SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Jahrgangsstufe 5 (Gymnasium)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

7. Januar 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Weiterentwicklung der Zahlvorstellung

1.1 Die natürlichen Zahlen

1.1.1 Menge der natürlichen Zahlen, Zahlenstrahl

1. (a) 129

   (b) Quersumme einer vierstelligen Zahl kann höchstens $9+9+9+9=36$ sein.

2. In der Klasse sind 12 Jungen, 14 Mädchen, also 26 Schüler. Jutta und Klaus erhalten jeweils 13 Stimmen. Es kommt bei dieser Wahl zu keiner Entscheidung!

3. Es gibt 50 ungerade Zahlen, d.h. 25 Paare ungerader Zahlen.
   $1+3+5+\cdots+99=(1+99)+(3+97)+\cdots+(49+51)=100\cdot 25=2500$

4.

Vorgänger	114	898 989	8998	1 519 899
Zahl	115	898 990	8999	1 519 900
Nachfolger	116	898 991	9000	1 519 901

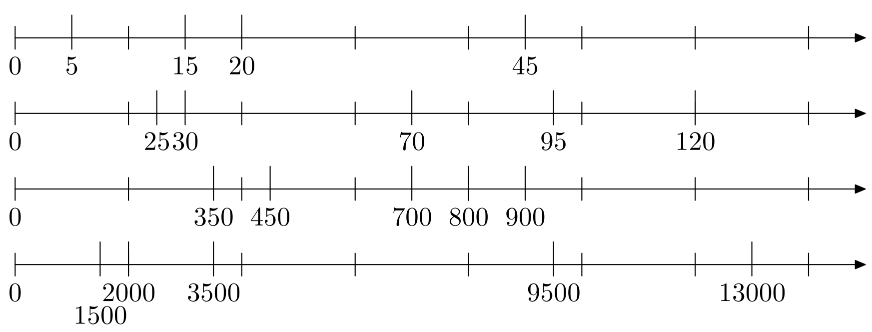
5. Zahlen erst auf Tausender runden und dann eintragen!

6. Zahlen erst auf Zehntausender runden und dann eintragen!

7.

8. 91 und 95

9.



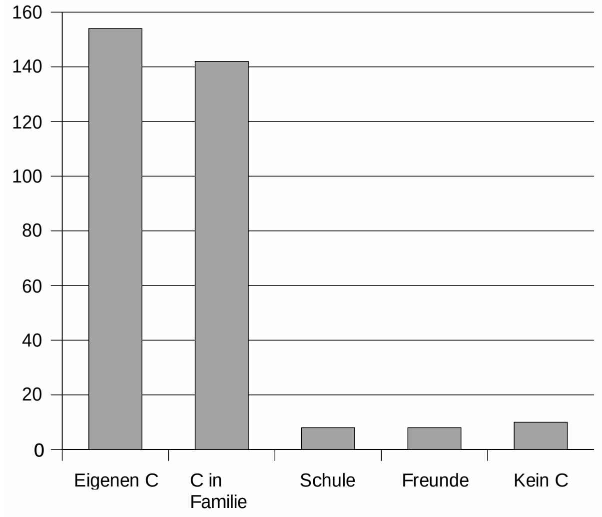
10. (a) -1 (b) -9 (c) -5
    (d) -25 (e) -90 (f) $2\,250$

11. Z. B. $1 \mathrel{\widehat{=}} 2\,\mathrm{mm}$ oder $7 \mathrel{\widehat{=}} 1\,\mathrm{cm}$

1.1.2 Diagramme

1.

2. Diagramm:

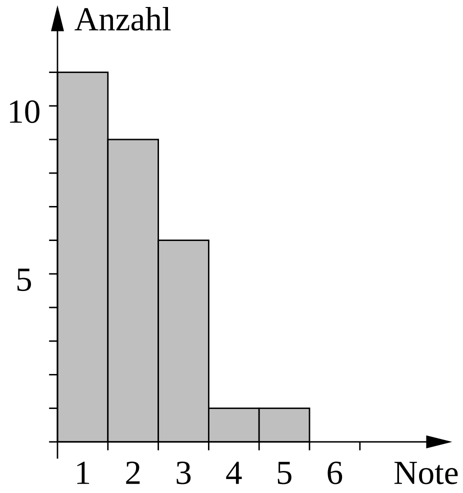


3. (a) Es wurden $35\,\mathrm{l}$ getankt.
   (b) $70\,\mathrm{l}$

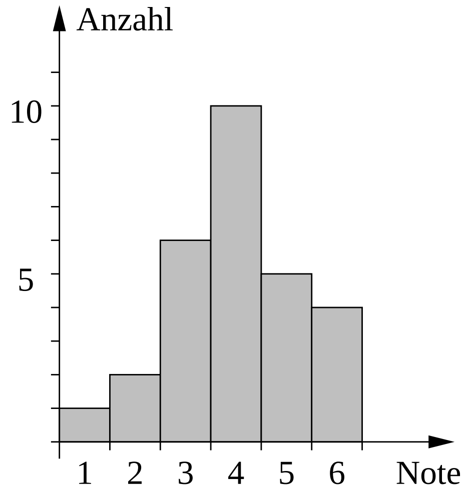
4. $2 \cdot (40\,\mathrm{mm} \cdot 32\,\mathrm{mm} + 40\,\mathrm{mm} \cdot 25\,\mathrm{mm} + 32\,\mathrm{mm} \cdot 25\,\mathrm{mm}) =$
   $6160\,\mathrm{mm}^2 = 61\,\mathrm{cm}^2\,60\,\mathrm{mm}^2$

5. 2002 betrug der Verlust 40 Mill. Euro, 2003 der Gewinn aber nur 2,5 Mill. Euro.

6.



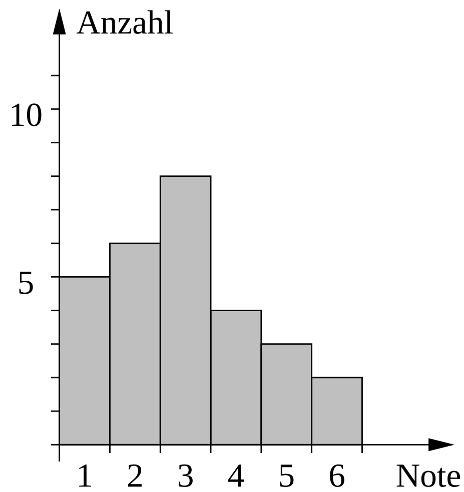
(a) Durchschnittsnote:
$(11{\cdot}1+9{\cdot}2+6{\cdot}3+1{\cdot}4+1{\cdot}5) : 28 = 2$



(b) Durchschnittsnote:
$(1{\cdot}1+2{\cdot}2+6{\cdot}3+10{\cdot}4+5{\cdot}5+4{\cdot}6) : 28 = 4$

(c) Ausgangspunkt ist die Verteilung mit 28 mal Note 3. Zweimal Note 3 kann man durch einmal 1 und einmal 5 oder durch einmal 2 und einmal 4 ersetzen. Man kann auch dreimal 3 durch zweimal 4 und einmal 1 oder durch einmal 1, einmal 2 und einmal 6 ersetzen.

1	2	3	4	5	6
0	0	28	0	0	0
1	0	26	0	1	0
1	1	24	1	1	0
2	2	21	1	1	1
4	2	17	1	3	1
4	5	11	4	3	1
5	6	8	4	3	2



Probe:
$(5{\cdot}1+6{\cdot}2+8{\cdot}3+4{\cdot}4+3{\cdot}5+2{\cdot}6) : 28 = 3$

1.1.3 Zehnersystem

1. (a) 9888
   (b) 9998
   (c) 9876
   (d) 1023

1.1.4 Römische Zahlen

1. (a) 100 (b) XVI

2. CMCCIII: C vor und nach M
   VMIII: V darf nicht vorgestellt werden

3. CCCLXXXIX, MCDXCIX, CCXCIX, MMCDXCIX

4. (a) CXCIX (199), DCXLIX (649), MDCCCIX (1809)
   (b) CCLXXI (271), DCCCX (810), MCCCLX (1360)
   (c) CXVIII (118), MCIII (1103), MDCCXLVIII (1748)
   (d) CLXXII (172), DCXCIII (693), MCCLXXXII (1282)
   (e) CCVI (206), MCCXLVI (1246) , MMDCCLXVI (2766)

5. (a) XVIII, DLX, CCXLIX, MMMCMXLV, MMD
   (b) 2887, 3204, 29, 99, 1144, 944

6. (a) XII<XXIV< 56
   (b) C< 999 <M

1.1.5 Große natürliche Zahlen

1. (a) ca. 200 Milliarden Euro
   (b) ungefähr 20%

2. Quelle: Herget/Scholz: Die etwas andere Aufgabe, S. 76
   (a) Kaffeebohne: Länge: ca. 10 mm; Breite: ca. 7 mm; Höhe: ca. 4 mm. Dies entspricht einem rechnerischen Volumen von 280 mm^3. Abschätzung durch 100 mm^3. Also gilt für das Volumen V von einer Trillion gemahlener Kaffeebohnen: $V \approx 1 Trillion 100\,\mathrm{mm}^3 = 10^{18} \cdot 10^{-6}\,\mathrm{km}^3 = 100\,\mathrm{km}^3$
   (b) Beispiel einer Lagerhalle: Länge = Breite = 10 km, Höhe = 1 km. Eine Halle dieses Volumens gibt es auf der Erde sicher nicht.
   (c) Masse einer Kaffeebohne: ca. 0,1 g. Also enthält ein Pfund (500 g) ca. 5000 Kaffeebohnen. Bei 24.800 Paletten à 60 Kartons à 12 Päckchen zu 500 g können maximal $24800 \cdot 60 \cdot 12.5000 = 8,928 \cdot 101^0 \approx 10^{11}$, also 100 Milliarden Kaffeebohnen gelagert werden.

(d) Für den Faktor f, der das Verhältnis von angeblicher Anzahl und maximaler Anzahl von Kaffeebohnen in der Lagerhalle angibt, gilt ungefähr: $f \approx \frac{10^{18}}{10^{11}} = 10^7 = 10\,Millionen.$
Im Depot lagert also nur der zehnmillionste Teil.

(e) Der Verfasser wollte wohl ausdrucken, dass eine sehr große (unvorstellbar große) Anzahl von Kaffeebohnen im Depot lagert, hat aber den Realitätsgehalt seiner Aussage nicht geprüft.

3. 9 460 895 221 000 000 m

4. 10 Quadrilliarden 888 Quadrillionen 869 Trilliarden 450 Trillionen 418 Billiarden 352 Billionen 160 Milliarden 768 Millionen

5. (a) zwölf Billiarden acht Milliarden siebenundfünfzig Millionen zwanzigtausendzehn
   (b) 10 000 000 015 087
   (c) elf Billiarden acht Milliarden fünfhundertsieben Millionen zwanzigtausenddreißig
   (d) 9 000 000 050 087
   (e) dreißig Billionen achtundachzig Milliarden zweihundertsieben Millionen zwölftausenddreißig
   (f) 7 000 000 010 015 007
   (g) neunzig Billionen zwanzig Millionen und dreißig

6. (a) 7030300000000
   (b) 804532

7. 10 000 000, zehn Millionen
5 000 000 000, fünf Milliarden
3 000 000, drei Millionen
777 000 000, siebenhundertsiebenundsiebzig Millionen

8. 8 000 000 000 000 020 000 000 000 000 300 000 000 000 000 002 000 000

9. (a) 30 000 500 020 000 004 000 000
   (b) 10 Trilliarden 20 Billiarden 3 Billionen 400 Milliarden 50 Tausend
   (c) 999 999 999 999 000 = 999 Billionen 999 Milliarden 999 Millionen 999 Tausend

10. (a) 60 000 000 005 000 000 400 050 000 003

(b) 10 Quadrillionen 203 Trilliarden 34 Trillionen 5 Billiarden 600 Billionen 70 Milliarden 890 Millionen 4 Tausend 78

11. (a) 999 990 000 000 000 = 999 Billionen 990 Milliarden
    (b) 999 900 020 000 000 000 = 999 Billiarden 900 Billionen 20 Milliarden

12. (a) 885510, 105588
    (b) 885510, 885501, 105588, 105885
    (c) 4412181730, 1730182414
    (d) 99999090990900, 90090909990999

13. (a) 9552171040
    (b) 1040175259
    (c) mehrere Möglichkeiten, z. B. 9552171040
    (d) 1040175
    (e) 95521040
    (f) 9521040
    (g) 1705259
    (h) 1040175
    (i) 9552104017

14. (a) 100 000 mal (b) 12 mal

15. (a) 300 000 050 002 000 400 000 000
    (b) 10 Trilliarden 20 Billiarden 3 Billionen 400 Milliarden 50 Tausend
    (c) 100 000 000 mal

16. (a) 550 007 200 000 040 000 000
    (b) 200 Trilliarden 30 Trillionen 500 Billionen 4 Milliarden 600 Tausend
    (c) 10 Milliarden mal

17. (a) 999 999 980 004 000 000 000 =
    = 999 Trillionen 999 Billiarden 980 Billionen 4 Milliarden

(b) 10 Millionen mal

18. (a) sechzig Quintillionen
    (b) $6\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 6 \cdot 10^{24}$
    (c) 10 000 000 mal
    (d) 1 Quadrilliarde $= 10^{27}$; $6 \cdot 10^{31} \cdot 10^{27} = 6 \cdot 10^{58}$
    $54 : 6 = 9 \quad \Longrightarrow \quad 10^{54} = 1$ Nonillion; $\quad 6 \cdot 10^{58} =$ sechzig Nonilliarden

19. 19 999 999 600 000 000 000 000 =
    = 19 Trilliarden 999 Trillionen 999 Billiarden 600 Billionen

20. (a) 20 000 000 800 000 070 000 000
    (b) 450 Trillionen 30 Billionen 7 Milliarden 1 Tausend
    (c) $6 + 15 = 21$ Nullen, 1 Trilliarde

1.1.6 Runden und Abschätzen

1. 500

2. ca. 20cm

3. (a) 760000 (b) 11 km (c) 5 t (d) 29 m
   (e)0 m (f) 10 km (g) 6 t (h) 30 m
   (i) 1 m (j) 759000 (k) 30 m

4. (a) 5730 (Rundungsfehler: 4), 5700 (Rundungsfehler: 34), 6000 (Rundungsfehler: 266), 10000 (Rundungsfehler: 4266)
   (b) $1250 \leq z < 1350$

5. (a) 123 000, (b) 2 000 000, (c) 563 000, (d) 5 000 000, (e) 770 000, (f) 4 870 000

6. (a)

Zahl	gerundet auf Zehner	gerundet auf Hunderter	gerundet auf Tausender	gerundet auf Zehntausender
6854	6850	6900	7000	
15036	15040	15000	15000	20000
1596	1600	1600	2000	
24449	24450	24400	24000	20000

   (b)

(c) i. Die urspüngliche Zahl ist kleiner 1750 und größer gleich 1650.
   ii. Die urspüngliche Zahl ist kleiner 3550 und größer gleich 3450.

7. Hinweis: Zu Erstellung eines geeigneten Diagramms ist es sinnvoll die Mitgliederzahlen zu runden!

8. A) $2984 + 6958 + 12350 = 22292$ (III)
   B) $18665 - 5736 = 12929$ (II)
   C) $8438 + 5621 + 2 = 14061$ (IV)
   D) $23586 - 5436 + 9521 = 27671$ (I)

9. (a) z. B. $1300 + 3000 = 4300$
   (b) z. B. $57000 - 10000 = 47000$
   (c) z. B. $21000 : 30 = 700$
   (d) z. B. $500 \cdot 100 = 50000$

10. (a) $\{6950\,, 6951\,, \ldots\,, 7049\}$
    (b) mindestens 79 750 000, höchstens 80 249 999

11. (a) $\{59\,500\,, 59\,501\,, \ldots\,, 60\,499\}$
    (b) mindestens 10 975 000, höchstens 11 024 999

12. Bei dieser Aufgabe sind mehrere Lösungen mit einer entsprechenden Begründung möglich:
    11000: 10823 runden auf Tausender
    10000: 10823 runden auf Zehntausender
    10823: man kennt die Zuschauerzahl genau

13. (a) 69 500, 69 501, ... 70 499
    (b) mindestens 799 750 000, höchstens 800 249 999

14. mindestens 19 950 000, höchstens 20 049 999

15. (a) z. B. $130000 + 470000 = 600000$, 601410, 1410
    (b) i. Wert der Summe wird um 123 größer, also 601533.
       ii. Wert der Summe wird um 321 kleiner, also 601089.

iii. Wert der Summe wird um den Wert des ersten Summanden größer, also 733845.

16. (a) z. B. $35000 - 23000 = 12000$, 12082, 82

(b) i. Wert der Differenz wird um 7564 größer, also 4518.

ii. Wert der Differenz wird um 2421 größer, also 14503.

iii. Wert der Differenz wird um 1221 kleiner, 10861.

iv. Wert der Differenz wird um den Wert des Minuenden größer, also 46753.

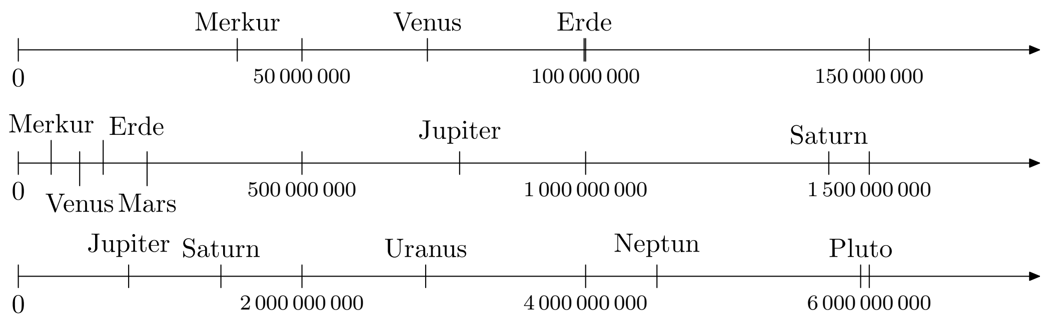
17. (a)

Mein	**V**ater	**er**klärt	**m**ir	**j**eden	**S**onntag	**u**nsere	**n**eun	**P**laneten
Merkur	**V**enus	**E**rde	**M**ars	**J**upiter	**S**aturn	**U**ranus	**N**eptun	**P**luto

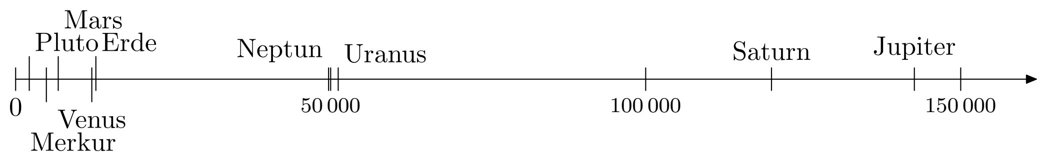
(b)

Planet	Abstand zu Sonne	Durchmesser
Merkur	57 900 000 km	4 900 km
Venus	108 000 000 km	12 000 km
Erde	150 000 000 km	13 000 km
Mars	227 000 000 km	6 800 km
Jupiter	778 000 000 km	140 000 km
Saturn	1430 000 000 km	120 000 km
Uranus	2870 000 000 km	51 000 km
Neptun	4500 000 000 km	50 000 km
Pluto	5940 000 000 km	2 200 km

(c)



(d)



Pluto, Merkur, Mars, Venus, Erde, Neptun, Uranus, Saturn, Jupiter

(e) Die Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen um die Sonne, d. h. ihre Abstände schwanken zwischen einem größten und kleinsten Wert. Der mittlere Abstand ist der Mittelwert des größten und kleinsten Abstands.

(f) Wegen Teilaufgabe (e) ist eine Rechnung nur mit gerundeten Werten sinnvoll!
Venus-Erde:
42 000 000 km, z. B. etwa dreieinhalbfacher Erddurchmesser
258 000 000 km, z. B. etwa Abstand Sonne-Mars
Mars-Erde:
77 000 000 km, z. B. etwa sechseinhalbfacher Erddurchmesser
377 000 000 km, z. B. etwa Abstand Sonne - Mitte der Uranus- und Neptunbahn

18. Z. B. 5000 bzw. 5300, da runden auf Tausender bzw. Hunderter sinnvoll ist.

19. (a) 40 Mio. t
    (b) 60 000 km
    (c) Abweichung nach oben $< 500\,000$ t
    Abweichung nach unten $\leqq 500\,000$ t

20. Mindestens 1 995 000,00 €, höchstens 2 004 999,99 €

1.2 Addition und Subtraktion natürlicher Zahlen

1.2.1 Summe und Differenz natürlicher Zahlen

1. (a) Summe ist durch drei Teilbar
   (b) vier aufeinanderfolgenden Zahlen: Summer durch 2 teilbar
   fünf aufeinanderfolgenden Zahlen: Summer durch 5 teilbar
   sechs aufeinanderfolgenden Zahlen: Summer durch 3 teilbar
   sieben aufeinanderfolgenden Zahlen: Summer durch 7 teilbar
   ...
   n aufeinanderfolgenden Zahlen: Summer durch n teilbar, falls n ungerade und durch $\frac{1}{2}n$ teilbar, falls n gerade

2. Z. B.:

$$
\begin{array}{lll}
0 = 4 + 4 - 4 - 4, & 1 = 4 : 4 + 4 - 4, & 2 = 4 : 4 + 4 : 4, \\
3 = (4 + 4 + 4) : 4, & 4 = (4 - 4) : 4 + 4, & 5 = (4 \cdot 4 + 4) : 4, \\
6 = (4 + 4) : 4 + 4, & 7 = 4 + 4 - 4 : 4, & 8 = 4 + 4 + 4 - 4, \\
9 = 4 + 4 + 4 : 4 & &
\end{array}
$$

3. (a) Für 120 Marken erhält man 15 neue Tafeln, die wiederum 15 Marken liefern. Für 8 Marken erhält man eine weitere Tafel, die wiederum eine Marke liefert. Mit dieser und den 7 verbliebenen Marken bekommt man wieder eine weitere Tafel $\Rightarrow$ 17 Gratistafeln

(b) 2003 Tafeln $\Rightarrow$ 250 Gratistafeln und damit $250 + 3 = 253$ Marken,
253 Marken $\Rightarrow$ 31 Gratistafeln und damit $31 + 5 = 36$ Marken,
36 Marken $\Rightarrow$ 4 Gratistafeln und damit $4 + 4 = 8$ Marken,
8 Marken $\Rightarrow$ 1 Gratistafeln,
also 286

4. $1 + 4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 28 + 32 + 36 = 181$

5. $545 + 5 = 550$

6. (a) Kopf: Zahlen von 10 bis 99, also 90 Zahlen,
Körper: Zahlen von 100 bis 999, also 900 Zahlen $\Rightarrow$
$90 \cdot 900 = 81\,000$ Zahlen

(b) Kopf: 14, 23, 32, 41, 50
Körper:
6 Permutationen der Ziffern in der Zahl 123,
3 Permutationen der Ziffern in der Zahl 114,
Zahlen 222 und 600,
$2 \cdot 5 = 10$ Permutationen der beiden hinteren Ziffern der Zahlen 501, 402, 303, 204, 105
$\Rightarrow$ 21 Körperzahlen
$\Rightarrow 5 \cdot 21 = 105$ Schlangen

(c) mehrere Lösungen, z. B. Schlangen mit Quersumme 2 bei „Kopf- und Körperzahl", Schlangen mit Quersumme 6 bei der „Kopfzahl" und 1 bei der „Körperzahl".

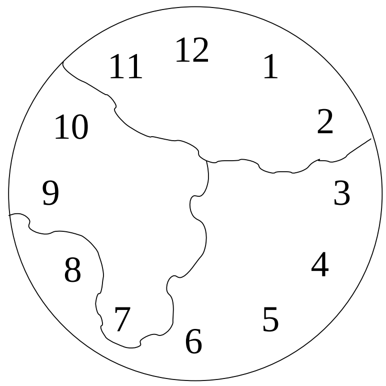
7. (a) Mehrere Möglichkeiten, z. B.:
$12 + 11 + 10 + 6 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 7 - 8 - 9 = 0$
$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 = 78 \Rightarrow$ Summe der Plus- und Minusglieder muss jeweils 39 ergeben. Es gibt immer mindestens 4 und höchstens 8 Plusglieder.

(b) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42 \Rightarrow$ Summe der Plus- und Minusglieder müsste jeweils 21 ergeben, was als Summe gerader Zahlen nicht möglich ist.

(c) $11 + 10 + 9 + 3 - 1 - 2 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 = 0$
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 66 \Rightarrow$ Summe der Plus- und Minusglieder muss jeweils 33 ergeben. Es gibt immer mindestens 4 und höchstens 7 Plusglieder.

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55 \Rightarrow$ Summe der Plus- und Minusglieder müsste jeweils 27,5 ergeben, was als Summe natürlicher Zahlen nicht möglich ist.

(d) Möglich:



8. -1004

9. (a) 6 419 754
   (b) 876 544
   (c) 1 111 111
   (d) 990 420 753 865

10. Es sind jeweils verschiedene Lösungen möglich!
    (a) Z. B. größter Summenwert: $97531+86420 = 183951$, $96531+87420 = 183951$, $87530+96421 = 183951$
    z. B. kleinster Summenwert: $13579+20468 = 34047$, $10579+23468 = 34047$, $13468+20579 = 34047$
    (b) größte Differenz: $987654321 - 0 = 987654321$
    kleinste Differenz: $50123 - 49876 = 247$
    (c) größter Wert: $98765432 + 1 - 0 = 98765433$
    kleinster Wert: Bis auf Umstellungen gibt es 84 verschiedene Lösungen mit dem Ergebnis 0:

$$
\begin{array}{lll}
264 + 789 - 1053 = 0, & 284 + 769 - 1053 = 0, & 246 + 789 - 1035 = 0 \\
286 + 749 - 1035 = 0, & 269 + 784 - 1053 = 0, & 289 + 764 - 1053 = 0 \\
249 + 786 - 1035 = 0, & 289 + 746 - 1035 = 0, & 342 + 756 - 1098 = 0 \\
352 + 746 - 1098 = 0, & 324 + 765 - 1089 = 0, & 364 + 725 - 1089 = 0 \\
325 + 764 - 1089 = 0, & 365 + 724 - 1089 = 0, & 346 + 752 - 1098 = 0 \\
356 + 742 - 1098 = 0, & 347 + 859 - 1206 = 0, & 357 + 849 - 1206 = 0 \\
349 + 857 - 1206 = 0, & 359 + 847 - 1206 = 0, & 473 + 589 - 1062 = 0 \\
483 + 579 - 1062 = 0, & 437 + 589 - 1026 = 0, & 487 + 539 - 1026 = 0 \\
479 + 583 - 1062 = 0, & 489 + 573 - 1062 = 0, & 439 + 587 - 1026 = 0 \\
489 + 537 - 1026 = 0, & 432 + 657 - 1089 = 0, & 452 + 637 - 1089 = 0
\end{array}
$$

$$423 + 675 - 1098 = 0, \quad 473 + 625 - 1098 = 0, \quad 425 + 673 - 1098 = 0$$
$$475 + 623 - 1098 = 0, \quad 437 + 652 - 1089 = 0, \quad 457 + 632 - 1089 = 0$$
$$426 + 879 - 1305 = 0, \quad 476 + 829 - 1305 = 0, \quad 429 + 876 - 1305 = 0$$
$$479 + 826 - 1305 = 0, \quad 624 + 879 - 1503 = 0, \quad 674 + 829 - 1503 = 0$$
$$629 + 874 - 1503 = 0, \quad 679 + 824 - 1503 = 0, \quad 743 + 859 - 1602 = 0$$
$$753 + 849 - 1602 = 0, \quad 749 + 853 - 1602 = 0, \quad 759 + 843 - 1602 = 0$$
$$1965 + 78 - 2043 = 0, \quad 1975 + 68 - 2043 = 0, \quad 1956 + 87 - 2043 = 0$$
$$1986 + 57 - 2043 = 0, \quad 1956 + 78 - 2034 = 0, \quad 1976 + 58 - 2034 = 0$$
$$1957 + 86 - 2043 = 0, \quad 1987 + 56 - 2043 = 0, \quad 1968 + 75 - 2043 = 0$$
$$1978 + 65 - 2043 = 0, \quad 1958 + 76 - 2034 = 0, \quad 1978 + 56 - 2034 = 0$$
$$2964 + 87 - 3051 = 0, \quad 2984 + 67 - 3051 = 0, \quad 2967 + 84 - 3051 = 0$$
$$2987 + 64 - 3051 = 0, \quad 2947 + 68 - 3015 = 0, \quad 2967 + 48 - 3015 = 0$$
$$2948 + 67 - 3015 = 0, \quad 2968 + 47 - 3015 = 0, \quad 4926 + 87 - 5013 = 0$$
$$4986 + 27 - 5013 = 0, \quad 4927 + 86 - 5013 = 0, \quad 4987 + 26 - 5013 = 0$$
$$5943 + 78 - 6021 = 0, \quad 5973 + 48 - 6021 = 0, \quad 5934 + 87 - 6021 = 0$$
$$5984 + 37 - 6021 = 0, \quad 5934 + 78 - 6012 = 0, \quad 5974 + 38 - 6012 = 0$$
$$5937 + 84 - 6021 = 0, \quad 5987 + 34 - 6021 = 0, \quad 5948 + 73 - 6021 = 0$$
$$5978 + 43 - 6021 = 0, \quad 5938 + 74 - 6012 = 0, \quad 5978 + 34 - 6012 = 0$$

11. Zeile 2: $300 - 73 + [234 - 51]$
    Zeile 4: $300 - 144 = 156$

12. $3500 + 9998 - 961 = 12\,537$

13. (a) $(3214 + 9867) - (7012 - 5876) = 11945$
    (b) Der Wert der Summe verkleinert sich um 21.
    (c) Der Wert der Differenz vergrößert sich um 12.
    (d) Der Wert der Differenz bleibt gleich.

14. (a) $(378 + 623) - (1111 - 222) = 112$ (b) $(1423 - 577) + (1078 - 723) = 1201$

15. (a)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1557 & & & & \\
 & & & 559 & & 998 & & & \\
 & & 175 & & 384 & & 614 & & \\
 & 115 & & 60 & & 324 & & 290 & \\
91 & & 24 & & 36 & & 288 & & 2
\end{array}$$

    (b) i.

ii. Sind in der untersten Zeile nur 4 Zahlen, so lässt sich die Mauer nicht vervollständigen. In der nächsten Zeile fehlen dann eine (am Rand) oder zwei Zahlen.

iii. Dann muss man in der untersten Zeile gerade und ungerade Zahlen abwechselnd eintragen;
z. B. 12|7|24|9|288 oder 5|6|7|8|9

iv. Eine Lösung ist, in die Spitze eine Zahl (z. B. 502) einzutragen und dann nach unten zu arbeiten.

v. Man erhält Lösungen, indem man in die Spitze 500 einträgt und dann nach unten arbeitet.

vi. Man beginnt in der dritten Zeile (z. B. 36, 33, 24) und arbeitet sich dann immer von links nach unten sowie nach oben.

16. In der offenen Aufgabe ist keine eindeutige Fragestellung vorgegeben. Die Schüler sind aufgefordert, sich eine oder mehrere Fragen selbständig zu überlegen. Zunächst ist die Frage „Was kosten die Möbelstücke insgesamt?" naheliegend. Man stellt fest, dass das angesparte Geld nicht ausreicht, um die Möbelstücke anzuschaffen, da diese insgesamt 1787 Euro kosten. Familie Schwarz muss also eine Auswahl treffen, wobei folgende Überlegungen angestellt werden können:

- Sind bestimmte Gegenstände umbedingt auszuwählen, weil sie zur Einrichtung eines Zimmers notwendig sind?
- Sollen möglichst genau 1500 Euro ausgegeben werden?

17. (a) Das Familienangebot lohnt sich, wenn alle Leistungen benötigt werden. Diese würden regulär 468 € kosten!

Bei den Teilaufgaben (a), (b) und (c) sind mehrere verschiedene Lösungen möglich!

18. (a) Die Augensumme gegenüberliegender Würfelseiten beträgt immer 7. Daher erhält man von den beiden unteren Würfeln jeweils einen Beitrag von 14 zur Augensumme. Vom obersten Würfel erhält man von den vertikalen Seitenflächen ebenfalls einen Beitrag von 14 zur Augensumme.

Um die maximale Augensumme zu erreichen muss beim obersten Würfel die 6 oben liegen. Die Lage der unteren Würfel ist unerheblich. Die maximale Augensumme beträgt $3 \cdot 14 + 6 = 48$.

(b) vier Würfel: Die maximale Augensumme beträgt $4 \cdot 14 + 6 = 62$.
fünf Würfel: Die maximale Augensumme beträgt $5 \cdot 14 + 6 = 76$.
n Würfel: Die maximale Augensumme beträgt $n \cdot 14 + 6$.

(c) Von den inneren Würfeln der Reihe sind zwei gegenüberliegende Seiten (Augensumme 7) und eine weitere Seite (maximal 6) sichtbar. Von den Würfeln am Ende der Reihe sind zwei Seiten verdeckt. $\Rightarrow$
drei Würfel: Die maximale Augensumme beträgt $13 + 2 \cdot 18 = 49$.
vier Würfel: Die maximale Augensumme beträgt $2 \cdot 13 + 2 \cdot 18 = 62$.

fünf Würfel: Die maximale Augensumme beträgt $3 \cdot 13 + 2 \cdot 18 = 75$.
n Würfel: Die maximale Augensumme beträgt $(n-2) \cdot 13 + 2 \cdot 18$.

(d) Von den vier Eckwürfeln sind drei Seiten sichtbar, von denen keine Seiten gegenüberliegen ($6 + 5 + 4 = 15$). Von den vier anderen Würfeln sind ebenfalls drei Seiten sichtbar, von denen jedoch zwei gegenüberliegen ($7 + 6 = 13$).$\Rightarrow$
Die maximale Augensumme beträgt $4 \cdot 13 + 4 \cdot 15 = 112$

(e) neun Würfel:
Die maximale Augensumme beträgt $4 \cdot 11 + 4 \cdot 15 + 6 = 110$
16 Würfel:
Die maximale Augensumme beträgt $4 \cdot 2 \cdot 11 + 4 \cdot 15 + 6 \cdot 4 = 172$
n^2 Würfel: Die maximale Augensumme beträgt
$4 \cdot (n-2) \cdot 11 + 4 \cdot 15 + 6 \cdot (n-2)^2$

19. $31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 59 + 87 = 301$, $\quad 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 73 + 73 = 301$

$31 + 31 + 31 + 31 + 59 + 59 + 59 = 301$

20. (a) II: 702678 (b) III: 501231 (c) V: 385978 (d) VII: 872345

21. Mehrere Möglichkeiten, z. B.
Wieviele Mädchen, Jungen oder Schüler sind den den 5. Klassen?
34 Mädchen, 35 Jungen, 69 Schüler
Welche Sportart ist am beliebtesten?
Schwimmen

1.2.2 Rechengesetze

1. (a) $7 \cdot (12 + 4) = 84 + 28 = 112$, Distributivgesetz anwenden!
   (b) Keine Lösung, da $6 \cdot 12 = 72 \geq 6 \cdot (12 - ?)$

2. (a) Hier sind jeweils verschiedene Lösungen möglich, z. B.
   $(147 + 343) + (411 + 589) = 490 + 1000 = 1490$,
   $(315 + 785) + (42 + 78) + (346 + 654) = 1100 + 120 + 1000 = 2220$
   (b) $498 + 279 = 500 - 2 + 280 - 1 = 780 - 3 = 777$,
   $626 + 499 = 620 + 6 + 500 - 1 = 1120 + 5 = 1125$,
   $440 + 659 = 440 + 660 - 1 = 1100 - 1 = 1099$,
   $157 - 102 = 157 - 2 - 100 = 55$

3. (b) $(328 + 272) + (67 + 133) + (116 + 234) = 600 + 200 + 350 = 1150$

4. z.B. $83 + 29 + 17 = (83 + 17) + 29 = 129$

5. $2000 \cdot 2001 : 2 - 999 \cdot 1000 : 2 = 2001000 - 499500 = 1501500$

6. Kommutativ- und Assoziativgesetz

   z.B. $38 + 29 + 42 = 29 + (38 + 42) = 29 + 80 = 109$

7. $30\,000 \cdot 30\,001 : 2 - 9999 \cdot 10\,000 : 2 = 450\,015\,000 - 49\,995\,000 = 400\,020\,000$

8. (a) $250 \cdot 251 : 2 = 31\,375$
   (b) $31\,375 - 119 \cdot 120 : 2 = 31\,375 - 7140 = 24\,235$

9. (a) Die Summe der Zahlen 1 bis 12 beträgt 78 und ist nicht durch vier teilbar. Daher führt eine Zerlegung in vier Bereiche nicht zum Ziel. Nachdem 78 durch drei teilbar ist gelingt dies aber mit drei Bereichen: $1{+}2{+}11{+}12 = 3{+}4{+}9{+}10 = 5{+}6{+}7{+}8 = 26$
   (b) Verschiedene Lösungswege:
      - Von der ersten Hauptstadt gehen 14 Verbindungen, von der zweiten 13 Verbindungen usw. aus. $\Rightarrow 14 + 13 + 12 + \cdots + 2 + 1 = 105$ Verbindungen
      - schrittweises Vorgehen:
        zwei Städte $\Rightarrow$ 1 Verbindung
        drei Städte $\Rightarrow$ 3 Verbindungen
        vier Städte $\Rightarrow$ 6 Verbindungen
        ...
        15 Städte $\Rightarrow$ 105 Verbindungen
   (c) i. Lösung analog zu (b): $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1)$
      ii. Lösung durch probieren: $1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55 \Rightarrow 11$ Punkte,
      $1 + 2 + 3 \cdots + 12 = 78 \Rightarrow 13$ Punkte,
      $1 + 2 + 3 + \cdots + 13 = 91$, damit ist 95 nicht möglich

10. (a) Der Wert der Summe wird um 1 größer.
    (b) Der Wert der Summe wird um 2 größer.
    (c) Der Wert der Differenz wird um 3 größer.
    (d) Der Wert der Differenz wird um 4 kleiner.

11. (a) Der Wert der Summe wird um 5 größer.
    (b) Der Wert der Differenz wird um 1 kleiner.
    (c) Der Wert der Summe wird um 3 kleiner.
    (d) Der Wert der Differenz wird um 8 kleiner.

(e) Der Wert der Differenz wird um 3 größer.

12. (a) 820
    (b) $(1+11)+(2+10)+(3+9)+(4+8)+(5+7)+6 = 5 \cdot 12 + 6 = 66$
    (c) 15, 45, 210
    (d) $1\,000\,000 \cdot 1\,000\,001 : 2 = 500\,000 \cdot 1\,000\,001 = 500\,000\,500\,000$

13. (a) $1+2+3+\ \ldots\ +98 = 98 \cdot 99 : 2 = 4851$
    (b) $1+2+3+\ \ldots\ +49 = 49 \cdot 50 : 2 = 1225$
    $50+51+52+\ \ldots\ +98 = 4851 - 1225 = 3626$

14. $2 \cdot (10+11+...+22)+23 = 2 \cdot (22 \cdot 23 : 2 - 9 \cdot 10 : 2) + 23 = 439$

1.2.3 Terme

1. Verschiedene Lösungen, z. B.
   (a) $24-9-8-5$, $9 \cdot 8 : 24 + 5$, $24 : 8 + 9 - 5$
   (b) $9 \cdot 8 + 24 + 5$, $24 \cdot 5 - 9 - 8$, $9 \cdot 8 + 24 + 5$

2. (a) (b) 64389
   (c) Ergebnis ist um 6 größer.

3. (a) (b) 6785
   (c) Ergebnis ist um 9 kleiner.

1.3 Die ganzen Zahlen, ihre Addition und Subtraktion

1.3.1 Menge der ganzen Zahlen, Zahlengerade

1. (a) -2, (b) -28

2. $-9\,628$

3.

4.

5. -59, -46, -35, -24, -12, 0, 10, 24

6. (a) 12 (b) 12 (c) 12 (d) 12 (e) 20

7. (a) 12 (b) 6 (c) 0 (d) -2 (e) 8

8. (a) 3, 11 (b) -2, 6 (c) -7, 7
   (d) -28, -12 (e) -7, 13 (f) -88, 12

9. (a) $\Delta T: \quad 14\,°C, 4\,°C, 9\,°C, 14\,°C$ (b) $-3\,°C$

10. größte vorkommende Meerestiefe:
    Witjastiefe im Marianengraben 10924 m u.d.M.
    die tiefste Stelle des Mittelmeers: 5092 m u.d.M.
    die Zugspitze: 2962 ü.d.M.
    den höchsten Berg der Erde: Mount Everest 8848 m ü.d.M.

11. im Nordwesten Ägyptens: Kattarasenke, 133 m u. d. M.
    im Jordantal (Israel): totes Meer, 403 m u. d. M.
    östlich des Kaspischen Meeres: 26 m u. d. M
    im Death Valley (USA): arides Becken in O-Kalifornien, USA, bis 86 m u.d.M., Sommertemperatur bis 57°, Salzwüste

12. höchste Temperatur in °C:

    Mo → Di: -2°C, Di → Mi: 0°C, Mi → Do: -4°C, Do → Fr: -5°C, Fr → Sa: 0°C, Sa → So: $+4$°C

    niedrigste Temperatur in °C

    Mo → Di: -5°C, Di → Mi: -2°C, Mi → Do: -1°C, Do → Fr: -2°C, Fr → Sa: 3°C, Sa → So: -4°C

13. (a) $11, 8, 5, 2, -1, -4, -7, ...$
    (b) $14, 13, 11, 8, 4, -1, -7, -14, ...$
    (c) $-20, -16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, ...$
    (d) $-14, -9, -5, -2, 0, 1, 1, 0, -2, -5, ...$
    (e) $15, 12, 11, 8, 7, 4, 3, 0...$
    (f) $20, 19, 17, 13, 5, -11, ...$
    (g) $1, 2, 0, 3, -1, 4, -2, 5, -3, 6, -4, 7, ...$
    (h) $1, 2, -2, -4, 4, 8, -8, -16, 16, 32, -32, ...$

14. (a) $A'(-3|-3), B'(1|-3), C'(1|1), D'(-3|1), E'(-1|3)$
    (b) $A''(0|-5), B''(4|-5), C''(4|-1), D''(0|-1), E''(2|1)$

15. (a) $-15 < -14 < -13 < 12 < 16$
    (b) $-2 < 4 < 6 < 11$

16. 23 € Schulden, Durchschnitt von -10 € und -20 €, -10 €, -7 €, 4 € Schulden, 20 € Haben $= 20$ €

17.

18. (a) $L = \{-3, -2, -1, \dots\}$ (b) $L = \{2, 1, 0, -1, \dots\}$ (c) $L = \{\,\}$

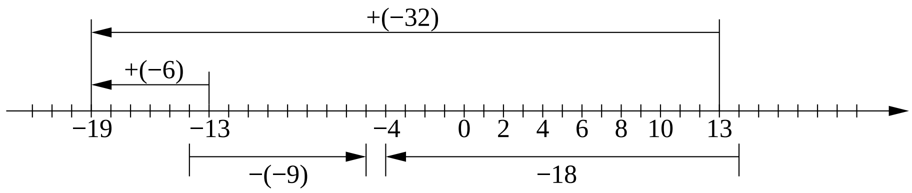
19. Nicole, Katharina, Sabine

20.

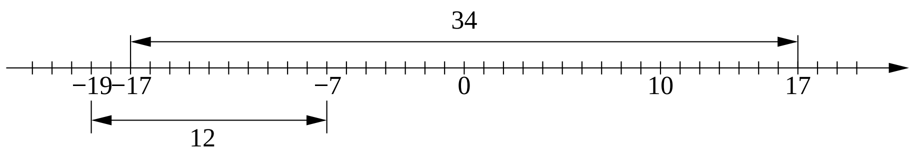
21.

1.3.2 Berechnung von Summen- und Differenzwerten

1. (a) 6 Millionen weniger (b) 8 Millionen weniger als im Dezember 2003, also 275 Millionen
2. $3374 - (-1765) = 5139$
3. A/G, B/D, C/E, F/H
4. (a) $8 - 17 = -9$ (b) $-8 - 17 = -25$
   (c) $8 + 17 = 25$ (d) $-8 + 17 = 9$
5. (a) $13 - 27 = -14$ (b) $-13 - 27 = -40$
   (c) $13 + 27 = 40$ (d) $-13 + 27 = 14$
6. $43\,\mathrm{m} - (384 : 4)\,\mathrm{m} = 43\,\mathrm{m} - 96\,\mathrm{m} = -53\,\mathrm{m}$
7. (a) -7 (b) 11 (c) 8 (d) 9 (e) 6
8. (a) $13 + x = -19, \quad 13 + (-32) = -19, \quad x = -32$
   (b) $-13 + x = -19, \quad -13 + (-6) = -19, \quad x = -6$
   (c) $14 - x = -4, \quad 14 - 18 = -4, \quad x = 18$
   (d) $x - (-9) = -5, \quad -14 - (-9) = -5, \quad x = -14$



9. (a) $2 \cdot 17 = 34$
   (b) $|(-7) - (-19)| = 12$



10. (a) 47 (b) -17 (c) 38 (d) 35

11.

a	-1	-3	$+1$	$+3$
b	$+5$	-5	$+5$	-5
$a-b$	-6	$+2$	-4	$+8$
$a+b$	$+4$	-8	$+6$	-2
$\lvert a\rvert - \lvert b\rvert$	-4	-2	-4	-2

12.

a	-2	-4	$+1$	$+6$
b	$+5$	-5	-5	-5
$a-b$	-7	$+1$	$+6$	$+11$
$a+b$	$+3$	-9	-4	$+1$
$\lvert a\rvert - \lvert b\rvert$	-3	-1	-4	$+1$

13.

14. (a) -10, -100, -98, -118
   (b) -35, 35, 41, 203
   (c) 183, -183, 2664, -1
   (d) 2, -27, -360, -31

15. (a) $1-25$, $3-25$, $4-25$, $1-34$, $3-34$, $4-34$, $7-34$, $11-34$, $12-34$, $1-36$, $3-36$, $4-36$, $7-36$, $11-36$, $12-36$

(b) die drei kleinsten Differenzwerte: $1-36=-35$, $1-34=3-36=-33$, $4-36=-32$
die drei größten Differenzwerte: $36-1=35$, $34-1=36-3=33$, $36-4=32$

(c) z. B. $1-3$, $3-4$, $7-11$, $11-12$, $34-36$

(d) $7-3$, $3-7$, $11-7$, $7-11$

16. (a) 89 €

(b) Wenn er alle Rechnungsbeträge überweist überzieht er sein Konto um 144 €.

70 €, 92 € und 54 € oder
70 €, 92 € und 68 € oder
70 €, 54 € und 68 € oder
92 €, 54 € und 68 € oder
92 €, 54 € und 120 € oder
70 €, 54 € und 120 € oder
70 €, 68 € und 120 €
54 €, 68 € und 120 €

17. (a) 518 (b) 17 (c) 9 mal

18. (a) $59, 58, 57, \ldots, 1$ (b) $11, 12, 13, \ldots$ (c) 44
(d) $20-x>-40 \quad G=\mathbb{N}$, $20-x<10 \quad G=\mathbb{N}$, $x-81=-37 \quad G=\mathbb{N}$

19. (a) -4 (b) -30 (c) 30 (d) 4
(e) 31 (f) -27 (g) 27 (h) -31
(i) 27 (k) -27 (l) 13 (m) 21
(n) 250 (o) -402

20. (a) $L=\{17\}$ (b) $L=\{1\}$ (c) $L=\{-21\}$
(d) $L=\{-17\}$ (e) $L=\{56\}$

21. -26

22. -41

23.

24.

25. $27-(-13)=27+13$, $0-45=0+(-45)$

26. (a) -30 (b) -4 (c) 4 (d) 30 (e) -27
(f) 31 (g) -31 (h) 27 (i) 27 (k) 27

27. (a) 13 (b) -13 (c) -21 (d) 21 (e) 250
(f) -788 (g) -402 (h) 620 (i) -807 (f) 705

28. (a) -7 (b) -11 (c) -5 (d) -17

29. -12

30. 41

31.

32. (a) -67 (b) -67 (c) -67 (d) 67

33. (a)

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

(b) Es handelt sich um magische Quadrate. Im ersten Quadrat wurde von jeder Zahl aus dem Quadrat aus (a) 8 subtrahliert. Im zweiten Quadrat erhält man aus dem ersten Quadrat, indem man von jeder Zahl 3 subtrahiert und die Spalten in umgekehrter Reihenfolge schreibt. Das dritte Quadrat erhält man aus dem zweiten Quadrat, indem man jede Zahl mit 2 multipliziert.

(c)

-9	4	5	-6
2	-3	-4	-1
-2	1	0	-5
3	-8	-7	6

-27	12	15	-18
6	-9	-12	-3
-6	3	0	-15
9	-24	-21	18

-84	48	36	-120
-24	-60	-48	12
-72	-12	0	-36
60	-96	-108	24

34. (a) 16, 15, -18, -10, 1
(b) -14, 43, -86, 11, 158

35. (a) $L = \{102\}$
(b) z. B. $(-65) + x = 37$, $(-65) + x = (-14)$,
$(+88) + x = (-57)$, $89 + x = 37$
(c) $-24 \cdot x = 120$ $L = \{-5\}$

36. (a) X: -280988 (b) VII: -103324 (c) II: 1609876 (d) I: 2706432

37. Z. B. $123 = 122 + 1 = 124 + (-1) = (-2) + 125$

38. (a) $-990\,000\,000$

    (b) $1\,000\,001\,000\,000 - 1\,000\,001\,000\,000\,000\,000 = -999\,000\,999\,000\,000$

39. 2Milliarden $- x = 3$ Billionen, $\quad x = -2998$ Milliarden

40. $-20\,\mathrm{B} - (-300\,\mathrm{Md}) = -(20\,\mathrm{B} - 300\,\mathrm{Md}) = -19\,\mathrm{B}\,700\,\mathrm{Md}$

1.3.3 Rechenregeln

1. (a) 15 (b) 15 (c) 15 (d) -15
   (e) -52 (f) -52 (g) -52 (h) 52

   Es gilt das Kommutativgesetz der Addition, es gilt kein Kommutativgesetz der Subtraktion.

2. z. B. Abstand der Zahlen 3 und 7 beträgt $4 = |7 - 3|$,
   Abstand der Zahlen -3 und 7 beträgt $10 = |7 - (-3)|$,
   Abstand der Zahlen 17 und -3 beträgt $20 = |(-3) - 17|$

3. (a) $(1-2) + (3-4) + (5-6) + (7-8) + (9-10) = 5 \cdot (-1) = -5$

   (b) $(11-13) + (15-17) + (19-21) = 3 \cdot (-2) = -6$

   (c) $(210-220) + (230-240) + (250-260) = 3 \cdot (-10) = -30$

   (d) Z. B.: Lassen sich in einer Summe jeweils zwei Summanden als Paar mit gleichem Summenwert zusammenfassen, so erhält man den Wert der Summe, in dem man den Summenwert mit der Anzahl der Paare multipliziert.

1.3.4 Einfache Terme

1. (a) 12, 55, 9, -274

   (b) 26, -28, -28, 26

2.

3. (a) $182 + 18 + 38 = 238$ (b) $[13 + (-13)] + (-17) = -17$
   (c) $-17 + [(-13) + (-27)] = -57$ (d) $[(-154) + (-56)] + 97 = -113$
   (e) $92 + (-67 - 33) = -8$ (f) $(87-87) + (205-295) + (195-195) = 0$

4. (a) -58 (b) 0 (c) -3

5. (a) $(1-2) + (3-4) + (5-6) + (7-8) + (9-10) =$
   $= (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -5$

(b) $1 + (3 - 2) + (5 - 4) + (7 - 6) + (9 - 8) + (11 - 10) =$
$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$

(c) -50

(d) $+51$

(e) -500

(f) $+501$

(g) $-$letzte Zahl : 2

(h) $+$(letzte Zahl $+ 1$) : 2

6. (a) $10 - (1 + 2 + ... + 8) = 10 - 36 = -26$

   (b) $100 - (1 + 2 + .. + 49) = 100 - 49 \cdot 50 : 2 = 100 - 1225 = -1125$

   (c) $-30 + 12 \cdot 13 : 2 = -30 + 78 = 48$

   (d) $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) - (10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15) =$
   $= 21 - 75 = -54$

   (e) $(1 + 2 + ... + 20) - (10 + 11 + ... + 29) = 210 - 390 = -180$

   oder

   $(1 + 2 + .. + 9) + (10 - 10) + ... + (20 - 20) - (21 + 22 + .. + 29) =$
   $= (1 + 2 + ... + 9) - [9 \cdot 20 + (1 + 2 + .. + 9)] = -180$

7. $(-199) + (-198) + ... + (-1) + 0 + 1 + 2 + ... + 99 =$
   $= (1 + 2 + ... + 99) - (1 + 2 + ... + 199) =$
   $= 99 \cdot 100 : 2 - 199 \cdot 200 : 2 = 4950 - 19900 = -14950$

8. Um 2700 m tiefer.

9. Einmal Kino und Baseballmütze streichen:

   110 € − 22,50 € − 31,45 € − 7,55 € − 17,99 € − 37,89 € − 42,56 € = −49,94 €

10. $\left(\boxed{-}18\right) - \left(\boxed{+}12\right) + \left(\boxed{+}20\right) + \left(\boxed{-}5\right) - \left(\boxed{-}13\right) = -2$

    $-18 - 12 + 20 - 5 + 13 = (20 + 13) - (18 + 12 + 5) = 33 - 35 = -2$

11. Wir rechnen in Cent:

$$\begin{aligned}&14517 - 63700 + 342020 - 45344 - 246685 - 6900 - 39238 + 21190 = \\ &= (14517 + 342020 + 21190) - (63700 + 45344 + 246685 + 6900 + 39238) = \\ &= 377727 - 401867 = -24140\end{aligned}$$

neuer Kontostand: 241,40 S

12.

$$\begin{aligned}
&-55\,760\,000-3\,879\,540+34\,720\,000-2\,822\,349+\\
&\qquad+5\,900\,000-10\,000-2\,146\,393=\\
&=(34\,720\,000+5\,900\,000)-\\
&\qquad-(55\,760\,000+3\,879\,540+2\,822\,349+10\,000+2\,146\,393)=\\
&=40\,620\,000-64\,618\,282=-23\,998\,282
\end{aligned}$$

neuer Kontostand: 23 798 282 S

13. $-3500-15000=-18500,\ -18500+7000=-11500,\ -11500+22500=11000$
$11000-13000=-2000,\ -2000-4000=-6000$

		alter Kontostand in €	:	3 500	S
Datum		Verwendungszweck			
02.02.2004	:	Qwertysx	:	15 000	S
04.02.2004	:	%#	:	7 000	H
07.02.2004	:	2y3x4c5v	:	22 500	H
07.02.2004	:	?!;:oo;.	:	13 000	S
08.02.2004	:	***	:	4 000	S
		neuer Kontostand in €	:	6 000	S

14. $(-299)+(-298)+...+(-202)+(-201)=$
$=-(201+202+...+299)=-[(1+2+...+299)-(1+2+...200)]=$
$=-(299\cdot 300:2-201\cdot 200:2)=-(44850-20100)=-24750$

15. (a) $L=\{27\}$ (b) $L=\{10\}$
(c) $L=\{27\}$ (d) $L=\{-5\}$
(e) $L=\{100\}$ (f) $L=\{0\}$

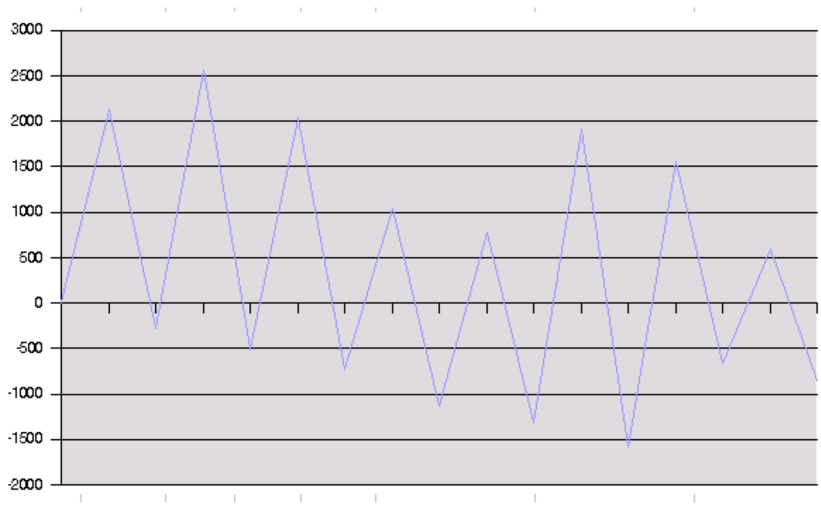
16. (a) $L=\{-65\}$ (b) $L=\{-89\}$
(c) $L=\{-52\}$ (d) $L=\{92\}$
(e) $L=\{142\}$

17. (a) 72 G
(b) Die Gummibärchen müssen Martina schon vor dem 50. Spiel ausgegangen sein.
(c) Martina hat sich mindestens 6 G ausgeliehen

18. (b) 2102 m (1051 m aufwärts und 1051 m abwärts)
(c) 566 m

19. $(2122 + 2842 + 2549 + 1771 + 1918 + 3233 + 3128 + 1271) -$
$-(2398 + 3081 + 2761 + 2179 + 2103 + 3494 + 2218 + 1445) =$
$= 18834 - 19679 = -845$

	Höchstwert	Tiefstwert
1. Tag	$0 + 2122 = 2122$	$2122 - 2398 = -276$
2. Tag	$-276 + 2842 = 2566$	$2566 - 3081 = -515$
3. Tag	$-515 + 2549 = 2034$	$2034 - 2761 = -727$
4. Tag	$-727 + 1771 = 1044$	$1044 - 2179 = -1135$
5. Tag	$-1135 + 1918 = 783$	$783 - 2103 = -1320$
6. Tag	$-1320 + 3233 = 1913$	$1913 - 3494 = -1581$
7. Tag	$-1581 + 3128 = 1547$	$1547 - 2218 = -671$
8. Tag	$-671 + 1271 = 600$	$600 - 1445 = -845$



2 Weiterentwicklung geometrischer Grundvorstellungen

2.1 Zeichnen geometrischer Figuren, Bauen einfacher Modelle

1. 8cm
2.

2.2 Grundbegriffe, Grundfiguren und Körper

2.3 Winkel und Geraden

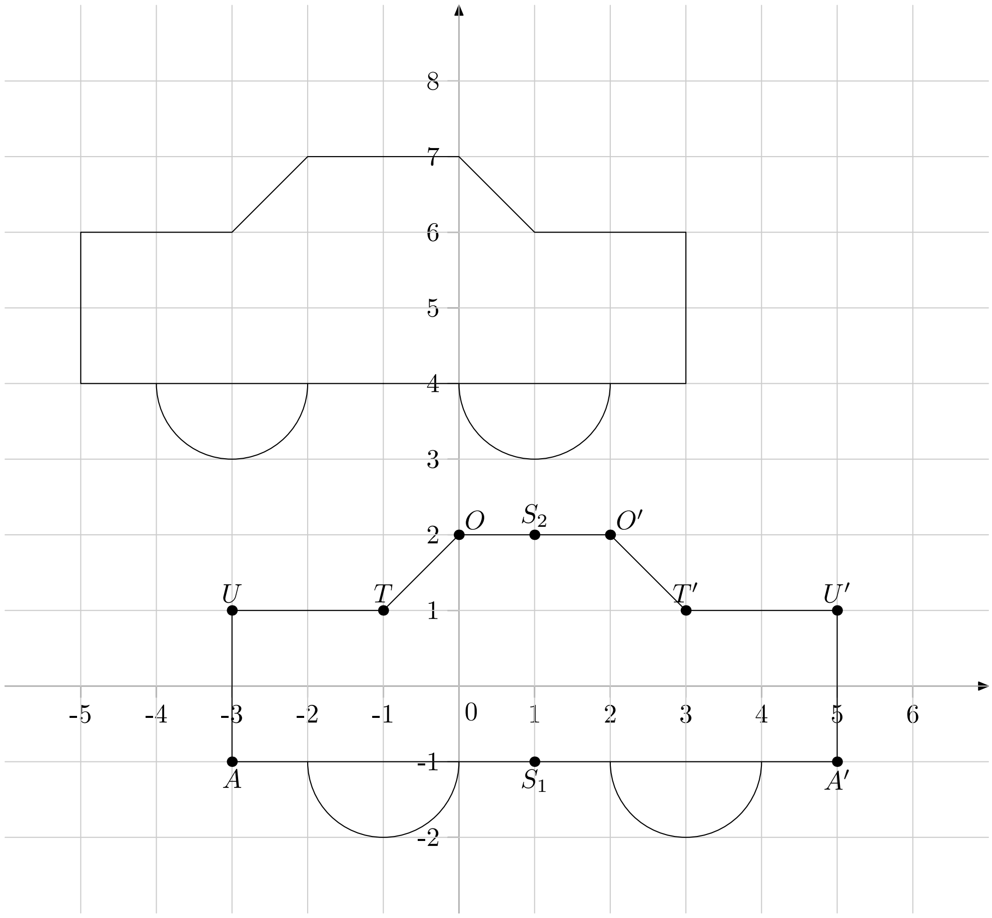
1.

Anzahl der Geraden	2	3	4	5	...	n
Anzahl der Schnittpunkte	1	$3 = 1+2$	$6 = 3+3$	$10 = 6+4$	...	$\frac{1}{2}n(n-1)$

2.
3.

2.4 Koordinatensystem

1.
2.
3. (a) s. u.
   (b) s. u.
   (c) $\mathrm{S}_{1\mathrm{neu}}(-1|4)$, $\mathrm{S}_{2\mathrm{neu}}(-1|7)$, $\mathrm{A}_{\mathrm{neu}}(-5|4)$, $\mathrm{A}'_{\mathrm{neu}}(3|4)$, $\mathrm{U}_{\mathrm{neu}}(-5|6)$, $\mathrm{U}'_{\mathrm{neu}}(3|6)$, $\mathrm{T}_{\mathrm{neu}}(-3|6)$, $\mathrm{T}'_{\mathrm{neu}}(1|6)$, $\mathrm{O}_{\mathrm{neu}}(-2|7)$, $\mathrm{O}'_{\mathrm{neu}}(0|7)$

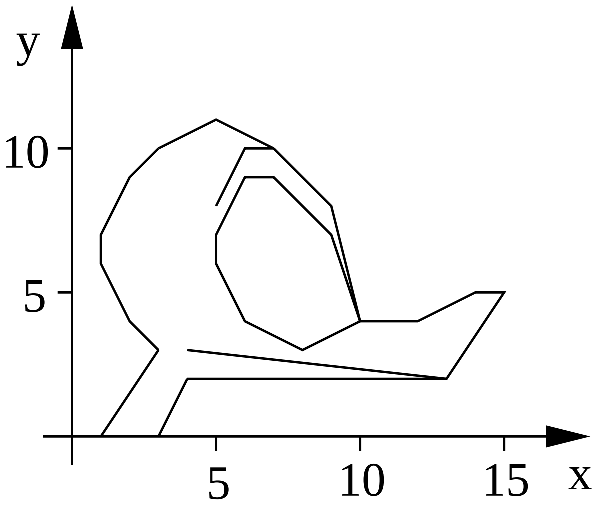


(d) Verschiebung um n Einheiten nach links → n von x-Koordinate subtrahieren
Verschiebung um n Einheiten nach rechts → n zur x-Koordinate addieren
Verschiebung um n Einheiten nach unten → n von y-Koordinate subtrahieren
Verschiebung um n Einheiten nach oben → n zur y-Koordinate addieren

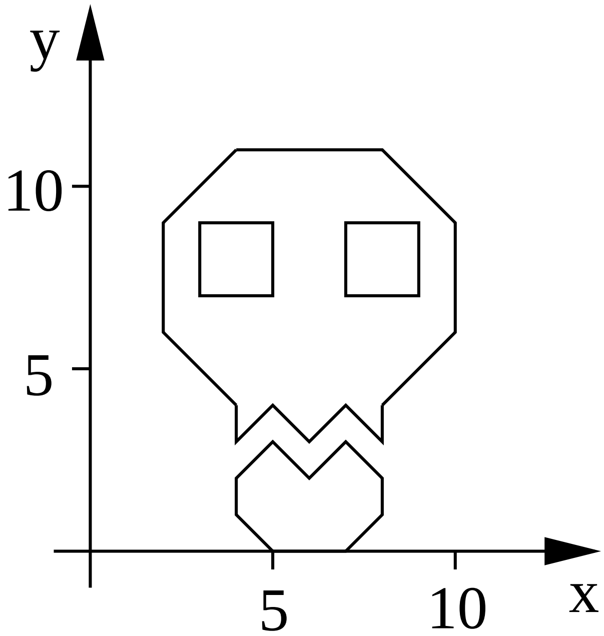
(e) $\mathrm{S}_{1\mathrm{neu2}}(14|-8)$, $\mathrm{S}_{2\mathrm{neu2}}(14|-5)$, $\mathrm{A}_{\mathrm{neu2}}(10|-8)$, $\mathrm{A}'_{\mathrm{neu2}}(18|-8)$, $\mathrm{U}_{\mathrm{neu2}}(10|-6)$, $\mathrm{U}'_{\mathrm{neu2}}(18|-6)$, $\mathrm{T}_{\mathrm{neu2}}(12|-6)$, $\mathrm{T}'_{\mathrm{neu2}}(16|-6)$, $\mathrm{O}_{\mathrm{neu2}}(13|-5)$, $\mathrm{O}'_{\mathrm{neu2}}(15|-5)$

4. $A(-2|-2)$, $B(-1|-1)$, $C(-1|-3|)$, $D(3|-1)$, $E(-4|-2)$
Rechtswert wechselt Vorzeichen, Hochwert hat den gleichen Wert.

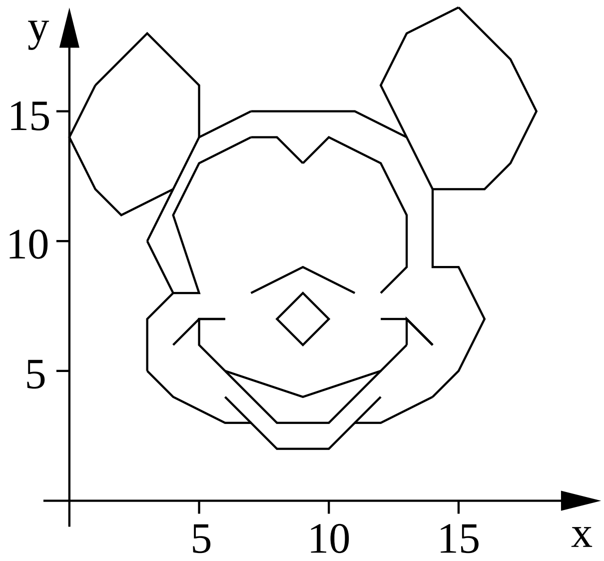
5.



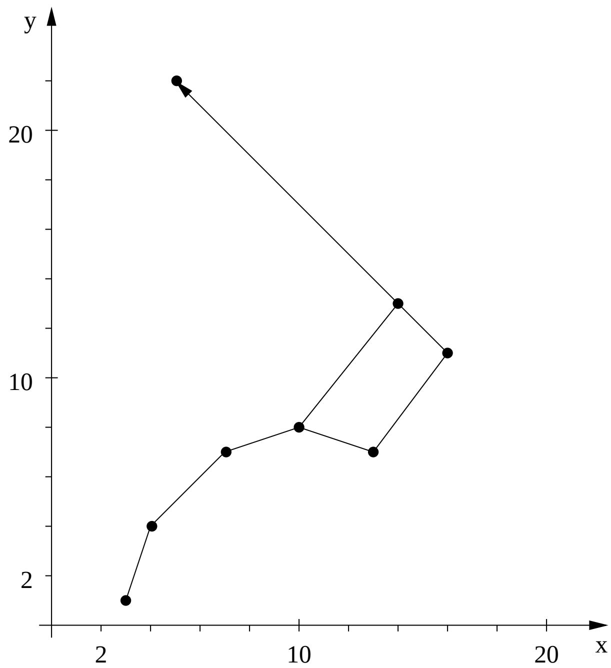
6.



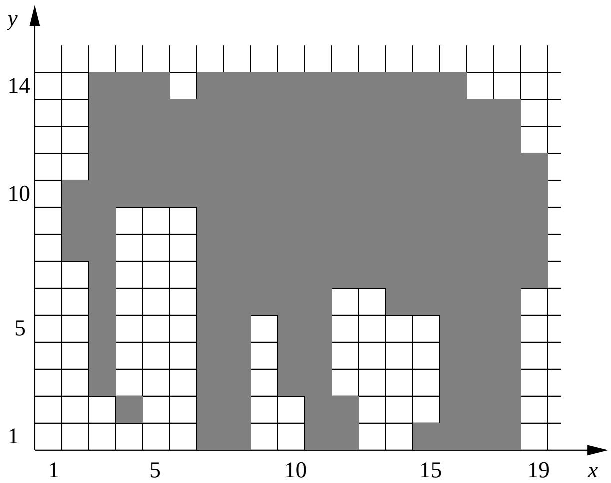
7.



8.



9.



10.

(a) K(12|9)

(b) $\overline{\text{AK}} = 10\,\text{km}$, $\overline{\text{KD}} \approx 11\,\text{km}$

Straßenlänge: 21 km

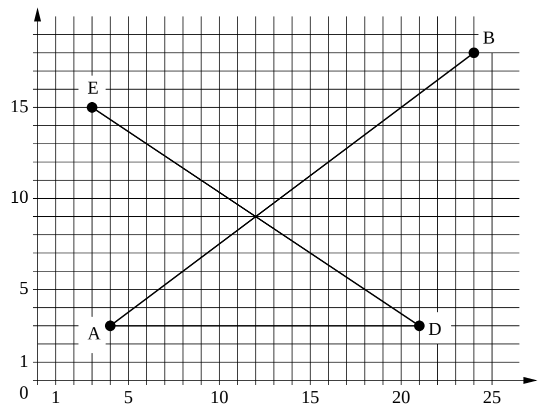
3 h auf der Straße

Länge des Feldwegs: 17 km

Für 1 km braucht er

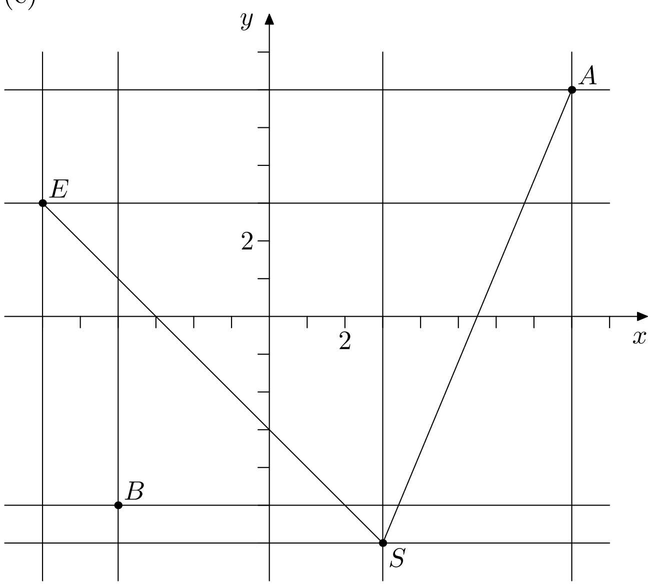
60 min : 5 = 12 min

3 h 24 min auf dem Feldweg



11. (a) 1 : 200 000

(b) (c)



(d) A: 17 km B: 8 km E: 18 km

(e) 6 Wege

(f) $\overline{\mathrm{AS}} = 13{,}0\,\mathrm{km}$, $\overline{\mathrm{ES}} = 12{,}7\,\mathrm{km}$

2.5 Achsensymmetrische Figuren

3 Rechnen mit ganzen Zahlen

3.1 Multiplikation und Division natürlicher Zahlen

3.1.1 Produkt und Quotient natürlicher Zahlen

1. z. B.
   - Wie viele Reiskörner isst ein Chinese am Tag?

     Annahme: ein Chinese wird 75 Jahre alt und isst am Tag ca. 125 g Reis. Abwiegen von 50 Reiskörnern liefert als Masse ca. 1g. Damit sind in 125g Reis ca. 6250 Körner.
   - Wie viele Reiskörner isst ein Chinese im Jahr?

     $6250 \cdot 265 = 2.281.250$ Reiskörner
   - Wie viele Reiskörner isst ein Chinese in seinem Leben?

     $2.281.250 * 75 = 171.093.750$ Reiskörner

2. 2 Vorstellungen (5a, 5b, 6c und 5c, 6a, 6b) mit jeweils 80 Schülern. Jeder Schüler muss 1,50 Euro bezahlen.

3. Wenn Karla die Zehnerkarte ganz ausnutzt spart sie 5 DM.
   Die Zehnerkarte lohnt sich für Karla, wenn sie mindestens neunmal ins Freibad geht.

4. $999\,999 \; : \; x = 999 \quad \Longrightarrow \quad x = 999\,999 \; : \; 999 = 1001$

5. $x : y = 13\,\mathrm{R}\,4 \Longrightarrow x = y \cdot 13 + 4$ und $y > 4 \Longrightarrow L = \{69, 82, 95, 108, \ ...\}$

   Mit $70 < x < 94$ folgt für das Alter der Oma 82 Jahre.

6. (a) $x : 9 = y\,\mathrm{R}\,6 \Longrightarrow x = 9 \cdot y + 6 \Longrightarrow L_\mathrm{a} = \{6, 15, 24, 33, 42, 51, 60, 69, \ ...\}$

   (b) $66 : x = y\,\mathrm{R}\,6 \Longrightarrow 66 = y \cdot x + 6$ und $x > 6 \Longrightarrow y \cdot x = 60 \Longrightarrow x \,|\, 60$

   $L_\mathrm{b} = \{\, x \,|\, x \,|\, 60$ und $x > 6\} = \{10, 12, 15, 20, 30, 60\,\}$

   $L = L_\mathrm{a} \cap L_\mathrm{b} = \{15, 60\}$, „Großvater“ $\Longrightarrow$ 60 Jahre

7. $40 : (15 - 4 \cdot 2) = 5$ Rest $5 \Longrightarrow$ Er braucht 6 Monate.

8. (a) $x : y = 3\,\mathrm{R}\,7 \Longrightarrow x = 3 \cdot y + 7$ und $y > 7$

   $\Longrightarrow L_\mathrm{a} = \{31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, \ ...\}$

(b) $328 : y = x \,\mathrm{R}\, 6 \implies 328 = x \cdot y + 6$ und $y > 6$

$\implies x \cdot y = 322$ und $y > 6 \implies L_\mathrm{b} = \{1, 2, 7, 14, 23, 46\}$

$L = L_\mathrm{a} \cap L_\mathrm{b} = \{46\}$ Onkel Toni ist 46 Jahre alt.

9. (a) $85 = 7 \cdot x + y$ und $y < x \implies$

x	12	11
y	1	8

(b) $x = 7 \cdot y + 12$ und $y > 12 \implies$

x	103	110	117	124	...
y	13	14	15	16	...

10. (a) z. B. $31 + 24 = 13 + 42 = 55$, $41 + 25 = 14 + 52 = 66$, $42 + 57 = 24 + 75 = 97$, $46 + 97 = 64 + 79 = 143$, ...

(b) z. B.: Die Summe der Ziffern an den Zehnerstellen der beiden Zahlen muss genauso groß sein wie die Summe der Ziffern an den Einerstellen der beiden Zahlen.

(c) z. B. $64 \cdot 23 = 46 \cdot 32 = 1472$, $84 \cdot 36 = 48 \cdot 63 = 3024$, $69 \cdot 32 = 96 \cdot 23 = 2208$, ...

(d) z. B.: Das Produkt der Ziffern an den Zehnerstellen der beiden Zahlen muss genauso groß sein wie das Produkt der Ziffern an den Einerstellen der beiden Zahlen.

11. (a) V: 45312 (b) I: 12816 (c) X: 100063 (d) III: 22666

12. (a) V: 42543 (b) III: 129543 (c) II: 1000000 (d)IV: 31986

13. 50

14. Jeweils mehrere Möglichkeiten, z. B. $7+7-7-7 = 0$, $(7+7) : (7+7) = 1$, $7 : 7 + 7 : 7 = 2$, $(7+7+7) : 7 = 3$, $77 : 7 - 7 = 4$, $7 - (7+7) : 7 = 5$, $(7 \cdot 7 - 7) : 7 = 6$, $(7-7) \cdot 7 + 7 = 7$, $(7 \cdot 7 + 7) : 7 = 8$, $7 + (7+7) : 7 = 9$, $(77 - 7) : 7 = 10$

15. Probieren liefert $n = 8$

16. Die günstigsten Zahlen sind um eins kleiner als die Vielfachen von 337.

$11\,000 : 337 = 32 \,\mathrm{R}\, 216 \implies$ kleinste Zahl ist $33 \cdot 337 - 1 = 11\,120$

Die nächsten Zahlen sind $11\,120 + 337 = 11\,457$ und $11\,457 + 337 = 11\,794$

3.1.2 Faktorisieren von Zahlen, Primzahlen

1. Die Nullen ergeben sich durch Faktorenpaare, die jeweils 10 ergeben.

In 10! kommt der Faktor 5 zweimal vor, der Faktor 2 mehr als zweimal $\Rightarrow$ zwei Nullen am Ende.

In 20! kommt der Faktor 5 viermal vor, der Faktor 2 mehr als zweimal $\Rightarrow$ vier Nullen am Ende.

2. Die Zahlen 91 und 95 erfüllen alle geforderten Eingenschaften.
   Eine zu frühe Einbeziehung der zweiten Bedingung ist wenig effektiv.
   Zahlen mit den Endziffern 6 und 8 sind durch 2 teilbar. Nach dem Vertauschen wird die Endziffer zur Zehnerziffer. Damit schließt die vierte Bedingung die 60er und 80er Zahlen aus.

3. (a) (3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31), (41,43), (71,73)
   (b) (3,5,7)
   (c) i. Z. B. (20,22,24) liefert die Reste (2,1,0)
       ii. Z. B. (19,21,22) liefert die Reste (1,0,2)
       iii. Es bleiben immer je einmal die Reste 0, 1 und 2.
       Von drei Zahlen, die entsprechend (c) ausgewählt wurden, ist eine durch drei teilbar.
       1. Fall: Erste Zahl durch drei teilbar, qed
       2. Fall: Erste Zahl lässt bei Division durch 3 den Rest 1 $\Rightarrow$ die zweite Zahl lässt bei Division durch 3 den Rest 0, qed
       3. Fall: Erste Zahl lässt bei Division durch 3 den Rest 2 $\Rightarrow$ die zweite Zahl lässt bei Division durch 3 den Rest 1 $\Rightarrow$ die dritte Zahl lässt bei Division durch 3 den Rest 0, qed

   (d) Es gibt nur eine Gruppe von Primzahldrillingen, nämlich (3,5,7).

4. (a) $377208 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 31$
   (b) $931 = 7 \cdot 7 \cdot 19, \quad T(931) = \{1, 7, 19, 49, 133, 931\}$

5. $11011 = 7 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13$
   $$\mathrm{T}(11011) = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} 1 & , & 7 & , & 11 & , & 13 & , & 77 & , & 91 \\ 11011 & , & 1573 & , & 1001 & , & 847 & , & 143 & , & 121 \end{array} \right\}$$

6. $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 31$

7. $3059 = 7 \cdot 19 \cdot 23, \qquad \mathrm{T}(3059) = \left\{ \begin{array}{ccccccc} 1 & , & 7 & , & 19 & , & 23 \\ 3059 & , & 437 & , & 161 & , & 133 \end{array} \right\}$

8. $819 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{T}(819) = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1, & 3, & 7, & 9, & 13, & 21 \\ 819, & 273, & 117, & 91, & 63, & 39 \end{array} \right\}$
   $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{ggT}(819, 1001) = 7 \cdot 13 = 91$

3.1.3 Begriff der Potenz, Darstellen großer Zahlen mit Zehnerpotenzen

1. (a) 22^3, 23^2, 32^2, 2^{23}, 2^{32}, 3^{22}, 2^{2^3}, 2^{3^2}, 3^{2^2}
   (b) $3^{22} = 3^{11} \cdot 3^{11} = 177\,147 \cdot 177\,147 = 31\,381\,059\,609$
   $[2^{32} = 4\,294\,967\,296,\ 22^3 = 10\,648]$

2. (a) 17 300 000 000 000, siebzehn Billionen dreihundert Milliarden
   (b) 999 999 876 543 210, eine Billiarde

3. (a) 9: 7 Schritte: 10 - 5 - 6 - 3 - 4 - 2 - 1
   27: 7 Schritte: 28 - 14 - 7 - 8 - 4 - 2 - 1
   31: 6 Schritte: 32 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1
   21: 8 Schritte: 22 - 11 - 12 - 6 - 3 - 4 - 2 - 1
   1000: 12 Schritte: 500 - 250 - 125 - 126 - 63 - 64 - 32 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1
   (b) 10000: 20 Schritte, 776: 15 Schritte, 9999: 21 Schritte
   (c) Es gibt viele Zahlen, bei denen es genau 8 Schritte dauert, z. B. 18, 54, 61, 256
   (d)

Startzahl	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Anzahl Schritte	7	6	6	5	6	5	5	4	9	8

   (e) Das Halbierungsspiel endet schnell bei allen Zahlen, die man immer wieder durch zwei teilen kann. Das sind die Zweierpotenzen wie 2^4, 2^7. Das Halbierungsspiel dauert lange, bei den ungeraden Zahlen, die um eins größer sind als die Zweierpotenzen. Durch das Addieren entfernt man sich immer wieder von einer Zweierpotenz.
   (f) vgl. (e)
   (g) Von den Zahlen unter 100 erfordert die Zahl 65 die meisten Schritte, nämlich 13 Schritte. 65 ist eins mehr als die Zweierpotenz 64 und die nächste Zweierpotenz ist schon größer als 100.

4. (a) 12: 7 Schritte, 24: 3 Schritte, 119: 5 Schritte, 125: 3 Schritte, 126: 19 Schritte
   (b) Das Fünferspiel endet schnell bei allen Zahlen, die man immer wieder durch 5 teilen kann. Das sind die Fünferpotenzen wie 5^2, 5^3. Das Fünferspiel dauert lange, bei den Zahlen, die um eins größer sind als die Fünferpotenzen. Durch das Addieren entfernt man sich immer wieder von einer Fünferpotenz.
   (c) vgl. (b)

5.

3	6	1	4	4
2	2	0	9	5
2	5	0	5	2
8	1	1	6	5
9	6	1	4	4

6. (a) Eine Eins und $7^7 = 823\,543$ Nullen

   (b) $823\,544\,\mathrm{s} = 9\,\mathrm{d}\,12\mathrm{h}\,45\,\mathrm{min}\,44\,\mathrm{s}$

7. (a) Eine Eins und $10^7 = 10\,000\,000$ Nullen

   (b) $10\ 000\,001\,\mathrm{s} = 115\,\mathrm{d}\,17\mathrm{h}\,46\,\mathrm{min}\,41\,\mathrm{s}$

8. $2^{21} = 1024 \cdot 1024 \cdot 2 = 2\,097\,152$

9. $10 - 10 < 10 : 10 < 10 + 10 < 10 \cdot 10 < 10^{10}$

10. (a) 10^{32}, 10^{28}, 10^{53}

    (b) 10^{10} = zehn Milliarden, 10^{14} = hundert Billionen
    10^{19} = zehn Trillionen, 10^{29} = hundert Quadrilliarden
    10^{35} = hundert Quintilliarden, 10^{40} = zehn Sextilliarden
    10^{45} = eine Septilliarde, 10^{50} = hundert Oktillionen
    10^{65} = hundert Dezilliarden

    (c) 35

    (d) 12 Sextillionen 5 Quintilliarden 60 Quintillionen 700 Quadrilliarden

    120 Quadrillionen 309 Trilliarden 876 Trillionen 3 Billionen hunderttausend

11. (a) $2^8 = 256$ verschiedene Zeichen

    (b)

Vorsilbe	normal	Computer
Kilo	$10^3 = 1000$	$2^{10} = 1024$
Mega	$10^6 = 1\,000\,000$	$2^{20} = 1024^2 = 1\,048\,576$
Giga	$10^9 = 1\,000\,000\,000$	$2^{30} = 2^{20} \cdot 1024 = 1\,073\,741\,824$
Tera	$10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$	$2^{40} = 2^{30} \cdot 1024 = 1\,099\,511\,627\,776$

    (c) Zahl der Zeichen: $125 \cdot 2^{30} = 134\,217\,728\,000$

    Zahl der Seiten: $134\,217\,728\,000 : 3200 = 41\,943\,040$

    Zahl der Blätter: $41\,943\,040 : 2 = 20\,971\,520$

    Dicke des Buches: $209\,715{,}2\,\mathrm{cm} = 2\,\mathrm{km}\,97\,\mathrm{m}\,15\,\mathrm{cm}\,2\,\mathrm{mm}$

3.1.4 Rechengesetze

1. (a) Der Wert des Produkts wird größer.
   (b) Der Wert des Produkts wird größer.
   (c) Der Wert des Quotienten wird größer.
   (d) Der Wert des Quotienten wird kleiner.

2. (a) Der Wert des Produkts wird um den zweiten Faktor größer.
   (b) Der Wert des Produkts wird um den ersten Faktor größer.
   (c) Der Wert des Quotienten wird um 1 größer.
   (d) Der Wert des Quotienten wird um 2 größer.

3. (a) $6^4 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 \cdot 2 \cdot 3^4 = 1000 \cdot 162 = 162\,000$
   (b) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 : 3 : 3 : 2 : 2 : 2 : 2 = 9$
   (c) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 : 5 : 5 : 5 : 5 : 5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 27 \cdot 5 = 135$
   (d) $(77 + 66) : (77 - 66) = (77 + 66) : 11 = 7 + 6 = 13$

4. $18^4 : 3^7 = 2^4 \cdot 3^8 : 3^7 = 16 \cdot 3 = 48$ $(104\,976 : 2187 = 48)$

5. $12 - (2 \cdot 5)^3 = 12 - 10^3 = 12 - 1000 = -988$
   $12 - 2 \cdot 5^3 = 12 - 2 \cdot 125 = 12 - 250 = -238$
   $(12 - 2 \cdot 5)^3 = 2^3 = 8$
   $(12 - 2) \cdot 5^3 = 10 \cdot 125 = 1250$
   $[(12 - 2) \cdot 5]^3 = 50^3 = 125\,000$

6. $30 - (4 \cdot 5)^4 = 30 - 2^4 \cdot 10^4 = 30 - 160\,000 = -159\,970$
   $30 - 4 \cdot 5^4 = 30 - 100 \cdot 25 = 30 - 2500 = -2470$
   $(30 - 4 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10\,000$
   $(30 - 4) \cdot 5^4 = 26 \cdot 625 = 16\,250$
   $[(30 - 4) \cdot 5]^4 = 130^4 = 16\,900^2 = 285\,610\,000$

3.1.5 Gliedern einfacher Terme und Berechnen ihrer Werte

1. (a) Z. B. $25 \cdot 4 - 9 \cdot 11 = 1$, $25 - 9 - 11 - 4 = 1$, $4 \cdot 9 - 11 - 25 = 0$
   (b) Z. B. $25 \cdot 4 + 11 - 9 = 102$, $9 \cdot 11 - 4 + 25 = 120$, $25 \cdot 4 + 9 + 11^0 = 110$

3.1.6 Zählprinzip, Veranschaulichung in Baumdiagrammen

1. (a)
   (b)
   (c)
   (d) Spielende nach dem zweiten Wurf liefert eine gerade Punktzahl;
   Spielende nach dem dritten Wurf heißt, eine Zahl zweimal und eine weitere Zahl, also z. B. 1 - 2 - 1. 3 kann mit drei Würfen nur mit 1 - 1 - 1 erzeugt werden, was nicht möglich ist und auch nicht mit mehr als drei Würfen.
   (e) $27 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 6$
   (f) vier verschiedene Spielverläufe: 2 - 1 - 2, 1 - 2 - 2, 1 - 3 - 1, 3 - 1 - 1

2.

3. (a) bei 3, nämlich 25, 49, 81
   (b) 9

4. (a) $10^4 = 10000$
   (b) $4^4 = 256$
   (c) 6 Möglichkeiten: 1354, 1534, 3154, 3514, 5134, 5314
   (d) 12 Möglichkeiten:1173, 1137, 1371, 1731, 1713, 1317, 7113, 3117, 7131, 3171, 3711, 7311
   (e) Sie unterscheiden sich um mindestens 18, z. B. $3597 - 3579$.
   (f) 4 Möglichkeiten: 8070, 8173, 8276, 8379

5. 6 Blumentöpfe, da $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 > 365$ und $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 < 365$

6. (a) $6^3 = 216$ (b) $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$,
   (c) 8, nämlich 121, 144, 225, 256, 324, 361, 441, 625

7. 26, 27

8. Mannschaften spielen pro Saison zweimal gegeneinander, also $20 \cdot 19 = 380$ Spiele

9. (a) Wenn Lisa Pech hat, erwischt sie das erste grüne Bärchen erst, wenn alle anderen Bärchen weg sind, d. h. spätestens beim $27 + 18 + 25 + 1 = 71$ mal erwischt sie einen grünen Bären.
   (b) Im ungüstigsten Fall bleiben nur noch alle Bärchen einer Farbe übrig. Da die wenigsten Bärchen weiß sind, tritt der ungünstigste Fall ein, wenn nur noch die 18 weißen Bären in der Tüte zurückbleiben, also nach $27 + 33 + 25 = 85$ Ziehungen. Spätestens nach 86 Ziehungen hat Lisa von jeder Farbe ein Gummibärchen.

(c) Im ungüstigsten Fall hat sie nach 8 Ziehungen genau 2 Bären von jeder Farbe. Bei der 9. Ziehung bekommt sie sicher den 3. Bären einer Farbe.

10. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten

11. (a) 27 Zahlen: 789, 798, 879, 897, 978, 987, 778, 787, 877, 779, 797, 977, 887, 878, 788, 889, 898, 988, 997, 979, 799, 998, 989, 899, 777, 888, 999
    (b) 6 Zahlen: 789, 798, 879, 897, 978, 987
    (c) 18 Zahlen: 890, 809, 980, 908, 889, 898, 988, 880, 808, 990, 909, 998, 989, 899, 800, 900, 888, 999,
    (d) 4 Zahlen: 890, 809, 980, 908

12. Es gibt $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Summanden.

    An der Einerstelle tritt jede Ziffer 24-mal $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$ auf $\Rightarrow$ Summe der Einerstellen $24 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = 600$. An jeder anderen Stelle ergibt sich analog 600 $\Rightarrow$ Summe $= 600 + 600 \cdot 10 + 600 \cdot 100 + 600 \cdot 1000 + 600 \cdot 10000 = 600 \cdot 11111 = 6666600$

13. (a) Iris muss mindestens acht Zahlen nennen: 222, 221, 212, 122, 111, 112, 121, 211
    (b) Iris muss zwei Zahlen nennen: 222, 111. Jede der acht Möglichkeiten enthält mindestens einen Zweier oder mindestens einen Einser.
    (c) Es genügen wieder die Zahlen 222, 111, da jede der acht Möglichkeiten mindestens zwei Zweier oder mindestens zwei Einser enthält.

14. (a) 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12
    (b) Vilsbiburg gegen Seyboldsdorf: unentschieden,
    Vilsbiburg gegen Frontenhausen: Vilsbiburg siegt,
    Vilsbiburg gegen Geisenhausen: Vilsbiburg siegt,
    Seyboldsdorf gegen Frontenhausen: Seyboldsdorf siegt,
    Seyboldsdorf gegen Geisenhausen: unentschieden,
    Frontenhausen gegen Geisenhausen: Frontenhausen siegt

15. 12 Möglichkeiten

16. (a) 6 (b) 26 bzw. 225

17. (a) $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
    (b) $5^3 = 125$

18. (a) 6, 120

    (b) 7 verschiedene Produkte: 5, 7, 11, $5 \cdot 7 = 35$, $5 \cdot 11 = 55$, $7 \cdot 11 = 77$, $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$, $5 \cdot 7 \cdot 11 - 5 = 380$

    (c) 5, 17, $5 \cdot 5 = 25$, $5 \cdot 17 = 85$, $5^2 \cdot 17 = 425$

    (d) Primfaktoren: 2, 3, 19
    $2+3 = 5$, $2+19 = 21$, $3+19 = 22$, $2-3 = -1$, $2-19 = -17$, $3-19 = -16$, $3-2 = 1$, $19-2 = 17$, $19-3 = 16$

19. (a) $26^2 = 676$

    (b) $26^3 = 17576$

    (c) $26^8 = 26^3 \cdot 26^3 \cdot 26^2 = 208\,827\,064\,576$

    (d) Es gibt $2 \cdot 26 + 8 = 60$ verschiedene Zeichen.

Mit 2 Zeichen	:	$60^2 = 3600$
Mit 3 Zeichen	:	$60^3 = 216\,000$
Mit 8 Zeichen	:	$60^8 = 167\,961\,600\,000\,000$

20. (a) 12 (b) $M = \{17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$, $|M| = 9$

21. $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

22. (a) $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$,

    $8! = 40320$, $9! = 362880$, $10! = 3628800$

    (b) $21! = 20! \cdot 21 = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000 \cdot 21 = 51\,090\,942\,171\,709\,440\,000 =$

    51 Trillionen 90 Billiarden 942 Billionen 171 Milliarden 709 Millionen

    440 Tausend

    (c) 30! enhält 10 Faktoren, die ein Vielfaches von 3 sind, 3 Faktoren, die ein Vielfaches von $3^2 = 9$ sind und einen Faktor, der ein Vielfaches von $3^3 = 27$ ist. Insgesamt enthält 30! also $10 + 3 + 1 = 14$ mal den Faktor 3.

    (d) 50! enhält 25 gerade Faktoren, 12 Faktoren aus V_4, 6 Faktoren aus V_8, 3 Faktoren aus V_{16} und 1 Faktor aus V_{32}. Insgesamt enthält 50! also $25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 47$ mal den Faktor 2.

    (e) 1000! enthält sicher mehr Faktoren 2 als 5. Jedes Paar aus den Faktoren 2 und 5 ergibt eine Schlussnull. Die Zahl der Schlussnullen ist also gleich der Zahl aller Primfaktoren 5. Die Zahlen von 1 bis 1000 enthalten $1000 : 5 = 200$ Vielfache von 5. $200 : 5 = 40$ dieser Zahlen sind Vielfache von 25 und enthalten einen weiteren Faktor 5. $40 : 5 = 8$ der Vielfachen von 25 sind sogar Vielfache von 125 und tragen noch einen Faktor 5 bei. Als letztes liefert die Zahl $625 = 5^4$ noch einen Faktor 5. Insgesamt hat man also $200 + 40 + 8 + 1 = 249$ Faktoren 5 und genauso viele Schlussnullen. Nur zur Information: 1000! hat 2568 Stellen.

23. (a) $11! = 39\,916\,800$

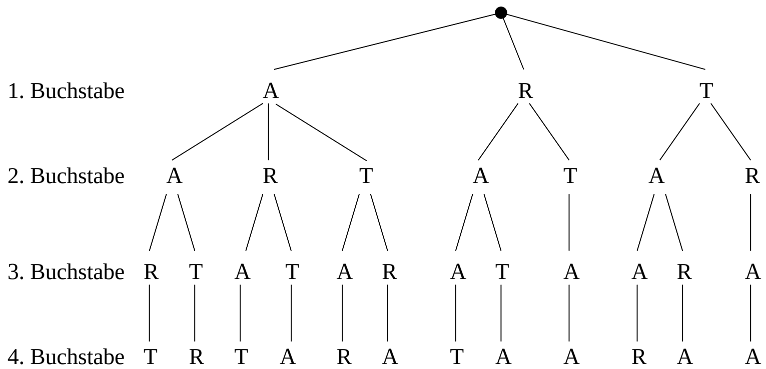
    (b) $13! = 39\,916\,800 \cdot 12 \cdot 13 = 6\,227\,020\,800$

    $6\,227\,020\,800\,\text{min} = 4\,324\,320\,\text{d} \approx 11\,847\,\text{a}$

24. (a) $4! = 24$

    (b) $6! = 720$

    (c)

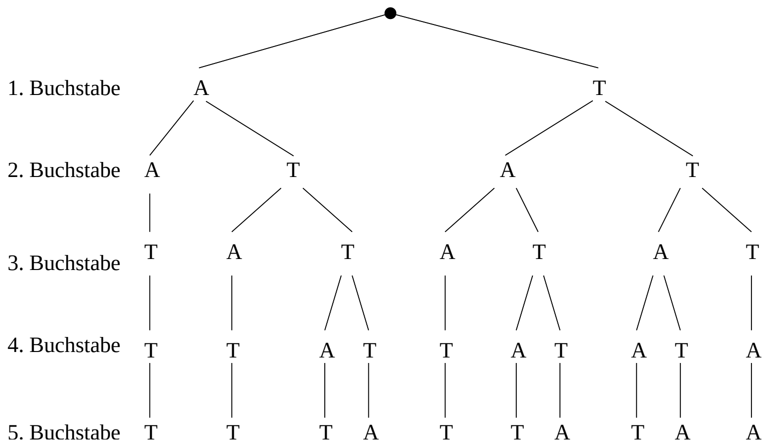


Es geht auch mit einer Tabelle (die beiden freien Plätze können mit RT und TR belegt werde, also zwei Möglichkeiten für jede Zeile):

A A A	A 	 A 	 A	 3
	A A	A 	 A	 2
		A	A	1

$(3 + 2 + 1) \cdot 2 = 12$

(d)



Es geht auch mit einer Tabelle:

A A A A	A	 A	 A	 A	 4
	A A A	A	 A	 A	 3
		A A	A	 A	 2
			A	A	1

$4+3+2+1=10$

25. (a) Erste Stelle nur Ziffern 1 bis 9: $9 \cdot 9 = 81$

(b)

dreistellig:	$9 \cdot 9 \cdot 8 = 81 \cdot 8 = 648$
vierstellige:	$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 648 \cdot 7 = 4\,536$
fünfstellige:	$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 4\,536 \cdot 6 = 27\,216$
sechsstellige:	$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 27\,216 \cdot 5 = 136\,080$
siebenstellige:	$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 136\,080 \cdot 4 = 544\,320$
achtstellige:	$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 544\,320 \cdot 3 = 1\,632\,960$
neunstellige:	$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1\,632\,960 \cdot 2 = 3\,265\,920$
zehnstellige:	$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,265\,920 \cdot 1 = 3\,265\,920$

26. (a) Jedes Mädchen hat $3 \cdot 2 = 6$ verschiedene Outfits. Zu jeder Sitzordnung gibt es $6^4 = 1296$ verschiedene Outfits. Da es $4! = 24$ verschiedene Sitzordungen gibt, ist die Geamtzahl der möglichen Aufnahmen $1296 \cdot 24 = 31\,104$.

(b) Es gibt $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11\,880$ verschieden Anordnungen der Hüte auf den Köpfen der Mädchen.

Es gibt $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ verschieden Möglichkeiten, die acht Brillen aufzusetzen.

Damit gibt es $11\,880 \cdot 1680 = 19\,958\,400$ verschiedene Outfits, die Zahl der verschiedene Aufnahmemöglichkeiten ist also

$$\underbrace{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}_{\text{Hüte}} \cdot \underbrace{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}_{\text{Brillen}} \cdot \underbrace{4!}_{\text{Anordnungen}}$$

$19\,958\,400 \cdot 24 = 479\,001\,600$.

Zur Abschätzung der Zeit nehmen wir Folgendes an: In 10 s schaffen sie eine Aufnahme und am Tag wird 10 h lang fotografiert. Damit schaffen sie pro Tag 3600 Aufnahmen und sie brauchen $479\,001\,600 : 3600 = 133\,056$ Tage oder ungefähr 365 Jahre.

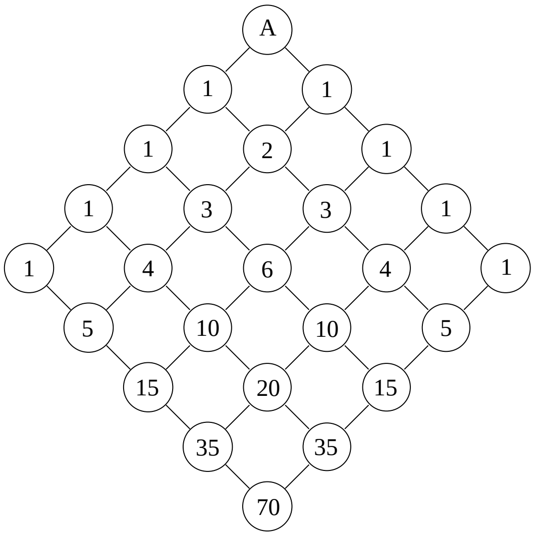
(c) Die Gleichheit der Ergebnisse ist Zufall und gilt nur bei 2 Brillen und 3 Hüten (oder 3 Brillen und 2 Hüten) pro Mädchen, die Zahl der Mädchen ist aber beliebig. Z.B. gibt es mit 7 Mädchen 21 Hüte und 14 Brillen:

$$\underbrace{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}_{\text{Hüte}} \cdot \underbrace{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}_{\text{Brillen}} \cdot \underbrace{7!}_{\text{Anordnungen}} = 21!$$

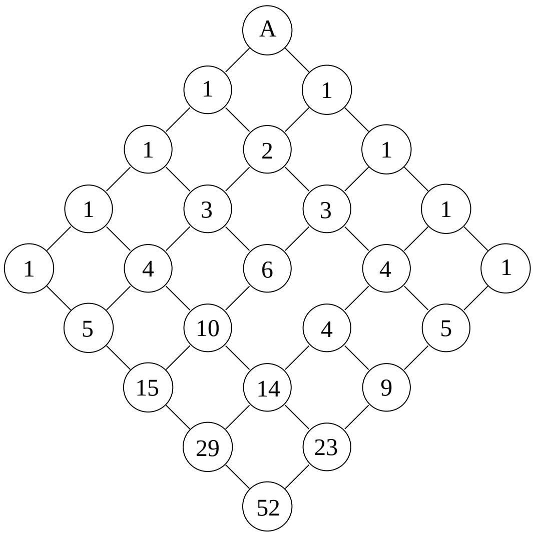
Bei 5 Hüten und 2 Brillen pro Mädchen und 4 jungen Damen ist die Gesamtzahl der Fotos (20 Hüte, 8 Brillen):

$$\underbrace{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}_{\text{Hüte}} \cdot \underbrace{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}_{\text{Brillen}} \cdot \underbrace{4!}_{\text{Anordnungen}} \neq 20!$$

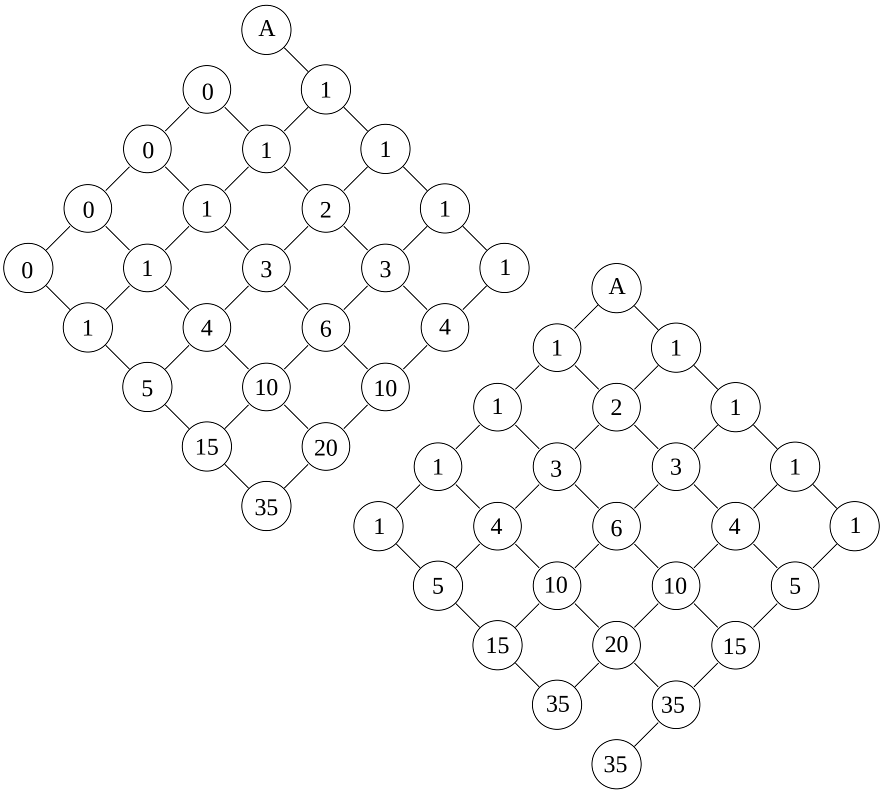
27. (a)



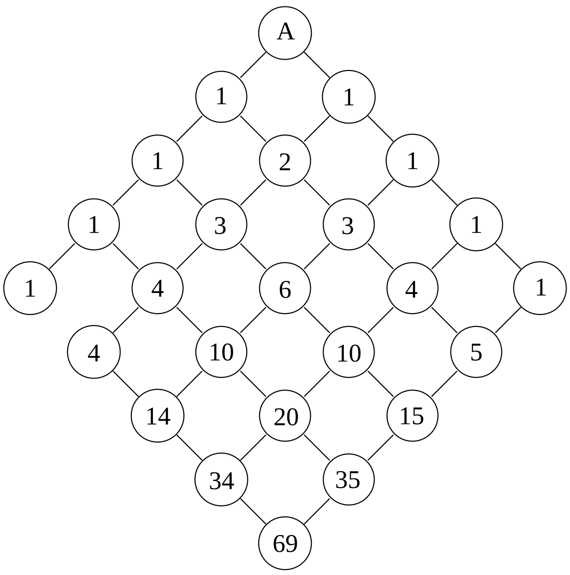
(b)

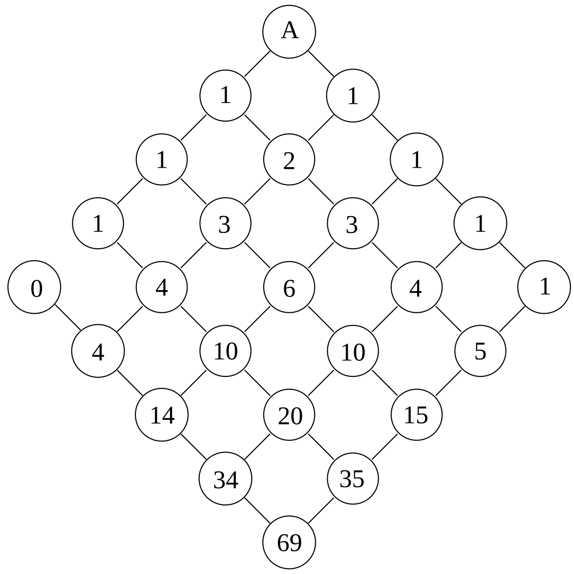


(c) Möglichst wenig:

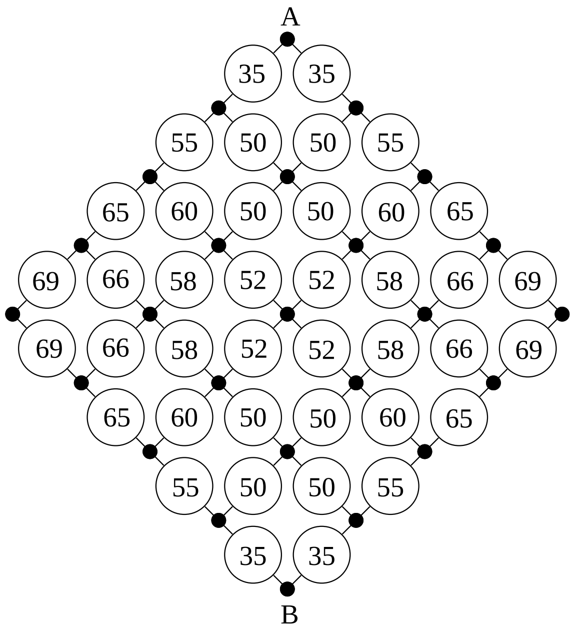


Möglichst viel:

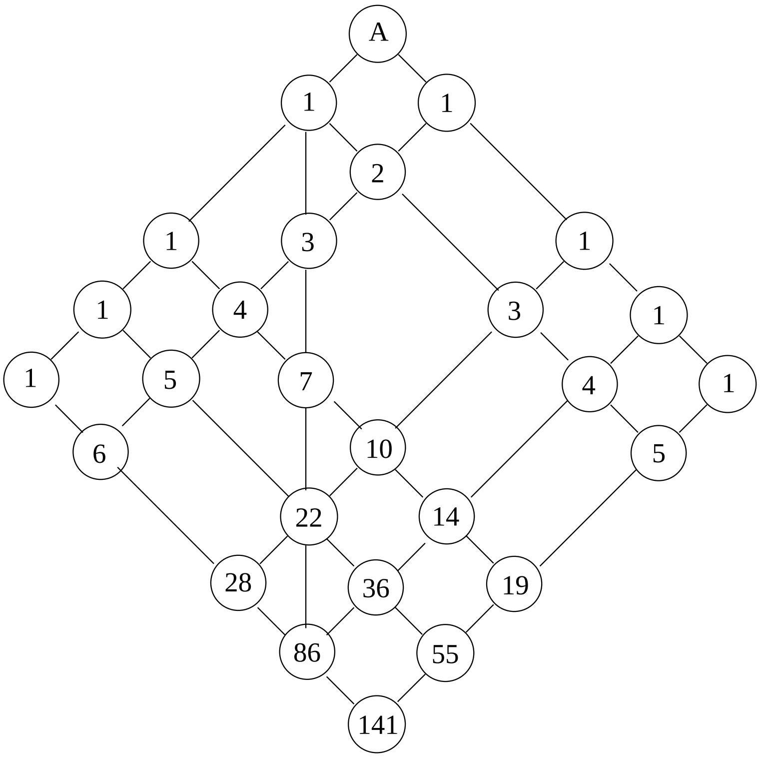




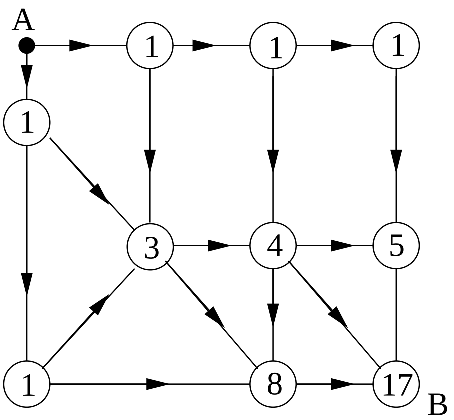
Alle Möglichkeiten: die Zahlen in den Kreisen geben die Zahlen aller möglichen Wege an, wenn sich die Sperrung am Ort des Kreises befindet:



28.



29.



30. $\underbrace{(-18)^{37}}_{\ominus} \cdot \underbrace{(+2)^{17}}_{\oplus} \cdot \underbrace{(-100)^{18}}_{\oplus} \cdot \underbrace{(-3)^{5}}_{\ominus} = \underbrace{\text{Ergebnis}}_{\oplus}$

3.2 Multiplikation und Division ganzer Zahlen

3.2.1 Berechnen von Produkt- und Quotientenwerten

1. (a) vier Produkte: $10 \cdot 11$, $-10 \cdot (-11)$, $11 \cdot 11$, $-11 \cdot (-11)$
   (b) 22 Produkte: $0\cdot$ beliebiger zweiter Faktor $\neq 0$,
   6 Produkte: $(-1) \cdot (-1)$, $1 \cdot (\pm 1)$, $(-1) \cdot (-2)$, $1 \cdot (\pm 2)$,