ax\}+b^2$

Lösung: (a) $11m+n$ (b) b^2

16. Löse die Klammern auf und fasse soweit wie möglich zusammen:

(a) $-\left\{-2-\left[-\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}x\right)\right]+2\frac{7}{15}-17\frac{8}{15}x\right\}-4x$

(b) $-2{,}6a-[-6{,}3b-(7{,}2c-4{,}8a)+(-7{,}6a+5{,}3c)-5{,}3]+6{,}1b-5{,}3$

(c) $(-2)^3x\cdot(ab)^2(-y)+2ax^2-7(-ax)^2+(-2x)\cdot y\cdot(-7a^2b^2)$

Lösung: (a) $13\frac{2}{15}x-\frac{2}{15}$ (b) $0{,}2a+12{,}4b+1{,}9c$ (c) $-7a^2x^2+2ax^2+22a^2b^2xy$

17. Vereinfache soweit wie möglich:

(a) $(6b-2{,}25a)+\left\{2b-\left[\frac{3}{4}a-\left(-\frac{1}{5}b+3a\right)\right]+5ab\right\}=$

(b) $(8y-1{,}75x)+\left\{3y-\left[\frac{1}{4}x-\left(-\frac{3}{5}y+2x\right)\right]+4xy\right\}=$

Lösung: (a) $5ab+7\frac{1}{5}b$ (b) $4xy+10\frac{2}{5}y$

18. Forme in möglichst einfache Terme um:

(a) $2x\cdot(-6x)+12x-5x^2-(-2)\cdot(-7x)$

(b) $(2a)^3+(-2a)^2\cdot 3a+(-3a)^3$

(c) $\left(\frac{z}{4}\right)^2-\frac{z^2}{4}+\frac{z^2}{-8}+3z:\left(-\frac{16}{z}\right)$

Lösung: (a) $-12x^2-5x^2+12x-14x=-17x^2-2x$

(b) $8a^3+12a^3-27a^3=-7a^3$

(c) $\frac{z^2}{16}-\frac{z^2}{4}-\frac{z^2}{8}-\frac{3z^2}{16}=\frac{z^2-4z^2-2z^2-3z^2}{16}=\frac{-8z^2}{16}=-\frac{z^2}{2}$

19. (a) $3x\cdot\left(-6x^2\right)+18x^2-7x^3-(-2x^2)^2:\frac{-x}{3}$

(b) $\left(\frac{a}{6}\right)^2-\frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{-12}+9a:\left(-\frac{27}{a}\right)$

Lösung: (a) $-18x^3+18x^2-7x^3+12x^3=18x^2-13x^3$

(b) $\frac{a^2}{36}-\frac{a^2}{9}-\frac{a^2}{12}-\frac{3a^2}{9}=\frac{a^2-4a^2-3a^2-12a^2}{36}=-\frac{18a^2}{36}=-\frac{a^2}{2}$

20. Fasse zusammen:

(a) $5am^2 - 5am - 5a^2m - 2m \cdot 3a + (-5a) \cdot (-3am) - 2a \cdot 2m \cdot 2m$

(b) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

(c) $\frac{1}{5}x \cdot 3y - \frac{x}{3} \cdot 0{,}3x - \frac{y}{7} \cdot 1{,}1y - 0{,}6xy + x^2 : 10 - y^2 : 7$

Lösung: (a) $5am^2 - 5am - 5a^2m - 6am + 15a^2m - 8am^2 = -3am^2 - 11am + 10a^2m$

(b) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) x^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) x - \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{13}{6}$

(c) $0{,}6xy - 0{,}1x^2 - \frac{1{,}1y^2}{7} - 0{,}6xy + 0{,}1x^2 - \frac{y^2}{7} = -\frac{2{,}1y^2}{7} = -0{,}3y^2$

21. Vereinfache:

(a)	$(-a)^3 - a^3 - (-a)^2 - a^2$	(b)	$(-a)^3 \cdot a^3 \cdot (-a)^2 \cdot (-a^2)$
(c)	$x^2(-x)^2 \cdot 2(-x)^4 x(-x)^3$	(d)	$x^2(-x)^2 - 2(-x)^4 - x(-x)^3$
(e)	$a(-a)^n(-a)^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$	(f)	$a(-a)^n + (-a)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$

Lösung: (a) $-a^3 - a^3 - a^2 - a^2 = -2a^3 - 2a^2$

(b) $\left(-a^3\right) \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot (-a^2) = a^{10}$

(c) $x^2x^2 \cdot 2x^4x\left(-x^3\right) = -2x^{12}$

(d) $x^4 - 2x^4 - x\left(-x^3\right) = x^4 - 2x^4 + x^4 = 0$

(e) Wenn n gerade ist, ist $n-1$ ungerade, wenn n ungerade ist, ist $n-1$ gerade, d.h. eine der beiden Potenzen $(-1)^n$ oder $(-1)^{n-1}$ ist -1, die andere ist 1:

$a(-a)^n(-a)^{n-1} = a(-1)^n a^n (-1)^{n-1} a^{n-1} = -a^{2n}$

(f) $a(-a)^n + (-a)^{n+1} = a(-1)^n a^n + (-1)^{n+1} a^{n+1} = (-1)^n a^{n+1} - (-1)^n a^{n+1} = 0$

22. Klammere den in eckigen Klammern stehenden Term aus:

(a)	$12x^3 - 9x^2y + 18xy^2, \quad [3x]$	(b)	$u^5 - u^4 + u^3, \quad [u^3]$
(c)	$12x^3 - 9x^2y + 18xy^2, \quad [12x^3]$	(d)	$u^5 - u^4 + u^3, \quad [u^5]$
(e)	$\frac{x^2}{8} - \frac{xy}{12} - \frac{x}{4}, \quad \left[\frac{x}{4}\right]$	(f)	$8z^3 - 4z^2 + 2z, \quad [2z]$
(g)	$\frac{x^2}{8} - \frac{xy}{12} - \frac{x}{4}, \quad \left[-\frac{x}{24}\right]$	(h)	$8z^3 - 4z^2 + 2z, \quad [8z^3]$

Lösung: (a) $3x(4x^2 - 3xy + 6y^2)$ (b) $u^3(u^2 - u + 1)$

(c) $12x^3\left(1 - \frac{3y}{4x} + \frac{3y^2}{2x^2}\right)$ (d) $u^5\left(1 - \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}\right)$

(e) $\frac{x}{4}\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3} - 1\right)$ (f) $2z(4z^2 - 2z + 1)$

(g) $-\frac{x}{24}(-3x + 2y + 6)$ (h) $8z^3\left(1 - \frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^2}\right)$

23. Klammere so viel wie möglich aus, ohne dass ein Bruch entsteht:

(a) $36x^3y^2 - 54x^4y + 72x^3y^3$ (b) $32u^5 - 64u^6 - 16u^3$
(c) $-a^2b^2c^4 + a^3b^2c^5 - a^3b^3c^3$ (d) $84axy - 126ayz + 210bay$

Lösung: (a) $18x^3y(2y - 3x + 4y^2)$ (b) $16u^3(2u^2 - 4u^3 - 1)$
(c) $a^2b^2c^3(-c + ac^2 - ab)$ (d) $42ay(2x - 3z + 5b)$

24. Klammere so aus, dass in der Klammer kein Bruch mehr steht:

(a) $\frac{x}{4} - \frac{y}{2} - \frac{z}{8}$ (b) $\frac{ab^2}{3} + \frac{a^2b}{2} - \frac{ab}{6}$

(c) $\frac{rs}{7} + \frac{rt}{3} + \frac{st}{11}$ (d) $\frac{3a^3}{70} - \frac{4a^2}{63} + \frac{3a^4}{35}$

Lösung: (a) $\frac{1}{8}(2x - 4y - z)$ (b) $\frac{ab}{6}(2b + 3a - 1)$

(c) $\frac{1}{231}(33rs + 77rt + 21st)$ (d) $\frac{a^2}{630}(27a - 40 + 54a^2)$

25. Klammere soviel wie möglich aus und zwar so, dass in der Klammer kein Bruch mehr steht:

$$\frac{1}{3}u^3w^4 - \frac{1}{8}u^3w^3 + u^2w^3$$

Lösung: $\frac{u^2w^3}{24}(8uw - 3u + 24)$

26. Klammere soviel wie möglich aus und zwar so, dass in der Klammer kein Bruch mehr steht:

$$\frac{1}{4}a^4b^5 - \frac{1}{14}a^4b^3 - a^3b^4$$

Lösung: $\frac{a^3b^3}{28}(7ab^2 - 2a - 28b)$

3.5. Multiplizieren von Summen

1. Multipliziere aus und vereinfache soweit wie möglich:
   (a) $(2-x)(y+x)$
   (b) $(a-b+3)(2-a-b)$

Lösung: (a) $2y+2x-xy-x^2$
(b) $-a-5b-a^2+b^2+6$

2. Multipliziere aus und fasse zusammen:
   $-6x^2(2x-7y)-2x[xy-(-7y+2x)3x]$

Lösung: $-2x^2y$

3. Multipliziere die Klammern aus und fasse die Terme zusammen:
   (a) $(\frac{1}{2}-x)(-1+x^2-4x)$
   (b) $(\frac{1}{2}-a)(-3+a^2-4a)$
   (c) $(4x-1)(2x+2)(3x-3)$
   (d) $(2a-1)(3a+2)(4a-3)$
   (e) $(0{,}04u^2-0{,}1ux+0{,}25x^2)(0{,}2u+0{,}5x)$

Lösung: (a) $-x^3+4\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}$
(b) $-a^3+4\frac{1}{2}a^2+a-1\frac{1}{2}$
(c) $24x^3-6x^2-24x+6$
(d) $24a^3-14a^2-11a+6$
(e) $\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{125}u^3$

4. Berechne:
$$[(-2x)^3\cdot(-3y)^2-(2xy)^2\cdot(-9x)]:2^2+(3yx)^2\cdot x$$

Lösung: 0

5. Multipliziere aus und fasse zusammen:
   (a) $(1-x)\,(x+x^2)\,(2x-1)$
   (b) $(x^2+ax+2a^2)\,(2a-x)-(x^2-2ax+a^2)\,(x-2a)-2(3a^3-x^3)$

Lösung: (a) $-x+2x^2+x^3-2x^4$ (b) $5ax^2-5a^2x$

6. Multipliziere aus und vereinfache soweit wie möglich:
   (a) $(3-a)(a+b)$
   (b) $(4+x-2y)(3-y-2x)$

Lösung: (a) $3a+3b-a^2-ab$
(b) $12-5x-10y+3xy-2x^2+2y^2$

7. Vereinfache soweit wie möglich:
   (a) $7a-\{2z-[5x^2+(7a-4x^2)-x^2+2x]\}$
   (b) $-5x\,(2a+3b)-(8b-5a)\cdot 2x-4x\,(7a-5b)$

Lösung: (a) $14a+2x-2z$ (b) $-11bx-28ax$

8. Vereinfache soweit wie möglich:
   (a) $-12\frac{2}{3}-\{-(7\frac{1}{3}-17)-[-12-(-3+9\frac{1}{6})]+7\}$
   (b) $-1{,}2\cdot(7a-3b+8c)-(3b+2c-a)\cdot 2+(0{,}3a-0{,}1b+c)\cdot(-0{,}3)$
   (c) $-3\cdot[2ab-3a\cdot(2b-6a)-(a-3b)\cdot 6b-3a]-3a^2$

Lösung: (a) $-47\frac{1}{2}$ (b) $-6{,}49a-2{,}37b-13{,}9c+2$ (c) $-57a^2+30ab+9a-54b^2$

9. Löse die Klammern auf und fasse zusammen:

$$(5a^3b^2-4a^2b^3):a^2b+(\tfrac{1}{3}ba-\tfrac{1}{2}b)\,(2b-3a)-2a\,(0{,}5a-3b+7c)$$

Lösung: $-a^2b-a^2+\frac{2}{3}ab^2+12\frac{1}{2}ab-14ac-5b^2$

10. Vereinfache soweit wie möglich:
    (a) $7a-\{2z-[5x^2+(7a-4x^2)-x^2+2x]\}$
    (b) $-5x\,(2a+3b)-(8b-5a)\cdot 2x-4x\,(7a-5b)$

Lösung: (a) $14a+2x-2z$ (b) $-28ax-11bx$

11. Vereinfache soweit wie möglich:
    (a) $5a[6-4(3-a)]-[5a(6a-11)-4(3a^2-6a+6)]-24-(4a^2-108a):2$
    (b) $(2a-2b+4c)(c-7b)-(c-2b+a)(a-2b)-(2c-3b)(c-7b+2a)$

Lösung: (a) $55a$ (b) $-a^2 - 4ab - 3ac - 11b^2 - 11bc + 2c^2$

12. Multipliziere aus und fasse zusammen:

$$(7xz - 3y)(a - 4b) + (4b - a)(yz - 21x)$$

Lösung: $7axz - 28bxz - 3ay + 12by + 4byz - 84bx - ayz + 21ax$

13. Vereinfache so weit wie möglich:
    (a) $x(x-1) - x(x+1)$
    (b) $x^2\left(a - \frac{x}{2}\right) - x\left(ax - \frac{x^2}{3}\right)$

Lösung: (a) $x^2 - x - x^2 - x = -2x$

(b) $ax^2 - \frac{x^3}{2} - ax^2 + \frac{x^3}{3} = \frac{-3x^3 + 2x^3}{6} = \frac{-x^3}{6} = -\frac{x^3}{6}$

14. Multipliziere aus und fasse zusammen:
    (a) $x(x-1) - x(x+1) - x(-x-1)$
    (b) $(-2u)(u-2y) - 2y(u+y)$
    (c) $\frac{e}{4}\left(-2e - \frac{5}{2}f\right) - \frac{f}{4}\left(\frac{3}{2}e - 8\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{e^2}{2} - 4f\right)$

Lösung: (a) $x^2 - x - x^2 - x + x^2 + x = x^2 - x$

(b) $-2u^2 + 4uy - 2uy - 2y^2 = -2u^2 + 2uy - 2y^2$

(c) $-\frac{e^2}{2} - \frac{5ef}{8} - \frac{3ef}{8} + 2f + \frac{e^2}{4} - 2f = -\frac{e^2}{4} - ef$

15. Multipliziere aus:

(a)	$(2a-3b)(3a-2b)$	(b)	$(1-a)(1-b)(1-c)$
(c)	$(x-ay)(ax-y)$	(d)	$(1-x)^2(1+x)$
(e)	$(u-w)^2(u+w)^2$	(f)	$(1-x)(2-x)(3-x)$
(g)	$\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)(2x-3y)$	(h)	$\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8}\right)$

Lösung:

(a)	$6a^2 - 13ab + 6b^2$	(b)	$1 - a - b - c + ab + ac + bc - abc$
(c)	$ax^2 - a^2xy - xy + ay^2$	(d)	$1 - x - x^2 + x^3$
(e)	$u^4 - 2u^2w^2 + w^4$	(f)	$6 - 11x + 6x^2 - x^3$
(g)	$x^2 - \frac{13}{6}xy + y^2$	(h)	$1 - \frac{x^4}{16}$

16. Multipliziere aus und fasse zusammen: $\left(\frac{a}{2}-1\right)\left(\frac{a}{2}+1\right)+\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{a}{2}\right)$

Lösung: $\frac{a^2}{4}-1+\frac{1}{8}-\frac{a^2}{2}=-\frac{a^2}{4}-\frac{7}{8}$

17. Multipliziere aus und fasse zusammen: $\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}+b\right)+\left(1+\frac{b}{2}\right)\left(\frac{b}{4}-\frac{1}{2}\right)$

Lösung: $\frac{1}{4}-b^2+\frac{b^2}{8}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}-\frac{7}{8}b^2$

3.6. Binomische Formeln

1. Ein ,,Rechentrick" zum quadrieren einer zweistelligen Zahl mit der Einerziffer 5 lautet so:
   Nimm die Zehnerziffer der Zahl und vergrößere sie um 1, multipliziere das Ergebnis mit der Zehnerziffer selbst. Hängt man an die Zahl, die sich dabei ergibt, die Ziffernfolge 25 an, hat man schon die gesuchte Quadratzahl.
   (a) Berechne nachvollziehbar mit dieser Methode das Quadrat der Zahl 35.
   (b) Eine zweistellige Zahl mit der Zehnerziffer x und der Einerziffer 5 lässt sich schreiben als $10x + 5$.
   Berechne $(10x + 5)^2$, forme das Ergebnis geeignet um und begründe dadurch den obigen ,,Rechentrick".

   Quelle: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 8 der Gymnasien, 2006

Lösung: (a) $2 \cdot 3 = 6$, also 625
(b) $(10x + 5)^2 = 100x^2 + 100x + 25 = 100 \cdot x(x + 1) + 25$

2. Maria hat Fehler beim Auflösen von Klammern in binomischen Formeln gemacht:
   (a) $(3a + 10b)^2 = 9a^2 - 60ab + 10b^2$
   (b) $(x + 2)(2 - x) = 4 - x^2$
   (c) $(0{,}5x - 6)^2 = 2{,}5x^2 - 3x + 36$

   Streiche mit einem Farbstift (nicht Rot) alle Fehler einzeln an und verbessere Marias Lösungen auf diesem Blatt. (Nicht jede Lösung muss falsch sein.)

Lösung: (a) Es muss $100b^2$ heißen.
(b) richtig
(c) Es muss $0{,}25x^2 - 6x + 36$ heißen.

3. Multipliziere mit Hilfe der binomischen Formeln und vereinfache:
   (a) $(x + \frac{1}{2})(\frac{1}{2} - x)$
   (b) $4 \cdot (5x - 2y)^2$
   (c) $(3 - x)^2 \cdot (3 + x)^2$
   (d) $18 \cdot 12$

Lösung: (a) $\frac{1}{4} - x^2$
(b) $100x^2 - 80xy + 16y^2$
(c) $81 - 18x^2 + x^4$
(d) $(15 + 3)(15 - 3) = 216$

4. Multipliziere aus und fasse zusammen:

$$2(2x + 1{,}2y^2)^2 - 3(2x - 1{,}2y^2)(1{,}2y^2 + 2x) - (0{,}3y^2 - 4x)^2 \cdot 4$$

Lösung: $-68x^2 + 6{,}84y^4 + 19{,}2xy^2$

5. Faktorisiere soweit wie möglich:
   (a) $9a^2x - 9a^2y - 12abx + 12aby + 4b^2y - 4b^2x$
   (b) $\frac{1}{9}a^2x^2 - \frac{1}{6}a^2xy + \frac{1}{4}a^2y^2 - \frac{1}{9}b^2x^2 + \frac{1}{6}b^2xy - \frac{1}{4}b^2y^2$

Lösung: (a) $(9a^2 - 12ab - 4b^2)(x - y)$ (b) $(a - b)(a + b)(\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}xy + \frac{1}{4}y^2)$

6. Faktorisiere soweit wie möglich:
   (a) $4(3m - 3n) - 2a(m - n) + 7a(n - m)$
   (b) $3(x^4 - 1) + 4a(x^4 - 1)$

Lösung: (a) $3 \cdot (m - n)(4 - 3a)$ (b) $(3 + 4a)(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

7. Multipliziere aus und fasse zusammen:
   (a) $3a(2b - 5a)(3b + 4a) - 4b(7a^2 - 12ab) - (5b + 4a)(3a - 6b) \cdot 4a$
   (b) $-4ax(7a - 2x)(5x - 4a) + (3a^2 - 16ax) - 6a^2(2x - 3a)(2x + 3a)$
   (c) $(0{,}7x^3 + 1{,}1y^4)^2 - (0{,}7x^3 - 1{,}1y^4)(0{,}7x^3 + 1{,}1y^4) - 1{,}1y^4(2{,}2y^4 + 1{,}4x^3)$

Lösung: (a) $-108a^3 - 13a^2b + 186ab^2$

(b) $40ax^3 - 196a^2x^2 + 112a^3x - 16ax + 54a^4 + 3a^2$

(c) 0

8. Faktorisiere soweit wie möglich:
   (a) $81x^4 - y^4$
   (b) $0{,}49a^2 - 0{,}14ab + 0{,}01b^2$
   (c) $36p^2x^2 + 4q^2y^2 - 9p^2y^2 - 16q^2x^2$

Lösung: (a) $(3x - y)(3x + y)(9x^2 + y^2)$

(b) $(0{,}7a - 0{,}1b)^2$

(c) $(3p - 2q)(3p + 2q)(2x + y)(2x - y)$

9. Multipliziere aus und fasse zusammen:

$$3x\left(0{,}1x + 1\tfrac{1}{3}y\right)^2 - 2y\left(x - \tfrac{1}{3}y\right)\left(\tfrac{y}{3} + x\right) - (x + y)(x - 7y)^2$$

Lösung: $-0{,}97x^3 + 11\frac{4}{5}x^2y - 29\frac{2}{3}xy^2 - 48\frac{7}{9}y^3$

4. Gleichungen

4.1. Aufstellen linearer Gleichungen

1. In einem Trapez ist eine Grundlinie 1,5mal, die andere 2,5mal so lang wie die Höhe. Verkürzt man beide Grundlinien um 3 cm und verlängert die Höhe um 3 cm, so nimmt der Flächeninhalt um 15 cm^2 zu. Berechne die Längen von Grundlinien und Höhe!

Lösung: $h = 8$ cm, $g_1 = 12$ cm, $g_2 = 20$ cm

2. In einem Trapez ist eine Grundlinie 3,5mal, die andere 2,5mal so lang wie die Höhe. Verkürzt man beide Grundlinien um 2 cm und verlängert die Höhe um 2 cm, so nimmt der Flächeninhalt um 18 cm^2 zu. Berechne die Längen von Grundlinien und Höhe!

Lösung: $h = 5{,}5$ cm, $g_1 = 19{,}25$ cm und $g_2 = 13{,}75$ cm

4.2. Lösen linearer Gleichungen

1. Bestimme die Lösung der Gleichung
   (a) $x - 22 = 6 \cdot (0,5x - 2)$
   (b) $22 - x = 8 \cdot (0,5x + 2)$
   (c) $x - \frac{3}{4} = -6 \cdot (0,5x - 2)$
   (d) $x - 2,2 = -6 \cdot (\frac{2}{3}x - 2)$
   Quelle: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 8 der Gymnasien, 2006

Lösung: (a) $x = -5$ (b) $x = 1\frac{1}{5}$ (c) $x = 3\frac{3}{16}$ (d) $x = 2,84$

2. (a) $P(p|8) \in g : y = 4x - 40;\ p = \dots$
   (b) $2 \cdot 17^0 = \dots$
   (c) Flächeninhalt des Rechtecks RON mit $R(0|16)$, $O(0|0)$ und $N(14|0)$.
   (d) $6 \cdot x = 30^2;\ x = \dots$

(e) $120 : x = 600;\ x = \dots$

Quelle: Kreuzzahlrätsel von Ulrike Schätz

Lösung: (a) 12 (b) 2 (c) 112 (d) 150 (e) $\frac{1}{5}$

3. **Aquamaxx**

Frau S. aus K. ist es leid, jede Woche ein- oder zweimal zum Getränkemarkt zu fahren, um den entsprechenden Vorrat an Mineralwasser für ihre fünfköpfige Familie zu besorgen. Sie denkt über die Anschaffung eines Wasseraufbereitungsgerätes nach.

Die Firma Aquamaxx bietet ein solches Gerät zum Preis von 120 € an. Die entsprechenden CO_2-Patronen kosten 16 € und reichen für $40l$. $1m^3$ Leitungswasser kostet 8,50 € (einschließlich Abwassergebühren).
Die Hersteller des Aquamaxx behaupten: Bei Verwendung des Gerätes Aquamaxx sind die Kosten für ihr Mineralwasser bereits vor Ablauf eines Jahres geringer, als wenn Sie das Wasser im Getränkemarkt kaufen.

(a) Wie viel kostet ein Kasten Mineralwasser?

(b) Schätze den Tages- bzw. den Wochenbedarf der Familie S.

(c) Stelle die Kosten in einer Tabelle gegenüber $(100l, 200l, 300l)$

(d) Stelle für beide Möglichkeiten einen Term auf.

(e) Setze die beiden Gleichungen gleich und interpretiere das Ergebnis

Quelle: Sinus-Transfer

Lösung: (a) angenommen, 12 Flaschen *à* 0,7 l kosten 7,60 € (ohne Pfand)

(b) Jedes Kind eine Flasche, Eltern zusammen 3 bis 4 am Tag: ca. 6 Flaschen. 3 − 4 Kisten pro Woche, fast 30 l

(c)

	100 l	200 l	300 l
Aquamaxx	160,85 €	201,70 €	242,55 €
Kasten	90,48 €	180,96 €	271,44 €

(d) $90{,}48 \cdot x = 40{,}85x + 120$
Nach 240 l (bzw. 8 Monaten) sind die Kosten für Kasten und Aquamaxx gleich. Danach ist Aquamaxx billiger, also stimmt die Aussage von Aquamaxx.

4. Löse die folgende Gleichung $(D = \mathbb{Q})$:

$$3 \cdot (x + 4) = 14 - \frac{2}{3}x$$

Lösung: $L = \{\frac{6}{11}\}$

5. Gegeben ist die Gleichung

$$13 - 2x = x + 10, \quad G = \mathbb{Z}\,.$$

   (a) Zeige, dass $x = 2$ keine Lösung dieser Gleichung ist.

   (b) Ändere die Gleichung an einer Stelle so ab, dass $x = 2$ die Lösung der abgeänderten Gleichung ist, und führe den Nachweis.

Lösung: (a) Einsetzen (b) z.B.: $13 - 2x = x + 7$

6. Gegeben ist die Gleichung

$$7 - x = 3x + 11, \quad G = \mathbb{Z}$$

   (a) Zeige, dass $x = -1$ die Lösung dieser Gleichung ist.

   (b) Ändere die Gleichung an einer Stelle so ab, dass die Lösungsmenge der abgeänderten Gleichung leer ist, und führe den Nachweis.

Lösung: (a) Entweder $x = -1$ einsetzen oder die Gleichung nach x auflösen.
(b) z.B. $G = \mathbb{N}$ wählen oder $7 - x = 3x + 12$ usw.

7. Begründe: Die Lösungsmenge der Gleichung $4 - 6x = 3(11 - 2x)$ ist für $G = \mathbb{Q}$ leer.

Lösung: Es ergibt sich $4 - 0 \cdot x = 33$. Das ist für keine Belegung von x erfüllbar.

8. Begründe: Die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + 8 = 6$ ist für $G = \mathbb{Q}$ leer.

Lösung: Es ergibt sich $x^2 = -2$. Es gibt keine Zahl, die mit sich selbst multipliziert einen negativen Produktwert ergibt.

9. Maria hat bei den folgenden Termumformungen Fehler gemacht. Berichtige sie farbig (nicht mit roter Farbe):

   (a) $(a - 0{,}5)^2 = a^2 + a + 2{,}5$

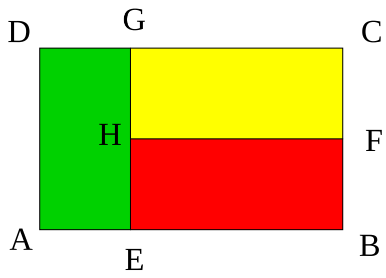
   (b) $(2x + 3)^2 = 2x^2 + 12x + 6$

   (c) $(4 - x)(x + 4) = x^2 - 16$

Lösung:
(a) $(a - 0{,}5)^2 = a^2 - a + 0{,}25$
(b) $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$
(c) $(4 - x)(x + 4) = 16 - x^2$

10. Löse für $G = \mathbb{Q}$ die folgende Gleichung nach x auf:
    $(x+3)^2 - (2x-1)^2 = (3+x)(x-3) - 4x^2 - 13$

Lösung: $x = -3$

11. 

Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet.
Die drei Rechtecke im Inneren sind kongruent. Ihre Seitenlängen stehen jeweils im Verhältnis 2:3. Weiter gilt: $\overline{HF} = 3x\,\text{cm}$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$.

(a) Zeichne die Figur für $x = 2$.

(b) Welchen Flächeninhalt besitzt eines der inneren Rechtecke, wenn der Saum der Fahne 1 m 8 cm lang ist?

Lösung:

(a) –

(b) Es gilt: $\overline{AD} = 2 \cdot \overline{HG} = 4x\,\text{cm}$ und $\overline{AB} = 5x\,\text{cm}$.
Dann folgt für den Umfang u: $u(x) = 18x\,\text{cm}$.
$18x = 108 \quad \Rightarrow \quad x = 6 \quad \text{und} \quad 2x = 12 \quad \text{sowie} \quad 3x = 18.$
Damit folgt für den Flächeninhalt A eines dieser Rechtecke im Inneren: $A = 12\,\text{cm} \cdot 18\,\text{cm} = 216\,\text{cm}^2$

12. Löse folgende Gleichungen ($G = \mathbb{Q}$):

(a) $4x - 5 = (x+3) \cdot 4$

(b) $x \cdot (x-2) - 3x = x^2 + 5$

(c) $2 \cdot [3 - 4 \cdot (x+2) - 2] + \frac{1}{2} \cdot [2 - 4 \cdot (x-1)] = 0$

Lösung: (a) $L = \{\,\}$ (b) $L = \{-1\}$ (c) $L = \{-1{,}1\}$

13. Löse:

(a) $7(8x+3)-(5x-3)\cdot 8=0$

(b) $\frac{1}{2}\cdot(4x+\frac{1}{3})-\frac{1}{4}(12x+1)=(9x-\frac{1}{4})\cdot\frac{1}{3}$

(c) $2(x+a)=6-3x+2a$

Lösung: (a) $x=-2\frac{13}{16}$ (b) $x=0$ (c) $x=1\frac{1}{5}$

14. Gib zu folgenden Gleichungen jeweils die Lösungsmenge L_1 zur Grundmenge $G_1=\mathbb{N}$ und L_2 zu $G_2=\mathbb{Q}$ an.

(a) $(8x-1)(x+3)=8(x-2)^2$

(b) $\frac{1}{6}(x-2)+\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}(\frac{5}{2}x-1)$

(c) $6(3x-1)-7(2x-1)=4(x+9)-42$

Lösung: (a) $L_1=\{\}$, $L_2=\{\frac{7}{11}\}$ (b) $L_1=G_1$, $L_2=G_2$ (c) $L_1=L_2=\{\}$

15. Bestimme die Lösungsmenge folgender Gleichung ($D=\mathbb{Q}$):

$$5(3-5x)-[4(2+3x)-10]+9x=3x-1$$

Lösung: $L=\{\frac{18}{31}\}$

16. Gleichungsparkett

$3{,}5x+7{,}7=7(2{,}9-x)$	$(z-5)(z-6)-z(z-8)=0$	$\frac{1}{b-1}=3$
$\frac{t}{3}-\frac{t+8}{12}=\frac{11}{60}$	$(2x+6)^2=5x^2-(x-2)^2$	$\frac{ax}{1+x}=2$
$\frac{1}{2x}-\frac{1}{3x}=-\frac{5}{6}$	$(7-\frac{2}{3})y=7(y-\frac{2}{3})$	$\frac{z}{z-1}=-\frac{1-z}{z}$
$\lvert b-\frac{2}{7}\rvert=0{,}5$	$0=2(ab+ac+bc)$	$\frac{1}{b}+\frac{1}{g}=\frac{1}{f}$
$A=\frac{a+b}{2}\cdot h$	$\frac{w+5}{w-2}=0$	$(s-\frac{2}{3})\cdot(2s-1\frac{1}{4})=0$
$(\frac{1}{2}+2x)\cdot(\frac{1}{2}-2x)+2x=$ $(2-x)\cdot x-\frac{13}{12}$		

Quelle: Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur, ISB 2001

Lösung:

$x=1{,}2$	$z=10$	$b=1\frac{1}{3}$
$t=3\frac{2}{5}$	$x=-2$	$x=\frac{2}{a-2}$, $a=\frac{2}{x}+2$
$x=-\frac{1}{5}$	$y=7$	$\frac{1}{2}$
$b_1=\frac{11}{14}$, $b_2=-\frac{3}{14}$	$a=-\frac{bc}{b+c}$ $b=-\frac{ac}{a+c}$ $c=-\frac{ab}{a+b}$	$f=\frac{bg}{b+g}$ $b=\frac{fg}{g-f}$ $g=\frac{bf}{b-f}$
$h=\frac{2A}{a+b}$ $a=\frac{2A}{h}-b$ $b=\frac{2A}{h}-a$	$w=-5$	$s_1=\frac{2}{3}$, $s_2=\frac{5}{8}$
$x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=-\frac{2}{3}$		

17. Gegeben ist die Gleichung

$$\frac{2}{5}(x-7)-\frac{3}{5}(2-3x)=x+2\frac{1}{5},\quad G=\mathbb{Q}$$

   (a) Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung.

   (b) Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung für die Grundmengen $G_1=\mathbb{Q}^+$, $G_2=\mathbb{Z}$, $G_3=\mathbb{N}$ und $G_4=\{5;5\frac{1}{2};5\frac{1}{3};5\frac{1}{4};5\frac{1}{5};5\frac{1}{6}\}$.

   (c) Verändere die rechte Seite der Gleichung so, dass $L_1=\{11\}$, $L_2=\{0\}$, $L_3=\{\}$ und $L_4=G$.

   (d) Lässt sich die Gleichung so abändern, dass $L_5=\{1;2\}$?

   (e) Betrachte nun die Gleichung

$$\frac{2}{5}(x-7)-\frac{3}{5}(2-3x)=ax+2\frac{1}{5},\quad G=\mathbb{Q},\quad a\in\mathbb{Q}.$$

   Für welche a gibt es genau eine Lösung? Wie lautet dann die Lösungsmenge? Wie sieht die Lösungsmenge in den übrigen Fällen aus?

   (f) Betrachte nun die Gleichung

$$\frac{2}{5}(x-7)-\frac{3}{5}(2-3x)=x+b\cdot 2\frac{1}{5},\quad G=\mathbb{Q},\quad b\in\mathbb{Q}.$$

   Welche Einfluss auf die Anzahl der Lösungen hat b?

Lösung: (a) $L=\{5\frac{1}{6}\}$

(b) $L_1=\{5\frac{1}{6}\}$, $L_2=\{\}$, $L_3=\{\}$, $L_4=\{5\frac{1}{6}\}$.

(c) z. B. $\frac{2}{5}(x-7)-\frac{3}{5}(2-3x)=x+9\frac{1}{5}$
$\frac{2}{5}(x-7)-\frac{3}{5}(2-3x)=x-4$
$\frac{2}{5}(x-7)-\frac{3}{5}(2-3x)=2\frac{1}{5}x$
$\frac{2}{5}(x-7)-\frac{3}{5}(2-3x)=2\frac{1}{5}x-4$

(d) Nein

(e) Genau eine Lösung für $a\neq\frac{11}{5}\implies L=\left\{\frac{31}{11-5a}\right\}$
Für $a=\frac{11}{5}$ folgt $L=\{\}$

(f) b hat keinen Einfluss auf die Anzahl der Lösungen.

18. Bestimme die Lösungsmengen folgender Gleichungen ($G=\mathbb{Q}$):

a)	$\|x-3\|=1$	b)	$\|x-2{,}75\|=1{,}25$
c)	$\|x-3{,}75\|=1{,}25$	d)	$\|\,\|x-1\|-2\|=3$

Lösung: (a) $L=\{2\,;\,4\}$, (b) $L=\{4\,;\,1{,}5\}$, (c) $L=\{5\,;\,2{,}5\}$, (d) $L=\{-4\,;\,6\}$

19. Bestimme die Lösungsmengen folgender Gleichungen:

a)	$\lvert x-7\rvert = 12$	b)	$\lvert x-5\rvert = 12$
c)	$\lvert x-7{,}38\rvert = 5{,}42$	d)	$\lvert x-7{,}39\rvert = 3{,}41$

Lösung: (a) $L = \{19; -5\}$ (b) $L = \{17; -7\}$
(c) $L = \{12{,}8; 1{,}96\}$ (d) $L = \{10{,}8; 3{,}98\}$

20. Bestimme die Lösungsmenge folgender Gleichung ($G = \mathbb{Q}$): $\lvert x-33{,}7\rvert = 21{,}9$

Lösung: $L = \{55{,}6; 11{,}8\}$

21. Berechne die Lösungsmengen folgender Gleichungen ($G = \mathbb{Q}$):
(a) $\frac{5}{4} - x = 3{,}5$ (b) $\lvert 3{,}5 - x\rvert = 4$

Lösung: (a) $L = \{-2\frac{1}{4}\}$ (b) $L = \{-0{,}5; +7{,}5\}$

22. Bestimme die Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{Q}$:
(a) $\lvert z\rvert + 8 = -6$ (b) $\lvert z\rvert - 8 = 6$ (c) $\lvert x-5\rvert = 7$

Lösung: (a) $L = \{\,\}$ (b) $L = \{-14; 14\}$ (c) $L = \{-2; 12\}$

23. Bestimme die Lösungsmenge folgender Gleichung (G=Q):

$$2\,(x+3)^2 - \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right)^2 = 100\,(1{,}2x - 0{,}6)(1{,}2x + 0{,}6) - \frac{1}{9}x^2 - 2x\left(71x - \frac{1}{6}\right)$$

Lösung: $-4\frac{23}{48}$

24. Bestimme die Lösungsmenge folgender Gleichung ($G = \mathbb{Q}$):

$$(11x-2)^2 - (7-9x)^2 = (6x+13)^2 + (2x-5)(2x+5)$$

Lösung: $L = \{-2\frac{41}{74}\}$

25. Bestimme die Lösungsmenge folgender Gleichungen ($G = \mathbb{Q}$):
(a) $(2x-5)(2x+5) + (7-9x)^2 = (11x+2)^2 - (6x+13)^2$
(b) $(1-5x)^2 + 3x(8x+3) = (7x-1)^2 + 3(1-x)$

Lösung: (a) $L = \{13\frac{1}{2}\}$ (b) $L = \{\frac{3}{16}\}$

26. Bestimme die Lösungsmenge folgender Gleichungen ($G = \mathbb{Q}$):
    (a) $(2x - 5)(2x + 5) + (7 - 9x)^2 = (11x + 2)^2 - (6x + 13)^2$
    (b) $(1 - 5x)^2 + 3x(8x + 3) = (7x - 1)^2 + 3(1 - x)$

Lösung: (a) $L = \{13\frac{1}{2}\}$ (b) $L = \{\frac{3}{16}\}$

27. Bestimme für folgende Gleichung die Lösung über $\mathbb{Q}$:

$$(2 - x)^2 + 2 \cdot (4x - 2) - 5 \cdot (2 - x) = (x + 3)^2$$

Lösung: $x = 6\frac{1}{3}$

28. Bestimme für folgende Gleichung die Lösung über $\mathbb{Q}$:

$$3 \cdot (4x - 2) + \left(1\frac{1}{2} - x\right)^2 = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot (2 - 3x)$$

Lösung: $x = \frac{355}{624}$

29. Löse folgende Gleichung ($D = Q$):

$$(5x + 4)(5x - 4) - (2 - 2x)^2 = (4x - 1)^2 + (2x - 8)(4x + 2) - x(3x - 4)$$

Lösung: $\frac{1}{8}$

30. Berechne die Lösungsmengen folgender Gleichungen zur jeweils angegebenen Grundmenge:
    (a) $17x - 13 = 22x + 7, \quad G = \mathbb{Q}$
    (b) $x - \dfrac{1}{4} = \dfrac{x}{7} + \dfrac{5}{4}, \quad G = \mathbb{Q}^+$
    (c) $13(x - x) = \dfrac{1}{x}, \quad G = \mathbb{N}$
    (d) $7(x - x) = 3 - \dfrac{21}{7}, \quad G = \mathbb{Z}$
    (e) $(x - 3)(x + 5) = 0, \quad G = \mathbb{Z}$

Lösung: (a) $-5x = 20, \quad x = -4 \in G \quad \Longrightarrow \quad L = \{-4\}$

(b) $\frac{6}{7}x = \frac{6}{4}, \quad x = \frac{6}{4} : \frac{6}{7} = \frac{7}{4} = 1{,}75 \in G \quad \Longrightarrow \quad L = \{1{,}75\}$

(c) $0 = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad L = \{\}$

(d) $0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad L = G = \mathbb{Z}$

(e) $x - 3 = 0 \quad \text{oder} \quad x + 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad L = \{-5; 3\}$

31. Berechne die Lösungsmengen folgender Gleichungen zur jeweils angegebenen Grundmenge:

(a) $27x - 35 = 34x - 18, \quad G = \mathbb{Z}$

(b) $x - \frac{1}{7} = \frac{8}{7} - \frac{x}{8}, \quad G = \mathbb{Q}^+$

(c) $4x - 3 - 7x = 11 - 3x - 14, \quad G = \mathbb{N}$

(d) $x^2 = -9, \quad G = \mathbb{Q}$

(e) $(x + 4)(x - 1)(x - 2) = 0, \quad G = \mathbb{N}$

Lösung: (a) $-7x = 17, \quad x = -\frac{17}{7} \notin G \quad \Longrightarrow \quad L = \{\,\}$

(b) $\frac{9}{8}x = \frac{9}{7}, \quad x = \frac{9}{7} : \frac{9}{8} = \frac{8}{7} \in G \quad \Longrightarrow \quad L = \left\{\frac{8}{7}\right\}$

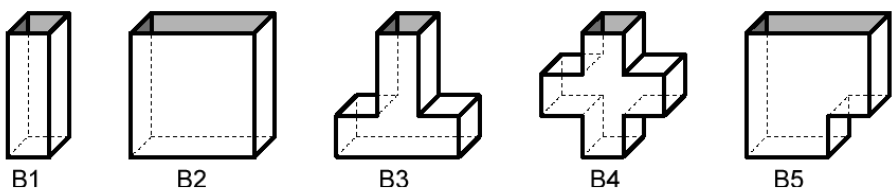
(c) $-3 - 3x = -3 - 3x \quad \Longrightarrow \quad L = G = \mathbb{N}$

(d) $x^2 \geqq 0$ für alle $x \quad \Longrightarrow \quad L = \{\,\}$

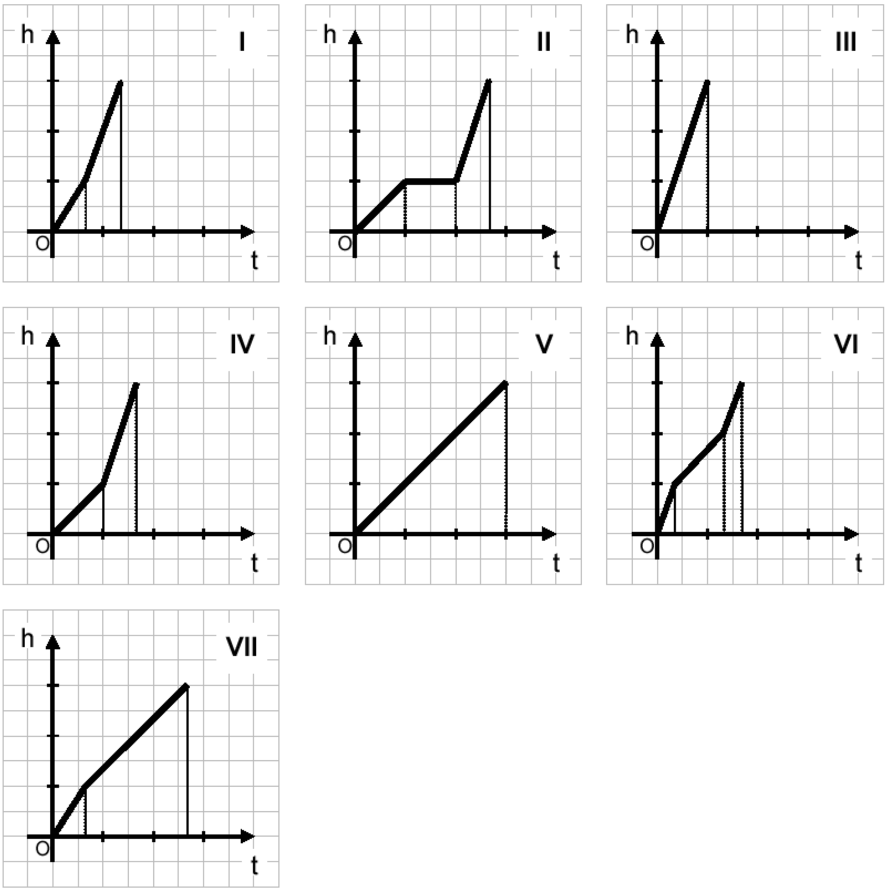
(e) $x = -4 \quad \text{oder} \quad x = 1 \quad \text{oder} \quad x = 2 \quad \Longrightarrow \quad L = \{1; 2\}$

4.3. Anwendungsaufgaben

1. Jeder der abgebildeten Behälter wird gleichmäßig mit der gleichen Wassermenge pro Zeiteinheit gefüllt.



Die folgenden grafischen Darstellungen geben die Höhe h des Wasserstandes in Abhängigkeit von der Füllzeit t an.



Ordne die Behälter die zugehörigen Graphen zu.

Quelle: Vergleichsarbeit bundesland- und schulartübergreifend in der Jahrgangsstufe 8, Materialien zur Weiterarbeit

Lösung: B1: III, B2: V, B3: IV, B4: VI, B5: VII

2. Bei alkoholischen Getränken ist es üblich, den Anteil reinen Ethanols am Gesamtvolumen des Weines in Prozenten anzugeben. Ein Hobbywinzer stellt mit einer Präzisionswaage fest, dass 1 Liter seines trockenen Kirschweins eine Masse von 973,125 g hat. Wie viel Prozent Alkohol enthält dieser Wein?

   Man kann davon ausgehen, dass es sich bei Wein um eine Mischung aus Wasser und Ethanol handelt. Ein Liter Wasser wiegt 1,0 Kilogramm, ein Liter reines Ethanol wiegt 785 g. Die Anteile an Säure und Restzucker können vernachlässigt werden.

Lösung: Es sei p% der prozentuale Volumenanteil des Alkohols im Kirschwein.

Volumen des Alkohols: $1l \cdot \frac{p}{100}$

Masse des Alkohols: $0,785\frac{kg}{l} \cdot 1l \cdot \frac{p}{100} = 0,785kg \cdot \frac{p}{100}$

Volumen des Wassers: $1l \cdot \frac{100-p}{100}$

Masse des Wassers: $1\frac{kg}{l} \cdot 1l \cdot \frac{100-p}{100} = 1kg \cdot \frac{100-p}{100}$

Masse des Kirschweins: $0,785kg \cdot \frac{p}{100} + 1kg\frac{100-p}{100} = 0,973125kg$

Durch Auflösen nach p ergibt sich ein Prozentsatz von $12,5\%$.

3. Simmerl und Resi kauften in einem Supermarkt in der Stadt Wein zum gleichen Einkaufspreis pro Flasche. Simmerl kaufte 90 Flaschen und Resi 60 Flaschen. In ihrem Dorf verkauften sie den Wein wieder. Simmerl verdiente dabei 30 % und Resi 20 % des jeweiligen Einkaufspreises. Für alle Weinflaschen zusammen zahlten die Dorfbewohner 1776,60 €.
   (a) Was kostete eine Flasche Wein im Einkauf?
   (b) Nach Beendigung des Geschäftes legten Simmerl und Resi ihre Einkünfte in eine gemeinsame Kasse. Wieviel Prozent des Einkaufspreises verdienten sie zusammen?

Lösung: (a) $x \cdot 90 \cdot (1 + 30\%) + x \cdot 60 \cdot (1 + 20\%) = x \cdot 189 = 1776{,}6$
$x = 9{,}4$, d.h. 9,40 € pro Flasche im Einkauf

(b) Gesamter Einkaufspreis: $9{,}4 \cdot (90 + 60) = 1410$, 26% Gewinn

4. (a) Denk dir eine Zahl (nenne sie x), addiere 2, multipliziere mit 3, subtrahiere 4, multipliziere wieder mit 3 und addiere das 6-fache der gedachten Zahl. Welche Zahl muss man sich ursprünglich gedacht haben, um am Ende 366 zu erhalten?
   (b) Denke dir ähnliche Aufgaben aus.

   Quelle: Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur, ISB 2001

Lösung: (a) $((x + 2) \cdot 3 - 4) \cdot 3 + 6x = 366 \Rightarrow 15x + 6 = 366 \Rightarrow x = 24$

5. Um wie viel Uhr zwischen 8 und 9 Uhr decken sich großer und kleiner Zeiger einer Zeigeruhr?

   Quelle: Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur, ISB 2001

Lösung: Verschiedene Lösungsmöglichkeiten:

- Aufstellen einer Gleichung:
  Sei x die gesuchte Minutenzahl. Der Minutenzeiger überstreicht pro Minute $360° : 60 = 6°$, d. h. in x Minuten $6° \cdot x$. Der Stundenzeiger überstreicht pro Minute $(360° : 12) : 60 = 0{,}5°$, d. h. in x Minuten $0{,}5° \cdot x$. Da der kleine Zeiger um 8 Uhr gegenüber dem großen Zeiger einen Vorsprung von $8 \cdot 30° = 240°$ hat, gilt die Gleichung $6° \cdot x = 0{,}5° \cdot x + 240°$, deren Lösung $x = 43\frac{7}{11}$ ist.

- Aufstellen von Funktionstermen:
  $w_{\text{gr. Zeiger}}(x) = 6° \cdot x$ und $w_{\text{kl. Zeiger}}(x) = 0{,}5° \cdot x + 240°$. Das Gleichsetzen der Terme führt zu obiger Gleichung; alternativ bringt eine graphische Lösung (mit nichttrivialer Achsenskalierung) eine Näherungslösung.
- Lösung ohne Gleichung:
  Der große Zeiger legt pro Minute 6° zurück, der kleine Zeiger 0,5°. Der kleine Zeiger hat um 8 Uhr einen Vorsprung von 240°. Pro Minute verringert sich der Vorsprung des kleinen Zeigers um 5,5°. In $240° : 5{,}5° = 43\frac{7}{11}$ Minuten hat damnach der große den kleinen Zeiger eingeholt.

6. 56 Vögel sitzen gelangweilt auf drei Bäumen herum. Vor Langeweile fliegen 4 Vögel vom ersten auf den zweiten und 9 vom zweiten auf den dritten Baum. Nun sind auf dem zweiten Baum doppelt soviel Vögel wie auf dem ersten und auf dem dritten doppelt soviel wie auf dem zweiten. Wie viele Vögel saßen ursprünglich auf jedem Baum?

Lösung: Anzahl der Vögel nach dem Flug auf dem ersten, zweiten, dritten Baum: x, $2x$, $4x \Rightarrow 7x = 56 \Rightarrow x = 8$;
Anzahl der Vögel nach dem Flug auf dem ersten, zweiten, dritten Baum: 8, 16, 32 $\Rightarrow$
Anzahl der Vögel vor dem dem Flug auf dem ersten, zweiten, dritten Baum: 12, 21, 23.

7. Eine Mutter ist viermal so alt wie ihr Sohn, in acht Jahren wird sie nur noch 2,5 mal so alt sein. Wie alt sind beide jetzt?

Lösung: Alter der Mutter jetzt: 32 Jahre
Alter des Sohns jetzt: 8 Jahre

8. (a) An seinem 50. Geburtstag stellt ein Vater fest, dass seine drei Kinder zusammen ebenso alt sind wie er selbst. Die Tochter ist um 6 Jahre älter als der jüngste Sohn, der gerade halb so alt ist wie sein älterer Bruder. Wie alt sind die drei Kinder? Stelle für die Lösung der Aufgabe eine Gleichung auf!
   (b) An seinem 60. Geburtstag stellt ein Vater fest, dass seine drei Kinder zusammen ebensoalt sind wie er selbst. Die Tochter ist um 5 Jahre älter als der jüngste Sohn. Der ältere Sohn ist dreimal so alt wie der jüngste Sohn. Wie alt sind die drei Kinder? Stelle für die Lösung der Aufgabe eine Gleichung auf!

Lösung: (a) jüngster Sohn: x, Tochter $x + 6$, älterer Bruder $2x$, $x + (x + 6) + 2x = 50 \Rightarrow$ jüngster Sohn: 11, Tochter 17, älterer Bruder 22
(b) jüngster Sohn: x, Tochter $x + 5$, älterer Bruder $3x$, $x + (x + 5) + 3x = 60 \Rightarrow$ jüngster Sohn: 11, Tochter 16, älterer Bruder 33

9. Eine Mutter ist jetzt dreimal so alt wie ihre Tochter. In 4 Jahren wird sie achtmal so alt sein, wie ihre Tochter vor 7 Jahren war. Wie alt sind Mutter und Tochter jetzt?

Lösung: Alter der Tochter: 12 Jahre, Alter der Mutter: 36 Jahre

10. Ein Vermögen von 14000 € soll an drei Kinder in folgender Weise verteilt werden: Der Sohn erhält als Ausgleich für die Kosten seiner Ausbildung 3000 € weniger als die jüngste Tochter, die ältere Tochter als Entschädigung für ihre Mithilfe im Haushalt 2000 € mehr als diese.

Lösung: Sohn: $x - 3000\,€$, jüngste Tochter: x, ältere Tochter: $x + 2000\,€$

$(x - 3000\,€) + x + (x + 2000\,€) = 14000\,€ \quad \Longrightarrow$

Sohn: 2000 €, jüngste Tochter: 5000 €, ältere Tochter: 7000 €

11. Der Verdienst einer Halbtageskraft wurde einmal um ein Fünfzehntel und dann noch zweimal um je das 0,2-fache des vorigen Verdienstes erhöht und beträgt jetzt 852,48 €. Wie groß war der Verdienst vor den Erhöhungen?

Lösung: $x \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \cdot (1 + 0{,}2)^2 = 852{,}48\,€$

$$x \cdot \frac{16 \cdot 12^2}{15 \cdot 10^2} = x \cdot \frac{16 \cdot 144}{15 \cdot 100} = x \cdot \frac{16 \cdot 12}{5 \cdot 25} = x \cdot \frac{192}{125} = 852{,}48\,€$$

$$x = 852{,}48\,€ : \frac{192}{125} = \frac{852{,}48 \cdot 125}{192}\,€ = \frac{106\,560}{192}\,€ = 555{,}\text{-}\,€$$

12. Das Gehalt von Herrn Müller wurde zweimal nacheinander um 10% erhöht und beträgt jetzt 5154,60 €. Wie hoch war es ursprünglich?

Lösung: $x \cdot 1{,}1^2 = 5154{,}60\,€ \Longrightarrow x = 4260\,€$

13. Ein Wucherer verlangt jährlich 20 % Zins für ausgeliehenes Geld. Wieviel hat sich Sepp vom Wucherer geliehen, wenn er nach drei Jahren 63 936 € zurückzahlen muss?

Lösung: $x \cdot (1 + 20\,\%)^3 = x \cdot 1{,}2^3 = 63\,936\,€ \quad \Longrightarrow \quad x = 37\,000\,€$

14. Ein Computer kostet mit 15 % Mehrwertsteuer 2875 €. Was kostet das Gerät mit 16 % Mehrwertsteuer?

Lösung: Ohne MWS: x, $\quad x \cdot (1 + 15\,\%) = x \cdot 1{,}15 = 2875\,€ \quad \Longrightarrow \quad x = 2500\,€$

Mit 16 % MWS: $y = 2500\,€ \cdot 1{,}16 = 2900\,€$

15. Als Hausaufgabe mussten die Schüler der Klasse 6 a des Hinterwald-Gymnasiums zu einer ihnen bekannten Zahl x fünf Prozent addieren. Franz und Susi fassten die nicht ganz präzise gestellte Aufgabe verschieden auf, und daher war das Ergebnis von Franz auch um 10 größer als das Ergebnis von Susi. Wie rechneten Franz bzw. Susi und wie lautete x?

Lösung: $\underbrace{x + 5\% \cdot x}_{\text{Franz}} = \underbrace{x + 5\%}_{\text{Susi}} + 10, \quad 5\% \cdot x = 5\% + 10 = 10{,}05, \quad x = 201$

16. Holz verliert beim Trocknen 42 % seiner Masse. Wie schwer war ein Stapel Holz im frischen Zustand, wenn er trocken 812 kg wiegt?

Lösung: $x \cdot \left(1 - \frac{42}{100}\right) = 812\,\text{kg} \quad \Longrightarrow \quad x = 1400\,\text{kg}$

17. Bei einer Physikschulaufgabe gab es 10 % Einser, 20 % Zweier, 30 % Vierer, 15 % Fünfer und 5 % Sechser. Welcher Bruchteil der Schüler hatte einen Dreier? Wie groß war die Durchschnittsnote der Schulaufgabe? Wie viele Schüler haben an der Schulaufgabe teilgenommen, wenn die Prozentangaben exakt sind (nicht gerundet)?

Lösung: 20 % Dreier, Durchschnitt $= \frac{10 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 30 \cdot 4 + 15 \cdot 5 + 5 \cdot 6}{100} = 3{,}35$

Ist x die Zahl der Schüler, dann muss $5\,\% \cdot x$ ganzzahlig sein, d.h. x ist ein Vielfaches von 20. Wegen $x \leqq 33$ ist $x = 20$.

18. Fritz eröffnet ein Konto bei der Bank und zahlt einen gewissen Anfangsbetrag ein. Am Ende eines Jahres wird ein Fünfundzwanzigstel des momentan vorhandenen Betrages als Zins dem Konto zugeschlagen. Nach drei Jahren beträgt der Kontostand 3515,20 €. Welchen Betrag hat Fritz bei der Kontoeröffnung einbezahlt?

Lösung: $x \cdot \left(1 + \frac{1}{25}\right)^3 = x \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^3 = x \cdot \frac{17576}{15625} = 351520\,\text{Cent} \quad \Longrightarrow \quad x = 3125\,€$

19. Eine sehr spendable Bank zahlt am Jahresende ein Siebtel des Betrages vom Jahresanfang als Zins. Ludwig zahlt Anfang 1996 einen bestimmten Anfangsbetrag bei der Bank ein, Ende 1998 ist sein Konto auf 1024 € angewachsen. Welchen Betrag zahlte Ludwig Anfang 1996 ein?

Lösung: $x \cdot \left(1 + \frac{1}{7}\right)^3 = 1024\,€ \quad \Longrightarrow \quad x = 686\,€$

20. Nach fünf Jahren in einer Firma wird das Gehalt von Kathrin um ein Zehntel aufgebessert, nach weiteren zwei Jahren wird das neue Gehalt um ein Zwanzigstel erhöht und drei Jahre später gibt es eine Gehaltserhöhung um ein Vierzehntel. Nach dieser dritten Erhöhung bekommt Kathrin 2475 € monatlich. Wie groß war Kathrins Anfangsgehalt?

Lösung: $x \cdot \left(1+\frac{1}{10}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{20}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{14}\right) = \frac{99}{80} \cdot x = 2475\,€ \quad \Longrightarrow \quad x = 2000\,€$

21. Heinz-Rüdiger zahlt einen Lottogewinn bei der Bank ein und läßt ihn drei Jahre dort liegen. Im ersten und im zweiten Jahr zahlt die Bank $\frac{1}{15}$ des jeweiligen Jahresanfangsbetrages als Zins, im dritten Jahr sogar $\frac{1}{14}$. Nach dem dritten Jahr sind 1408 € auf seinem Konto. Welchen Betrag zahlte Heinz-Rüdiger bei der Bank ein?

Lösung: $x \cdot \left(1+\frac{1}{15}\right)^2 \cdot \left(1+\frac{1}{14}\right) = 1408\,€ \quad \Longrightarrow \quad x = 1155\,€$

22. Erich zahlt eine kleine Erbschaft bei der Bank ein. Im ersten Jahr zahlt die Bank 2 % Zins, im zweiten Jahr 3 %. Nach dem zweiten Jahr hat Erich 8825,04 € auf dem Konto. Welchen Betrag hat Erich einbezahlt?

Lösung: $x \cdot (1+2\,\%) \cdot (1+3\,\%) = 8825{,}04\,€ \quad \Longrightarrow \quad x = 8400\,€$

23. Eine Seite eines Rechtecks hat die fünffache Länge der anderen Seite, der Umfang des Rechtecks ist 30 cm. Stelle den Sachverhalt in Form einer Gleichung dar und berechne die Seitenlängen des Rechtecks.

Lösung: 1. Seite: x, 2. Seite: $5x$

$$\begin{aligned} 2\cdot(x+5x) &= 30 \qquad (4.1)\\ 12x &= 30\\ x &= \frac{30}{12} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \end{aligned}$$

Die Seitenlängen sind 2,5 cm und 12,5 cm.

24. Die Mutter ist fünfmal so alt wie ihre Tochter. Der Opa ist zehnmal so alt wie die Tochter und lebt schon um 28 Jahre mehr als Mutter und Tochter zusammen. Stelle eine Gleichung auf und berechne das Alter der drei Personen.

Lösung: x ist das Alter der Tochter.

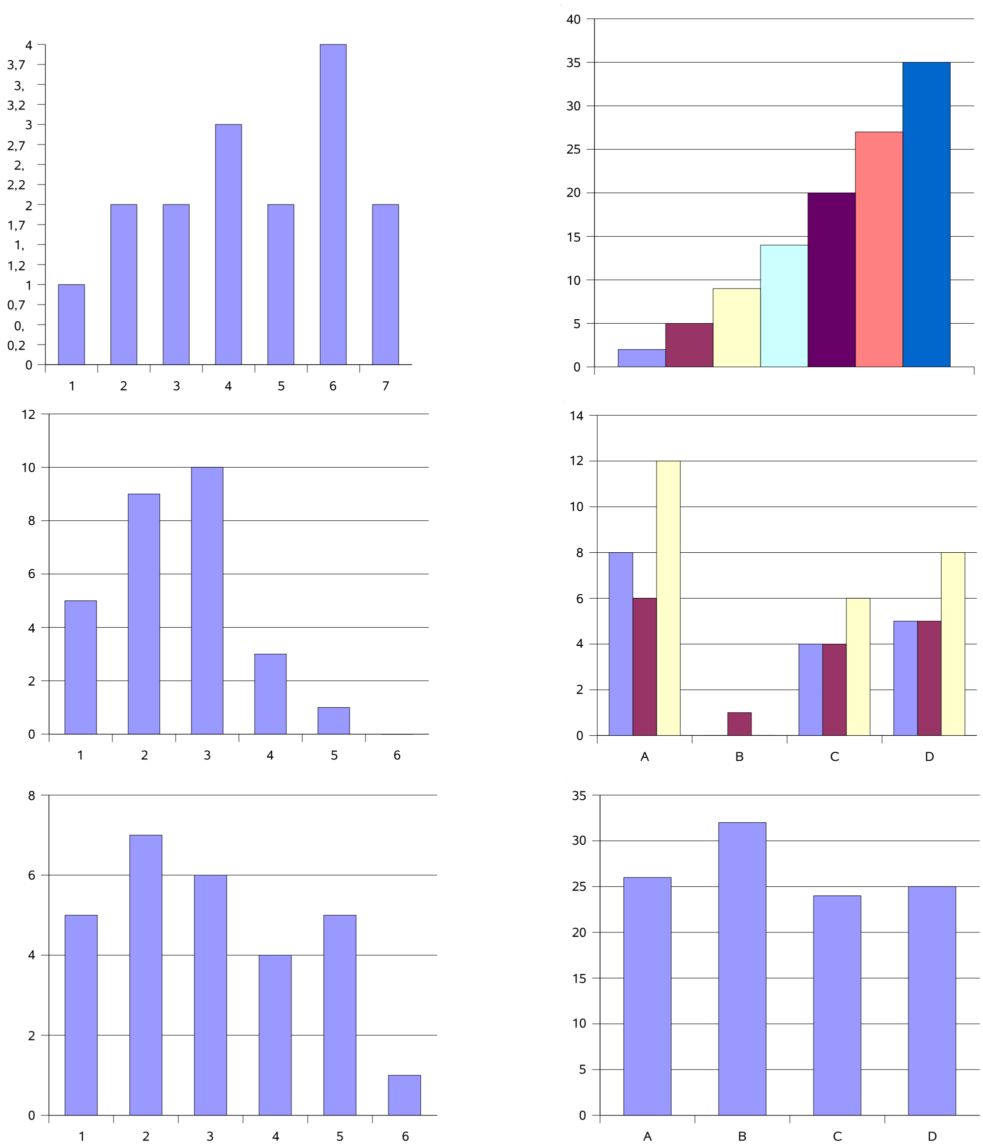
$$\begin{aligned} x+5x+28 &= 10x\\ 28 &= 10x-x-5x\\ 28 &= 4x\\ x &= 7 \end{aligned}$$

Tochter: 7 a Mutter: 35 a Opa: 70 a

5. Daten, Diagramme und Prozentrechnung

5.1. Auswerten von Daten, Mittelwerte

1. Finde jeweils das passende Diagramm. Es veranschaulicht
   (a) die Notenübersicht bei der vorletzten Mathematikschulaufgabe; der Notendurchschnitt war 3,0. Wie viel Prozent der Arbeiten waren mindestens ausreichend?
   (b) die Notenübersicht bei der vorletzten Mathematikschulaufgabe; der Notendurchschnitt war besser als 3,0. Berechne die Durchschnittsnote.
   (c) die Anzahl der Diagonalen eines n-Ecks. Stelle die Anzahl in einer Tabelle dar und ermittle für zwei weitere Vielecke die Anzahl der Diagonalen.
   (d) Die Anzahl der Teiler natürlicher Zahlen. Gib den Bruchteil der verwendeten Primzahlen an.
   (e) die Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten von geometrischen Grundkörpern. Finde heraus, um welche Grundkörper es sich handeln könnte.
   (f) die Klassenstärken in vier fünften Klassen. Berechne die durchschnittliche Klassenstärke in der fünften Jahrgangsstufe.



Quelle: Ulrike Schätz

Lösung: (a) letzte Reihe, linkes Diagramm;

$(5+7+6+4):(5+7+6+4+5+1) = 22:28 = 78,6\%$

(b) zweite Reihe, linkes Diagramm;

$(5+18+30+12+5):(5+9+10+3+1) = 70:28 = 2,5$

(c) erste Reihe, rechtes Diagramm;

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Diog.	2	5	9	14	20	27	35	44	54

(d) erste Reihe, linkes Diagramm; $2:7 = \frac{2}{7}$

(e) zweite Reihe, rechtes Diagramm;

A	B	C	D
Würfel	Kreis	Tetraeder	vierseitige Pyramide

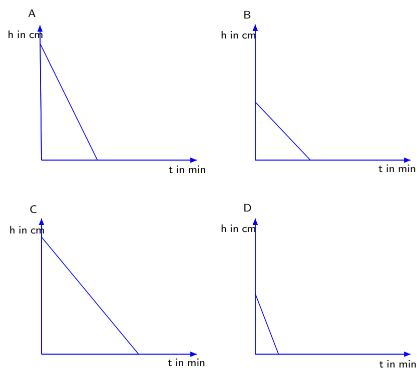
(f) dritte Reihe, rechtes Diagramm;

2. Eine 20 cm lange Kerze brennt in 12 Stunden gleichmäßig ab.

   (a) Zeichne den Abbrenngraphen in ein Koordinatensystem.

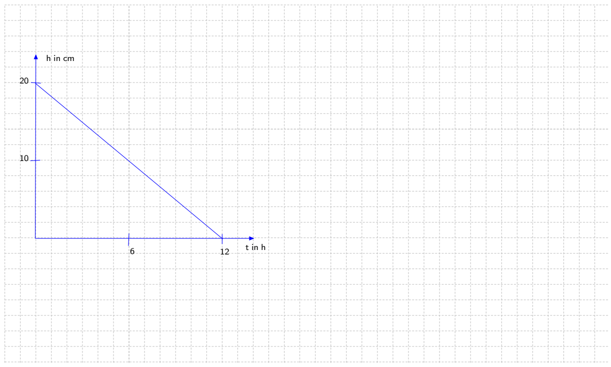
   (b) Welche Annahme muss man machen, damit der Graph gezeichnet werden darf.

   (c) Nachfolgend sind die Abbrenngraphen von vier zylindrischen Kerzen dargestellt. Zeichne 4 Kerzen, die zu den Graphen passen, und beschreibe das Abbrennverhalten in Worten.



Quelle: Standard Mathematik von der Basis bis zur Spitze, Grundbildungsorientierte Aufgaben für den Mathematikunterricht, Christina Drüke-Noe, Dominik Leiß, Institut für Qualitätsentwicklung, Wiesbaden, 2005

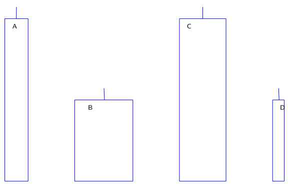
Lösung: (a) Diagramm:



(b) gleichmäßiges Abbrennen, Kerze brennt durchgehend, Kerze erlischt bei Höhe Null

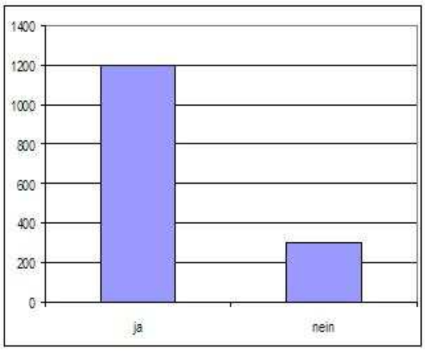
(c) Kerze A und C gleich hoch, Kerze C ist dicker.

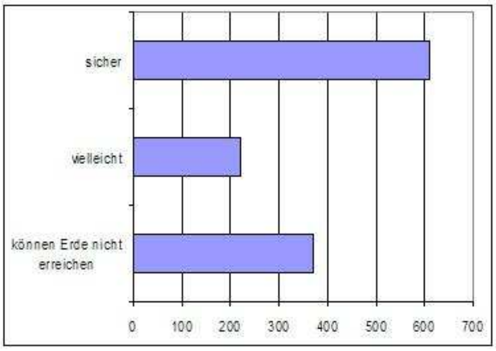
Kerze B und D gleich hoch, Kerze B ist dicker.



3. **Außerirdische unter uns**

   Die meisten Kinder besitzen einen unerschütterlichen Glauben an außerirdische Lebewesen. Die Diagramme zeigen das Ergebnis einer Umfrage im März 2004:





(a) Wie viel Prozent er Befragten glauben gemäß obiger Diagramme an Außerirdische?

○ 20% ○ 60% ○ 70% ○ 80% ○ 90%

(b) Anna betrachtet das rechte Diagramm und stellt fest: ,,Etwa die Hälfte aller Kinder ist sich sicher, dass Außerirdische bereits einmal auf der Erde waren.Ërkläre anhand der Zahlen des rechten Diagramms, wie Anna zu dieser Aussage kommt, und erläutere, warum sie mit ihrer Aussage nicht Recht hat.

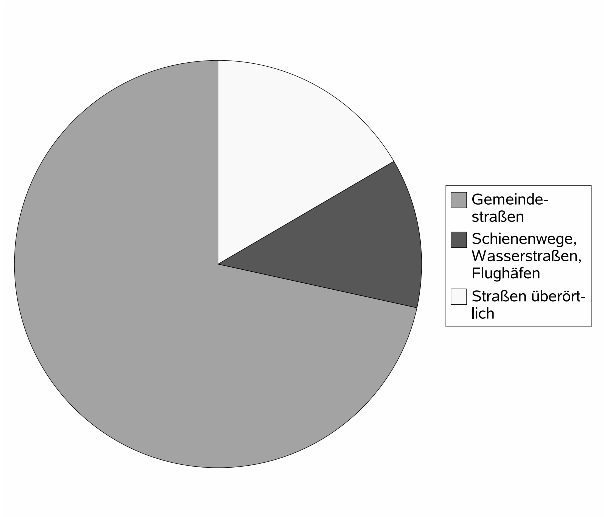
Quelle: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 10 der Gymnasien 2004

Lösung: (a) 80%

(b) Ca. 600 Kinder antworten auf die Frage ,,Waren die Außerirdischen schon auf der Erde?" mit ,,sicher". 1200 Kinder antworten mit ,,ja" auf die Frage ,,Gibt es Außerirdische". Bezogen auf diese wären es in der Tat 50%.

Die Hälfte aller befragten Kinder wären aber ca. $(1200 + 300) : 2 = 750$ Kinder!

4. Bayern hat einen Flächeninhalt von ungefähr $70\,000 km^2$.
5% dieser Fläche sind so genannte Verkehrsflächen für Straßen, Schienenwege usw.
   (a) Wie viele Quadratkilometer in Bayern sind Verkehrsflächen?
   (b) Das folgenden Diagramm gliedert die Verkehrsflächen näher auf. Wie viele Prozent der Verkehrsflächen sind überörtliche Straßen (Autobahnen, Bundes-, Staats- und Kreisstraßen)?



   (c) Die Verkehrsflächen nahmen im Jahr 2003 um $16,47 km^2$ zu. Wie vielen Sportplätzen zu je $10\,000 m^2$ entspricht diese Fläche?

Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 10 der Gymnasien 2005

Lösung: (a) $3500 km^2$ (b) 17% (c) 1647

5. Nachfolgende Tabelle zeigt die Durchschnittsnoten der drei Unterstufenjahrgänge eines Gymnasiums im Fach Mathematik. N_{U} ist der Mittelwert der Mathematiknoten aller Unterstufenschüler. Berechne den Durchschnitt N_5 der Mathematiknoten in der fünften Jahrgangsstufe. Stelle zuerst eine Gleichung für N_5 auf!

Jahrgangsstufe	Zahl der Schüler	Durchschnittsnote in Mathematik
5	110	$N_5 = ?$
6	100	$N_6 = 3{,}50$
7	90	$N_7 = 3{,}80$
Unterstufe		$N_{\mathrm{U}} = 3{,}59$

Lösung: $\frac{N_5 \cdot 110 + 3{,}5 \cdot 100 + 3{,}8 \cdot 90}{110 + 100 + 90} = 3{,}59, \quad 110 \cdot N_5 + 692 = 3{,}59 \cdot 300$

$$N_5 = \frac{1077 - 692}{110} = 3{,}5$$

6. Nachfolgende Tabelle zeigt die Durchschnittsgehälter der beiden Abteilungen einer Softwarefirma. G ist der Mittelwert der Gehälter aller Firmenangestellten.

Abteilung	Zahl der Angestellten	Durchschnittsgehalt in €
A	50	$G_{\mathrm{A}} = ?$
B	30	$G_{\mathrm{B}} = 3200$
gesamte Firma		$G = 2500$

(a) Berechne das Durchschnittsgehalt G_{A} in der Abteilung A unter der Annahme, dass alle Zahlen in der Tabelle exakt (nicht gerundet) sind. Stelle zuerst eine Gleichung für G_{A} auf.

(b) Tatsächlich sind die Durchschnittsgehälter in der Tabelle auf ganze hundert Euro gerundet. Zwischen welchen kleinsten und größten Beträgen liegen die tatsächlichen Werte von G und G_{B}? Berechne den größten und kleinsten Betrag, der für G_{A} möglich ist. Welche, auf ganze hunderter gerundete Zahlen könnten also in der Tabelle für G_{A} stehen?

Lösung: (a) $\frac{50 \cdot G_{\mathrm{A}} + 30 \cdot 3200}{50 + 30} = 2500, \qquad 50 \cdot G_{\mathrm{A}} + 96\,000 = 80 \cdot 2500 = 200\,000$

$$50 \cdot G_{\mathrm{A}} = 104\,000, \qquad G_{\mathrm{A}} = \frac{104\,000}{50} = 2080$$

(b) $3150 \leqq G_{\mathrm{B}} < 3250, \quad 2450 \leqq G < 2550 \quad \Longrightarrow$

$$G_{\mathrm{Amin}} = \frac{80 \cdot 2450 - 30 \cdot 3250}{50} = \frac{196\,000 - 97\,500}{50} = \frac{98\,500}{50} = 1970$$

$$G_{\text{Amax}} = \frac{80 \cdot 2550 - 30 \cdot 3150}{50} = \frac{204\,000 - 94\,500}{50} = \frac{109\,500}{50} = 2190$$

Mögliche Werte für G_{A}: 2000, 2100, 2200

5.2. Prozentrechnen

1. Händler Meier überlegte zum Jahrewechsel 2006/2007, wie er die Anhebung des Mehrwertsteuersatzes von 16% auf 19% bei seinen Preisen berücksichtigen könnte. Am Beispiel einer Digitalkamera, die im Dezember noch für 199 EUR angeboten wurde, rechnete er: ,,3% von 199 EUR aus, das sind 5,97 EUR, dann ergäbe sich rein rechnerisch ein neuer Preis von 204,97 EUR."

   Ein Kollege erklärte ihm: ,,Nein, dein Ansatz ist falsch. Du musst folgendermaßen vorgehen: Im Dezember kostete die Kamera einschließlich 16% Mehrwertsteuer 199 EUR, also ..."

   Setze die Erklärung fort, so dass der Händler Meier genau weiß, welche Rechnungen er ausführen müsste. Die Rechnungen selbst brauchen nicht durchgeführt zu werden.

   Bayerischer Mathematik Test für die 10. Klasse, 2007

Lösung: Z. B. ohne Mehrwertsteuer kostete die Digitalkamera $199\text{EUR} : 1,16$; mit 19% Mehrwertsteuer kostet sie $199\text{EUR} : 1,16 \cdot 1,19$

2. Butter hat einen Fettgehalt von 82%, Crème Fraiche enthält 30% Fett. Wie viel Gramm Butter enthalten die gleiche Menge Fett wie ein Becher mit 125 g Crème Fraiche?

Lösung: 125 g Crème Fraiche enthalten 37,5 g Fett. 45,73 g Butter enthalten die gleiche Menge Fett wie ein Becher mit 125 g Crème Fraiche.

3. Wenn alle Mitgleider in einer Gruppe einander vertrauen können, dann fühlt man sich wohl und kann auch wirtschaftlich profitieren. Frau Krause bestellt nun für die Mitglieder ihrer Gymnastikgruppe beim Versandhaus XYZ als Sammelbesteller. Dafür gibt es 5 % Rabatt auf jede Bestellung.
   (a) Für die letzte Lieferung muss Frau Krause 567,48 EUR überweisen. Wie hoch war die Rechnungssumme vor Abzug des Rabattes?
   (b) Wenn Frau Krause dem Versandhaus eine Einzugsermächtigung erteilt, gäbe es noch einmal 3% Rabatt zusätzlich. Welche Summe würde das Versandhaus dann für die letzte Lieferung vom Konto abbuchen?

(c) Die Damen der Gymnastikgruppe sind hoch erfreut über dieses Schnäppchen. Elfriede rechnet aus, dass sie nun mit der Einzugsermächtigung auf insgesamt 8 % Rabatt kommen. Entscheiden Sie, ob Elfriede recht hat, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Lösung: (a) 597,35 EUR

(b) 550,46 EUR

(c) Elfriede hat nicht recht. Ein Rabatt von 8 % auf den in a) berechneten Grundwert ergibt 549,56 EUR. Der Rabatt ist also kleiner als 8 %.

4. Anna mischt 0,2 Liter Traubensaft und 0,3 Liter Wasser zu einer Traubenschorle.
   (a) Wie viel Prozent der Schorle sind Traubensaft?
   (b) Wie viele Liter Traubensaft braucht Anna, wenn sie nach obigem Mischungsverhältnis 30 Liter Traubenschorle für die Unterstufenparty zubereiten will?
   (c) Annas Klasse verkauft auf der Party die gesamten 30 Liter Traubenschorle in Bechern zu je 0,2 Liter. Ein Becher Traubenschorle wird für 40 Cent verkauft. Wie viel nimmt die Klasse ein?

   Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 8 der Gymnasien 2005

Lösung: (a) 40% (b) 12 Liter (c) 60 EUR

5. Hans verdient um 40 % weniger als Eva, Karin verdient um 45 % mehr als Hans.
   (a) Um wieviel Prozent verdient Karin mehr oder weniger als Eva?
   (b) Um wieviel Prozent verdient Eva mehr oder weniger als Karin?

Lösung: (a) Karin verdient um 13 % weniger als Eva.

(b) Eva verdient um $14\frac{82}{87}$ % mehr als Karin.

6. Bei der Produktion von Gameboys durchlaufen die Geräte nacheinander zwei Qualitätskontrollen. Bei der ersten Kontrolle werden 2% aussortiert, bei der zweiten Kontrolle werden 0,5% als schlecht befunden.
   Wieviele Gameboys werden ausgeliefert, wenn in der Produktion mit 10000 Geräten begonnen wird?

Lösung: $10000 \cdot (1 - 0{,}02) \cdot (1 - 0{,}005) = 9751$

7. Familie Maier zahlt für eine Wohnung monatlich 620 € Miete. Drei Jahre nach dem Einzug wird die Miete um 10% erhöht und nach weiteren zwei Jahren um 15% des vorher erhöhten Mietpreises.

   (a) Wie hoch war der Mietpreis nach der 2. Erhöhung?

   (b) Die Familie Maier wohnt heute sechs Jahre in der Wohnung. Wie viel Miete hat sie in diesen sechs Jahren gezahlt?

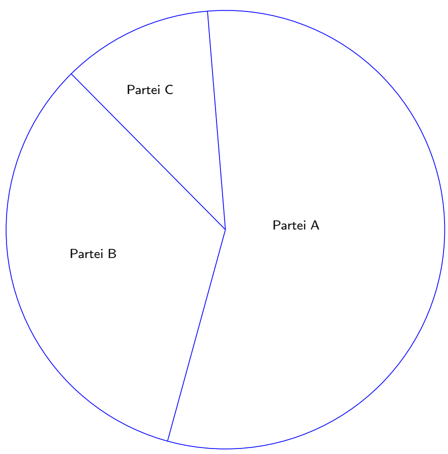
Lösung: (a) 110% von 620 €= 620 €$\cdot 1,1 = 682$ €
115% von 682 €= 682 €$\cdot 1,15 = 784{,}30$ €

Nach der zweiten Mieterhöhung zahlt die Familie Maier monatlich 784,30 €.

(b) 620 €$\cdot 12 \cdot 3 + 682$ €$\cdot 12 \cdot 2 + 784{,}30$ €$\cdot 12 = 48099{,}60$ €

In den sechs Jahren zahlt die Familie Maier 48099,60 € Miete.

8. Bei einer Parlamentswahl gaben 75% der insgesamt 18 Millionen Wahlberechtigten ihre Stimme ab. Der Verteilung der abgegebenen Stimmen kann aus dem folgenden Diagramm ermittelt werde:



Im Rahmen der Diskussion des Wahlergebnisses ist darüber auch von Interesse, wie viel Prozent *aller Wahlberechtigten* eine Partei gewählt haben. Ermittle diesen Wert für Partei B.

Quelle: Bayerischer Mathematik-Test 1999

Lösung: 25%

9. Eine Strecke wird zunächst um 50% verlängert und anschließend um 50% gekürzt.

   Tim behauptet, dass man am Ende wieder die Länge der ursprünglichen Strecke erhält. Nimm dazu Stellung.

Quelle: Standard Mathematik von der Basis bis zur Spitze, Grundbildungsorientierte Aufgaben für den Mathematikunterricht, Christina Drüke-Noe, Dominik Leiß, Institut für Qualitätsentwicklung, Wiesbaden, 2005

Lösung: Z. B.: Die Behauptung ist falsch. Bei der Verlängerung bildet die ursprüngliche Streckenlänge den Grundwert, bei der Verkürzung ist es aber die Länge der verlängerten Strecke.

10. (a) Löse die Formel $P = \frac{p}{100} \cdot G$ zur Berechnung des Prozentwerts nach der Prozentzahl bzw. dem Grundwert G auf.

(b) Berechne den Prozentwert für $G = 780$ € und $p = 13$.

(c) Berechne den Prozentsatz für $P = 88{,}20$ € und $G = 1470$ €.

(d) Berechne den Grundwert für $P = 96\,\text{kg}$ und $p = 7{,}5$

(e) Der Preis für eine Tüte Gummibärchen wurde von 1,40 € auf 1,75 € erhöht. Um wie viele Prozent ist der Preis gestiegen?

(f) Bei einem Waschmittelpaket wurde die Füllmenge um 12% vergrößert. Es enthält jetzt 0,6 kg mehr als vorher. Wie viel ist in der neuen Packung?

(g) Ein Platinwürfel mit dem Volumen $8{,}0\,\text{cm}^3$ wiegt 172 g. Die Masse eines gleich großen Goldwürfels ist um 10% geringer. Welche Masse (auf Gramm genau) hat ein Goldwürfel der Kantenlänge 1,0 cm?

(h) Herr K. bekommt ein Gehalt von 3200 €. Wie viel verdient er nach einer Gehaltserhöhung bzw. Gehaltssenkung von 4%?

(i) Die Aktie der Firma Net kostet zu Jahresbeginn 56 €. Ihr Kurs ist seitdem um 175% gestiegen. Was kostet die Aktie nun?

(j) Die Einwohnerzahl einer Stadt ist im vergangenen Jahr um 8% auf 48600 gestiegen. Wie viele Einwohner hatte die Stadt vor einem Jahr?

(k) Ein Computer kostet laut Preisliste 1700 €. Hinzu kommen noch 16% Mehrwertsteuer. Bei Barzahlung erhält der Kunde allerdings 3% Rabatt. Wie hoch ist die Rechnung?

Lösung:

a) $G = \frac{100}{p} \cdot P$, $p = 100 \cdot \frac{P}{G}$	b) $P = 101{,}4$ €	c) $p = 6$
d) $G = 1280\,\text{kg}$	e) 25%	f) 5,6 kg
g) 19 g	h) 3328 €, 3072 €	i) 154 €
j) 45000	k) 1912,84 €	

11. Beim Wechseln eines 50-€-Scheins werden 60% des Betrags in 5-€-Scheinen ausgezahlt. Der Rest in 1-€- und 2-€-Münzen. Insgesamt bekommt man 19 Münzen. Berechne die Anzahl der Münzen und die Beträge.

Lösung: 6 5-€-Scheine (30 €) , 18 1-€-Münzen (18 €), 1 2-€-Münze (2 €)

12. Der Preis von Äpfeln wird um 20% des bisherigen Preises gesenkt. Da die Äpfel zu dem abgesenkten Preis reißenden Absatz finden, beschließt der Händler, diese Äpfel wieder zu dem höheren alten Preis zu verkaufen. Wieviel Prozent des abgesenkten Preises beträgt die Erhöhung auf den alten Preis?

Lösung: Der abgesenkte Preis beträgt 80% des ursprünglichen Preises.

$$\frac{\text{ursprünglicher Preis}}{\text{abgesenkter Preis}} = \frac{100\%}{80\%} = 1{,}25 = 125\%$$

Der abgesenkte Preis muss um 25% erhöht werden, um den alten Preis zu erzielen.

13. Bei einem Sonderangebot erhält man 20% Preisnachlass gegenüber dem Normalpreis. Bei Barzahlung erhält man noch einmal 5% Nachlass auf den Sonderangebotspreis.

    Wie viel Prozent des Normalpreises spart ein Käufer, der vom Sonderangebot Gebrauch macht und bar bezahlt?

Lösung: Sonderangebotspreis = 80% des Normalpreises = $0{,}8 \cdot$ Normalpreis

Barpreis = 95% des Sonderangebotspreises = $0{,}95 \cdot$ Sonderangebotspreis

Barpreis = $0{,}8 \cdot 0{,}95 \cdot$ Normalpreis = $0{,}76 \cdot$ Normalpreis

Der Käufer spart bei Barzahlung des Sonderangebotes 24% des Normalpreises.

14. Simmerl und Resi spielen mit dem gleichen Anfangsbetrag Roulette. Nach dem Spiel hat Resi 36 % ihres Anfangsbetrages gewonnen und Simmerl 15 % seines Anfangsbetrages verloren.
    Um wieviel Prozent besitzt jetzt Resi mehr als Simmerl?
    Um wieviel Prozent besitzt jetzt Simmerl weniger als Resi?

Lösung: $R = 1{,}36 \cdot A$, $S = 0{,}85 \cdot A$
$R = 1{,}6 \cdot S$, d.h. Resi hat um 60% mehr als Simmerl.
$S = 0{,}625 \cdot R$, d.h. Simmerl hat um 37,5% weniger als Resi.

15. Wieviel Prozent Zins verlangt eine Bank pro Jahr, wenn eine anfängliche Schuld von 25 000 € in zwei Jahren auf 30 250 € angewachsen ist?

Lösung: $25\,000 \cdot (1 + x\%)^2 = 30\,250 \quad \Longrightarrow \quad x\% = 10\%$

16. (a) 1900 lebten in Europa ungefähr $2{,}97 \cdot 10^8$ Menschen, das waren 18% der damaligen Weltbevölkerung. Wie viele Menschen lebten 1900 auf der Erde?
    (b) 1988 lebten $5{,}115 \cdot 10^9$ Menschen auf der Erde, die Zahl der Europäer betrug $9\frac{21}{31}$ % davon. Um wieviel Prozent stieg die Weltbevölkerung von 1900 bis 1988? Um wieviel Prozent stieg im gleichen Zeitraum die europäische Bevölkerung?

Lösung: (a) $1{,}65 \cdot 10^9$

(b)

	1900	1988	Steigerung
Welt	$1{,}65 \cdot 10^9$	$5{,}115 \cdot 10^9$	$210\,\%$
Europa	$2{,}97 \cdot 10^8$	$4{,}95 \cdot 10^8$	$66\frac{2}{3}\,\%$

17. Harry fliegt auf seinem neuen Feuerblitz in der Höhe H über dem Quidditch-Feld. Um einem Klatscher auszuweichen, sinkt er plötzlich um $10\,\%$ seiner Höhe und steigt dann gleich wieder um $10\,\%$ der **neuen** Höhe. Nach diesem Flugmanöver schwebt er $23{,}76\,\mathrm{m}$ über dem Feld.

    (a) Berechne Harrys anfängliche Flughöhe H.

    (b) Um wieviel Prozent ist die Endflughöhe Harrys kleiner als seine Anfangsflughöhe?

Lösung: (a) $H \cdot (1 - 10\,\%) \cdot (1 + 10\,\%) = H \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}1 = 23{,}76\,\mathrm{m} \quad \Longrightarrow \quad H = 24\,\mathrm{m}$

(b) $23{,}76 = 0{,}99 \cdot H = (1 - 1\,\%) \cdot H \quad \Longrightarrow \quad$ um $1\,\%$ kleiner

18. Eine Partei erhält bei einer Wahl x **Punkte**, wenn sie $x\,\%$ der abgegebenen Wählerstimmen erhält.
    Bei der Wahl 1990 erhielt die Partei der „Farblosen“ 60 Punkte. Bei der Wahl 1994 schrumpfte die Punktzahl der Farblosen um $5\,\%$ gegenüber der Wahl 1990. Wieviel Leute wählten im Jahre 1994, wenn die Farblosen bei dieser Wahl 17 100 000 Stimmen erhielten?

Lösung: 1994 hatten die Farblosen 57 Punkte und es gingen 30 000 000 Leute zur Wahl.

19. Wieviel Prozent Zins verlangt eine Bank pro Jahr, wenn eine anfängliche Schuld von 36 000 € in zwei Jahren auf 51 840 € angewachsen ist?

Lösung: $36\,000 \cdot (1 + x)^2 = 51\,840, \quad (1 + x)^2 = 1{,}44, \quad x = 0{,}2 = 20\,\%$

20. Simmerl und Resi kauften in einem Supermarkt in der Stadt Wein zum gleichen Einkaufspreis pro Flasche. Simmerl kaufte 90 Flaschen und Resi 60 Flaschen. In ihrem Dorf verkauften sie den Wein wieder. Simmerl verdiente dabei $30\,\%$ und Resi $20\,\%$ des jeweiligen Einkaufspreises. Für alle Weinflaschen zusammen zahlten die Dorfbewohner 1776,60 €.

    (a) Was kostete eine Flasche Wein im Einkauf?

    (b) Nach Beendigung des Geschäftes legten Simmerl und Resi ihre Einkünfte in eine gemeinsame Kasse. Wieviel Prozent des Einkaufspreises verdienten sie zusammen?

Lösung: (a) $x \cdot 90 \cdot (1 + 30\%) + x \cdot 60 \cdot (1 + 20\%) = x \cdot 189 = 1776{,}6$
$x = 9{,}4$, d.h. 9,40 € pro Flasche im Einkauf

(b) Gesamter Einkaufspreis: $9{,}4 \cdot (90 + 60) = 1410$, 26% Gewinn

21. Nach wie vielen Jahren ist ein Kapital bei einer jährlichen Verzinsung mit 10 % gerade auf etwas mehr als das Doppelte angewachsen? Auf welchen Betrag wachsen 10000 € in zehn Jahren beim gleichen Zinssatz an?

Lösung: Jedes Jahr wächst das Kapital um den Faktor $1 + 10\% = 1{,}1$.

n	2	3	4	5	6	7	8
$1{,}1^n$	1,21	1,331	1,4641	1,61051	1,771561	1,9487171	2,14358881

Nach 8 Jahren. $10\,000 \cdot 2{,}14358881 \cdot 1{,}21 \approx 25937{,}42$

22. **Abgezinster Sparbrief**

Du bezahlst für einen sogenannten abgezinsten Sparbrief 4179,35 Euro, wobei ein Zinssatz von 7,5% und eine Laufzeit von 5 Jahren vereinbart werden. Welchen Betrag erhältst du nach den 5 Jahren zurück?

Zeitraum	Zinsen in Euro	Kapital in Euro
0	0	4179,35
1	313,45	4492,80
2	336,96	4829,76
3	362,23	5191,99
4	389,40	5581,39
5	418,60	6000,00

Versuche, diese Rechnung nachzuvollziehen!

Quelle: Christoph Hammer, Max-Born-Gymnasium, Germering

Lösung:

23. **Hypothekenkredit**

Jemand leiht sich 100000 Euro von der Bank, um zusammen mit seinem Ersparten eine Wohnung zu kaufen. Es werden folgende Bedingungen vereinbart:

Auszahlung 100% (also kein Disagio); Zinssatz: 10%; Anfangstilgung 1%

(a) Berechne die ,,Annuität", das ist die feste Jahresrate.

(b) Berechne den Jahreszins, die Tilgung und die Restschuld nach den ersten fünf Jahre.

(c) In folgender Tabelle ist der Jahreszins, die Tilgung und die Restschuld nach 10, 15, 20 und 25 Jahren aufgeführt.

Zeitraum in Jahren	Jahreszins in Euro	Tilgung in Euro	Restschuld in Euro
10	8642,05	2357,95	84062,58
15	7202,50	3797,50	68227,52
20	4884,09	6115,91	42725,00
25	1150,27	9849,73	1652,94

Stelle den Jahreszins, die Tilgung und die Restschuld in einem Diagramm dar.

(d) Erkläre, warum der Jahreszins von Jahr zu Jahr abnimmt und die Tilgung zunimmt.

Quelle: Christoph Hammer, Max-Born-Gymnasium, Germering

Lösung: (a) $11\% \cdot 100000$ Euro $= 11000$ Euro
Davon sind 10%, also 10000 Euro Zinsen und 1%, also 1000 Euro Tilgung.

(b)

Zeitraum in Jahren	Jahreszins in Euro	Tilgung in Euro	Restschuld in Euro
1	10000	1000	99000
2	9900	1100	97900
3	9790	1210	96690
4	9669	1331	95359
5	9535,90	1464,10	93894,90

24. Susi, Heidi und Eva besitzen zusammen 134,82 €, wobei Heidi um 15 % mehr als Susi und Eva um 48 % mehr als Heidi besitzt. Berechne die Reichtümer der drei Schönen!

Lösung: Susi: 35 € Heidi: 40,25 € Eva: 59,57 €

25. 12 Liter 4%-ige Salzlösung werden mit 18 Liter 6%-ger Salzlösung gemischt. Welchen Prozentgehalt an Salz hat die Mischung? Gliedere deine Rechnung übersichtlich!

Lösung: 1. Lösungsschritt: Bestimmung der Salzmenge in den beiden Bestandteilen:
4% von $12\,\mathrm{l} = 12\,\mathrm{l} \cdot 0{,}04 = 0{,}48\,\mathrm{l}$

6% von $18\,\mathrm{l} = 18\,\mathrm{l} \cdot 0{,}06 = 1{,}08\,\mathrm{l}$

$0{,}48\,\mathrm{l} + 1{,}08\,\mathrm{l} = 1{,}56\,\mathrm{l}$

2. Lösungsschritt: Bestimmung des Prozentgehaltes der Mischung

$$\frac{1{,}56\,\mathrm{l}}{30\,\mathrm{l}} = 0{,}052$$

Die Mischung hat einen Salzgehalt von 5,2%.

26. Aus 6%-iger Salzlösung soll durch Zugießen von destilliertem Wasser 120 Liter 2%-ge Salzlösung hergestellt werden. Wie viel Liter 6%-ige Salzlösung und wie viel Liter destilliertes Wasser braucht man?

Lösung: Benötigte Salzmenge: 2% von $120\,\mathrm{l} = 120\,\mathrm{l} \cdot 0{,}02 = 2{,}4\,\mathrm{l}$

Benötigte Menge L an 6%-iger Salzlösung:

$$\frac{L}{2{,}4\,\mathrm{l}} = \frac{100\%}{6\%} \qquad L = 2{,}4\,\mathrm{l} \cdot \frac{100}{6} = 40\,\mathrm{l}$$

Benötigte Menge an destilliertem Wasser: $120\,\mathrm{l} - 40\,\mathrm{l} = 80\,\mathrm{l}$

27. Zum Gurgeln verordnet der Arzt Herrn Heiser eine 2,2%-ge Salzlösung. Diese stellt er sich aus 11%-ger Sole (hochkonzentrierte Salzlösung) und reinem Wasser her.

Wie viel 2,2%ige Salzlösung kann sich Herr Heiser aus 25 ml Sole herstellen? Wie viel reines Wasser muss er zugießen?

Lösung: Salzgehalt von 25 ml Sole:

11% von $25\,\mathrm{ml} = 25\,\mathrm{ml} \cdot 0{,}11 = 2{,}75\,\mathrm{ml}$

Die gesuchte Menge an 2,2%-ger Salzlösung enthält also 2,75 ml reines Salz.

$$\frac{\text{Menge an Lösung}}{2{,}75\,\mathrm{ml}} = \frac{100\%}{2,2\%}$$

$$\text{Menge an Lösung} = 2{,}75\,\mathrm{ml} \cdot \frac{100}{2{,}2} = 125\ \mathrm{ml}$$

Aus 25 ml Sole stellt er 125 ml 2,2%-ger Lösung her. Zu diesem Zweck gibt zu den 25 ml Sole noch 100 ml reines Wasser dazu.

28. (a) Die Schneehöhe, die am Abend 88 cm beträgt, wächst in der Nacht um 12,5%. Wie hoch liegt der Schnee am nächsten Morgen?

(b) Im Laufe des Tages sinkt der Pegel eines Hochwasser führenden Flusses von 480 cm auf 408 cm. Um wieviel Prozent ist der Pegelstand gesunken?

(c) Nach einer Erhöhung um 10 Prozent beträgt das Gehalt von Max 2706 €. Wieviel verdiente Max vor der Gehaltserhöhung?

Lösung: (a) $88\,\mathrm{cm} \cdot 1{,}125 = 99\,\mathrm{cm}$

(b) $x\% \cdot 480 = 480 - 408 = 72, \qquad x\% = \frac{72}{480} \cdot 100\% = 15\%$

(c) $x \cdot 1{,}1 = 2706\,€, \qquad x = \frac{2706\,€}{1{,}1} = 2460\,€$

29. Ein MP3-Player kostet mit 16% Mehrwertsteuer 58,00 € (alter Preis). Was kostet das gleiche Gerät mit 18% Mehrwertsteuer (neuer Preis)? Um wieviel Prozent ist der neue Preis größer als der alte Preis? Runde das Ergebnis auf zehntel Prozent.

Lösung: Ohne MWSt.: $x \cdot (1 + 16\%) = x \cdot 1{,}16 = 58\,€ \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{58\,€}{1{,}16} = 50\,€$

Mit 18% MWSt.: $50\,€ \cdot (1 + 18\%) = 50\,€ \cdot 1{,}18 = 59\,€$

$58 \cdot (1 + p\%) = 59 \quad \Longrightarrow \quad p\% = \frac{59}{58} - 1 = \frac{1}{58} = \frac{100\%}{58} \approx 1{,}7\%$

30. Ein Metzger, der schnell reich werden wollte, erhöhte den Preis seiner Weißwürste um 20%. Da das Geschäft aber drastisch zurückging, beauftragte er seine Verkäuferin, den teuren Wurstpreis wieder um 20% zu senken. Entscheide zunächst ohne Rechnung, ob der neue Wurstpreis kleiner oder größer als der ursprüngliche Preis vor der Erhöhung ist und begründe deine Antwort. Berechne, um wieviel Prozent der neue Wurstpreis vom ursprünglichen Preis abweicht.

Lösung: Die 20% bei der Preissenkung beziehen sich auf den höheren Preis, d.h. die Senkung ist größer als die Erhöhung $\Longrightarrow$ der neue Preis ist kleiner als der ursprüngliche Preis.

$n = (1 + 20\%)(1 - 20\%)u = 1{,}2 \cdot 0{,}8u = 0{,}96u = (1 - 4\%) \cdot u$

Der neue Preis ist um 4% kleiner als der ursprüngliche Preis.

6. Dreiecke

6.1. Kongruenz

6.1.1. Begriff der Kongruenz

1. Dies ist Platzhalter für eine SMART-Aufgabe. Wird demnächst eingefügt.

Lösung: –

6.1.2. Kongruenzsätze für Dreiecke, grundlegende Konstruktionen

1. Von einem Viereck kennt man die Längen der Seiten $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AD}} = 4\,\mathrm{cm}$ und $\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{DC}} = 6\,\mathrm{cm}$. Warum sind die Dreiecke $\triangle\mathrm{ABC}$ und $\triangle\mathrm{ADC}$ kongruent?

Lösung: Dreiecke $\triangle\mathrm{ABC}$ und $\triangle\mathrm{ADC}$ sind kongruent nach SSS.

2. Von einem Viereck ABCD kennt man die Längen der Seiten:
   $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AD}} = 4\,\mathrm{cm}$ und $\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{DC}} = 6\,\mathrm{cm}$.
   M ist der Schnittpunkt der Strecken [AC] und [BD].
   (a) Warum sind die Dreiecke $\triangle\mathrm{ABC}$ und $\triangle\mathrm{ADC}$ kongruent?
   (Gib die gleich großen Stücke und den zugehörigen Kongruenzsatz an!)
   (b) Warum sind die Dreiecke $\triangle\mathrm{ABM}$ und $\triangle\mathrm{ADM}$ kongruent?
   (Gib die gleich großen Stücke und den zugehörigen Kongruenzsatz an!)
   (c) Warum ist AC die Mittelsenkrechte der Strecke [BD]?

Lösung: (a) $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AD}}$, $\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{DC}}$, $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AC}}$, $\Rightarrow$ Dreiecke kongruent nach SSS
(b) $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AD}}$, $\overline{\mathrm{AM}} = \overline{\mathrm{AM}}$, $\sphericalangle\mathrm{MAD} = \sphericalangle\mathrm{BAM}$, wegen (a) $\Longrightarrow$ Dreiecke kongruent nach SWS

3. **Dreiecke**
   Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus den gegebenen Größen. Bestimme durch Messen die übrigen Größen. Kontrolliere die Winkelgrößen mit Hilfe des Winkelsummensatzes.

(a) $a = 5\,\text{cm},\ b = 4cm\,\text{cm},\ \gamma = 67°$

(b) $c = 9\,\text{cm},\ a = 6\,\text{cm},\ \gamma = 53°$

(c) $a = 4{,}5\,\text{cm},\ \beta = 57°,\ \gamma = 43°$

(d) $a = 7\,\text{cm},\ b = 5\,\text{cm},\ c = 4\,\text{cm}$

Aus welchen der vier Kongruenzsätze folgt, dass alle Lösungsdreiecke mit den gegebenen Größen kongruent zueinander sind? Miss auch die Höhen im Dreieck.

Anregungen zum Öffnen der Aufgabe:

(a) Angaben weglassen (unterbestimmte Aufgabe)

(b) ein vorgegebenes Dreieck auf verschiedene Arten konstruieren (überbestimmte Aufgabe)

(c) In welchen Fällen ist es nicht möglich, ein Dreieck zu konstruieren?

Lösung: offen

4. Gegeben sind die kongruenten Dreiecke △HUB und △ERT, genauer gilt

$$\triangle\text{HUB} \cong \triangle\text{ERT}.$$

(a) Zeichne eine Überlegungsfigur der beiden Dreiecke, wobei entsprechende Seiten und Winkel in gleichen Farben zu zeichnen sind. Suche zu jeder der folgenden Größen die entsprechende Größe im anderen Dreieck:

$$\overline{\text{HU}},\ \overline{\text{UB}},\ \overline{ET},\ ∢\text{BUH},\ ∢\text{RET},\ ∢\text{ETR},\ ∢\text{HUB}$$

(b) Welche der folgenden Schreibweisen ist richtig:

$$\triangle\text{BUH} \cong \triangle\text{RET},\quad \triangle\text{UHB} \cong \triangle\text{RET},\quad \triangle\text{TER} \cong \triangle\text{BUH}$$

Lösung: (a) $\overline{\text{HU}} = \overline{\text{ER}},\quad \overline{\text{UB}} = \overline{\text{RT}}$

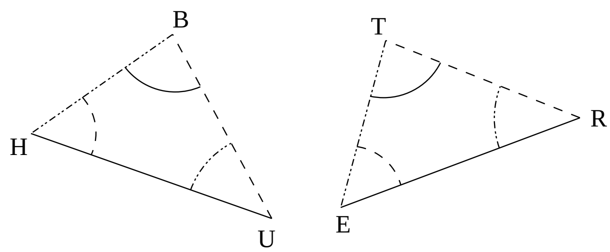
$\overline{\text{ET}} = \overline{\text{HB}}$

$∢\text{BUH} = ∢\text{TRE}$

$∢\text{RET} = ∢\text{UHB}$

$∢\text{ETR} = ∢\text{HBU}$

$∢\text{HUB} = ∢\text{ERT}$



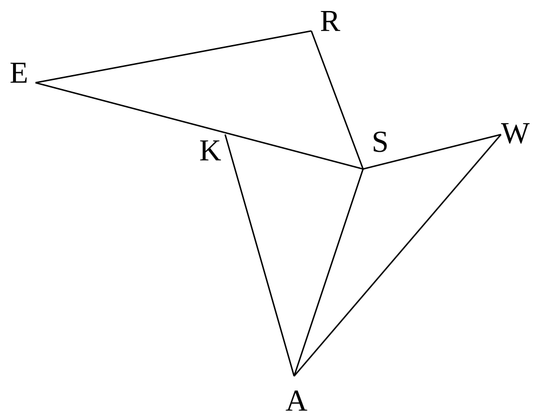
(b) $\triangle\text{BUH} \cong \triangle\text{RET}$ (falsch), $\triangle\text{UHB} \cong \triangle\text{RET}$ (richtig)

$\triangle\text{TER} \cong \triangle\text{BUH}$ (falsch)

5. Nebenstehende Figur ist *nicht* maßstabsgetreu. Es gilt:

$$\triangle\mathrm{KAS} \cong \triangle\mathrm{WAS} \cong \triangle\mathrm{SER}$$

sowie $\overline{\mathrm{KA}} = 5\,\mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{ER}} = 4\,\mathrm{cm}$ und $\overline{\mathrm{SW}} = 3\,\mathrm{cm}$.
Wie lang sind die anderen gezeichneten Strecken? Zeichnung mit farblicher Kennzeichnung entsprechender Größen!



Lösung: $\overline{\mathrm{KA}} = \overline{\mathrm{WA}} = \overline{\mathrm{SE}} = 5\,\mathrm{cm}$

$\overline{\mathrm{SK}} = \overline{\mathrm{SW}} = \overline{\mathrm{SR}} = 3\,\mathrm{cm}$

$\overline{\mathrm{SA}} = \overline{\mathrm{ER}} = 4\,\mathrm{cm}$

6. Von zwei kongruenten Dreiecken $\triangle\mathrm{MPD}$ und $\triangle\mathrm{IER}$ kennt man die Beziehungen $\overline{\mathrm{MP}} = \overline{\mathrm{RE}}$ und $\overline{\mathrm{PD}} = \overline{\mathrm{EI}}$. Fertige eine Skizze der beiden Dreiecke mit farbiger Kennzeichnung entsprechender Strecken und ergänze:

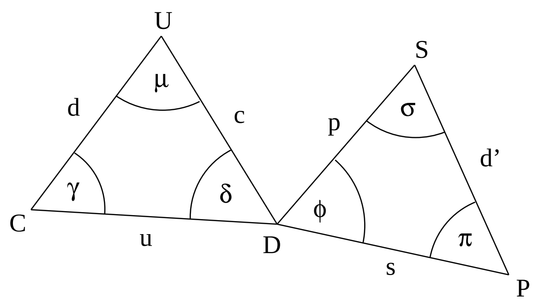
$$\triangle\mathrm{MPD} \cong \triangle\square\square\square$$

Lösung: $\triangle\mathrm{MPD} \cong \triangle\mathrm{REI}$

7. Für die Dreiecke $\triangle\mathrm{CDU}$ und $\triangle\mathrm{DSP}$ gilt:

$$c = s, \quad d = p, \quad \text{und} \quad u = d'$$

Welche Winkel sind gleich? Schreibe die Kongruenz der Dreiecke richtig hin (richtige Reihenfolge der Punkte).

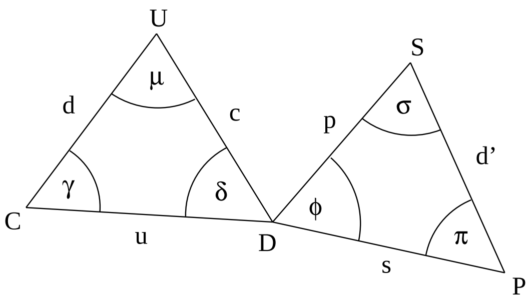


Lösung: $\gamma = \sigma$, $\delta = \pi$, $\mu = \varphi$, $\triangle\mathrm{CDU} \cong \triangle\mathrm{SPD}$

8. Für die Dreiecke $\triangle$CDU und $\triangle$DSP gilt:

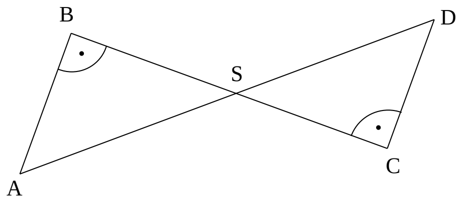
   $$c = s, \quad d = p, \quad \text{und} \quad u = d'$$

   Welche Winkel sind gleich? Schreibe die Kongruenz der Dreiecke richtig hin (richtige Reihenfolge der Punkte).



Lösung: $\gamma = \sigma$, $\delta = \pi$, $\mu = \varphi$, $\triangle$CDU $\cong$ $\triangle$SPD

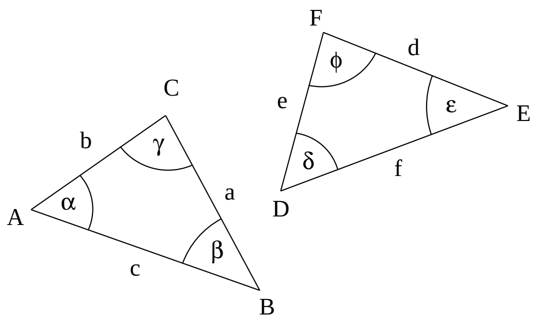
9. Welche Strecken und Winkel sind gleich, wenn die beiden Dreiecke kongruent sind? Schreibe die Kongruenz der Dreiecke richtig hin (richtige Reihenfolge der Punkte).



Lösung: $\sphericalangle$BSA $=\sphericalangle$CSD (Scheitelwinkel) $\implies$ $\overline{\text{BA}} = \overline{\text{CD}}$, $\overline{\text{BS}} = \overline{\text{SC}}$, $\overline{\text{AS}} = \overline{\text{SD}}$

$\triangle$ASB $\cong$ $\triangle$DSC

10. Die beiden Dreiecke sind kongruent. Skizziere für jede Teilaufgabe die beiden Dreiecke und markiere entsprechende Größen mit gleicher Farbe. Gib alle einander entsprechenden Seiten, Winkel und Punkte an und schreibe die Kongruenz der Dreiecke richtig hin (richtige Reihenfolge der Punkte).

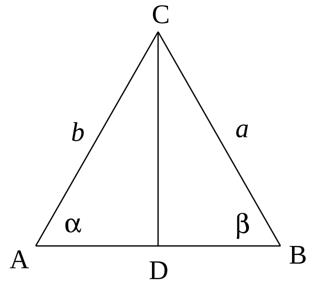


(a)	$a = d$	und	$b = f$	(b)	$\alpha = \delta$	und	$\gamma = \varepsilon$
(c)	C $\widehat{=}$ E	und	$b = d$	(d)	A $\widehat{=}$ E	und	B $\widehat{=}$ F
(e)	$c = e$	und	$\beta = \varphi$				

Lösung:

(a)	$a = d$	$b = f$	$c = e$	$\alpha = \delta$	$\beta = \varphi$	$\gamma = \varepsilon$	A $\widehat{=}$ D	B $\widehat{=}$ F	C $\widehat{=}$ E
(b)	$a = d$	$b = f$	$c = e$	$\alpha = \delta$	$\beta = \varphi$	$\gamma = \varepsilon$	A $\widehat{=}$ D	B $\widehat{=}$ F	C $\widehat{=}$ E
(c)	$a = f$	$b = d$	$c = e$	$\alpha = \varphi$	$\beta = \delta$	$\gamma = \varepsilon$	A $\widehat{=}$ F	B $\widehat{=}$ D	C $\widehat{=}$ E
(d)	$a = e$	$b = f$	$c = d$	$\alpha = \varepsilon$	$\beta = \varphi$	$\gamma = \delta$	A $\widehat{=}$ E	B $\widehat{=}$ F	C $\widehat{=}$ D
(e)	$a = d$	$b = f$	$c = e$	$\alpha = \delta$	$\beta = \varphi$	$\gamma = \varepsilon$	A $\widehat{=}$ D	B $\widehat{=}$ F	C $\widehat{=}$ E

11. Im nebenstehend gezeichneten Dreieck gilt $a = b$ und $\overline{\text{AD}} = \overline{\text{DB}}$. Die Figur enthält zwei kongruente Dreiecke. Schreibe die Kongruenz dieser Dreiecke richtig hin und begründe genau, warum diese Kongruenz gilt. Welche Beziehung besteht zwischen α und β? Wie groß sind die Winkel $\sphericalangle$CDA und $\sphericalangle$BDC?
Fasse die Ergebnisse in einem präzisen mathematischen Satz zusammen.



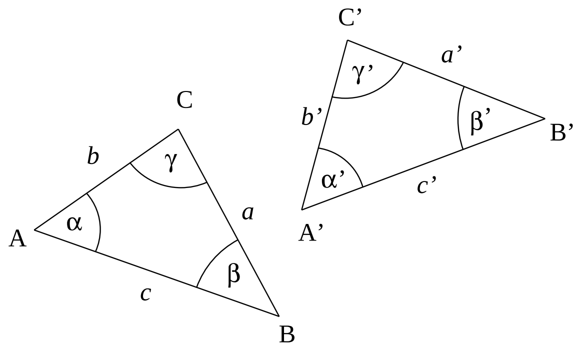
Lösung:

$$\left.\begin{array}{c} a = b \\ \overline{\text{CD}} = \overline{\text{CD}} \\ \overline{\text{AD}} = \overline{\text{DB}} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow \quad \triangle\text{ADC} \cong \triangle\text{BDC} \quad (\text{sss}) \\ \Longrightarrow \quad \alpha = \beta, \quad \underbrace{\sphericalangle\text{CDA}}_{\varphi} = \underbrace{\sphericalangle\text{BDC}}_{\delta} \end{array}$$

$$\delta + \varphi = 2\varphi = 180^\circ \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \delta = 90^\circ$$

In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich und die Seitenhalbierende der Basis ist zugleich Höhe.

12. Zeichne für jede Teilaufgabe eine Überlegungsfigur mit farbiger Kennzeichnung entsprechender Größen. Entscheide, ob die beiden Dreiecke kongruent sind und schreibe gegebenenfalls die Kongruenz richtig hin (richtige Reihenfolge der Punkte). Gib im Fall der Kongruenz auch den verwendeten Satz an.

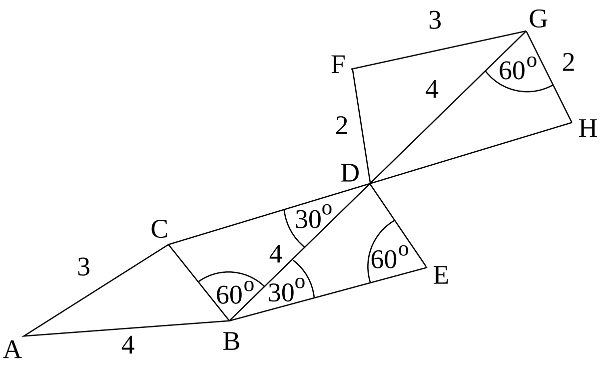


(a)	$a = a'$;	$b = b'$;	$\gamma = \gamma'$	(b)	$a = a' = 6\,\text{cm}$;	$b = b' = 7\,\text{cm}$;	$\alpha = \alpha'$
(c)	$a = b'$;	$b = a'$;	$\beta = \beta'$	(d)	$a = b'$;	$b = a'$;	$\gamma = \gamma'$
(e)	$b = a'$;	$\alpha = \gamma'$;	$\gamma = \beta'$	(f)	$a = a'$;	$\beta = \beta'$;	$\gamma = \gamma'$
(g)	$b = a'$;	$c = b'$;	$\alpha = \gamma'$	(h)	$a = c' = 4\,\text{cm}$;	$c = a' = 7\,\text{cm}$;	$\gamma = \alpha'$
(i)	$b = b'$;	$\alpha = \gamma'$;	$\gamma = \alpha'$	(k)	$c = b'$;	$\alpha = \beta'$;	$\beta = \gamma'$
(l)	$b = c'$;	$a = b'$;	$\gamma = \alpha'$	(m)	$c = c'$;	$b = a'$;	$\alpha = \beta'$
(n)	$a = a'$;	$\beta = \beta'$;	$\gamma = \alpha'$	(o)	$a = c'$;	$\gamma = \alpha'$;	$\beta = \beta'$

Lösung:

(a)	△ABC ≅ △A'B'C' (sws)	(b)	muss nicht kongruent sein (ssw)
(c)	nicht kongruent	(d)	△ABC ≅ △B'A'C' (sws)
(e)	△ABC ≅ △C'A'B' (wsw)	(f)	△ABC ≅ △A'B'C' (wsw)
(g)	△ABC ≅ △C'A'B' (sws)	(h)	△ABC ≅ △C'B'A' (ssW)
(i)	△ABC ≅ △C'B'A' (wsw)	(k)	nicht kongruent
(l)	△ABC ≅ △B'C'A' (sws)	(m)	△ABC ≅ △B'A'C' (sws)
(n)	nicht kongruent	(o)	△ABC ≅ △C'B'A' (wsw)

13. Die nebenstehend gezeichnete Figur ist nicht maßstabsgetreu. Die Punkte C, D und H sowie B, D und G liegen jeweils auf einer Geraden. Welche Dreiecke sind kongruent? Gib eine genaue Begründung deiner Antwort unter Berufung auf die Kongruenzsätze.

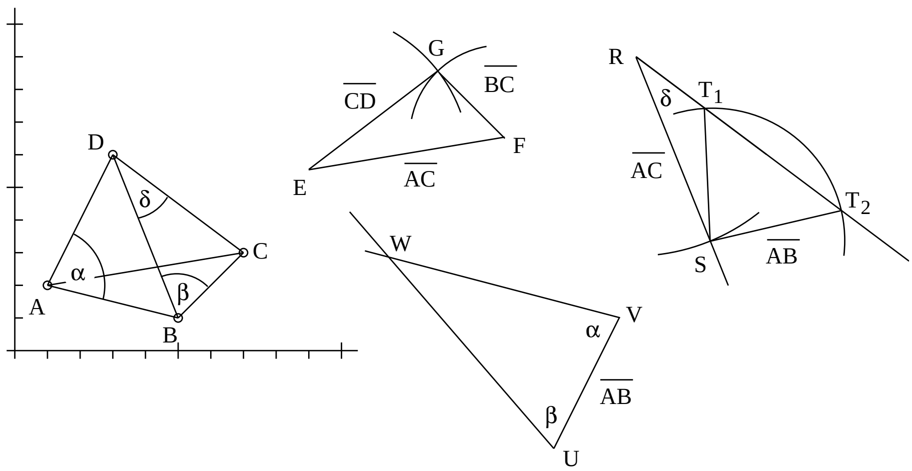


Lösung:
$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle HDG = \sphericalangle CDB \quad \text{(Scheitelw.)} \\ \overline{DG} = \overline{BD} = 4 \\ \sphericalangle DGH = \sphericalangle DBC = 60^\circ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow \quad \triangle BDC \cong \triangle GDH \quad \text{(wsw)} \\ \Longrightarrow \quad \overline{BC} = \overline{GH} = 2 \\ \Longrightarrow \quad \triangle ABC \cong \triangle GDF \quad \text{(sss)} \end{array}$$

Keines der Dreiecke ist zu $\triangle$BED kongruent.

14. Zeichne die Punkte A(1|2), B(5|1), C(7|3) und D(3|6) in ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm.
   (a) Konstruiere das Dreieck $\triangle$EFG mit $e = \overline{BC}$, $f = \overline{CD}$ und $g = \overline{AC}$.
   (b) Konstruiere das Dreieck $\triangle$RST mit $r = \overline{AB}$, $t = \overline{AC}$ und $\varrho = \sphericalangle SRT = \sphericalangle BDC$.
   (c) Konstruiere das Dreieck $\triangle$UVW mit $w = \overline{AB}$, $\alpha = \sphericalangle WVU = \sphericalangle BAD$ und $\beta = \sphericalangle VUW = \sphericalangle CBD$.

Lösung:



15. Mittenwald (M), Wallgau (W) und Partenkirchen (P) bilden ein Dreieck mit den Seitenlängen $\overline{MP} = 13\,\text{km}$ und $\overline{MW} = 9\,\text{km}$ und dem Winkel $\sphericalangle WMP = 75^\circ$. Bestimme durch eine Konstruktion im Maßstab 1 : 200 000 die Entfernung $\overline{WP}$.

Lösung: Konstruktion: $\overline{\text{MP}} \mathrel{\widehat{=}} 6{,}5\,\text{cm}$, $\overline{\text{MW}} \mathrel{\widehat{=}} 4{,}5\,\text{cm} \quad \Longrightarrow \quad \overline{\text{WP}} \mathrel{\widehat{=}} 6{,}9\,\text{cm}$

$\overline{\text{WP}} = 6{,}9\,\text{cm} \cdot 200\,000 = 13{,}8\,\text{km}$

6.2. Besondere Dreiecke

6.2.1. gleichschenkliges und gleichseitiges Dreieck

1. Zeichne die Punkte A(1|1), B(6|1), C(3,5|6) und D(6|5) in ein Koordinatensystem. Welche der Bezeichnungen *spitzwinklig*, *rechtwinklig*, *stumpfwinklig* und *gleichschenklig* trifft jeweils auf eines der *vier* Dreiecke zu, die durch A, B, C und D gegeben sind?

Lösung:

△ABC	:	spitzwinklig und gleichschenklig
△ABD	:	rechtwinklig
△ADC	:	stumpfwinklig
△BDC	:	stumpfwinklig

2. Über dem Quadrat $ABCD$ wird das gleichseitige Dreieck $\triangle DCE$ errichtet. Der Punkt E liegt dabei außerhalb des Dreiecks.

   (a) Beschreibe, wie man den Punkt E mit Zirkel und Lineal konstruiert.

   (b) Wie groß ist der Winkel $\delta = \sphericalangle ADE$?

   (c) Berechne die Größe des Winkels $\varepsilon = \sphericalangle AEB$.

   (d) Nun wird im Quadrat $ABCD$ das gleichseitige Dreieck $\triangle DFC$ errichtet. Der Punkt F liegt dabei innerhalb des Dreiecks. Berechne die Größe des Winkels $\varepsilon' = \sphericalangle AFB$

   nach Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 8 der Gymnasien 2005

Lösung:

(a) E liegt auf dem Kreis um D mit Radius $\overline{AB}$ und auf dem Kreis um C mit Radius $\overline{AB}$ außerhalb des Quadrats.

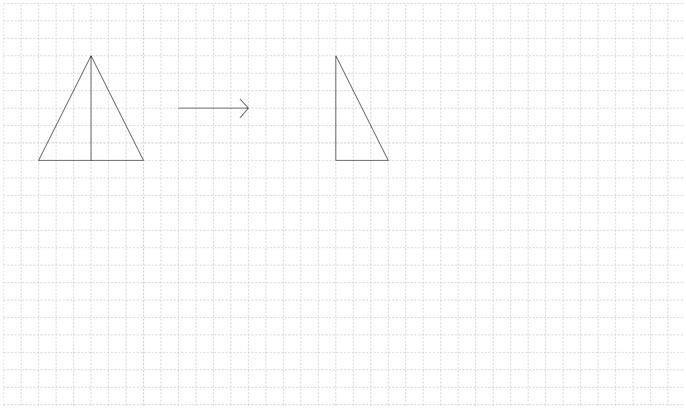
(b) $\delta = 90° + 30° = 150°$

(c) $\varepsilon = 60° - 2 \cdot (180° - \delta) : 2 = 30°$

(d) $\sphericalangle ADF = 30°$, $\sphericalangle DFA = (180 - 30) : 2 = 75°$, $\varepsilon' = 360° - 60° - 2 \cdot 75° = 150°$

3. (a) Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{AB} = 5cm$ und der Höhe $h_c = 6cm$. Beschreibe die Konstruktion in Worten.

   (b) Die Fläche des gleichschenkligen Dreiecks lässt sich leicht ermitteln: Man schneidet es entlang der Höhe h_c auseinander und fügt die beiden Teildreiecke zu einem Rechteck zusammen, das die gleiche Fläche hat wie das ursprüngliche Dreieck.



i. Ergänze das 2. Teildreieck rechts in der (nicht maßstabsgetreuen) Skizze, um zu zeigen, was oben gemeint ist.

ii. Berechne die Fläche des Rechtecks, die ja gleich der Fläche des ursprünglichen Dreiecks ist.

iii. Begünde, ob auch der Umfang des Rechtecks gleich dem Umfang des ursprünglichen Dreiecks ist.

Quelle: Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur, ISB 2001

Lösung: (a) Verschiedene Möglichkeiten, z. B:
A und B sind Endpunkte der Strecke $[AB]$, mit $\overline{AB} = 5cm$.

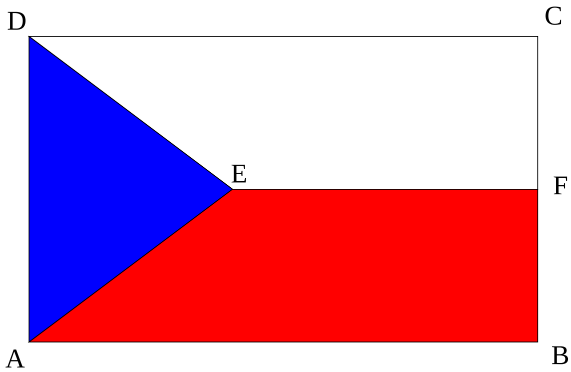
C liegt auf der Mittelsenkrechten von $[AB]$ und auf der Parallele zu AB mit dem Abstand $6cm$.

(b) i.

ii. $A = 2{,}5cm \cdot 6cm = 15cm^2$

iii. Dreieck: Umfang $= \overline{AB} + 2\overline{AC}$
Rechteck: Umfang $= \overline{AB} + 2h_c$
Da $h_c < \overline{AC}$ ist, ist der Umfang des Dreiecks größer als der des Rechtecks.

4. Das ist ein Bild der Nationalflagge der Tschechischen Republik.



Es gilt: $\overline{AD} = \overline{EF} = 4\,\text{cm}$ und $\sphericalangle DEA = 52{,}8°$.

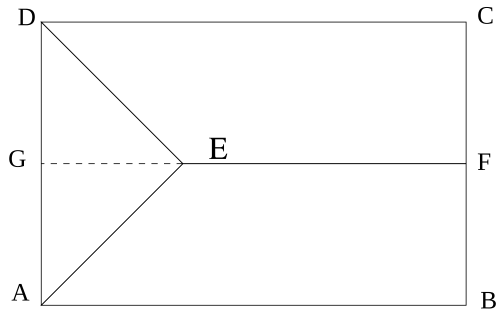
(a) Berechne auf verschiedenen Weise das Maß des Winkels BAE auf eine Stelle nach dem Komma.

[Ergebnis: $\sphericalangle BAE = 26{,}4°$]

(b) Zeichne die Figur auch mit dem Ergebnis der Aufgabe (a).

(c) Welche besondere Eigenschaft hätte das Dreieck DAE, wenn $\sphericalangle AED = 300°$ wäre?

Lösung: (a)



1. Möglichkeit:
Die Strecke GE liegt auf der Halbierenden des Winkels DEA. $\Rightarrow$ $\sphericalangle GEA = \sphericalangle BAE$ (Wechselwinkel) $= 52{,}8° : 2 = 26{,}4°$.
2. Möglichkeit: Das Dreieck AED ist gleichschenklig mit der Basis $[AD]$.
$\Rightarrow$ $\sphericalangle EAD = (180° - 52{,}8°) : 2 = 63{,}6°$ und $\sphericalangle BAE = 90° - 63{,}6° = 26{,}4°$.

(b) –

(c) Es würde gelten: $\sphericalangle DEA = 60°$. Weil aber das Dreieck AED schon gleichschenklig ist, muss jetzt es sogar gleichseitig sein.

5. Von einem Dreieck ABC weiß man:

(a) $a = 5\,\text{cm}$, $\alpha = 65°$ und $\gamma = 50°$

(b) $a = b$ und $\beta = 60°$

Fertige jeweils für den Fall (a) und für den Fall (b) eine Planfigur an. Begründe damit die besonderen Eigenschaften dieser Dreiecke.

Lösung: (a) Es ist ein gleichschenkliges Dreieck.
(b) Es ist ein gleichseitiges Dreieck.

6. In einem gleichschenkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit Spitze C ist $\gamma = 96°$. Unter welchem Winkel ϵ schneiden sich w_α und h_c.
Fertige eine Skizze und rechne.

Lösung: w_α und h_c schneiden sich unter einem Winkel von 69°.

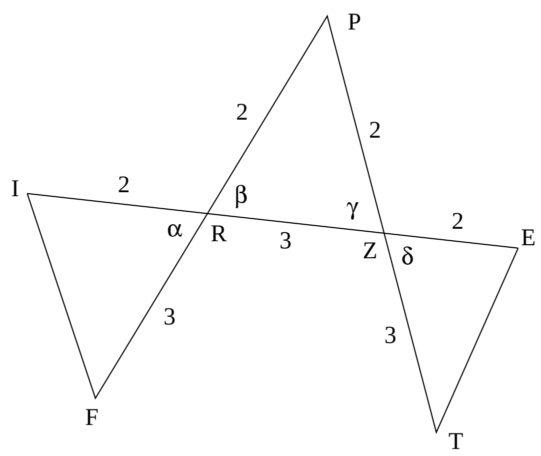
7. Berechne den Flächeninhalt eines Parallelogramms $ABCD$ mit

$$\alpha = \sphericalangle\, BAD = 45^\circ \text{ und } a = \overline{AB},$$

das von seiner kürzeren Diagonalen in zwei gleichschenklige Dreiecke mit der Schenkellänge a zerlegt wird!

Lösung: $a = \overline{AB} = \overline{BD}$, $\sphericalangle\, DBA = 90^\circ \Rightarrow A = a^2$

8. Welche Dreiecke der nebenstehenden, nicht maßstabsgetreu gezeichneten Figur sind kongruent? Begründe die Kongruenz(en) mit Angabe des verwendeten Kongruenzsatzes.



Lösung: $\triangle$RZP ist gleichschenklig $\Longrightarrow$ $\beta = \gamma$ $\Longrightarrow$ $\alpha = \beta = \gamma = \delta$ (Scheitelwinkel).

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \alpha = \delta \\ \overline{\mathrm{IR}} = \overline{\mathrm{ZE}} \\ \overline{\mathrm{FR}} = \overline{\mathrm{TZ}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle\mathrm{FRI} \cong \triangle\mathrm{TZE} \quad \text{(sws)} \\ \left.\begin{array}{c} \alpha = \beta \\ \overline{\mathrm{FR}} = \overline{\mathrm{RZ}} \\ \overline{\mathrm{IR}} = \overline{\mathrm{RP}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle\mathrm{TZE} \cong \triangle\mathrm{ZRP} \quad \text{(sws)} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

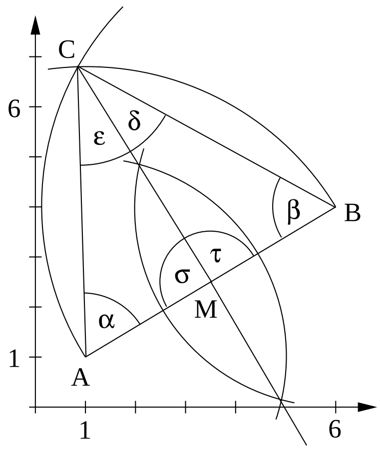
$$\triangle\mathrm{FRI} \cong \triangle\mathrm{TZE} \cong \triangle\mathrm{ZRP}$$

9. (a) Zeichne die Punkte A (1|1) und B (6|4) in ein Koordinatensystem (Platzbedarf nach oben 8 cm). Konstruiere $\triangle$ABC mit $a = b = \overline{\mathrm{AB}}$. Konstruiere auch den Mittelpunkt M der Strecke [AB] und zeichne die Seitenhalbierende s_c = [CM] ein.

   (b) Beweise, dass die so entstandenen Teildreiecke kongruent sind und schreibe die Kongruenz richtig hin.

   (c) Benenne alle Winkel in den Teildreiecken und schreibe alle Folgerungen hin, die man aus der Kongruenz der Teildreiecke ziehen kann. Welche Namen könnte man also der Seitenhalbierenden s_c noch geben?

Lösung: (a)



(b) $\left.\begin{array}{r}\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{MB}}\\ \overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}\\ \overline{\mathrm{CM}}=\overline{\mathrm{CM}}\end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle\mathrm{AMC}\cong\triangle\mathrm{BMC}\,(\mathrm{sss})$

(c) $\alpha=\beta,\ \varepsilon=\delta,\ \sigma=\tau$

$\sigma+\tau=2\sigma=180° \quad\Longrightarrow\quad \sigma=\tau=90°$

$\varepsilon=\delta \quad\Longrightarrow\quad [\mathrm{MC}]=w_\gamma$ mit $\gamma=\sphericalangle\mathrm{ACB}$

$\sigma=\tau=90° \quad\Longrightarrow\quad [\mathrm{MC}]=h_c$

6.2.2. rechtwinkliges Dreieck, Satz von Thales

1. (a) Konstruiere die Mittelsenkrechte der waagrecht liegenden Strecke $[PQ]$ und zeichnen den Kreis, der $[PQ]$ als Durchmesser hat.

   (b) R ist derjenige Schnittpunkt von Mittelsenkrechte und Kreis, der oberhalb der Strecke $[PQ]$ liegt. Das Dreieck $\triangle PQR$ ist dann gleichschenklig, wenn R auf der Mittelsenkrechten von $[PQ]$ liegt und deshalb von P und Q gleich weit entfernt ist. Begründe, dass das Dreieck $\triangle PQR$ auch rechtwinklig ist.

   (c) Es gilt: *In jedem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck zerlegt die Mittelsenkrechte der Basis das Dreieck in zwei kongruente Teildreiecke.*

   Welche der folgenden Argumentationen ist richtig?

   Die zwei Teildreiecke sind kongurent, ...

   - *... weil man zeigen kann, dass die Teildreiecke in allen drei Winkeln übereinstimmen und Dreiecke, die in allen drei Winkeln übereinstimmen, immer kongruent sind.*
   - *... weil man zeigen kann, dass die Teildreiecke in allen drei Seiten übereinstimmen und Dreiecke, die in allen drei Seiten übereinstimmen, immer kongruent sind.*
   - *... weil man zeigen kann, dass die Flächeninhalte der Teildreiecke gleich groß sind und Dreiecke, die den gleichen Flächeninhalt besitzen, immer kongruent sind.*
   - *... weil die Mittelsenkrechte Symmetrieachse des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ist.*

   Bayerischer Mathematik Test für die 8. Klasse, 2007

Lösung: (a)

(b) $\triangle PQR$ ist rechtwinklig, weil R auf dem Thaleskreis über $[PQ]$ liegt.

(c) Die zweite und vierte Aussage sind richtig.

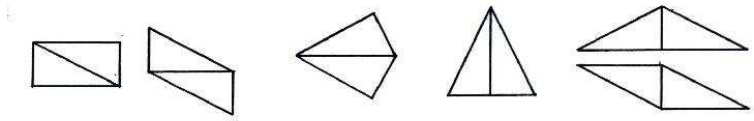
2. **Figuren legen**

   Welche Drei- und Vierecke lassen sich mit zwei gegebenen rechtwinkligen Dreiecken legen?
   Schneide die vorgegebenen Dreiecke aus und lege sie so aneinander, dass eine neue Figur entsteht. Benenne jeweils Ihre Eigenschaften.

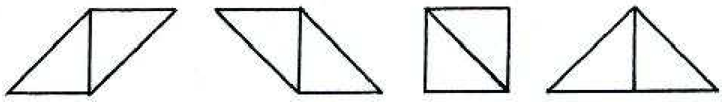
   Mögliche Verallgemeinerung: Welche Drei- und Vierecke lassen sich aus zwei gegebenen Dreiecken legen?

Lösung:

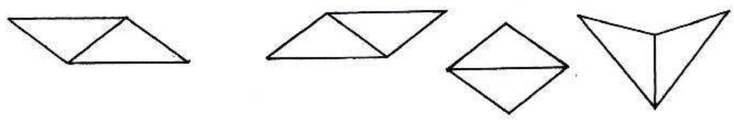
- z. B. kann aus zwei rechtwinkligen (nicht gleichschenkligen) Dreiecken ein Rechteck, Drachen oder (zwei nicht-kongruente) Parallelogramme entstehen, ebenso zwei nicht-kongruente gleichschenklinge Dreiecke:



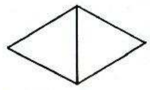
- aus zwei rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecken ein Quadrat oder (zwei kongruente) Parallelogramme entstehen, ebenso ein rechtwinkliges Dreieck:



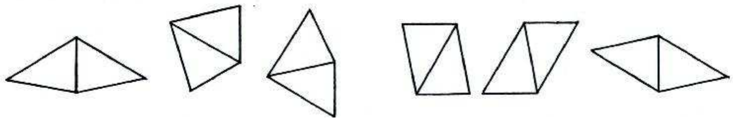
- aus zwei rechtwinkligen Dreiecken: nur Raute, Drachen mit einspringender Ecke oder (zwei kongruente) Parallelogramme:



- aus zwei glechseitigen Dreiecken: nur eine Raute:



- aus zwei beliebigen Dreiecken (nicht gleichwinkling, gleichschenkling und gleichseitig): drei nicht-konguente Drachen, ebenso (drei nicht-konguente) Parallelogramme:



3. Florians Zimmer ist rechteckig und hat 4,60 m Länge und 3,00 m Breite. Florian leiht sich von seinem Vater dessen Weitwinkelkamera, die eine Brennweite von 18 mm besitzt. Mit dieser Kamera, deren Öffnungswinkel 90° beträgt, möchte er jeweils genau eine Wand photographieren.

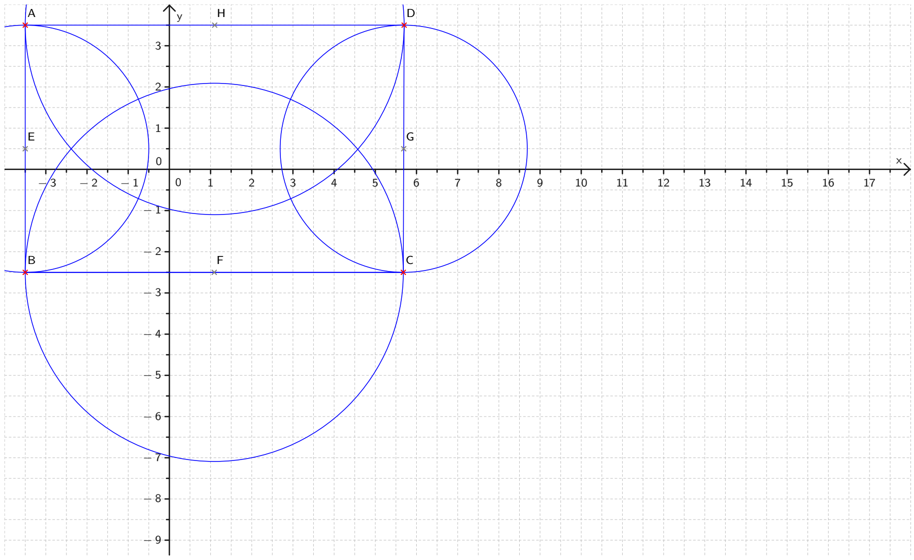
   (a) Konstruiere im Maßstab 1 : 50 die Kamerastandorte, von denen aus er seine Aufnahmen machen muss, so dass auf den Bildern jeweils genau eine Wand zu sehen ist.

   (b) Gilt die gefundene Lösung so für alle Zimmer mit rechteckiger Grundfläche?

   Literatur: Sinnstiftende Kontexte, Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung München, 2000

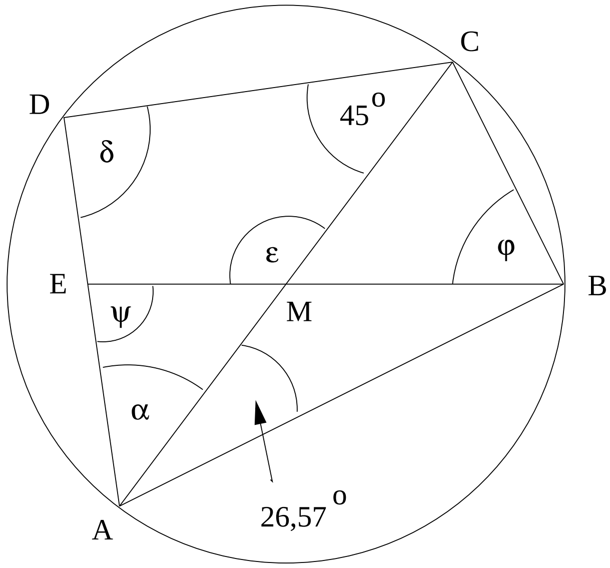
Lösung: (a) 4,6 m $\widehat{=}$ 9,2 cm, 3 m $\widehat{=}$ 6 cm

Florian muss auf den Thaleskreisen über den jeweiligen Seiten des Rechtecks stehen.



(b) Ja

4. Ermittle alle mit griechischen Buchstaben gekennzeichneten Winkelmaße.



Lösung: $\delta = 90°$ $\alpha = 45°$ $\varepsilon = 126{,}86°$ $\varphi = 63{,}43°$ $\psi = 81{,}86°$

6.2.3. Konstruktion von Kreistangenten

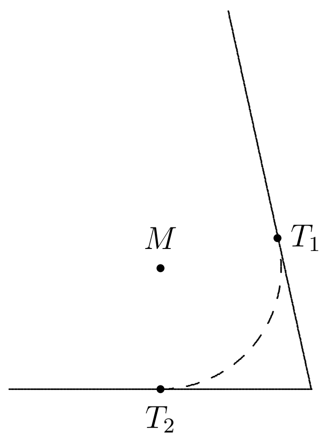
1. Gegeben sind die Punkte A und B mit $\overline{AB} = 5\,\text{cm}$. Konstruiere die Geraden durch B, die von A den Abstand 3 cm haben!

Lösung:

2. Eine Ecke einer Rasenfläche, an der die geraden Ränder einen Winkel von 70° einschließen, soll durch einen Kreisbogen (Radius $r = 4\,\text{m}$) so abgerundet werden, daß beide Ränder ohne Knick in den Kreisbogen übergehen. (Siehe Skizze rechts!)

   (a) Konstruiere den Kreismittelpunkt M, die Berührpunkte T_1 und T_2 und den Rand der Rasenfläche an dieser Ecke im Maßstab 1 : 100.

   (b) Begründe die wichtigsten Konstruktionsschritte.



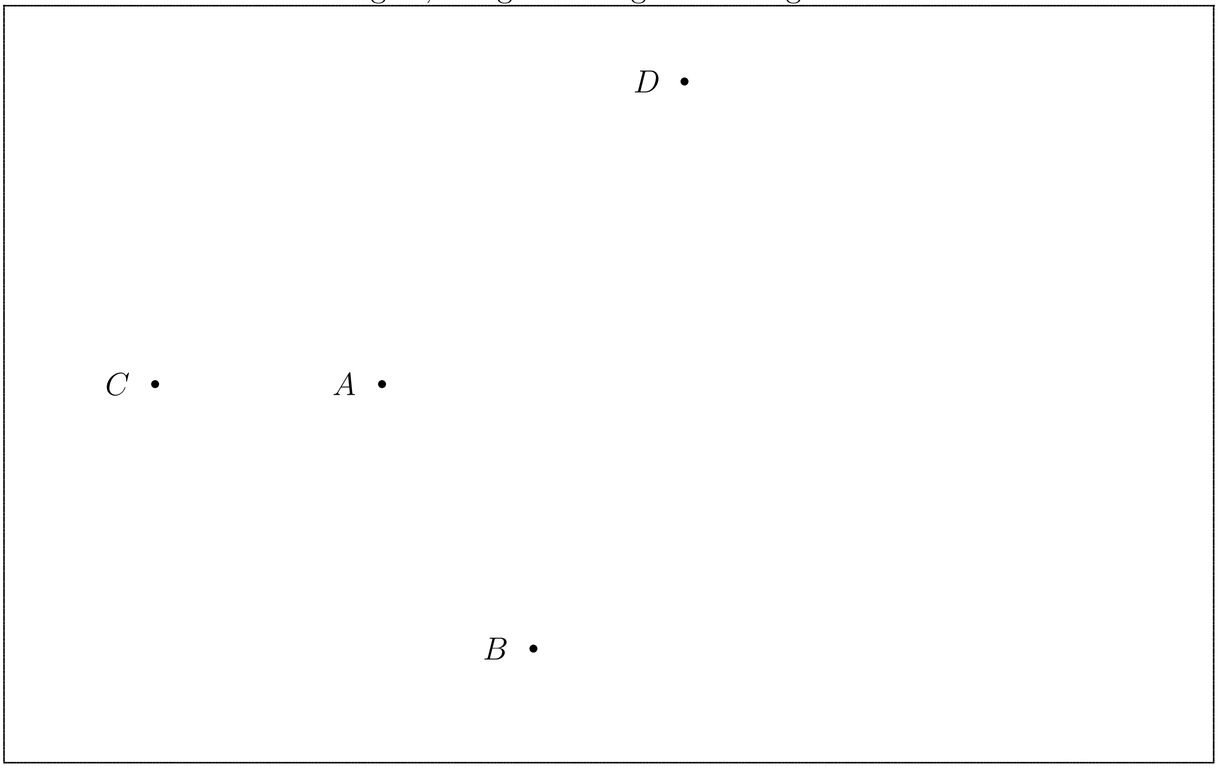
Lösung:

3. Gegeben sind die Punkte A, B, C und D (vgl. Abbildung). Die Gerade $g = CD$ steht auf AB senkrecht.

(a) Konstruiere die Menge der Mittelpunkte von Kreisen, die durch die Punkte A und B gehen.

(b) Konstruiere die Kreise, die durch A und B gehen und g als Tangente haben.

(c) h sei eine zu g parallele Gerade. Wie muß h verlaufen, damit es keinen Kreis durch A und B gibt, der gleichzeitig h als Tangente hat?



Lösung: (a) Die Mittelpunkte aller Kreise durch A und B liegen auf der Mittelsenkrechten zu $[AB]$.

(b) Der Abstand des Mittelpunktes der gesuchten Kreise von A ist so groß wie der Abstand des Parallelenpaars.

(c) Der Schnittpunkt von h mit AB muß zwischen A und B liegen.

4. Gegeben sei eine Geradenkreuzung (g_1, g_2) mit $\sphericalangle(g_1, g_2) = 60°$. S sei der Schnittpunkt von g_1 und g_2.

(a) Konstruiere <u>einen</u> Kreis k, welcher g_1 und g_2 berührt und den Radius 3,5 cm besitzt!

(b) Konstruiere <u>eine</u> Sekante durch den Punkt S, welche aus dem Kreis k eine Sehne der Länge $s = 4,5\,\text{cm}$ ausschneidet!

Lösung:

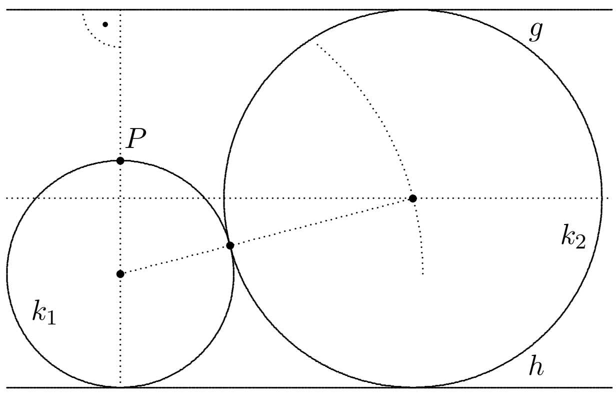
5. Zeichne den Kreis k um $M(4|6)$ mit Radius $r = 2\,\text{cm}$ und den Punkt $P(10|4)$. Konstruiere zwei Tangenten an k, die sich im Winkel 40^0 schneiden und von denen eine durch P geht.

Lösung: Man konstruiert erst eine Tangente t_1 durch P und zeichnet eine beliebige Gerade g, die t_1 unter 40^0 schneidet. Ein Lot auf g durch M schneidet den Kreis im Berührpunkt der gesuchten Tangente t_2.

6. Gegeben ist der Kreis $k(A; r = 2,5\,\text{cm})$ und der Punkt P mit $\overline{AP} = 6\,\text{cm}$. Konstruiere Geraden g und h mit den folgenden Eigenschaften:
   (a) g verläuft durch P und ist Tangente zu k
   (b) h hat von A den Abstand $4\,\text{cm}$ und schließt mit g einen Winkel von 40^0 ein (2 Lösungen).

Lösung: Konstruiere eine Tangente g zu k durch P und zeichne eine Gerade h', die g unter 40^0 schneidet. Das Lot zu h' durch A schneidet den Kreis $k'(A; r = 4\,\text{cm})$ in zwei Punkten X und Y. Die Tangenten an k' in X und Y sind die gesuchten Lösungen..

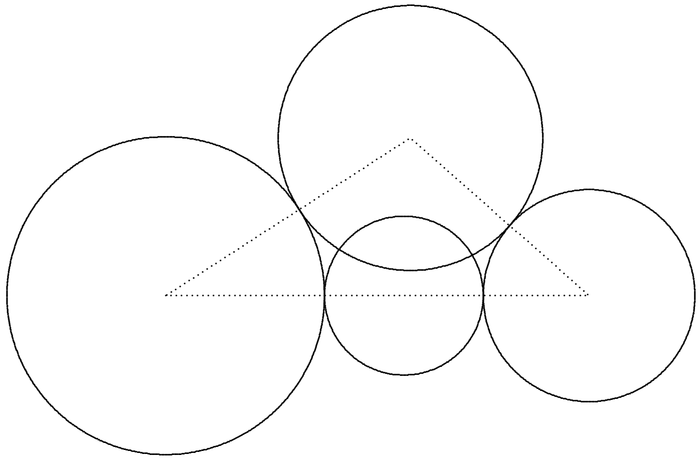
7. Zeichne zwei Parallelen g und h im Abstand von $5\,\text{cm}$ und einen Punkt P zwischen den Parallelen, der von g $2\,\text{cm}$ entfernt ist.
   (a) Konstruiere (möglichst einfach) einen Kreis k_1, der die Gerade h berührt und durch P geht.
   (b) Ein Kreis k_2 berührt beide Parallelen und den Kreis k_1. Konstruiere seinen Mittelpunkt und den Berührpunkt mit k_1 und zeichne k_2.



Lösung:

8. Der Abstand $\overline{M_1M_2}$ der Mittelpunkte der beiden Kreise $k_1(M_1; r_1 = 3\,\text{cm})$ und $k_2(M_2; r_2 = 2\,\text{cm})$ beträgt $8\,\text{cm}$. Zeichne beide Kreise.
   (a) Konstruiere den kleinsten Kreis, der k_1 und k_2 von außen berührt.

(b) Konstruiere einen Kreis mit Radius $r = 2,5\,\text{cm}$, der k_1 und k_2 von außen berührt.



Lösung:

9. Gegeben sind die Punkte A und B im Abstand von 8 cm. Konstruiere eine Gerade g, die von A den Abstand 4 cm und von B den Abstand 2 cm hat, so daß A und B auf verschiedenen Seiten von g liegen. (Planskizze, zeichne A und B in der Blattmitte, Lotkonstruktionen können mit dem Geodreick ausgeführt werden.)

Lösung: Inneres Tangentenpaar an die Kreise um A und B mit den Radien 4 cm bzw. 2 cm.

10. Zeichne einen Kreis $k(M; r = 2\,\text{cm})$ und eine Gerade g, die vom Kreismittelpunkt M den Abstand 4 cm hat. Konstruiere die Kreise mit Radius 3 cm, die die Gerade g und den Kreis k berühren.

Lösung: Die Mittelpunkte der Kreise liegen auf einer Parallelen zu g im Abstand 3 cm und zugleich auf dem Kreis um M mit Radius 5 cm.

11. Gegeben ist eine Gerade g und ein Punkt $P \in g$.

    (a) Konstruiere <u>einen</u> Kreis $k(M; r = 6\,\text{cm})$, der g in P berührt!

    Auf dem Kreis $k(M; r)$ ist <u>ein</u> Punkt B mit $\overline{BP} = 10\,\text{cm}$ zu bestimmen. Außerdem ist ein Punkt A mit $\overline{AP} = 10\,\text{cm}$ und $\overline{AB} = 5\,\text{cm}$ im Inneren von $k(M; r)$ einzuzeichnen.

    (b) Konstruiere nun einen Kreis k', der durch A geht und den Kreis $k(M; r)$ im Punkt B von innen berührt.

    (c) In die von den Kreisen $k(M; r)$ und k' gebildete „Sichel“ sind die Kreise k_1 und k_2 zu konstruieren, die $k(M; r)$ und k' berühren und den Radius 2 cm haben.

    (d) Auf $k(M; r)$ ist <u>ein</u> Punkt C mit $\overline{CP} = 6\,\text{cm}$ zu bestimmen. Konstruiere den Kreis k_3, der $k(M; r)$ von außen im Punkt C und außerdem noch die Gerade g berührt.

Verlangt ist eine übersichtliche, sehr saubere und genaue Konstruktion!
Der Konstruktionsgang muß klar ersichtlich sein!

Lösung:

12. Zeichne einen Kreis k um M mit Radius $r = 5,5\,\text{cm}$ und eine Gerade g, so daß es genau sieben Kreise mit Radius $2\,\text{cm}$ gibt, die g und k berühren. Wie groß ist in diesem Fall der Abstand der Geraden g von M? Konstruiere die Mittelpunkte der sieben Kreise!

Lösung: $d(g;M) = 1,5\,cm$

13. Gegeben seien die Punkte $A(0/4)$, $B(8/0)$, $M(10/6)$ und $T(7/5)$.
    (a) Zeichne die Gerade g durch die Punkte A und B und den Kreis $k_1(M;\overline{MT})$ in ein Koordinatensystem ein! (Platzbedarf nach oben: 15 cm, y-Achse ganz links)
    (b) Gesucht sind die Mittelpunkte aller Kreise, die k_1 in T berühren. Zeichne die Linie ein, auf der diese Mittelpunkte liegen und konstruiere außerdem die Tangente an k_1 im Punkt T !
    (c) Konstruiere einen Kreis, der k_1 in T berührt und zusätzlich g als Tangente hat!

Lösung:

14. Gegeben seien die Punkte $A(5/0)$, $B(13/4)$, $M(3/6)$ und $T(6/5)$.
    (a) Zeichne die Gerade g durch die Punkte A und B und den Kreis $k_1(M;\overline{MT})$ in ein Koordinatensystem ein! (Platzbedarf nach oben: 15 cm, y-Achse ganz links)
    (b) Gesucht sind die Mittelpunkte aller Kreise, die k_1 in T berühren. Zeichne die Linie ein, auf der diese Mittelpunkte liegen und konstruiere außerdem die Tangente an k_1 im Punkt T !
    (c) Konstruiere einen Kreis, der k_1 in T berührt und zusätzlich g als Tangente hat!

Lösung:

15. Gegeben sei folgender

    Satz. *Schneiden sich zwei Tangenten an einen Kreis im Punkt P, so sind die Tangentenberührpunkte T_1 und T_2 von P gleichweit entfernt.* (*Es gilt also* $\overline{T_1P} = \overline{T_2P}$.)

    Beweise den Satz mit Hilfe eines Kongruenzbeweises! Zeichne zuerst eine Beweisfigur!

Lösung:

16. In einem Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) ist ein Parallelogramm $ABCD$ durch die Punkte $B(6|1)$, $C(5|8)$, $D(1|8)$ gegeben.
    (a) Verwandle in einer sauberen Konstruktion das Parallelogramm $ABCD$ unter Beibehaltung der Seite $[BC]$ in ein inhaltsgleiches Parallelogramm $A'BCD'$, in welchem die Seiten $[A'B]$ und $[D'C]$ einen Abstand von 5,6 cm haben! Erläutere dein Vorgehen stichpunktartig!
    (b) Berechne ausführlich die in Teilaufgabe a) entstandene Streckenlänge $\overline{A'B}$!

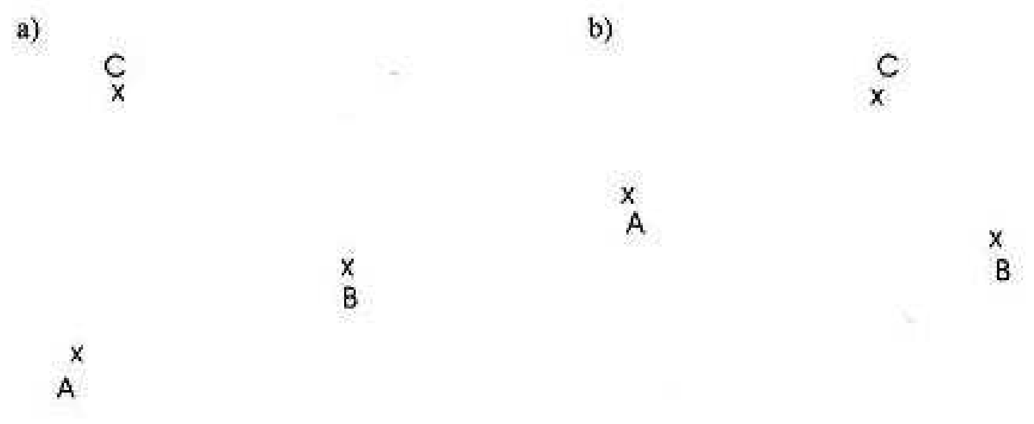
Lösung: (a) D' liegt auf der Tangente an den Kreis um B mit Radius 5,6 cm und auf AD. A' liegt auf der Parallele zu $D'C$ und auf AD.
(b) Fläche des Parallelogramms mit verschiedenen Grundseiten berechnen: $5\,\text{cm} \cdot 7\,\text{cm} = 5{,}6\,\text{cm} \cdot \overline{A'B} \Rightarrow \overline{A'B} = 5\,cm$

6.3. Konstruktionen

6.3.1. Besondere Linien im Dreieck

1. **Neues von den gehfaulen Ameisen**

   Clothilde wird Mitglied im Gehgerechtigkeitsverein. Kannst du einen Treffpunkt konstruieren, zu den alle drei gleich weit krabbeln müssen?

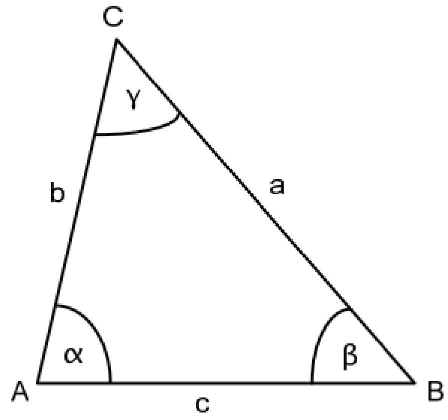


Lösung: Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

6.3.2. Dreieckskonstruktionen

Entscheide jeweils, ob sich mit den unten angegebenen Bestimmungsstücken (siehe auch Zeichnung) ein Dreieck (bis auf seine Lage) eindeutig konstruieren lässt.

Kreuze an.



(Zeichnung nicht maßstabsgerecht!)

1.

Bestimmungsstücke			ja	nein
c = 5,8 cm	α = 40°	β = 68°	☐	☐
γ = 72°	α = 40°	β = 68°	☐	☐
b = 8,8 cm	c = 5,6 cm	α = 53°	☐	☐
c = 5,8 cm	a = 7,4 cm	α = 68°	☐	☐
c = 6 cm	a = 4 cm	α = 70°	☐	☐

Quelle: VERA C 2008

Lösung: ja, nein, ja, ja, nein

2. Wähle aus den vorgegebenen Größen jeweils **drei** aus und überlege anhand einer Skizze, ob aus den ausgewählten Größen ein Dreieck (eindeutig) konstruierbar ist. Begründe deine Antwort.

   $a = 6\,\text{cm}$, $c = 9\,\text{cm}$, $\alpha = 40°$, $w_\beta = 5\,\text{cm}$, $s_c = 4\,\text{cm}$ und $h_a = 4{,}5\,\text{cm}$

   Quelle: Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur, ISB 2001

Lösung: Eindeutige Konstruktionen für

$(a,\ c,\ s_c)$, $(a,\ c,\ h_a)$, $(c,\ \alpha,\ h_a)$, $(c,\ \alpha,\ s_c)$

Zwei Lösungsdreiecke für $(a,\ c,\ \alpha)$

Keine Lösung: $(c,\ \alpha,\ w_\beta)$, da w_β zu kurz

3. Konstruiere ein Dreieck ABC mit $a = 6\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$ und $c = 7\,\text{cm}$ auf zweifache Weise:
   (a) Lege die Strecke $[BC]$ waagrecht.
   (b) Lege die Seite $[AC]$ waagrecht.
   (c) Ändere die Angaben für das Dreieck so ab, dass mit der abgeänderten Angabe die Konstruktion eines Dreiecks nicht mehr möglich ist. Begründe deine Abänderung ohne neue Konstruktion.

Lösung: (c) z.B. $c = 10{,}5\,\text{cm}$ oder $\alpha = 90{,}01°$

4. Es gibt zwei Möglichkeiten, ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, in dem ein Innenwinkel 120° beträgt und eine Seite 6 cm lang ist.
   Konstruiere diese beiden Dreiecke.

Lösung: - -

5. Es gibt zwei Möglichkeiten, ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Basis 5 cm lang ist und das Maß irgendeines Innenwinkels 70° beträgt.
   Konstruiere diese beiden Dreiecke.

Lösung: 1. Fall: Beide Basiswinkel haben das Maß 70°. Dann hat der dritte Winkel das Maß 40°.
2. Fall: Der Winkel an der Spitze hat das Maß 70°. Dann hat jeder Basiswinkel das Maß 55°.

6. (a) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $c = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 35°$ und $\gamma = 95°$.
   (b) Ändere die Angaben für das Dreieck ABC an einer Stelle so ab, dass mit der abgeänderten Angabe die Konstruktion eines Dreiecks nicht mehr möglich ist. Begründe deine Wahl.

Lösung: (b) z.B. $a = 7\,\text{cm}$ statt $\alpha = 35°$

7. (a) Von einem Dreieck ABC weiß man: $a = 11{,}3\,\text{cm}$ und $\gamma = 60°$. Außerdem besitzt das Dreieck ABC eine Symmetrieachse.
   Konstruiere das Dreieck. Was fällt dir auf?

(b) Von einem weiteren Dreieck ABC weiß man: $\alpha = 47°$, $a = 4{,}5\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = \overline{AB}$. Berechne die restlichen Innenwinkel dieses Dreiecks.

Lösung: (a) Das Dreieck ist gleichseitig.
(b) Das Dreieck ist gleichschenklig: $\beta = \gamma = 66{,}5°$

8. (a) Konstruiere ein Dreieck ABC aus $c = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 92°$ und $a = 8\,\text{cm}$.
   (b) Ändere eine der Angaben für das Dreieck ABC so ab, dass dann die Konstruktion des Dreiecks nicht mehr möglich ist. Begründe deine Abänderung.

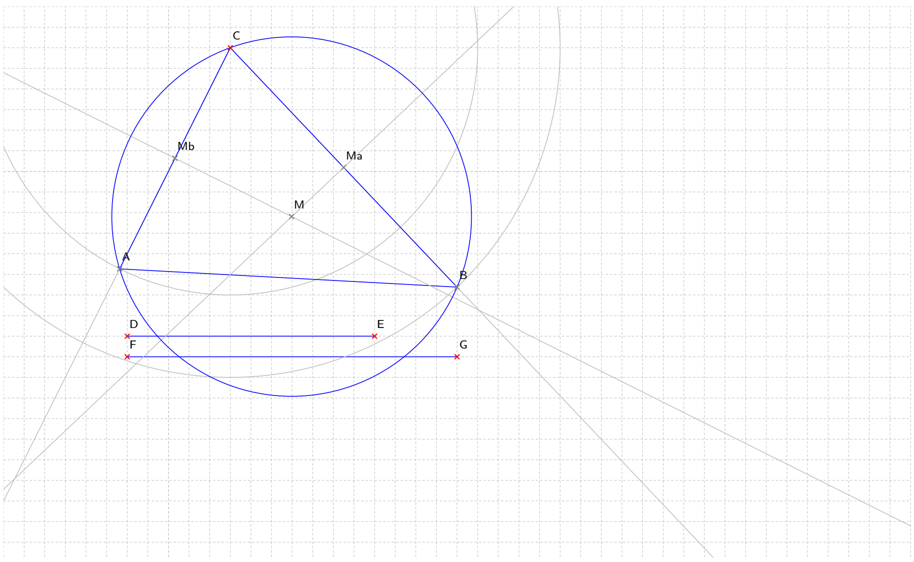
Lösung: (b) z.B. statt $a = 8\,\text{cm}$: $\beta = 90°$
oder $c = 9\,\text{cm}$ statt $c = 6\,\text{cm}$.

9. Konstruiere ein Dreieck mit $b = 6\,\text{cm}$, $a = 8\,\text{cm}$ und $\gamma = 70°$.

   Konstruiere den Umkreismittelpunkt dieses Dreiecks.

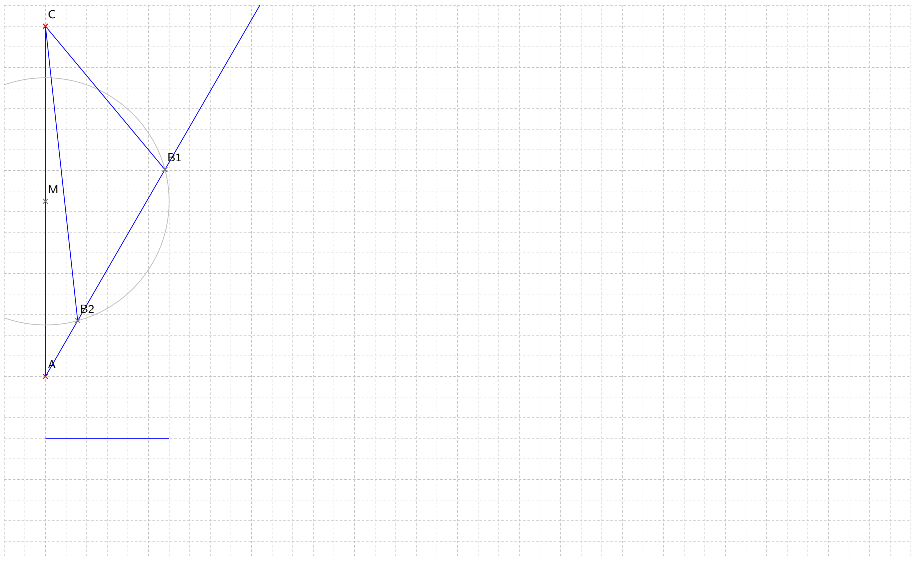
Lösung: C ist Scheitel des Winkels γ, A liegt auf $\text{k}(\text{C}, b)$ und dem ersten Schenkel von γ. B liegt auf $\text{k}(\text{C}, a)$ und dem zweiten Schenkel von γ.

M ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.



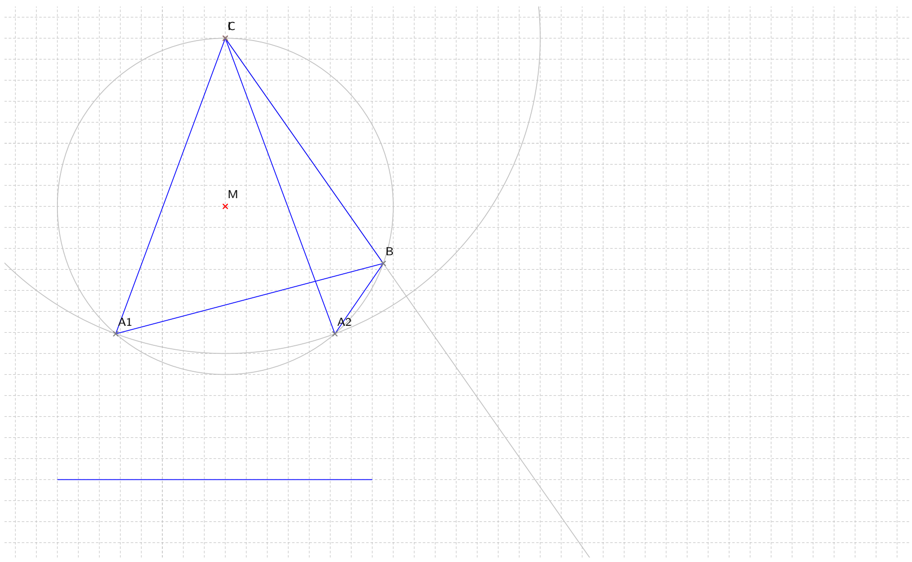
10. Konstruiere ein Dreieck mit $b = 9\,\text{cm}$, $\alpha = 35°$ und $s_b = 3\,\text{cm}$.

Lösung: A und C sind Endpunkte der Seite b. M ist Mittelpunkt von b. B liegt an dem ersten Schenkel von α und auf dem Kreis um M mit Radius s_b. Zwei Lösungsdreiecke $\triangle \text{AB}_1\text{C}$ und $\triangle \text{AB}_2\text{C}$.



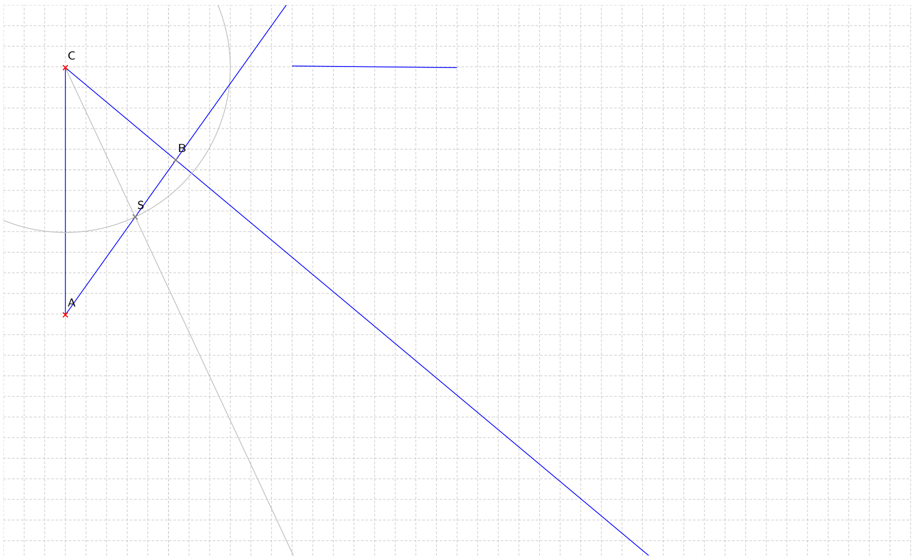
11. Konstruiere ein Dreieck aus folgenden Stücken (M ist der Mittelpunkt des Umkreises): $b = 7{,}5\,\text{cm}$, Umkreisradius $r = 4\,\text{cm}$ und $\tilde{\gamma} = \sphericalangle \text{MCB} = 35°$.

Lösung: C liegt auf dem Kreis um M mit Radius r beliebig. A liegt auf dem Kreis um C mit Radius b und auf dem Kreis um M mit Radius r. B liegt auf dem zweiten Schenkel des Winkels $\tilde{\gamma}$ und auf dem Kreis um M mit Radius r.



12. Im $\triangle$ABC ist S der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von γ und der Seite c. Konstruiere mit Zirkel und Lineal ein Dreieck mit $b = 6\,\text{cm}$, $\overline{\text{CS}} = 4\,\text{cm}$ und $\gamma = 50°$.

Lösung: A und C sind Endpunkte der Seite b. S liegt auf dem Kreis um C mit Radius $\overline{\mathrm{CS}}$ und auf der Winkelhalbierenden von γ. B liegt auf der Halbgeraden [AS und auf dem zweiten Schenkel von γ.



13. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck mit Schenkellänge 6 cm und mit einem Winkel an der Spitze von 45° (ohne Winkelmesser!).

Lösung:

14. In einem Dreieck ABC sind der Höhenschnittpunkt H(6,5|4) und die Eckpunkte A(6|0) und B(12|5) gegeben. Konstruiere das Dreieck ABC.

Lösung:

15. (a) Konstruiere ein Dreieck, von dem Folgendes gegeben ist:

    $b = 5\,\mathrm{cm}$, Umkreisradius $r = 3{,}5\,\mathrm{cm}$, $\sphericalangle\,\mathrm{AMB} = 120°$
    M ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks.

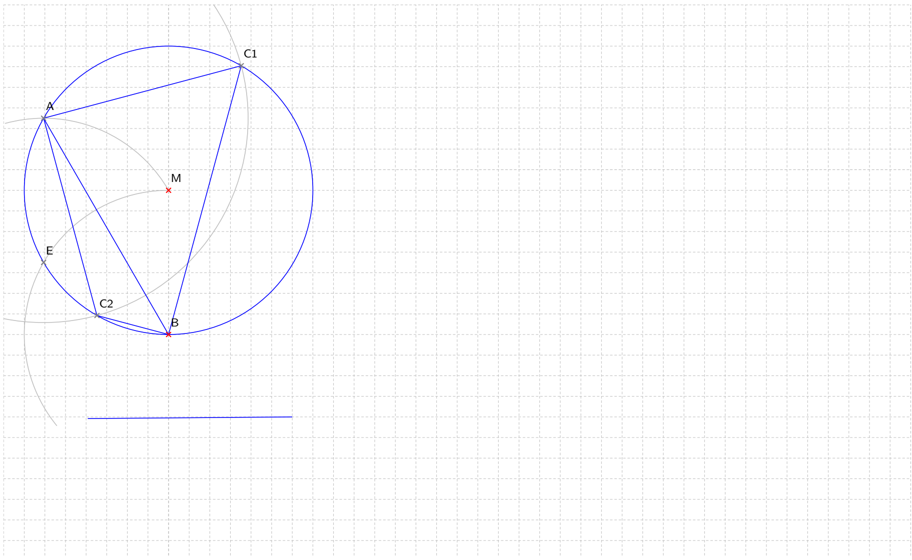
    (b) Konstruiere ein Dreieck, von dem Folgendes gegeben ist:

    $a = 5\,\mathrm{cm}$, Umkreisradius $r = 4\,\mathrm{cm}$, $\sphericalangle\,\mathrm{AMB} = 120°$

    M ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks.

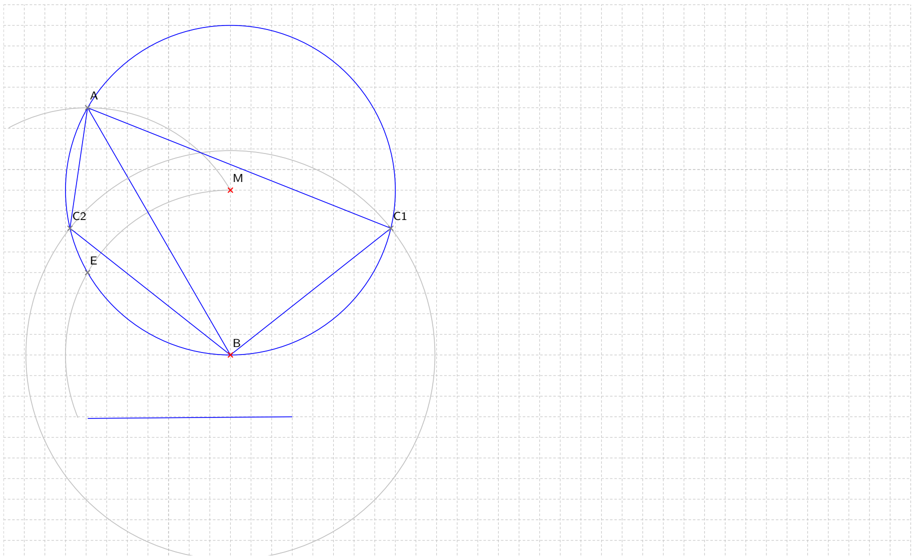
Lösung: (a) B liegt auf $\mathrm{k}(\mathrm{M}, r)$. A liegt auf dem freien Schenkel des Winkels $\sphericalangle\mathrm{AMB} = 120°$ und auf $\mathrm{k}(\mathrm{M}, r)$. C auf $\mathrm{k}(\mathrm{M}, r)$ und auf $\mathrm{k}(\mathrm{A}, b)$.

Zwei Lösungsdreiecke $\triangle\mathrm{ABC}_1$, $\triangle\mathrm{ABC}_2$



(b) B liegt auf k(M, r). A liegt auf dem freien Schenkel des Winkels $\sphericalangle$AMB = 120° und auf k(M, r). C auf k(M, r) und auf k(B, a).

Zwei Lösungsdreiecke $\triangle$ABC$_1$ und $\triangle$ABC$_2$.



6.3.3. Viereckskonstruktionen

1. Konstruiere ein Viereck $ABCD$ aus $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$, $\overline{AC} = 7\,\text{cm}$, $\overline{DA} = 3\,\text{cm}$, $\alpha = 70^0$ und $\beta = 80^0$. Ist die Konstruktion eindeutig?

Lösung: ABC ist nach SsW eindeutig bestimmt, ABD nach SWS.

2. Konstruiere ein Parallelogramm $ABCD$ mit dem Diagonalenschnittpunkt M aus $\overline{AB} = 9\,\text{cm}$, $\overline{BD} = 8\,\text{cm}$ und $\sphericalangle BMC = 30^0$.

Lösung: Man konstruiert zunächst ABM, die Konstruktion ist nach SsW eindeutig.

3. Konstruiere ein Parallelogramm $ABCD$ aus folgenden Angaben: $\alpha = 57^0$, $d(A; DC) = 4\,\text{cm}$, $d(D; BC) = 5\,\text{cm}$. (Planfigur, Analysis)

Lösung: Man zeichnet den Winkel $\gamma = \alpha = 57^0$, dessen Scheitel ist die Ecke C. Die übrigen Ecken ergeben sich durch Konstruktion von Parallelen mit den gegebenen Abständen.

4. Konstruiere ein Parallelogramm aus folgenden Angaben:

   $\alpha = 50^0$, $d(A, DC) = 4\,\text{cm}$, $d(C, BD) = 5\,\text{cm}$

   (Planfigur, Analysis)

Lösung: Man zeichnet den Winkel $\gamma = 50^0$ mit Scheitel C und erhält durch Konstruktion einer Parallelen den Punkt B. Mit Hilfe des Thaleskreises über $[BC]$ bestimmt man die Diagonale BD als Tangente an den Kreis um C mit Radius $5\,\text{cm}$ (zwei Lösungen, großer Platzbedarf). Die Seite AD ergibt sich als Parallele zu BC durch D.

5. Von einem Parallelogramm $ABCD$ sind folgende Stücke bekannt:

   $$\overline{AC} = e = 5{,}5\,\text{cm}\,; \qquad a - b = 3{,}5\,\text{cm}\,; \qquad \gamma = 160^o.$$

   Verlangt sind Planfigur, Konstruktionsbeschreibung und eine saubere und genaue Konstruktion!

   Hinweis: Gleichschenkliges Dreieck in der Planfigur herstellen!

Lösung:

6. Konstruiere ein Trapez $ABCD$ aus folgenden gegebenen Stücken:

   $\overline{AB} = a = 7\,\text{cm}$; $\alpha = 80°$; Umkreisradius $r = 4\,\text{cm}$.

   Verlangt sind eine übersichtliche Planfigur, eine Konstruktionsbeschreibung und eine saubere und genaue Konstruktion!

Lösung:

7. Konstruiere ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ aus folgenden gegebenen Stücken:

   $$\overline{AM} = 9\,\text{cm}\,; \quad \delta = 115°\,; \quad d(AB, DC) = 8\,\text{cm}.$$

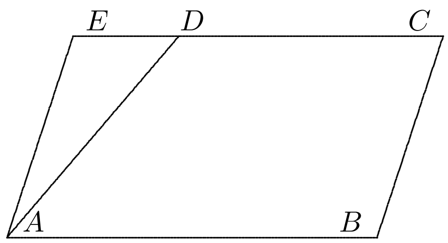
Hierbei bezeichnet M den Mittelpunkt der Seite $[BC]$ und $d(AB, DC)$ den Abstand der parallelen Trapezgrundlinien.

Verlangt sind Planfigur, Konstruktionsbeschreibung und eine saubere und genaue Konstruktion!

Lösung:

8. Konstruiere ein Trapez mit den Seitenlängen $a = 7\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$ und $d = 5\,\text{cm}$:
   (a) Zeichne eine Planfigur, suche nach nützlichen Hilfslinien.
   (b) Beschreibe die Konstruktion in den wesentlichen Schritten.
   (c) Saubere Konstruktion.

Lösung:



Ausgehend vom Dreieck EDA mit den Seitenlängen $\overline{EA} = b$, $\overline{DA} = d$ und $\overline{DE} = a-c$ konstruiert man das Parallelogramm $ABCE$. $ABCD$ ist das gesuchte Trapez.

9. Konstruiere ein gleichschenkliges Trapez mit $a \parallel c$ aus den folgenden Stücken (Planfigur, Analysis, Konstruktion):

   $c = 6\,\text{cm}$, $f = \overline{BD} = 9{,}5\,\text{cm}$ und $\delta = 110^0$.

Lösung: Durch die Angabe ist das Dreieck BCD nach SsW bestimmt.

10. Konstruiere ein Drachenviereck $ABCD$ mit der Symmetrieachse AC aus $\overline{AC} = 7\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$ und $\beta = 40^0$.

    (Planfigur, Analysis, Konstruktion)

Lösung: Zeichne zuerst $[BC]$, trage bei B einen Winkel von 40^0 an, dann ist das Dreieck ABC nach SsW bestimmt. Spiegelung an AC liefert D.

11. Konstruiere ein Trapez $ABCD$ aus $\alpha = 50°$, $\overline{BD} = f = 8{,}3\,\text{cm}$, h(=Abstand der beiden parallelen Grundlinien $\overline{AB}$ und $\overline{DC}$)$=\ 6{,}0\,\text{cm}$. Außerdem hat das Trapez einen Inkreis.
    Verlangt sind Planfigur, Konstruktionsbeschreibung und eine saubere Konstruktion.

    Hinweis: Starte mit dem Inkreis vom Durchmesser h!

Lösung:

12. (a) Konstruiere ein Parallelogramm $ABCD$ aus folgenden Angaben: Seitenlänge $\overline{AB} = 6\,\mathrm{cm}$, Fläche $A = 27\,\mathrm{cm}^2$, $\overline{BD} = 10\,\mathrm{cm}$.

    (b) Berechne den Abstand des Punktes C von der Diagonalen BD.

Lösung: (a) Zwei Lösungen (b) Abstand $2,7\,\mathrm{cm}$

13. (a) Konstruiere ein Parallelogramm aus folgenden Angaben: Seitenlänge $\overline{AB} = 6\,\mathrm{cm}$, Fläche $A = 27\,\mathrm{cm}^2$, $\overline{BD} = 10\,\mathrm{cm}$. (Eine freie Seite im Querformat verwenden.)

    (b) Berechne den Abstand des Punktes C von der Diagonalen BD.

Lösung: Der Abstand der Parallelen AB und CD beträgt $4,5\,\mathrm{cm}$, dies ermöglicht die Konstruktion (2 Lösungen). Der Abstand der Ecke C von BD ist $2,7\,\mathrm{cm}$.

7. Vertiefen der Algebra und Geometrie

7.1. Terme und Gleichungen

1. Berechne die Lösungsmenge zur Grundmenge $\mathbb{Q}$:
   (a) $2x - 4 = -3 + 6x$
   (b) $(x-1)(x+1) = -1 + \frac{x}{3} \cdot 3x$
   (c) $x + 2 - \frac{4}{7} = (6x+2) : 7$

Lösung: (a) $-4x = 1 \quad \Longrightarrow \quad L = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

(b) $x^2 - 1 = -1 + x^2 \quad \Longrightarrow \quad L = \mathbb{Q}$

(c) $x + \frac{10}{7} = \frac{6}{7}x + \frac{2}{7} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{7}x = -\frac{8}{7} \quad \Longrightarrow \quad L = \{-8\}$

2. **Das Steuermodell von Kirchhoff (2005)**

   Vom gesamten Jahreseinkommen einer Familie werden pro Person 8000 € Freibetrag abgezogen, vom Rest sind 25% Steuern zu zahlen.

   Der effektive Steuersatz gibt an, wieviel Prozent des Einkommens die Steuern ausmachen. Gesucht ist ein Term $e(x, n)$, der den effektiven Steuersatz aus dem Monatseinkommen x und der Zahl n der Personen in der Familie berechnet.

   Berechne den effektiven Steuersatz für die Monatseinkommen 1000 €, 2000 €, 4000 €, 6000 €, 8000 € und 10 000 €jeweils für eine, zwei, drei und vier Personen in der Familie. Stelle die Ergebnisse übersichtlich in einer Tabelle dar und veranschauliche sie in einer Grafik.

Lösung: Das Jahreseinkommen ist $12x$, die zu zahlenden Steuern pro Jahr sind

$$s = 25\% \cdot (12x - n \cdot 8000)$$

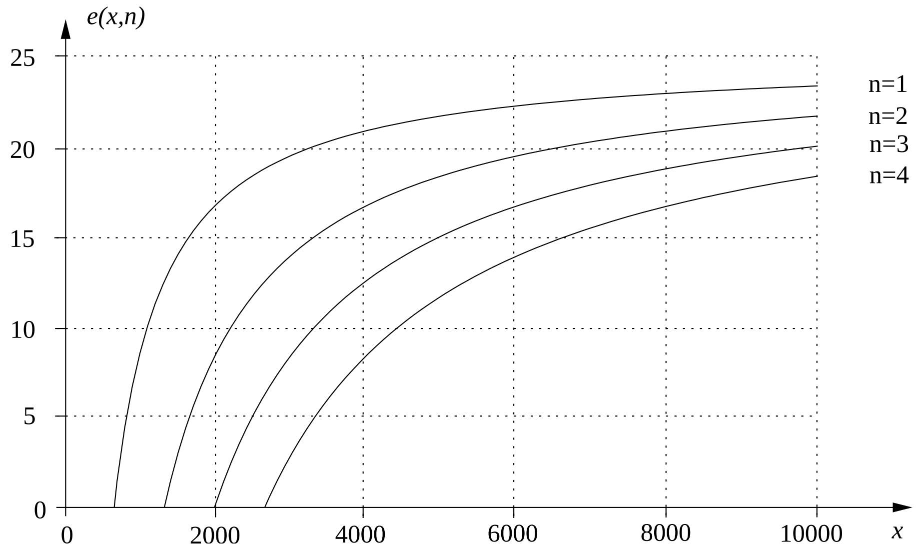
$$e = \frac{s}{12x} = 25\% \cdot \frac{12x - 8000n}{12x} = 25\% \cdot \left(1 - \frac{2000n}{3x}\right)$$

Diese Formel gilt nur, wenn $12x > 8000n$ ist, für $12x \leqq 8000n$ zahlt man keine Steuern:

$$\boxed{e(x,n) = \begin{cases} 25\% \cdot \left(1 - \frac{2000n}{3x}\right) & \text{für } x > \frac{2000n}{3} \\ 0 & \text{für } x \leqq \frac{2000n}{3} \end{cases}}$$

Die folgende Wertetabelle gibt den effektiven Steuersatz in Prozent an:

x	1000	2000	4000	6000	8000	10000
$n=1$	8,3	16,7	20,8	22,2	22,9	23,3
$n=2$	0	8,3	16,7	19,4	20,8	21,7
$n=3$	0	0	12,5	16,7	18,8	20,0
$n=4$	0	0	8,3	13,9	16,7	18,3



3. (a) Vereinfache den Term so weit wie möglich und klammere im Ergebnis eine Zahl so aus, dass in der Klammer kein Bruch mehr steht:

$$T(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{2} + 1\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

(b) Berechne den Wert des Terms $T(x)$ für $x = \frac{1}{2}$, $x = 0$ und für $x = -\frac{1}{2}$.

Lösung: (a) $T(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + x - \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{8} = \frac{5}{4}x - \frac{5}{8} = \frac{5}{8}(2x-1)$

(b) $T\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $T(0) = -\frac{5}{8}$, $T\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$

4. Suche die Lösungsmenge zur Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

(a) $(x-3)(x+3)+9 = x^2$ (b) $\frac{x^2}{x} = 0$ (c) $\frac{x-1}{x-1} = 1$

Lösung: (a) $L = \mathbb{Q}$ (b) $L = \{\}$ (c) $L = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$

7.2. Anwendungsaufgaben

1. Herr Sparsam wohnt in Altötting, 20 km von der Grenze zu Österreich entfernt. Er fährt zum Tanken nach Österreich. Dort kostet der Liter Benzin nur 1,21 EUR, im Gegensatz zu 1,30 EUR in Altötting. Lohnt sich die Fahrt?

Lösung: Z. B.: Annahme: Bezinverbrauch 8l pro 100km

Kosten für Fahrt zur Tankstelle: $1,21\frac{\text{EUR}}{\text{l}} \cdot 40\text{km} \cdot 0,08\frac{\text{l}}{\text{km}} = 3,88\,\text{EUR}$

Ersparnis bei ganzer Tankfüllung (50l):

$50 \cdot (1,30\,\text{EUR} - 1,21\,\text{EUR}) = 5,5\,\text{EUR}$

Die Fahrt lohnt sich, wenn die dazu benötigte Zeit und Umweltgesichtspunkte keine Rolle spielen.

2. Zocker-Tom besucht ein Spielcasino. Er setzt bei jedem Spiel den gleichen Anteil des Geldes, das er im Moment hat. Gewinnt er, dann erhält er seinen Einsatz zurück und zusätzlich den gleichen Betrag noch einmal. Verliert er, so hat er seinen Einsatz verspielt.
Als Zocker-Tom wieder aus dem Spielcasino kommt, hat er gleich viele Spiele gewonnen wie verloren. Über die Reihenfolge von Gewinn und Verlust ist nichts bekannt. Hat er insgesamt Gewinn oder Verlust gemacht?

Quelle: 9. Landeswettbewerb Mathematik, 2006

Lösung: G: Betrag, den er zu Beginn hat,
g: Betrag, den er im Moment hat,
a Anteil, den er jeweils einsetzt,
$a \cdot g$: Einsatz beim Spiel,
Gewinnt er, hat er nach dem Spiel $(1+a)g$, erliert er hat er $(1+a)g$. D. g. bei Gewinn wird der Betrag mit $(1+a)$ multipliziert, beim Verlieren mit $(1-a)$. Wegen dem Kommutativgesetz ist die Reihenfolge der Faktoren unerheblich $\Rightarrow$

Betrag nach n-mal Gewinn und n-mal Verlust:

$G \cdot (1+a)^n \cdot (1-a)^n = G \cdot (1-a^2)^n$

Da $(1-a^2)^n < 1$ ist, hat er insgesamt Verlust gemacht!

3. Im Jahre 2006 beträgt die Mehrwertsteuer noch 16%, ab 01.01.2007 wird sie auf 19% angehoben. Um wieviel Prozent (auf Zehntel Prozent gerundet) steigt der Endpreis einer Ware durch diese Steuererhöhung?

Lösung: Preis ohne MWSt.: p_0, alter Preis: $p_a = 1{,}16p_0$

neuer Preis: $p_n = 1{,}19p_0 = \frac{1{,}19}{1{,}16}p_a = 1{,}0258p_a \quad\Longrightarrow\quad$ Erhöhung um 2,6%.

4. Hans geht mit 200 € und Eva mit 50 € in die Spielbank. Nach einer Stunde Spiel besitzen die beiden gleich viel Geld. Dabei hat Eva $x\%$ von ihrem Anfangsbetrag gewonnen und Hans hat genauso viele Prozent von seinem Startkapital verloren. Wieviel Prozent ihres mitgebrachten Geldes hat Eva gewonnen und welchen Betrag besitzen die beiden nach dem Spiel?

Lösung: $50 \cdot (1 + x\%) = 200 \cdot (1 - x\%), \quad x\% = 60\%$

Beide besitzen nach dem Spiel 50 € · 1,6 = 200 € · 0,4 = 80 €

5. Eva verdient monatlich 360 €, Fritz dagegen 640 €. Hans verdient um einen gewissen Prozentsatz mehr als Eva und um den gleichen Prozentsatz weniger als Fritz. Berechne diesen Prozentsatz und das monatliche Einkommen von Hans.

Lösung: x ist der gesuchte Prozentsatz:

$$\begin{aligned}(1 + x) \cdot 360 &= (1 - x) \cdot 640 \\ 360 + 360x &= 640 - 640x \\ 1000x &= 280 \\ x &= \frac{28}{100} = 28\%\end{aligned}$$

Hans verdient 1,28 · 360 € = 460,80 € (oder 0,72 · 640 € = 460,80 €)

7.3. Geometrie

1. Vor langer Zeit lebten einmal drei Kobolde mit Namen Asam, Bela und Calvin in den Wäldern um den Feuerbach. Die Höhlen der drei Kobolde waren durch gerade Wege miteinander verbunden. Eines Tages fanden die Kobolde die verschlüsselte Botschaft eines Druiden, die sie zu einer verhexten Feuerstelle am Feuerbach führen sollte. Sie waren sich über den genauen Verlauf des Flusses nicht einig, deshalb nahmen sie ein Fell daher, das ihnen als Karte dienen sollte. Auf diesem Fell wollten sie die Wege nach der Botschaft des Druiden einzeichnen.

   Sofort machten sich die drei Kobolde an die Arbeit die Botschaft zu entschlüsseln.

   - *Ein jeder gehe von seiner Höhle senkrecht auf den gegenüberliegenden Weg. Der gemeinsame Treffpunkt am Fluss werde durch Hölzer mit einem H gekennzeichnet.*
   - *Nun gehe jeder Kobold von H zu seiner Höhle zurück und markiere dabei die Hälfte des Weges ebenfalls mit einem Stöckchen.*
   - *Weiter finde jeder die Senkrechte auf die Mitte des Weges, der zu seinem Nachbar führt. Auch hier werde der gemeinsame Treffpunkt, wieder am Fluss, durch Hölzer markiert, diesmal durch ein M.*

- *Sucht die Mitte von M und H. Dort findet Ihr die verhexte Feuerstelle.*

Sofort machten Asam, Bela und Calvin sich auf und waren schließlich überglücklich, die verschlüsselte Botschaft des Druiden enträtselt zu haben, denn von dieser Feuerstellt am Fluss ging wahrhaftig ein Zauber aus.

Spür auch du dem Zauber nach, dem Asam, Bela und Calvin erlegen sind, indem Du die Fellzeichnung der Kobolde nachzeichnest.

Literatur: PM 4/43, Jg. 2001

Lösung: Die Feuerstelle ist Mittelpunkt des Feuerbachschen Neunpunktekreises und liegt zusammen mit M und H auf der Eulerschen Geraden.

2. (a) Berechne die Winkel, die der Sekundenzeiger, der große Zeiger (Minutenzeiger) bzw. der kleine Zeiger (Stundenzeiger) einer Uhr in einer Minute bzw. in einer Sekunde überstreichen. Stelle die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen. Wenn ein Ergebnis Bruchteile eines Grades enthält, ist es auch in der Grad-Minuten-Sekunden-Schreibweise anzugeben.

   (b) Auf einer Zeigeruhr ist es $t_1 = 21{:}08{:}00$. Zu welcher Zeit t_2 bildet der Sekundenzeiger mit dem großen Zeiger zum ersten Mal nach t_1 einen 70°-Winkel? Wähle als Variable die Zahl x der Sekunden nach t_1.

   (c) Wenn du die Teilaufgabe (b) *nicht* lösen konntest, verwende $t_2 = 21 : 08 : 25$.

   Berechne alle nötigen Winkel und zeichne die drei Uhrzeiger zur Zeit t_2 so genau wie möglich. Wähle für das Ziffernblatt einen Kreis mit dem Radius 4 cm und beschrifte deine Zeichnung mit den berechneten Winkeln.

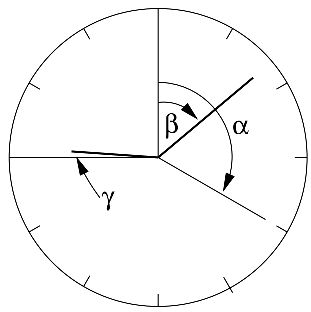
Lösung: (a)

	1 min	1 s
Sekundenzeiger	360°	6°
großer Zeiger	6°	$0{,}1° = 6'$
kleiner Zeiger	$0{,}5° = 30'$	$\left(\frac{1}{120}\right)^\circ = 0{,}5' = 30''$

(b) $\underbrace{x \cdot 6°}_{\alpha} - \underbrace{(8 \cdot 6° + x \cdot 0{,}1°)}_{\beta} = 70°$

$x \cdot 5{,}9° = 118°$

$x = \dfrac{118°}{5{,}9°} = 20 \quad \Longrightarrow t_2 = 21 : 08 : 20$



(c) $\alpha = 20 \cdot 6° = 120°$

$\beta = 8 \cdot 6° + 20 \cdot 0{,}1° = 50°$

$\gamma = 8 \cdot 0{,}5^\circ + 20 \cdot 0{,}5' = 4^\circ\, 10'$

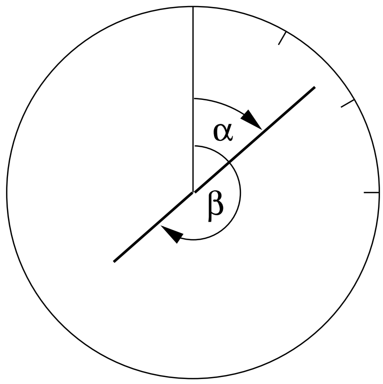
3. (a) Berechne die Winkel, die der große Zeiger (Minutenzeiger) bzw. der kleine Zeiger (Stundenzeiger) einer Uhr in einer Minute bzw. in einer Sekunde überstreichen. Stelle die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen. Wenn ein Ergebnis Bruchteile eines Grades enthält, ist es auch in der Grad-Minuten-Sekunden-Schreibweise anzugeben.

   (b) Zu welcher Zeit t_0 zwischen 13:00 und 14:00 bilden der große und der kleine Zeiger einer Uhr einen gestreckten Winkel? Zeichne eine Überlegungsfigur und wähle als Variable die Zahl x der Minuten nach 13:00. Welchen Winkel α schließt der kleine Zeiger zu dieser Zeit t_0 mit der „Null-Uhr-Linie“ ein?

Lösung: (a)

	1 h	1 min	1 s
großer Zeiger	360°	6°	$0{,}1^\circ = 6'$
kleier Zeiger	30°	$0{,}5^\circ = 30'$	$0{,}5' = 30''$

(b) $\underbrace{x \cdot 6^\circ}_{\beta} - \underbrace{(30^\circ + x \cdot 0{,}5^\circ)}_{\alpha} = 180^\circ$



$x \cdot 5{,}5^\circ = 210^\circ$

$x = \frac{210^\circ}{5{,}5^\circ} = \frac{420}{11} = 38\frac{2}{11} = 38{,}\overline{18} \quad \Longrightarrow$

$\frac{2}{11}\,\text{min} = \frac{120}{11}\,\text{s} = 10\frac{10}{11}\,\text{s} = 10{,}\overline{90}\,\text{s}$

$t_0 = 13 : 38 : 10{,}\overline{90}$

$\alpha = 30^\circ + 38\tfrac{2}{11} \cdot 0{,}5^\circ = \left(49\tfrac{1}{11}\right)^\circ = 49{,}\overline{09}^\circ$

4. Zeichne die Zeigerstellungen zu den gefundenen Zeiten:

   (a) Zu welcher Zeit zwischen 06:00 und 07:00 stehen die beiden Zeiger einer Uhr genau übereinander?

   (b) Zu welcher Zeit zwischen 21:00 und 22:00 bilden die beiden Zeiger einer Uhr einen gestreckten Winkel?

   (c) Zu welchen Zeiten zwischen 14:00 und 15:00 schließen die beiden Zeiger einer Uhr einen 50°-Winkel ein?

   (d) Zu welchen Zeiten zwischen 08:00 und 09:00 schließen die beiden Zeiger einer Uhr einen 20°-Winkel ein?

Lösung: t bezeichnet im Folgenden die Zahl der Minuten nach der vollen Stunde.

(a) $180^\circ + t \cdot 0{,}5^\circ = t \cdot 6^\circ, \quad t = \frac{180^\circ}{5{,}5^\circ} = 32{,}\overline{72} \quad \Longrightarrow \quad 6\,\text{h}\,32\,\text{min}\,43{,}\overline{63}\,\text{s}$

(b) $270^\circ + t \cdot 0{,}5^\circ - t \cdot 6^\circ = 180^\circ, \quad t = \frac{90^\circ}{5{,}5^\circ} = 16{,}\overline{36} \quad \Longrightarrow \quad 21\,\text{h}\,16\,\text{min}\,21{,}\overline{81}\,\text{s}$

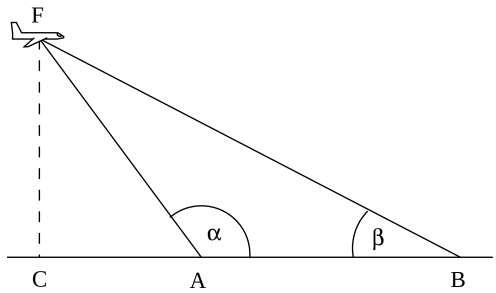
(c) $60° + t \cdot 0{,}5° - t \cdot 6° = 50°, \quad t = \dfrac{10°}{5{,}5°} = 1{,}\overline{81} \quad \Longrightarrow \quad 2\,\text{h}\,1\,\text{min}\,49{,}\overline{09}\,\text{s}$

$t \cdot 6° - 60° - t \cdot 0{,}5° = 50°, \quad t = \dfrac{110°}{5{,}5°} = 20 \quad \Longrightarrow \quad 2\,\text{h}\,20\,\text{min}$

(d) $240° + t \cdot 0{,}5° - t \cdot 6° = 20°, \quad t = \dfrac{220°}{5{,}5°} = 40 \quad \Longrightarrow \quad 8\,\text{h}\,40\,\text{min}$

$t \cdot 6° - 240° - t \cdot 0{,}5° = 20°, \quad t = \dfrac{260°}{5{,}5°} = 47{,}\overline{27} \quad \Longrightarrow \quad 8\,\text{h}\,47\,\text{min}\,16{,}\overline{36}\,\text{s}$

5. Das Flugzeug F wird von zwei Radarstationen A und B aus angepeilt. Dabei werden die Winkel $\alpha = 131°$ und $\beta = 25°$ gemesen. Die Entfernung der beiden Stationen ist $\overline{\text{AB}} = 12{,}5\,\text{km}$. Das Flugzeug bewegt sich in gleich bleibender Höhe mit der Geschwindigkeit $v = 1700\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.



(a) Konstruiere die Lage des Flugzeugs in einem Koordinatensystem (Einheit 1 cm), in dem die Radarstationen durch A(5|0) und B(10|0) gegeben sind. Welcher Maßstab wird verwendet?

(b) In welcher Höhe h fliegt die Maschine?

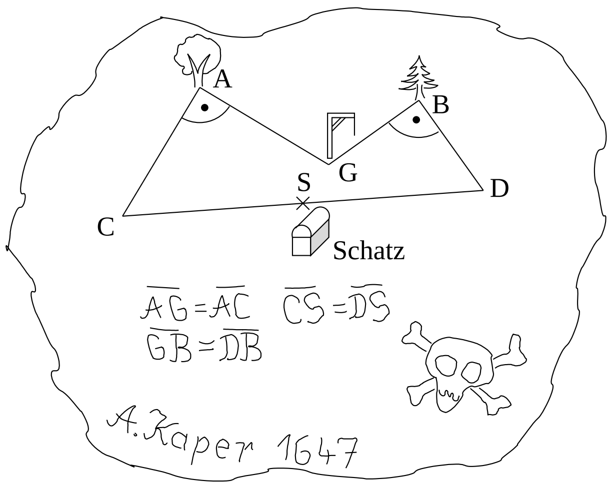
(c) Wie lange dauert es, bis sich F genau senkrecht über der Station A befindet?

Lösung: (a) Maßstab 1:250 000, d.h. $1\,\text{cm} \mathrel{\widehat{=}} 2{,}5\,\text{km}$

(b) $h = \overline{\text{CF}} = 3{,}9\,\text{cm} \mathrel{\widehat{=}} 9{,}8\,\text{km}$

(c) $\overline{\text{AC}} = 3{,}4\,\text{cm} \mathrel{\widehat{=}} 8{,}5\,\text{km} \quad \Longrightarrow \quad t = \dfrac{8{,}5\,\text{km}}{1700\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}005\,\text{h} = 18\,\text{s}$

6. Ein Seemann sucht nach nebenstehender Karte den Schatz des berüchtigten Piraten Adalbert Kaper auf der Totenkopfinsel, doch zu seinem Leidwesen ist vom Galgen keine Spur mehr zu finden. In seiner Verzweiflung nimmt er einfach den Ort an dem er gerade steht, als Punkt C an und sucht nach den Angaben der Karte den Punkt S, an dem der Schatz vergraben ist. Nach-



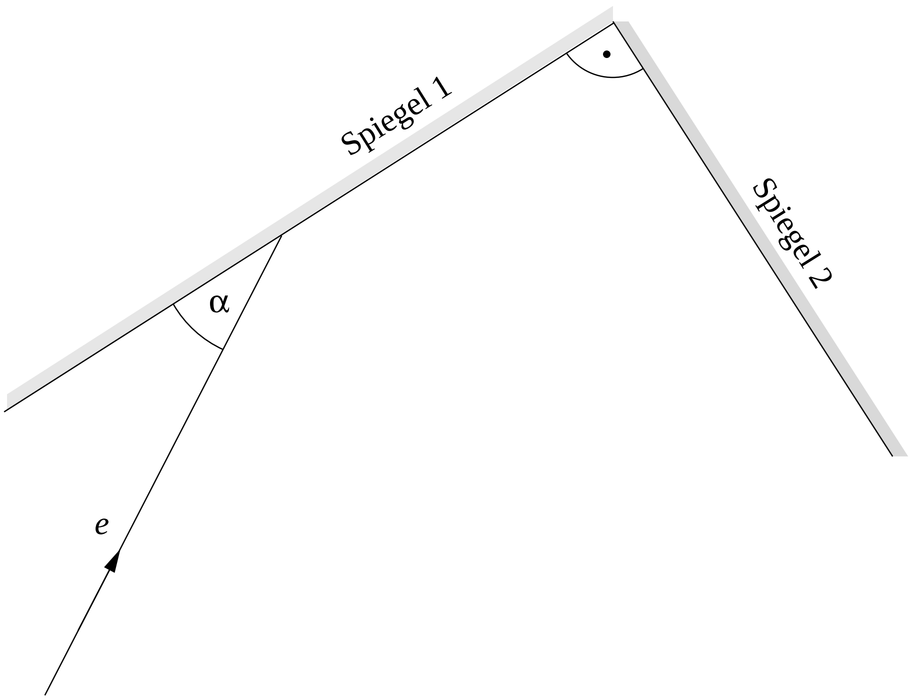
dem er zwei Stunden gegraben hat, hört man ein Freudengeheul - er hat den Schatz gefunden.

So, jetzt bist du der Seemann, die Heftseite ist die Totenkopfinsel un die Bäume wachsen an den Orten A(5|5) und B(9|8). Nimm drei verschiedene Orte für die Lage des Galgens an und konstruiere jeweils den Punkt S. Viel Glück bei der Schatzsuche!

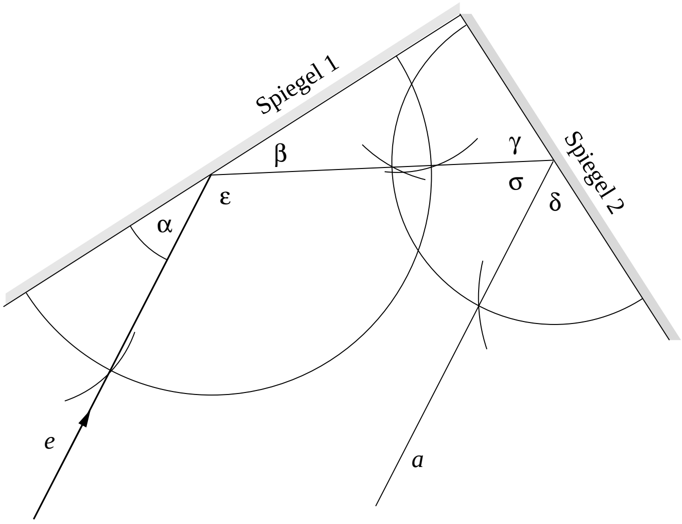
Lösung: Für jeden beliebigen Ort G erhält man den gleichen Punkt S (8,5|4,5).

S liegt auf der Mittelsenkrechten von [AB] und hat von AB den Abstand $\frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{AB}}$.

7. Die Abbildung zeigt einen Winkelspiegel, bei dem zwei Spiegel senkrecht zueinander angeordnet sind. Ein Lichtstrahl e fällt unter dem Winkel $\alpha = 30°$ auf den Spiegel 1 und wird nacheinander an den beiden Spiegeln reflektiert.
   (a) Konstruiere den weiteren Verlauf des Lichtstrahls.
   (b) Beweise durch eine ausführliche Rechnung und unter Angabe der jeweils verwendeten Winkelsätze, dass der aus dem Winkelspiegel auslaufende Strahl a zum einfallenden Strahl e parallel ist.



Lösung: (a)



(b) $\beta = \alpha = 30°$ (Reflexion)
$\gamma = 180° - 90° - 30° = 60°$ (Winkelsumme im Dreieck)
$\delta = \gamma = 60°$ (Reflexion)
$\varepsilon = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$ (gestreckter Winkel)
$\sigma = 180° - 2 \cdot 60° = 60°$ (gestreckter Winkel)
$\varepsilon + \sigma = 120° + 60° = 180° \quad \Longrightarrow \quad a \| e$ (Nachbarwinkel)

8. Vom Dreieck △ABC ist bekannt:
   - $a = b = 8\,\text{cm}$
   - Der Mittelpunkt M der Seite [AB] hat von BC den Abstand $d = 3\,\text{cm}$

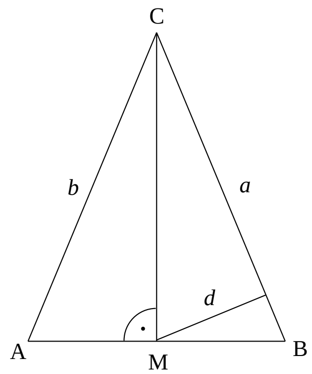
   (a) Erstelle eine Überlegungsfigur! Erkläre und begründe die wesentlichen Schritte zur Konstruktion des Dreiecks △ABC.

   (b) Konstruiere das Dreieck △ABC.

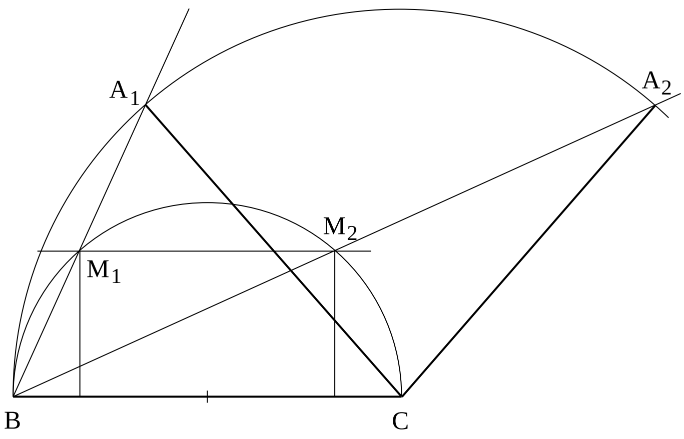
   (c) Untersuche die Lösbarkeit der Aufgabe in Abhängigkeit von d.

Lösung: (a) Im gleichschenkligen Dreieck ist die Seitenhalbierende der Basis zugleich Höhe auf die Basis. M liegt also auf dem Thaleskreis über [BC] und auf der Parallelen zu BC im Abstand d.

A liegt auf BM und auf k(C; $r = a$)



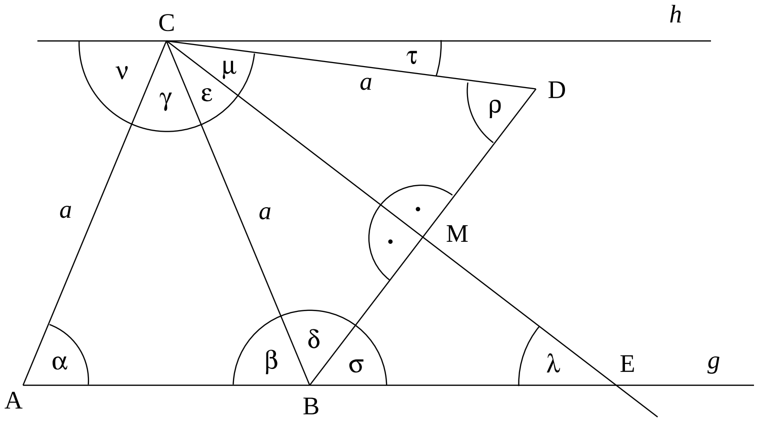
(b)



(c)

$0 < d < 4\,\text{cm}$	:	2 Lösungen
$d = 4\,\text{cm}$	:	1 Lösung
$d > 4\,\text{cm}$	:	keine Lösung

9. In folgender Abbildung gilt $\overline{\text{AC}} = \overline{\text{BC}} = \overline{\text{BD}} = \overline{\text{DC}} = a$, $g \| h$, $\sphericalangle\text{CMB} = \sphericalangle\text{DMC} = 90°$ und $\alpha = 70°$.



(a) Berechne in nachvollziehbarer Weise (mit Begründungen) die Winkel τ und λ.

(b) Warum gilt $\overline{\text{BM}} = \overline{\text{MD}}$?

Lösung: (a)

$\overline{\text{AC}} = \overline{\text{BC}}$	$\Longrightarrow$	$\beta = \alpha = 70°$ (Basiswinkel)
$\triangle$BDC gleichseitig	$\Longrightarrow$	$\delta = \rho = \varepsilon + \mu = 60°$
gestreckter Winkel	$\Longrightarrow$	$\sigma = 180° - \beta - \delta = 50°$
Außenwinkel	$\Longrightarrow$	$\lambda = 90° - \sigma = 40°$
Z-Winkel	$\Longrightarrow$	$\varepsilon + \mu + \tau = \beta \Longrightarrow \tau = \beta - 60° = 10°$

(b)

$$\left.\begin{array}{r} \overline{\text{CM}} = \overline{\text{CM}} \\ \delta = \rho \\ \sphericalangle\text{CMB} = \sphericalangle\text{DMC} = 90° \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow \triangle\text{BMC} \cong \triangle\text{DMC}\,(\text{wws}) \\ \Longrightarrow \overline{\text{BM}} = \overline{\text{MD}} \end{array}$$

Teil II.

Alter Lehrplan G9 - Algebra

8. Erweiterung des Zahlenbereichs: die rationalen Zahlen

8.1. Negative Zahlen

1. Ordne folgende Zahlen in einer Ungleichungskette
   (a) $0,\overline{3};\quad -0,\overline{3};\quad \frac{8}{25};\quad -\frac{8}{25};\quad -\frac{17}{50};\quad 0$
   (b) $\left|-\frac{11}{10}\right|;\quad -\frac{7}{6};\ \frac{7}{6};\quad 0{,}9;\quad -\frac{16}{15}$
   (c) $0\ ;\ \ \frac{7}{30}\ ;\ \ \frac{15}{66}\ ;\ \ -\frac{7}{30}\ ;\ \ -\frac{15}{66}\ ;\ \ -\frac{41}{180}\ ;\ \ -0{,}2$

Lösung: (a) $-\frac{17}{50} < -0,\overline{3} < -\frac{8}{25} < 0 < \frac{8}{25} < 0,\overline{3}$
(b) $-\frac{7}{6} < -\frac{16}{15} < 0{,}9 < \left|-\frac{11}{10}\right| < \frac{7}{6}$
(c) $-\frac{7}{30} < -\frac{41}{180} < -\frac{15}{66} < -0{,}2 < 0 < \frac{15}{66} < \frac{7}{30}$

2. Bestimme die Mitte folgender Zahlen am Zahlenstrahl:
   (a) $-2\frac{3}{4}$ und 2 (b) $-2\frac{2}{3}$ und $-\frac{2}{3}$

Lösung: (a) $-\frac{3}{8}$ (b) $-1\frac{2}{3}$

3. Welche Zahl liegt auf dem Zahlenstrahl in der Mitte von
   (a) -4 und $3\frac{1}{2}$ (b) -5 und $4\frac{1}{2}$ (c) $-\frac{8}{7}$ und $-\frac{4}{28}$ (d) $-\frac{4}{7}$ und $-\frac{2}{28}$?

Lösung: (a) $-\frac{1}{4}$ (b) $-\frac{1}{4}$ (c) $-\frac{9}{14}$ (d) $-\frac{9}{28}$

8.2. Grundrechenarten mit rationalen Zahlen

1. Kopfrechenserie „Bunte Mischung“

$1\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3} + \frac{3}{5}$	$0{,}6^2 - 0{,}3^2$
kgV(12,16)	$\frac{21}{16} : 7$	3% von 240 € sind? €
Umfang eines Rechtecks mit Länge $\frac{1}{2}$ m und Breite $\frac{2}{3}$ m	$1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{5}$	$2{,}3456 \cdot 7 - 0{,}3456 \cdot 7$
Länge eines Rechtecks mit Fläche 1 m² und Breite 8 dm	$(4 \cdot \frac{13}{19}) \cdot \frac{1}{4}$	0,03:0,2
$0,\overline{3} \cdot 0,\overline{4}$	Richtig oder falsch? $\frac{1}{7} = \overline{0{,}1428576}$	? % von 150 € sind 12 €

Quelle: Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur, ISB 2001

Lösung:

$4\frac{1}{6}$	$1\frac{4}{15}$	0,27
48	$\frac{3}{16}$	7,20 €
$2\frac{1}{3}$ m	3	14
12,5 dm	$\frac{13}{19}$	0,15
$\frac{4}{27}$	Falsch	8%

2. Kopfrechenserie „Bunte Mischung“

$4{,}8 \cdot \frac{1}{3}$	$(1999 \cdot 1116) \cdot (7 - \frac{56}{8})$	$(7{,}34 + \frac{5}{6}) + (1{,}66 + 2\frac{1}{6})$
ggT(42,78)	$3\frac{\text{m}}{\text{s}} = ?\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$	5% von ? € sind 40 €
Seitenlänge eines Quadrat der Fläche $\frac{64}{225}$ m²	$0{,}2 : 0{,}4 - 0{,}2 \cdot 0{,}4$	$0{,}0025 \cdot 80000$
$5\frac{3}{4} \cdot 6$	$0{,}085\,\text{m}^2 = ?\,\text{cm}^2$	$\frac{4}{5} : \frac{2}{15}$
$1,\overline{2} \cdot 6,\overline{7}$	Richtig oder falsch? $\frac{5}{4} < \frac{11}{9}$	16% von 298 € sind ungefähr

Quelle: Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur, ISB 2001

Lösung:

1,6	0	12
6	$10{,}8\frac{\text{km}}{\text{h}}$	800 €
$\frac{8}{15}$ m	0,42	200
$34\frac{1}{2}$	850 cm²	6
$8\frac{23}{81}$	Falsch	48 €

3. Berechne der Reihe nach:
   a) $(7 - 15) + 55$ b) $(78 - 150) + 55$
   c) $(-11) + (85) + (-36)$ d) $(-10) + (85) + (-40)$

Lösung: (a) 47, (b) −17, (c) 38, (d) 35

4. Berechne:
   (a) $-1\frac{1}{5} + (-0{,}8) + (-2)$
   (b) $(-3{,}5) - [(7 - 8{,}5) \ - (+5)]$
   (c) $\left(+\frac{5}{8}\right) - \left[\left(-\frac{1}{8}\right) - \left(+\frac{3}{4}\right)\right]$
   (d) $(+2{,}8) - (-1\frac{1}{15}) - (+\frac{2}{3}) + (-1\frac{1}{6}) - |3 - | - 7||$
   (e) $-\frac{1}{3} - \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{7}{8}\right) - (-1)$

Lösung: (a) -4 (b) 3 (c) $1\frac{1}{2}$ (d) $-1\frac{29}{30}$ (e) $-\frac{7}{24}$

5. Berechne möglichst geschickt: $-7{,}2 - 6,\overline{6} + 3 - (-7\frac{2}{3}) + (-3\frac{4}{5})$

Lösung: $-6{,}\overline{6} - (-7\frac{2}{3}) + (-3\frac{4}{5}) - 7{,}2 + 3 = -7$

6. Multipliziere aus und fasse zusammen:

$$\frac{(-10)^2 : (2\frac{13}{15} - 6\frac{1}{5})}{(-1)^3 - (-2)^2}$$

Lösung: 6

7. Berechne:

a)	$(-0{,}3) \cdot (+0{,}8)$	b)	$(-0{,}4) \cdot (+0{,}7)$	c)	$\left(-\frac{4}{5}\right)^2$
d)	$\left(-\frac{3}{7}\right)^2$	e)	$\left(-\frac{4}{21}\right) \cdot \left(-\frac{7}{8}\right)$	f)	$\left(-\frac{8}{27}\right) \cdot \left(-\frac{9}{16}\right)$

Lösung:

a)	$-0{,}24$	b)	$-0{,}28$	c)	$\frac{16}{25}$
d)	$\frac{9}{49}$	e)	$\frac{1}{6}$	f)	$\frac{1}{6}$

8. Berechne:
   (a) $36{,}875 + (-43\frac{1}{8})$
   (b) $(-43{,}7) + (-26\frac{1}{5})$
   (c) $89,\bar{6} + (34\frac{2}{3} - 76,\bar{3})$

Lösung: (a) $-6{,}25$ (b) $-69{,}9$ (c) 48

9. Berechne: $(-5) \cdot (-3) \cdot 2 - (-\frac{2}{3}) \cdot 30$

Lösung: 50

10. Berechne
$$[(-3)^2 \cdot 5 - 5] : [(-2)^5 : (+8) - 8]$$

Lösung: $-3\frac{1}{3}$

11. Berechne den Wert folgender Terme:

a) $\dfrac{(-51) \cdot (+121) \cdot (-144)}{(-66) \cdot (-84) \cdot 136}$ b) $3\dfrac{1}{4} - \left(-4\dfrac{1}{5}\right) \cdot \left(-\dfrac{5}{7}\right) + \left(-\dfrac{2}{3}\right) \cdot 18$

c) $\dfrac{(-84) \cdot (-66) \cdot 136}{(-51) \cdot (+121) \cdot (-144)}$ d) $(-0{,}84) : 0{,}12 - \left(-1\dfrac{3}{4}\right) : \left(-3\dfrac{3}{7}\right)$

Lösung: (a) $1\frac{5}{28}$ (b) $-11\frac{3}{4}$ (c) $\frac{28}{33}$ (d) $-7\frac{49}{96}$

12. Berechne geschickt!

(a) $-0,3 + 317 - 16,7$

(b) $8,3 - 4,7 + 1,7 - 1,3$

(c) $3,25 - (-160) + (-3\frac{1}{4})$

(d) $\frac{4}{9} - (0,\overline{44} + 16,3) + (-3,7 + 30)$

(e) $13 - (-8\frac{1}{3} + 24,5) + (-\frac{1}{3}) - 25\frac{1}{2}$

(f) $-15\frac{4}{7} + (-7,6 + 3\frac{4}{7}) + (-2\frac{2}{5} - 88)$

(g) $-5,8 + (-14\frac{1}{5} + 73,25) - (3\frac{1}{4} - 50)$

Lösung:
(a) 300 (b) 4 (c) 160
(d) 10 (e) -29 (f) -110
(g) 100

13. Berechne: (a) $|-9| - |10|$ (b) $|3{,}5 - 8| + |6 - 3| - 7$

Lösung: (a) -1 (b) 0,5

14. Berechne: (a) $||-6| - |-9||$ (b) $|6 - |2 - 14| + |10 - 13||$

Lösung: (a) 3 (b) 3

15. Berechne: $||210 - 712| - 621|$

Lösung: 119

16. Berechne: (a) $-1\frac{1}{5} + (-0{,}8) + |-2|$ (b) $\big|\, |7 - 8{,}5| \; + (-5) + (-3{,}5) \,\big|$

Lösung: (a) 0 (b) -7

17. Berechne:
    (a) $-1\frac{1}{4} + (-0{,}75) + |3 - 5| + \frac{1}{8} + 1{,}375$
    (b) $\big|\, 2 - \frac{3}{2} - \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right| \big|$
    (c) $(+\frac{3}{4}) - (-\frac{1}{8}) - (+\frac{5}{8})$

Lösung: (a) 1,5 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$

18. Gegeben sind die Brüche $-\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $+\frac{1}{3}$ und $+\frac{2}{3}$. Aus ihnen sind alle möglichen Dreierkombinationen zu bilden, wobei die einzelnen Brüche auch mehrfach vorkommen können. Wie viele dieser Kombinationen haben ganzzahlige Summen?

    Hinweis: Baryonen wie Protonen und Neutronen sind aus drei Quarks zusammengesetzt. Quarks tragen folgende Bruchteile der Elementarladung:

    $$-\frac{2}{3}, \qquad -\frac{1}{3}, \qquad +\frac{1}{3}, \qquad +\frac{2}{3}$$

    Quarks kommen in der Natur nicht als einzelne Teilchen vor, sondern nur in Kombinationen, die ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung ergeben.

    Literatur: Wiederholen als bewusstes Unterrichtselement, Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung München, 2000

Lösung: Es gibt zwanzig Kombinationen, davon acht mit ganzzahlige Summen:
$-\frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$, $+\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$, $+\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}$, $+\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$, $+\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

9. Ungleichungen

9.1. Lösen linearer Ungleichungen

1. Bestimme für folgende Ungleichungen die Lösungsmenge ($G = \mathbb{Q}$):
   (a) $2x(3-x) - 3x^2 \geq 5x(2-x) + 3(x-27)$
   (b) $(3-x)2x + (5+7x) \cdot 3 \leq x^2 - 3x(x+2)$
   (c) $\left(7x - \frac{1}{2}\right) 4x - 3x^2 \leq (5x+11)^2 + 7(x-13)$

Lösung: (a) $L =]-\infty; 11\frac{4}{7}[$ (b) $L =]-\infty; -\frac{5}{11}[$ (c) $L =]-\frac{30}{119}; \infty[$

2. Bestimme die Lösungsmenge folgender Ungleichung ($G = \mathbb{Q}$):

$$2x(3-x) + (5+7x) \cdot 3 \geq x^2 - (x+2)3x$$

Lösung: $L = [-\frac{5}{11}; \infty[$

3. Bestimme die Lösungsmenge folgender Ungleichung ($G = \mathbb{Q}$):

$$2x(3-x) + (5+7x) \cdot 3 \geq x^2 - (x+2)3x$$

Lösung: $L = [-\frac{5}{11}; \infty[$