SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Jahrgangsstufe 5 (Gymnasium)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

7. Januar 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Weiterentwicklung der Zahlvorstellung

1.1 Die natürlichen Zahlen

1.1.1 Menge der natürlichen Zahlen, Zahlenstrahl

1. **Quersumme**

   (a) Welches ist die kleinste dreistellige Zahl mit der Quersumme 12?

   (b) Sabine hat die Quersumme einer vierstelligen Zahl berechnet und als Ergebnis 38 erhalten. Nimm zu diesem Ergebnis Stellung.

   Quelle: VERA C 2008

Lösung: (a) 129

(b) Quersumme einer vierstelligen Zahl kann höchstens $9 + 9 + 9 + 9 = 36$ sein.

2. Jutta und Klaus waren bei der Klassensprecherwahl aufgestellt. Jedes Kind in der Klasse hat eine Stimme abgegeben. Die Stimmen wurden aufgeschrieben.

	Jutta	Klaus
Jungen	7	5
Mädchen	6	8

   Was erfährst du alles?

   Literatur: Materialien Mathematik M49, Weiterentwicklung der Unterrichtskultur im Fach Mathematik (WUM), Anregungen für neue Wege im 5. Schuljahr, Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart

Lösung: In der Klasse sind 12 Jungen, 14 Mädchen, also 26 Schüler. Jutta und Klaus erhalten jeweils 13 Stimmen. Es kommt bei dieser Wahl zu keiner Entscheidung!

3. Welche Summe haben die ungeraden Zahlen zwischen 0 und 100? Wie viele gibt es?

   Quelle: G. M. Ziegler, FOCUS 23/2006

Lösung: Es gibt 50 ungerade Zahlen, d.h. 25 Paare ungerader Zahlen.
$1 + 3 + 5 + \cdots + 99 = (1 + 99) + (3 + 97) + \cdots + (49 + 51) = 100 \cdot 25 = 2500$

4. Fülle die Tabelle aus

Vorgänger		898 989		
Zahl	115			1 519 900
Nachfolger			9000	

Literatur: Materialien Mathematik M49, Weiterentwicklung der Unterrichtskultur im Fach Mathematik (WUM), Anregungen für neue Wege im 5. Schuljahr, Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart

Lösung:

Vorgänger	114	898 989	8998	1 519 899
Zahl	115	898 990	8999	1 519 900
Nachfolger	116	898 991	9000	1 519 901

5. Zeichne einen Zahlenstrahl von 0 bis 100 000, auf dem die Zahl 10 000 von der Null einen Abstand von 1 cm hat.

   Trage auf dem Zahlenstrahl die Zahlen 21 356, 57 123, 78 191, 32 465 und 91 234 ein.

   Literatur: Materialien Mathematik M49, Weiterentwicklung der Unterrichtskultur im Fach Mathematik (WUM), Anregungen für neue Wege im 5. Schuljahr, Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart

Lösung: Zahlen erst auf Tausender runden und dann eintragen!

6. Zeichne einen Zahlenstrahl von 0 bis 1 000 000, auf dem die Zahl 100 000 von der Null einen Abstand von 1 cm hat.

   Trage auf dem Zahlenstrahl die Zahlen 207 356, 785 191, 317 465 und 975 234 ein.

   Literatur: Materialien Mathematik M49, Weiterentwicklung der Unterrichtskultur im Fach Mathematik (WUM), Anregungen für neue Wege im 5. Schuljahr, Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart

Lösung: Zahlen erst auf Zehntausender runden und dann eintragen!

7. (a) Zeichne einen Zahlenstrahl bis 1200. Wähle 1 cm für je 100 und trage dann die Zahlen 350, 425, 504 und 1195 möglichst genau ein.

(b) Hätte man bei der Teilaufgabe (a) auch schreiben können: „Wähle 1 cm für je 10“? Begründe deine Meinung!

Literatur: Materialien Mathematik M49, Weiterentwicklung der Unterrichtskultur im Fach Mathematik (WUM), Anregungen für neue Wege im 5. Schuljahr, Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart

Lösung:

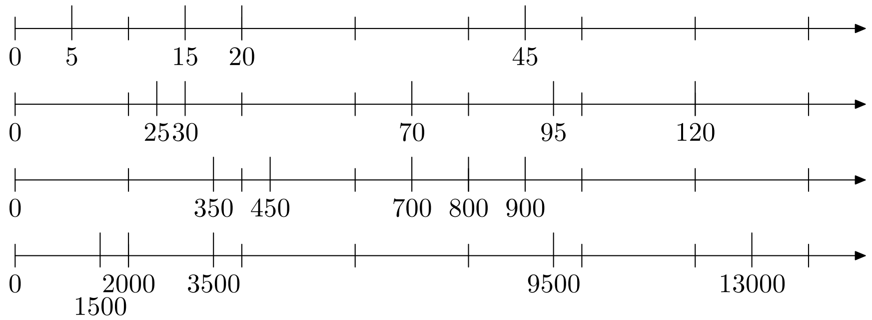
8. Bestimme alle zweistelligen natürlichen Zahlen x, welche zugleich folgende Bedingungen erfüllen:
   - x ist größer als 60.
   - x hat genau vier Teiler.
   - x ist ungerade.
   - vertauscht man bei x die beiden Ziffern, so erhält man eine Primzahl.

   Quelle: Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur, ISB 2001

Lösung: 91 und 95

9. Trage die folgenden Zahlen auf einem geeigneten Zahlenstrahl ein:
   (a) 20, 5, 45, 15
   (b) 70, 120, 30, 25, 95
   (c) 700, 350, 800, 450, 950
   (d) 13 000, 1 500, 9 500, 2 000, 3 500

Lösung:



10. Trage die folgenden Zahlen auf einem geeigneten Zahlenstrahl ein. Welche Zahl liegt in der Mitte der beiden Zahlen am Zahlenstrahl?

(a)	$-7, 5$	(b)	$-15, -3$	(c)	$-25, 15$
(d)	$-65, 15$	(e)	$-120, -60$	(f)	$-2\,500, 7\,000$

Lösung: (a) -1 (b) -9 (c) -5
(d) -25 (e) -90 (f) $2\,250$

11. Auf einem Zahlenstrahl sollen die Zahlen 21 und 49 möglichst genau eingezeichnet werden. Wähle eine geeignete Einheit (nicht 1 mm!), zeichne den Zahlenstrahl und trage die beiden Zahlen ein.

Lösung: Z. B. $1 \mathrel{\widehat{=}} 2\,\text{mm}$ oder $7 \mathrel{\widehat{=}} 1\,\text{cm}$

1.1.2 Diagramme

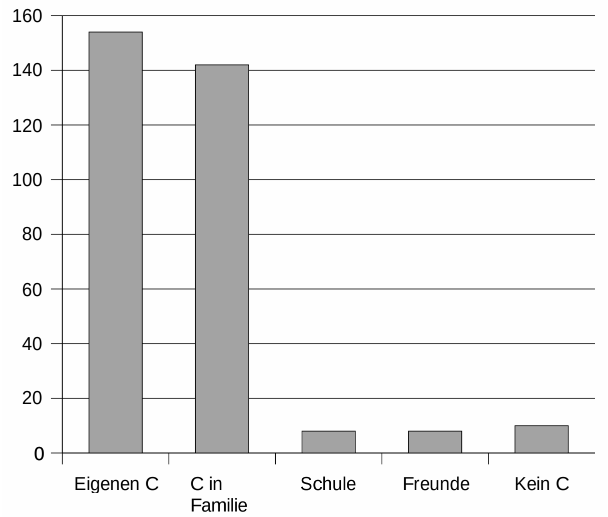
1. Wie viele Schüler in deiner Klasse
   - sind Mädchen und wie viele sind Jungen?
   - kommen zu Fuß, mit dem Fahrrad, mit dem Bus, mit dem Auto oder mit einem anderen Verkehrmittel zur Schule?
   - sind 9, 10 , 11 oder 12 Jahre alt?

   Stelle die Daten jeweils in einer Tabelle und in einem Diagramm dar.

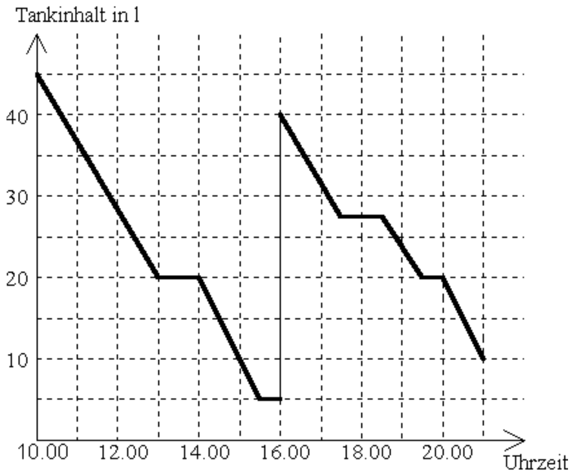
2. Von 322 Schülern haben 154 einen eigenen Computer, 142 einen Computerzugang in der Familie (aber keinen eigenen Computer), 8 haben einen Computerzugang in der Schule, 8 einen Computerzugang bei Freunden und 10 haben keinen Computerzugang.

   Stelle die verschiedenen Arten des Computerzugangs ein einem Diagramm dar.

Lösung: Diagramm:



3. Das Diagramm zeigt, wie viel Benzin sich zu jedem Zeitpunkt einer Reise im Tank eines Fahrzeugs befindet.



   (a) Beschreibe knapp, was um 16:00 Uhr geschieht.

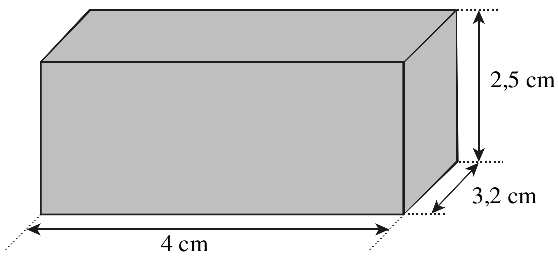
   (b) Wie viele Liter Benzin hat das Auto auf der um 10:00 Uhr beginnenden und 21:00 Uhr endenden Reise verbraucht?

   Literatur: Bayerischer Mathematik Test 2000

Lösung: (a) Es wurden $35\,\mathrm{l}$ getankt.

(b) $70\,\mathrm{l}$

4. Die nicht maßstabsgetreue Skizze zeigt einen Quader und dessen Abmessungen. Berechne die Oberfläche des Quaders.

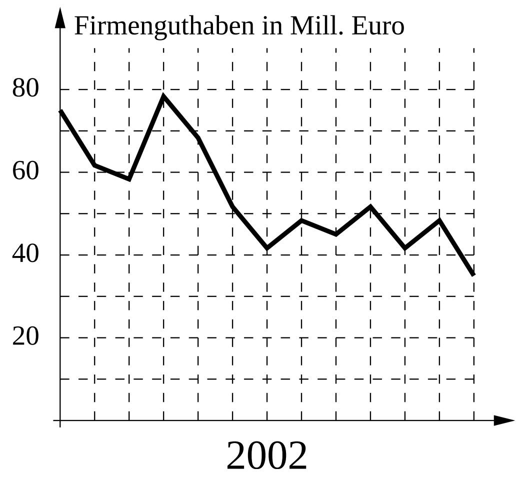


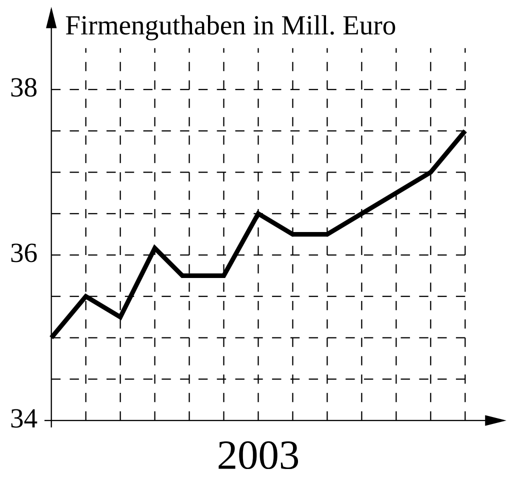
   Literatur: Bayerischer Mathematik Test 2000

Lösung: $2 \cdot (40\,\mathrm{mm} \cdot 32\,\mathrm{mm} + 40\,\mathrm{mm} \cdot 25\,\mathrm{mm} + 32\,\mathrm{mm} \cdot 25\,\mathrm{mm}) =$

$6160\,\mathrm{mm}^2 = 61\,\mathrm{cm}^2\,60\,\mathrm{mm}^2$

5. Mit den Worten „Im Jahr 2002 mussten wir zwar Verluste hinnehmen, aber wie Sie sehen, ging es 2003 wieder steil bergauf" legt der Vorstand einer Firma dem Aufsichtsrat folgende Diagramme vor. Was würdest du als Aufsichtsrat dem Vorstand antworten?





Lösung: 2002 betrug der Verlust 40 Mill. Euro, 2003 der Gewinn aber nur 2,5 Mill. Euro.

6. In der Klasse 6e sind 28 Schüler.
   (a) In der ersten Mathematikschulaufgabe, die sehr leicht war, ergab sich folgende Notenverteilung:

1	2	3	4	5	6
11	9	6	1	1	0

   Stelle die Notenverteilung in einem Balkendiagramm dar und berechne die Durchschnittsnote.

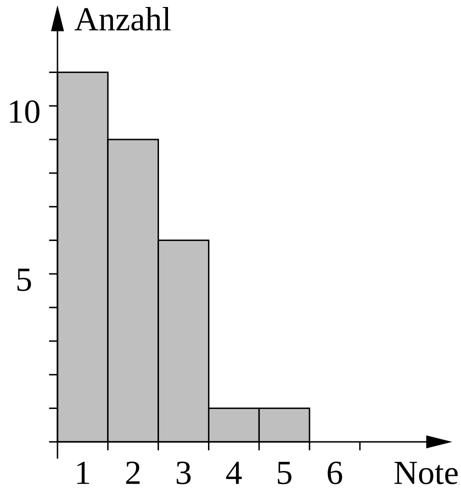
   (b) Nach dem Erfolg der ersten Schulaufgabe glaubten viele Schüler, dass man in Mathematik nicht viel lernen muss. Promt fiel die zweite Schulaufgabe sehr schlecht aus:

1	2	3	4	5	6
1	2	6	10	5	4

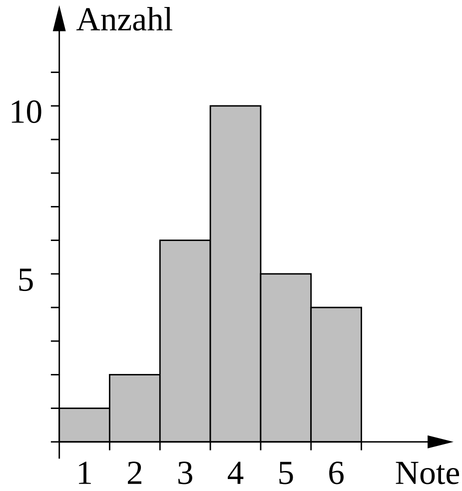
   Stelle die Notenverteilung wieder in einem Balkendiagramm dar und berechne die Durchschnittsnote.

   (c) Die Durchschnittsnote der dritten Schulaufgabe war genau drei. Finde eine mögliche Notenverteilung, in der jede Note von eins bis sechs mindestens einmal vorkommt und zeichne das Balkendiagramm der Verteilung.

Lösung:



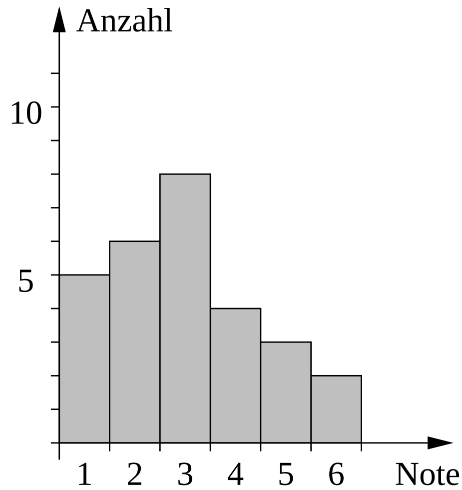
(a) Durchschnittsnote:
$(11\cdot1+9\cdot2+6\cdot3+1\cdot4+1\cdot5) : 28 = 2$



(b) Durchschnittsnote:
$(1\cdot1+2\cdot2+6\cdot3+10\cdot4+5\cdot5+4\cdot6) : 28 = 4$

(c) Ausgangspunkt ist die Verteilung mit 28 mal Note 3. Zweimal Note 3 kann man durch einmal 1 und einmal 5 oder durch einmal 2 und einmal 4 ersetzen. Man kann auch dreimal 3 durch zweimal 4 und einmal 1 oder durch einmal 1, einmal 2 und einmal 6 ersetzen.

1	2	3	4	5	6
0	0	28	0	0	0
1	0	26	0	1	0
1	1	24	1	1	0
2	2	21	1	1	1
4	2	17	1	3	1
4	5	11	4	3	1
5	6	8	4	3	2



Probe:
$(5\cdot1+6\cdot2+8\cdot3+4\cdot4+3\cdot5+2\cdot6) : 28 = 3$

1.1.3 Zehnersystem

1. (a) Nenne die größte vierstellige Zahl, die genau eine 9 enthält.
   (b) Nenne die größte vierstellige Zahl, die genau eine 8 enthält.
   (c) Nenne die größte vierstellige Zahl, die keine Ziffer zweimal enthält.
   (d) Nenne die kleinste vierstellige Zahl, die keine Ziffer zweimal enthält.

Lösung: (a) 9888

(b) 9998

(c) 9876

(d) 1023

1.1.4 Römische Zahlen

1. (a) Gib die kleinste Quadratzahl an, die man mit drei Ziffern schreiben kann.

   (b) Gib die kleinste Quadratzahl an, die man mit drei römischen Zahlzeichen schreiben kann.

Lösung: (a) 100 (b) XVI

2. Wo liegt der Fehler in den Zahlen CMCCIII und VMIII

Lösung: CMCCIII: C vor und nach M
VMIII: V darf nicht vorgestellt werden

3. Schreibe folgende Zahlen in römischen Ziffern: 389, 1499, 299, 2499,

Lösung: CCCLXXXIX, MCDXCIX, CCXCIX, MMCDXCIX

4. (a) Schreibe zu folgenden Zahlen die jeweils um 1 kleinere Zahl in römischen Zahlzeichen und im Zehnersystem auf: CC, DCL, MDCCCX

   (b) Schreibe zu folgenden Zahlen die jeweils um 1 größere Zahl in römischen Zahlzeichen und im Zehnersystem auf: CCLXX, DCCCIX, MCCCLIX

   (c) Schreibe zu folgenden Zahlen die jeweils um 2 kleinere Zahl in römischen Zahlzeichen und im Zehnersystem auf: CXX, MCV, MDCCL

   (d) Schreibe zu folgenden Zahlen die jeweils um 3 größere Zahl in römischen Zahlzeichen und im Zehnersystem auf: CLXIX, DCXC, MCCLXXIX

   (e) Schreibe zu folgenden Zahlen die jeweils um 4 kleinere Zahl in römischen Zahlzeichen und im Zehnersystem auf: CCX, MCCL, MMDCCLXX

Lösung: (a) CXCIX (199), DCXLIX (649), MDCCCIX (1809)

(b) CCLXXI (271), DCCCX (810), MCCCLX (1360)

(c) CXVIII (118), MCIII (1103), MDCCXLVIII (1748)

(d) CLXXII (172), DCXCIII (693), MCCLXXXII (1282)

(e) CCVI (206), MCCXLVI (1246) , MMDCCLXVI (2766)

5. (a) Schreibe als römische Zahl: 18, 560, 249, 3945, 2500
   (b) Schreibe als arabische Zahl: MMDCCCLXXXVII, MMMCCIV, XXIX, XCIX, MCXLIV, CMXLIV

Lösung: (a) XVIII, DLX, CCXLIX, MMMCMXLV, MMD
(b) 2887, 3204, 29, 99, 1144, 944

6. Ordne die Zahlen der Größe nach!
   (a) XII; 56; XXIV
   (b) M; 999; C

   Literatur: PM 1/44, Jg. 2002

Lösung: (a) XII<XXIV< 56
(b) C< 999 <M

1.1.5 Große natürliche Zahlen

1. Die Tabelle zeigt, wie viele Euro-Geldscheine am 31. Mai 2007 in Umlauf waren. Beispielsweise befanden sich von den 200 Euro-Scheinen 153 Millionen Stück in Umlauf.

Wert	Anzahl der Scheine in Millionen
500 EUR	429
200 EUR	153
100 EUR	1116
50 EUR	3983
20 EUR	2244
10 EUR	1804
5 EUR	1325

   (a) Wie hoch war der Gesamtwert aller 50 Euro-Scheine?
   (b) Ungefähr wie viel Prozent aller in Umlauf befindlichen Scheine waren 20 Euro-Scheine? Die notwendigen Rechnungen brauchen nicht exakt ausgeführt zu werden, es genügt jeweils ein Überschlag. Der Lösungsweg muss nachvollziehbar sein.

   Quelle: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 8 der Gymnasien 2008

Lösung: (a) ca. 200 Milliarden Euro
(b) ungefähr 20%

2. **Europa größtes Kaffeelager**

Die Krönung für Berlin: Europas größtes Kaffeelager

Rainer Hildebrands ist zufrieden, und er zeigt es auch: „Nichts steht hier verloren rum. Jedes Ding hat seinen Platz." Das ist mehr als erstaunlich bei bis zu 24 800 gestapelten Paletten, wovon jede 60 Kartons à zwölf Päckchen zu je einem Pfund trägt. In Europas größtem Kaffeedepot, das vor wenigen Tagen in Tempelhof offiziell eingeweiht wurde und in dem die Firma Jacobs Suchard 80 Prozent ihres braunen Geschmackstoffs bunkert, kommt nichts abhanden – noch jedes Pfund erhält elektronisch sein Plätzchen zugewiesen.

Projektleiter Hildebrands arbeitet für das Bremer Logistikunternehmen SGL, das für den Kaffeeröster dieses Lager eingerichtet hat. Sein Blick fällt auf Regal 32, Platz 47, Ebene 1 – eine angebrochene Kiste der bewährten „Krönung". „Selbst Bestellungen über wenige Pfund werden bearbeitet. Kein Gramm entgeht der Datei." 16 Stunden täglich wird auf den zusammen 52 000 Quadratmetern und teilweise fünf Ebenen umgeschichtet, dauernd kommt Ware von der nur acht Kilometer entfernten Jacobs-Rösterei herein, geht für ganz Deutschland und Europa bestimmte Ware hinaus.

Maximal 5000 Paletten können pro Tag bewegt werden, „dann wird's langsam brenzlig", erklärt Hildebrands.

1995 zieht das von der Rewe angemietete Lager nach Großbeeren am südlichen Stadtrand um. Dann wird alles noch größer, noch perfekter. Nur eines vermißt man inmitten der Trillionen gemahlener Kaffeebohnen doch schmerzlich: deren gerühmten Duft. „Wunderbar" ist hier allein die Logistik.

k.r.

Berliner Morgenpost vom 28.6.1993

Der Verfasser behauptet im letzten Abschnitt, „Trillionen gemahlener Kaffeebohnen" würden im Depot lagern. Schreibe einen Leserbrief.

(a) Schätze das Volumen einer Kaffeebohne ab und berechne mit diesem Wert das Volumen von einer Trillion gemahlener Kaffeebohnen.

(b) Wie könnte eine quaderförmige Lagerhalle aussehen, in der eine Trillion gemahlene Kaffeebohnen gelagert werden?

(c) Schätze ab, welche Masse eine Kaffeebohne besitzt und berechne aus den Angaben im ersten Absatz die Anzahl der Kaffeebohnen, die in dem Depot tatsächlich gelagert werden.

(d) Um welchen Faktor hat sich der Autor des Artikels verschätzt?

(e) Wie könnte der Autor des Artikels zu der Angabe „Trillionen“ gekommen sein?

Quelle: Herget/Scholz: Die etwas andere Aufgabe, S. 76

Lösung: (a) Kaffeebohne: Länge: ca. 10 mm; Breite: ca. 7 mm; Höhe: ca. 4 mm. Dies entspricht einem rechnerischen Volumen von $280\,\text{mm}^3$. Abschätzung durch $100\,\text{mm}^3$. Also gilt für das Volumen V von einer Trillion gemahlener Kaffeebohnen: $V \approx 1 Trillion 100\,\text{mm}^3 = 10^{18} \cdot 10^{-6}\,\text{km}^3 = 100\,\text{km}^3$

(b) Beispiel einer Lagerhalle: Länge = Breite = 10 km, Höhe = 1 km. Eine Halle dieses Volumens gibt es auf der Erde sicher nicht.

(c) Masse einer Kaffeebohne: ca. $0,1$ g. Also enthält ein Pfund (500 g) ca. 5000 Kaffeebohnen. Bei 24.800 Paletten *à* 60 Kartons *à* 12 Päckchen zu 500 g können maximal $24800 \cdot 60 \cdot 12.5000 = 8,928 \cdot 101^0 \approx 10^{11}$, also 100 Milliarden Kaffeebohnen gelagert werden.

(d) Für den Faktor f, der das Verhältnis von angeblicher Anzahl und maximaler Anzahl von Kaffeebohnen in der Lagerhalle angibt, gilt ungefähr: $f \approx \frac{10^{18}}{10^{11}} = 10^7 = 10\,Millionen$.
Im Depot lagert also nur der zehnmillionste Teil.

(e) Der Verfasser wollte wohl ausdrucken, dass eine sehr große (unvorstellbar große) Anzahl von Kaffeebohnen im Depot lagert, hat aber den Realitätsgehalt seiner Aussage nicht geprüft.

3. Das Licht legt in einem Jahr die Strecke neun Billiarden vierhundertsechzig Billionen achthundertfünfundneunzig Milliarden zweihunderteinundzwanzig Millionen Meter zurück. Diese Strecke nennt man ein Lichtjahr (1 LJ). Schreibe 1 LJ in Ziffern.

Lösung: 9 460 895 221 000 000 m

4. 27 Schüler kann man auf 10 888 869 450 418 352 160 768 000 000 Arten nebeneinander aufstellen. Wie heißt diese Zahl?

Lösung: 10 Quadrilliarden 888 Quadrillionen 869 Trilliarden 450 Trillionen 418 Billiarden 352 Billionen 160 Milliarden 768 Millionen

5. (a) Schreibe in Worten: 12 000 008 057 020 010
   (b) Schreibe in Ziffern: zehn Billionen fünfzehntausendsiebenundachtzig
   (c) Schreibe in Worten: 11 000 008 507 020 030
   (d) Schreibe in Ziffern: Neun Billionen fünfzigtausendsiebenundachtzig
   (e) Schreibe in Worten: 30 088 207 012 030
   (f) Schreibe in Ziffern: Sieben Billiarden zehn Millionen fünfzehntausendsieben
   (g) Schreibe in Worten: 90 000 020 000 030

Lösung: (a) zwölf Billiarden acht Milliarden siebenundfünfzig Millionen zwanzigtausendzehn
(b) 10 000 000 015 087
(c) elf Billiarden acht Milliarden fünfhundertsieben Millionen zwanzigtausenddreißig
(d) 9 000 000 050 087
(e) dreißig Billionen achtundachzig Milliarden zweihundertsieben Millionen zwölftausenddreißig
(f) 7 000 000 010 015 007
(g) neunzig Billionen zwanzig Millionen und dreißig

6. Schreibe die folgenden Zahlen in Ziffern!
   (a) sieben Billionen dreißig Milliarden dreihundert Millionen
   (b) achthundertviertausendfünfhundertzweiunddreißig

Lösung: (a) 7030300000000
(b) 804532

7. Schreibe die folgenden Zahlen mit Ziffern und als Zahlwort:

$$10^7, \quad 5 \cdot 10^9, \quad 30 \cdot 10^5, \quad 777 \cdot 10^6$$

Lösung: 10 000 000, zehn Millionen
5 000 000 000, fünf Milliarden
3 000 000, drei Millionen
777 000 000, siebenhundertsiebenundsiebzig Millionen

8. Schreibe die folgende Zahl mit allen Ziffern hin:
   acht Oktilliarden zwanzig Sextillionen dreihundert Trilliarden zwei Millionen

Lösung: 8 000 000 000 000 020 000 000 000 000 300 000 000 000 000 002 000 000

9. (a) Schreibe folgende Zahl mit all ihren Ziffern hin:

   30 Trilliarden 500 Billiarden 20 Billionen 4 Millionen =

   (b) Verwandle in die „Sprechschreibweise“ (wie die Angabe von Teilaufgabe (a)):

   10 000 020 003 400 000 050 000 =

   (c) Gib das Ergebnis mit allen Ziffern und in der „Sprechschreibweise“ an:

   1 Billiarde $-1000 =$

Lösung: (a) 30 000 500 020 000 004 000 000

(b) 10 Trilliarden 20 Billiarden 3 Billionen 400 Milliarden 50 Tausend

(c) 999 999 999 999 000 = 999 Billionen 999 Milliarden 999 Millionen 999 Tausend

10. (a) Schreibe folgende Zahl mit all ihren Ziffern hin:
    60 Quadrilliarden 5 Trillionen 400 Milliarden 50 Millionen und 3

    (b) Verwandle in die „Sprechschreibweise“ (wie die Angabe von Teilaufgabe (a)):

    10 203 034 005 600 070 890 004 078

Lösung: (a) 60 000 000 005 000 000 400 050 000 003

(b) 10 Quadrillionen 203 Trilliarden 34 Trillionen 5 Billiarden 600 Billionen
70 Milliarden 890 Millionen 4 Tausend 78

11. Schreibe das Ergebnis ausführlich und in der lesbaren Form hin:

    (a) 1 Billiarde - 10 Milliarden =

    (b) 1 Trillion - 100 Billionen + 20 Milliarden =

Lösung: (a) 999 990 000 000 000 = 999 Billionen 990 Milliarden

(b) 999 900 020 000 000 000 = 999 Billiarden 900 Billionen 20 Milliarden

12. Du hast sechs Zahlenkärtchen, auf denen die Zahlen 0, 1, 5, 5, 8 und 8 stehen.

    (a) Lege mit allen Zahlenkärtchen eine möglichst große bzw. kleine Zahl.

    (b) Lege mit allen Zahlenkärtchen eine möglichst große gerade/ungerade bzw. kleine gerade/ungerade Zahl.

    (c) Im nächsten Schritt wird mit Zahlenkärtchen gearbeitet, auf denen die Zahlen 18, 4, 173, 0, 2 und 41 stehen. Wie musst du diese Zahlenkärtchen nebeneinander legen, damit eine möglichst große/kleine Zahl entsteht.

(d) Auf sechs weiteren Zahlenkärtchen stehen die Zahlen 90, 909, 99, 9, 900 und 990. Wie musst du diese Zahlenkärtchen nebeneinander legen, damit eine möglichst große/kleine Zahl entsteht.

Literatur: Materialien Mathematik M49, Weiterentwicklung der Unterrichtskultur im Fach Mathematik (WUM), Anregungen für neue Wege im 5. Schuljahr, Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart

Lösung:
(a) 885510, 105588
(b) 885510, 885501, 105588, 105885
(c) 4412181730, 1730182414
(d) 99999090990900, 90090909990999

13. Du hast sechs Zahlenkärtchen, auf denen die Zahlen 52, 9, 17, 0, 104 und 5 stehen. Lege mit den Zahlenkärtchen eine
(a) möglichst große Zahl.
(b) möglichst kleine Zahl mit allen Kärtchen.
(c) gerade Zahl.
(d) möglichst kleine siebenstellige Zahl.
(e) möglichst große achtstellige Zahl.
(f) möglichst große Zahl mit Quersumme 21.
(g) möglichst kleine Zahl mit 5 Kärtchen
(h) Zahl, die möglichst nahe an 1 Million liegt (nicht alle Kärtchen müssen verwendet werden).
(i) möglichst große ungerade Zahl.

Literatur: Materialien Mathematik M49, Weiterentwicklung der Unterrichtskultur im Fach Mathematik (WUM), Anregungen für neue Wege im 5. Schuljahr, Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart

Lösung:
(a) 9552171040
(b) 1040175259
(c) mehrere Möglichkeiten, z. B. 9552171040
(d) 1040175
(e) 95521040
(f) 9521040
(g) 1705259
(h) 1040175
(i) 9552104017

14. Bill Gates, der reichste Mann der Welt, besitzt 100 Milliarden Dollar.
    (a) Wie oft muss Bill Gates eine Million Dollar ausgeben, um sein ganzes Geld aufzubrauchen?
    (b) Deutschland hat 1 Billion 200 Milliarden Euro Schulden. Wie oft bräuchte man das ganze Geld von Bill Gates, um die Schulden Deutschlands zurückzahlen zu können, wenn man für einen Dollar einen Euro erhält?

Lösung: (a) 100 000 mal (b) 12 mal

15. (a) Schreibe folgende Zahl mit all ihren Ziffern hin:
    300 Trilliarden 50 Billiarden 2 Billionen 400 Millionen =
    (b) Bringe in eine leicht lesbare Form (wie die Angabe von Teilaufgabe (a)):
    10 000 020 003 400 000 050 000 =
    (c) Wie oft muss man 100 Milliarden nehmen, um 10 Trillionen zu erhalten?

Lösung: (a) 300 000 050 002 000 400 000 000
(b) 10 Trilliarden 20 Billiarden 3 Billionen 400 Milliarden 50 Tausend
(c) 100 000 000 mal

16. (a) Schreibe folgende Zahl mit all ihren Ziffern hin:
    550 Trillionen 7 Billiarden 200 Billionen 40 Millionen =
    (b) Bringe in eine lesbare Form:
    200 030 000 500 004 000 600 000 =
    (c) Wie oft muss man 10 Milliarden nehmen, um 100 Trillionen zu erhalten?

Lösung: (a) 550 007 200 000 040 000 000
(b) 200 Trilliarden 30 Trillionen 500 Billionen 4 Milliarden 600 Tausend
(c) 10 Milliarden mal

17. (a) Schreibe das Ergebnis mit allen Ziffern und in der leicht lesbaren Form:
$$1\,\text{Trilliarde} - 20\,\text{Billionen} + 4\,\text{Milliarden} =$$
    (b) Wie oft muss man einen Koffer mit einer Million Euro vollpacken, um
    10 Billionen Euro zu erhalten?

Lösung: (a) 999 999 980 004 000 000 000 =
= 999 Trillionen 999 Billiarden 980 Billionen 4 Milliarden

(b) 10 Millionen mal

18. (a) Der Stern Rigel im Sternbild Orion hat die Masse $6 \cdot 10^{31}$ kg. Wie heißt diese Zahl in Worten?

(b) Die Masse der Erde ist sechs Quadrillionen kg. Schreibe diese Zahl mit allen Ziffern hin.

(c) Wie oft muss man die Erde nehmen, um die gleiche Masse wie Rigel zu erhalten?

(d) Ein Kilogramm von Rigel besteht aus ungefähr einer Quadrilliarde Atomen. Aus wie vielen Atomen besteht dann der ganze Stern? Schreibe das Ergebnis mit Hilfe einer Zehnerpotenz und in Worten hin!

Lösung: (a) sechzig Quintillionen

(b) $6\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 6 \cdot 10^{24}$

(c) 10 000 000 mal

(d) 1 Quadrilliarde $= 10^{27}$; $6 \cdot 10^{31} \cdot 10^{27} = 6 \cdot 10^{58}$

$54 : 6 = 9 \quad \Longrightarrow \quad 10^{54} = 1$ Nonillion; $\;6 \cdot 10^{58} =$ sechzig Nonilliarden

19. Schreibe das Ergebnis mit allen Ziffern und in der „Sprechschreibweise“ hin:

$$20\,\text{Trilliarden} - 400\,\text{Billionen}$$

Lösung: 19 999 999 600 000 000 000 000 =
= 19 Trilliarden 999 Trillionen 999 Billiarden 600 Billionen

20. (a) Schreibe mit allen Ziffern: 20 Trilliarden 800 Billionen 70 Millionen

(b) Verwandle in die Sprechschreibweise: 450 000 030 007 000 001 000

(c) Wie viele Nullen hat 1 Million mal 1 Billiarde? Wie heißt diese Zahl?

Lösung: (a) 20 000 000 800 000 070 000 000

(b) 450 Trillionen 30 Billionen 7 Milliarden 1 Tausend

(c) $6 + 15 = 21$ Nullen, 1 Trilliarde

1.1.6 Runden und Abschätzen

1. Wie viele Pkw stehen etwa in einem 3 Kilometer langen Stau?

   Quelle: Jufo go (Spiel zum Wettbewerb Jugend forscht)

Lösung: 500

2. Auf einem Werbeplakat ist ein 6m hohes Gesicht abgebildet. Wie hoch ist ein Schneidezahn?

   Quelle: Jufo go (Spiel zum Wettbewerb Jugend forscht)

Lösung: ca. 20cm

3. Runde auf die in Klammern stehende Anzahl geltender Ziffern oder Einheit:

(a) 759510 (3)	(b) 10624 m (km)	(c) 5345 kg (t)	(d) 2945 cm (m)
(e) 459 mm (m)	(f) 10329 m (km)	(g) 5545 kg (t)	(h) 2959 cm (m)
(i) 679 mm (m)	(j) 759410 (3)	(k) 2975 cm (m)	

Lösung:

(a) 760000	(b) 11 km	(c) 5 t	(d) 29 m
(e)0 m	(f) 10 km	(g) 6 t	(h) 30 m
(i) 1 m	(j) 759000	(k) 30 m	

4. (a) Runde die Zahl 5734 auf 10er, 100er, 1000er und 10000er und gib jeweils den Rundungsfehler an.

   (b) Gib die Zahlen in einer Doppelungleichung an, die auf ganze Hunderter gerundet die Zahl 1300 ergeben.

Lösung: (a) 5730 (Rundungsfehler: 4), 5700 (Rundungsfehler: 34), 6000 (Rundungsfehler: 266), 10000 (Rundungsfehler: 4266)

(b) $1250 \leq z < 1350$

5. (a) Runde auf Tausender: 123 499

   (b) Runde auf Zehntausender: 1 995 123

   (c) Runde auf Tausender: 563 499

   (d) Runde auf Zehntausender: 4 995 198

   (e) Runde auf Tausender: 769 513

   (f) Runde auf Zehntausender: 4 874 999

Lösung: (a) 123 000, (b) 2 000 000, (c) 563 000, (d) 5 000 000, (e) 770 000, (f) 4 870 000

6. (a) Fülle die folgende Tabelle aus!

Zahl	gerundet auf Zehner	gerundet auf Hunderter	gerundet auf Tausender	gerundet auf Zehntausender
6854				
15036				
1596				
24449				

(b) Nenne jeweils ein Beispiel, wo das Runden sinnvoll und wo das Runden unsinnig ist!

(c) Eine Zahl wird auf Hunderter gerundet. Das Ergebnis ist

i. 1700.

ii. 3500.

Zwischen welchen Zahlen liegt die ursprüngliche Zahl?

Lösung: (a)

Zahl	gerundet auf Zehner	gerundet auf Hunderter	gerundet auf Tausender	gerundet auf Zehntausender
6854	6850	6900	7000	
15036	15040	15000	15000	20000
1596	1600	1600	2000	
24449	24450	24400	24000	20000

(b)

(c) i. Die urspüngliche Zahl ist kleiner 1750 und größer gleich 1650.

ii. Die urspüngliche Zahl ist kleiner 3550 und größer gleich 3450.

7. Die folgende Tabelle enthält für die wichtigsten Sportarten die Zahl der Vereinsmitglieder:

Fußball	5245535
Handball	826873
Leichtathletik	848732
Reiten	601815
Schwimmen	610771
Tennis	2249528
Tischtennis	769024
Turnen	4244849

Versuche, die Mitgliederzahlen der einzelnen Sportarten in einer Zeichnung darzustellen. Man soll aus der Zeichnung sehr schnell erkennen können, welche Sportart viele und welche Sportart wenige Mitglieder hat.

Literatur: Materialien Mathematik M49, Weiterentwicklung der Unterrichtskultur im Fach Mathematik (WUM), Anregungen für neue Wege im 5. Schuljahr, Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart

Lösung: Hinweis: Zu Erstellung eines geeigneten Diagramms ist es sinnvoll die Mitgliederzahlen zu runden!

8. Ordne den vier Rechenausdrücken A, B, C und D mit Hilfe eines Überschlags die Ergebnisse I, II, III und IV zu:

A)	2984+6958+12350	B)	18665-5736
C)	8438+5621+2	D)	23586-5436+9521

I:	27671	II:	12929
III:	22292	IV:	14061

Lösung: A) $2984 + 6958 + 12350 = 22292$ (III)
B) $18665 - 5736 = 12929$ (II)
C) $8438 + 5621 + 2 = 14061$ (IV)
D) $23586 - 5436 + 9521 = 27671$ (I)

9. Gib jeweils einen Überschlag an!

   (a) $1277 + 2987$

   (b) $56712 - 9891$

   (c) $20987 : 31$

   (d) $512 \cdot 98$

   Literatur: PM 4/43, Jg. 2001

Lösung: (a) z. B. $1300 + 3000 = 4300$

(b) z. B. $57000 - 10000 = 47000$

(c) z. B. $21000 : 30 = 700$

(d) z. B. $500 \cdot 100 = 50000$

10. (a) Welche natürlichen Zahlen ergeben 7000, wenn man sie auf ganze Hunderter rundet?

    (b) In Deutschland leben, auf halbe Millionen gerundet, achzig Millionen Menschen. Wie viele Leute leben mindestens und und wie viele höchstens in Deutschland?

Lösung: (a) $\{ 6950\,, 6951\,, \ldots\,, 7049\}$

(b) mindestens $79\,750\,000$, höchstens $80\,249\,999$

11. (a) Welche natürlichen Zahlen ergeben 60 000, wenn man sie auf ganze Tausender rundet?
    (b) In Bayern leben, auf halbe Hunderttausender gerundet, elf Millionen Menschen. Wie viele Leute leben mindestens und und wie viele höchstens in Bayern?

Lösung: (a) $\{ 59\,500\,, 59\,501\,, \ldots\,, 60\,499\}$
    (b) mindestens 10 975 000, höchstens 11 024 999

12. Bei einem Fußballspiel waren 10823 Zuschauer im Stadion. Ein Sportreporter möchte in einem Bericht über das Fußballspiel die Anzahl der Zuschauer angeben. Welche Zahl sollte er in seinem Bericht nennen? Begründe deine Meinung.

Lösung: Bei dieser Aufgabe sind mehrere Lösungen mit einer entsprechenden Begründung möglich:
11000: 10823 runden auf Tausender
10000: 10823 runden auf Zehntausender
10823: man kennt die Zuschauerzahl genau

13. (a) Welche natürlichen Zahlen ergeben 70000, wenn man sie auf ganze Tausender rundet?
    (b) In Indien leben, auf halbe Millionen gerundet, achthundert Millionen Menschen. Wie viele Leute leben mindestens und wie viele höchstens in Indien?

Lösung: (a) 69 500, 69 501, ... 70 499
    (b) mindestens 799 750 000, höchstens 800 249 999

14. Mexico-City hat, auf ganze Hunderttausender gerundet, 20 000 000 Einwohner. Wie viele Menschen leben mindestens, wie viele höchstens in dieser Stadt?

Lösung: mindestens 19 950 000, höchstens 20 049 999

15. (a) Überschlage zunächst, wie groß der Wert der Summe $132435 + 468975$ ist und berechne dann den genauen Wert. Gib die Abweichung deiner Ergebnisse durch Überschlagen und der genaue Berechnung an.
    (b) Wie verändert sich der Wert der Summe, wenn
        i. der erste Summand um 123 vergrößert wird?
        ii. der zweite Summand um 321 verkleinert wird?
        iii. der erste Summand verdoppelt wird?

Lösung: (a) z. B. $130000 + 470000 = 600000$, 601410, 1410

(b) i. Wert der Summe wird um 123 größer, also 601533.

ii. Wert der Summe wird um 321 kleiner, also 601089.

iii. Wert der Summe wird um den Wert des ersten Summanden größer, also 733845.

16. (a) Überschlage zunächst, wie groß der Wert der Differenz $34671 - 22589$ ist und berechne dann den genauen Wert. Gib die Abweichung deiner Ergebnisse durch Überschlagen und der genaue Berechnung an.

(b) Wie verändert sich der Wert der Differenz, wenn

i. der Minuend um 7564 verkleiner wird?

ii. der Subtrahend um 2421 verkleinert wird?

iii. der Subtrahend um 1221 vergrößert wird?

iv. der Minuend verdoppelt wird?

Lösung: (a) z. B. $35000 - 23000 = 12000$, 12082, 82

(b) i. Wert der Differenz wird um 7564 größer, also 4518.

ii. Wert der Differenz wird um 2421 größer, also 14503.

iii. Wert der Differenz wird um 1221 kleiner, 10861.

iv. Wert der Differenz wird um den Wert des Minuenden größer, also 46753.

17. In folgender Tabelle sind die Abstände der Planeten unseres Sonnensystems zur Sonne und deren Durchmesser zusammengestellt:

Planet	Abstand zu Sonne	Durchmesser
Merkur	57 895 200 km	4 878 km
Venus	108 160 800 km	12 099 km
Erde	149 600 000 km	12 736 km
Mars	227 392 000 km	6 763 km
Jupiter	777 920 000 km	142 643 km
Saturn	1428 680 000 km	119 973 km
Uranus	2872 320 000 km	51 199 km
Neptun	4502 960 000 km	49 670 km
Pluto	5939 120 000 km	2 165 km

(a) Für die Planeten unseres Sonnensystems verwendet man oft den Merkspruch „Mein Vater erklärt mir jeden Sonntag unsere neun Planeten“. Erkläre diesen Merkspruch.

(b) Runde die Abstände der Planeten zur Sonne auf drei gültige Ziffern und deren Durchmesser auf zwei gültige Ziffern.

(c) Stelle die Abstände

i. der Planeten bis zur Erde

ii. der Planeten bis zum Saturn

iii. Jupiter bis zum Pluto

an einem geeigneten Zahlenstrahl dar.

(d) Stelle die Durchmesser der Planeten an einem Zahlenstrahl dar und ordne die Planeter nach ihrem Durchmesser.

(e) Die oben angegebenen Abstände der Planeten zur Sonne bezeichnet man häufig als **mittlere Abstände** zur Sonne. Finde heraus, was dies bedeutet.

(f) Welche Abstände können die Planeten Venus und Mars von der Erde haben? Vergleiche diese Abstände mit anderen Abständen im Sonnensystem.

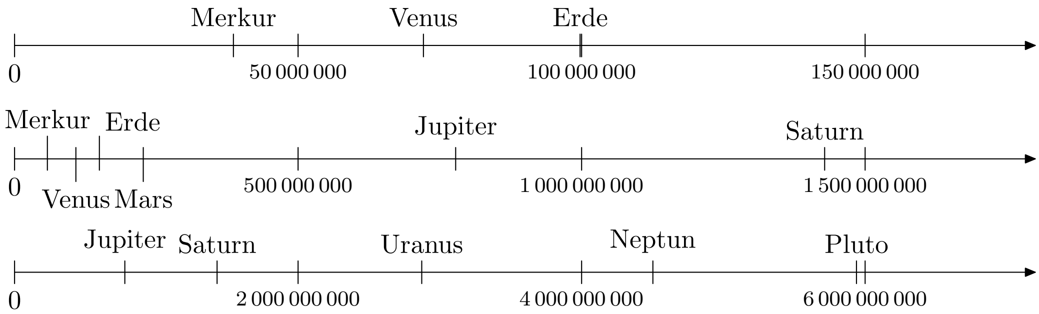
Lösung: (a)

Mein	**V**ater	**er**klärt	**m**ir	**j**eden	**S**onntag	**u**nsere	**n**eun	**P**laneten
Merkur	**V**enus	**E**rde	**M**ars	**J**upiter	**S**aturn	**U**ranus	**N**eptun	**P**luto

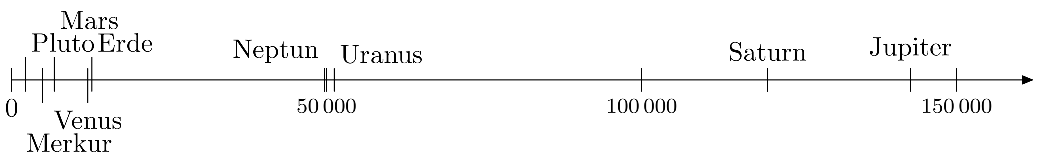
(b)

Planet	Abstand zu Sonne	Durchmesser
Merkur	57 900 000 km	4 900 km
Venus	108 000 000 km	12 000 km
Erde	150 000 000 km	13 000 km
Mars	227 000 000 km	6 800 km
Jupiter	778 000 000 km	140 000 km
Saturn	1430 000 000 km	120 000 km
Uranus	2870 000 000 km	51 000 km
Neptun	4500 000 000 km	50 000 km
Pluto	5940 000 000 km	2 200 km

(c)



(d)



Pluto, Merkur, Mars, Venus, Erde, Neptun, Uranus, Saturn, Jupiter

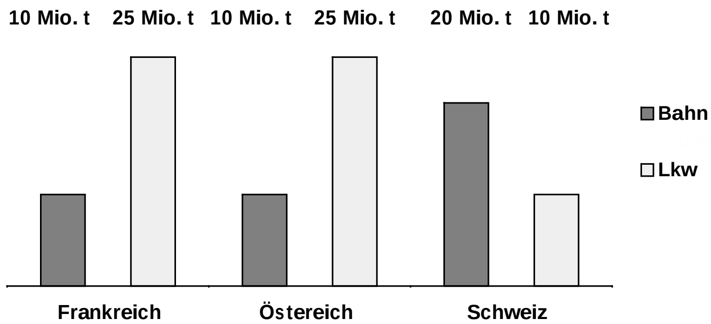
(e) Die Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen um die Sonne, d. h. ihre Abstände schwanken zwischen einem größten und kleinsten Wert. Der mittlere Abstand ist der Mittelwert des größten und kleinsten Abstands.

(f) Wegen Teilaufgabe (e) ist eine Rechnung nur mit gerundeten Werten sinnvoll!
Venus-Erde:
42 000 000 km, z. B. etwa dreieinhalbfacher Erddurchmesser
258 000 000 km, z. B. etwa Abstand Sonne-Mars
Mars-Erde:
77 000 000 km, z. B. etwa sechseinhalbfacher Erddurchmesser
377 000 000 km, z. B. etwa Abstand Sonne - Mitte der Uranus- und Neptunbahn

18. Bei einem Fußballspiel waren 5278 Besucher im Stadion. Ein Sportreporter möchte in einem Zeitungsbericht die Anzahl der Besucher angeben. Welche Zahl sollte er nennen? Beründe deine Meinung.

Lösung: Z. B. 5000 bzw. 5300, da runden auf Tausender bzw. Hunderter sinnvoll ist.

19. Das Diagramm zeigt, wie viele Millionen Tonnen Güter 1998 über die wichtigsten Alpenpässe transportiert wurden. Es ist aufgegliedert nach Verkehrsmittel und durchquertem Alpenland.



(a) Welche Gütermenge wurden mit der Bahn transportiert?

(b) Stelle dir vor, die gesamten 100 Millionen Tonnen Güter werden auf Lkw mit jeweils 20 t Nutzlast und 12 m Länge verteilt. Wie viele Kilometer wäre diese Lkw-Schlange lang, wenn die Fahrzeuge lückenlos aneinandergereiht werden?

(c) Bei den Zahlenangaben im Diagramm handelt es sich um Werte, die auf ganze Millionen gerundet sind. Um wie viele Tonnen kann die Gütermenge, die 1998 mit Lkw über die wichtigsten Alpenpässe in der Schweiz tatsächlich transportiert wurde, vom Wert im Diagramm maximal abweichen?

Literatur: Bayerischer Mathematik Test 2002

Lösung: (a) 40 Mio. t

(b) 60 000 km

(c) Abweichung nach oben $< 500\,000\,\mathrm{t}$
Abweichung nach unten $\leqq 500\,000\,\mathrm{t}$

20. Ein Fußballer verdient im Jahr, auf ganze Zehntausend Euro gerundet, zwei Millionen Euro. Wie viel verdient er höchstens, wieviel mindestens?

Lösung: Mindestens 1 995 000,00 €, höchstens 2 004 999,99 €

1.2 Addition und Subtraktion natürlicher Zahlen

1.2.1 Summe und Differenz natürlicher Zahlen

1. (a) Addiere jeweils drei aufeinanderfolgende Zahlen. Was fällt auf?
   (b) Versuche für die Addition von vier, fünf, ... aufeinanderfolgenden Zahlen Zusammanhänge zu finden.

Lösung: (a) Summe ist durch drei Teilbar

(b) vier aufeinanderfolgenden Zahlen: Summer durch 2 teilbar
fünf aufeinanderfolgenden Zahlen: Summer durch 5 teilbar
sechs aufeinanderfolgenden Zahlen: Summer durch 3 teilbar
sieben aufeinanderfolgenden Zahlen: Summer durch 7 teilbar
...
n aufeinanderfolgenden Zahlen: Summer durch n teilbar, falls n ungerade und durch $\frac{1}{2}n$ teilbar, falls n gerade

2. Stelle mit vier Vieren und den dir bekannten Rechenzeichen die Zahlen von 0 bis 9 dar.

   Quelle: Standard Mathematik von der Basis bis zur Spitze, Grundbildungsorientierte Aufgaben für den Mathematikunterricht, Chritina Drüke-Noe, Dominik Leiß, Institut für Qualitätsentwicklung, Wiesbaden, 2005

Lösung: Z. B.:

$$\begin{array}{lll}
0 = 4 + 4 - 4 - 4, & 1 = 4 : 4 + 4 - 4, & 2 = 4 : 4 + 4 : 4, \\
3 = (4 + 4 + 4) : 4, & 4 = (4 - 4) : 4 + 4, & 5 = (4 \cdot 4 + 4) : 4, \\
6 = (4 + 4) : 4 + 4, & 7 = 4 + 4 - 4 : 4, & 8 = 4 + 4 + 4 - 4, \\
9 = 4 + 4 + 4 : 4 & &
\end{array}$$

3. Während einer Werbeaktion wird jeder Tafel Schokolade der Firma Schoko eine Sammelmarke beigelegt. Für jeweils acht Sammelmarken gibt es im Laden eine Tafel umsonst.

(a) Wie viele Gratistafeln kann man insgesamt für 120 gekaufte Tafeln erhalten?

(b) Wie viele Gratistafeln bekommt man, wenn man 2003 Tafeln kauft?

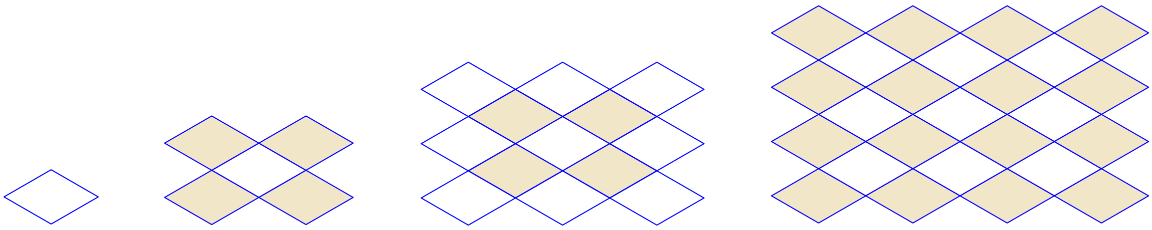
Quelle: Fürther Mathematik Olympiade, 1. Runde, 2003/2004

Lösung: (a) Für 120 Marken erhält man 15 neue Tafeln, die wiederum 15 Marken liefern. Für 8 Marken erhält man eine weitere Tafel, die wiederum eine Marke liefert. Mit dieser und den 7 verbliebenen Marken bekommt man wieder eine weitere Tafel $\Rightarrow$ 17 Gratistafeln

(b) 2003 Tafeln $\Rightarrow$ 250 Gratistafeln und damit $250 + 3 = 253$ Marken,
253 Marken $\Rightarrow$ 31 Gratistafeln und damit $31 + 5 = 36$ Marken,
36 Marken $\Rightarrow$ 4 Gratistafeln und damit $4 + 4 = 8$ Marken,
8 Marken $\Rightarrow$ 1 Gratistafeln,
also 286

4. Ein Mosaik wird aus weißen und grünen rautenförmigen Fliesen aufgebaut. Die Folge der Figuren beschreibt die ersten 4 Schritte beim Aufbau des Mosaiks.

   Aus wie vielen Fliesen besteht die 10. Figur, wenn das Muster entsprechend fortgeführt wird?



Quelle: Bayerischer Mathematik-Test 2000

Lösung: $1 + 4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 28 + 32 + 36 = 181$

5. Verändere mit einem kleinen Strich die Aufgabe 5+5+5=550 so, dass sie richtig ist.

Lösung: $545 + 5 = 550$

6. Iris betrachtet Zahlenschlangen von besonderer Form: Der Kopf besteht aus einer zweistelligen, der Körper aus einer dreistelligen Zahl. Weder beim Kopf noch beim Körper ist die erste Ziffer Null.
   Beispiele: 20-118, 71-901

   (a) Wie viele Schlangen dieser Form gibt es?

   (b) Schlangen, deren ,,Kopfzahlen" und ,,Körperzahlen" jeweils dieselbe Quersumme haben, gehören zur selben Familie. So sind z. B. die Schlangen 23-123 und 50-222 in derselben Familie.
   Wie viele Schlangen gehören zu dieser Familie?

(c) Iris findet eine Familie, die aus genau sechs Schlangen besteht.
Kannst du auch eine solche Familie angeben? Schreibe deine Familie auf!

Quelle: Fürther Mathematik Olympiade, 1. Runde, 2003/2004

Lösung: (a) Kopf: Zahlen von 10 bis 99, also 90 Zahlen,
Körper: Zahlen von 100 bis 999, also 900 Zahlen $\Rightarrow$
$90 \cdot 900 = 81\,000$ Zahlen

(b) Kopf: 14, 23, 32, 41, 50
Körper:
6 Permutationen der Ziffern in der Zahl 123,
3 Permutationen der Ziffern in der Zahl 114,
Zahlen 222 und 600,
$2 \cdot 5 = 10$ Permutationen der beiden hinteren Ziffern der Zahlen 501, 402, 303, 204, 105
$\Rightarrow$ 21 Körperzahlen
$\Rightarrow 5 \cdot 21 = 105$ Schlangen

(c) mehrere Lösungen, z. B. Schlangen mit Quersumme 2 bei „Kopf- und Körperzahl”, Schlangen mit Quersumme 6 bei der „Kopfzahl” und 1 bei der „Körperzahl”.

7. Auf einer Uhr finden sich die zwölf Zahlen von Eins bis Zwölf.

(a) Bilde aus allen zwölf Zahlen einen Rechenausdruck, der Null ergibt. Versuche, mehrere Lösungen zu finden. Was haben alle deine Lösungen gemeinsam?

(b) Lässt sich aus den sechs geraden Zahlen 2, 4, 6, 8, 10 und 12 ein Rechenausdruck bilden, der Null ergibt?

(c) Lässt sich aus den Zahlen 1 bis 11 bzw. 1 bis 10 ein Rechenausdruck bilden, der Null ergibt?

(d) Die Uhr zerbricht beim Herunterfallen in drei Stücke. Kann es sein, dass die Summe der Zahlen auf jedem Teil gleich ist?

Literatur: Materialien Mathematik M49, Weiterentwicklung der Unterrichtskultur im Fach Mathematik (WUM), Anregungen für neue Wege im 5. Schuljahr, Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart

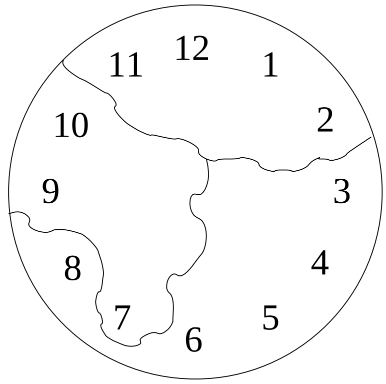
Lösung: (a) Mehrere Möglichkeiten, z. B.:
$12 + 11 + 10 + 6 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 7 - 8 - 9 = 0$
$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 = 78 \Rightarrow$ Summe der Plus- und Minusglieder muss jeweils 39 ergeben. Es gibt immer mindestens 4 und höchstens 8 Plusglieder.

(b) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42 \Rightarrow$ Summe der Plus- und Minusglieder müsste jeweils 21 ergeben, was als Summe gerader Zahlen nicht möglich ist.

(c) $11 + 10 + 9 + 3 - 1 - 2 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 = 0$
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 66 \Rightarrow$ Summe der Plus- und Minusglieder muss jeweils 33 ergeben. Es gibt immer mindestens 4 und höchstens 7 Plusglieder.

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55 \Rightarrow$ Summe der Plus- und Minusglieder müsste jeweils 27,5 ergeben, was als Summe natürlicher Zahlen nicht möglich ist.

(d) Möglich:



8. Welche Zahl muss man von 1000 subtrahieren, um 2004 zu erhalten?

   Quelle: Bayerischer Mathematik - Test für die Jahrgangsstufe 8 der Gymnasien 2004

Lösung: -1004

9. (a) Um wieviel unterscheiden sich die Zahlen 7 654 321 und 1 234 567?
   (b) Ergänze 123 456 zu einer Million.
   (c) Um wieviel unterscheiden sich die Zahlen 1 234 567 und 123 456?
   (d) Ergänze 9 579 246 135 zu einer Billion.

Lösung: (a) 6 419 754
(b) 876 544
(c) 1 111 111
(d) 990 420 753 865

10. Es stehen die Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 jeweils einmal zur Verfügung. Bilde Rechenausdrücke mit dem jeweils größten und kleinsten Wert unter Verwendung
    (a) aller Ziffern und eines Pluszeichens.
    (b) aller Ziffern und eines Minuzeichens.
    (c) aller Ziffern, eines Plus- und eines Minuszeichens.

    Literatur: Materialien Mathematik M49, Weiterentwicklung der Unterrichtskultur im Fach Mathematik (WUM), Anregungen für neue Wege im 5. Schuljahr, Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart

Lösung: Es sind jeweils verschiedene Lösungen möglich!

(a) Z. B. größter Summenwert: $97531 + 86420 = 183951$, $96531 + 87420 = 183951$, $87530 + 96421 = 183951$
z. B. kleinster Summenwert: $13579 + 20468 = 34047$, $10579 + 23468 = 34047$, $13468 + 20579 = 34047$

(b) größte Differenz: $987654321 - 0 = 987654321$
kleinste Differenz: $50123 - 49876 = 247$

(c) größter Wert: $98765432 + 1 - 0 = 98765433$
kleinster Wert: Bis auf Umstellungen gibt es 84 verschiedene Lösungen mit dem Ergebnis 0:

$264 + 789 - 1053 = 0$, $284 + 769 - 1053 = 0$, $246 + 789 - 1035 = 0$

$286 + 749 - 1035 = 0$, $269 + 784 - 1053 = 0$, $289 + 764 - 1053 = 0$

$249 + 786 - 1035 = 0$, $289 + 746 - 1035 = 0$, $342 + 756 - 1098 = 0$

$352 + 746 - 1098 = 0$, $324 + 765 - 1089 = 0$, $364 + 725 - 1089 = 0$

$325 + 764 - 1089 = 0$, $365 + 724 - 1089 = 0$, $346 + 752 - 1098 = 0$

$356 + 742 - 1098 = 0$, $347 + 859 - 1206 = 0$, $357 + 849 - 1206 = 0$

$349 + 857 - 1206 = 0$, $359 + 847 - 1206 = 0$, $473 + 589 - 1062 = 0$

$483 + 579 - 1062 = 0$, $437 + 589 - 1026 = 0$, $487 + 539 - 1026 = 0$

$479 + 583 - 1062 = 0$, $489 + 573 - 1062 = 0$, $439 + 587 - 1026 = 0$

$489 + 537 - 1026 = 0$, $432 + 657 - 1089 = 0$, $452 + 637 - 1089 = 0$

$423 + 675 - 1098 = 0$, $473 + 625 - 1098 = 0$, $425 + 673 - 1098 = 0$

$475 + 623 - 1098 = 0$, $437 + 652 - 1089 = 0$, $457 + 632 - 1089 = 0$

$426 + 879 - 1305 = 0$, $476 + 829 - 1305 = 0$, $429 + 876 - 1305 = 0$

$479 + 826 - 1305 = 0$, $624 + 879 - 1503 = 0$, $674 + 829 - 1503 = 0$

$629 + 874 - 1503 = 0$, $679 + 824 - 1503 = 0$, $743 + 859 - 1602 = 0$

$753 + 849 - 1602 = 0$, $749 + 853 - 1602 = 0$, $759 + 843 - 1602 = 0$

$1965 + 78 - 2043 = 0$, $1975 + 68 - 2043 = 0$, $1956 + 87 - 2043 = 0$

$1986 + 57 - 2043 = 0$, $1956 + 78 - 2034 = 0$, $1976 + 58 - 2034 = 0$

$1957 + 86 - 2043 = 0$, $1987 + 56 - 2043 = 0$, $1968 + 75 - 2043 = 0$

$1978 + 65 - 2043 = 0$, $1958 + 76 - 2034 = 0$, $1978 + 56 - 2034 = 0$

$2964 + 87 - 3051 = 0$, $2984 + 67 - 3051 = 0$, $2967 + 84 - 3051 = 0$

$2987 + 64 - 3051 = 0$, $2947 + 68 - 3015 = 0$, $2967 + 48 - 3015 = 0$

$2948 + 67 - 3015 = 0$, $2968 + 47 - 3015 = 0$, $4926 + 87 - 5013 = 0$

$4986 + 27 - 5013 = 0$, $4927 + 86 - 5013 = 0$, $4987 + 26 - 5013 = 0$

$5943 + 78 - 6021 = 0$, $5973 + 48 - 6021 = 0$, $5934 + 87 - 6021 = 0$

$5984 + 37 - 6021 = 0$, $5934 + 78 - 6012 = 0$, $5974 + 38 - 6012 = 0$

$$5937 + 84 - 6021 = 0, \quad 5987 + 34 - 6021 = 0, \quad 5948 + 73 - 6021 = 0$$
$$5978 + 43 - 6021 = 0, \quad 5938 + 74 - 6012 = 0, \quad 5978 + 34 - 6012 = 0$$

11. Finde die zwei Fehler in der folgenden Rechnung.
Korrigiere die beiden Fehler.

$$\begin{aligned} & 300 - 73 + [234 - (34 + 17)] = \\ = \quad & 300 - 73 + [200 + 17)] = \\ = \quad & 300 - 73 + 217 = \\ = \quad & 300 - 290 = 10 \end{aligned}$$

Lösung: Zeile 2: $300 - 73 + [234 - 51]$
Zeile 4: $300 - 144 = 156$

12. Gib die größte Zahl in dezimaler Schreibweise an, die man mit vier römischen Zahlzeichen schreiben kann. Addiere zu dieser Zahl die größte garade vierstellige Zahl und subtrahiere davon die größte dreistellige Quadratzahl.

Lösung: $3500 + 9998 - 961 = 12\,537$

13. (a) Gib den Term an und berechne seinen Wert!
Subtrahiere die Differenz der Zahlen 7012 und 5876 von der Summe der Zahlen 3214 und 9867.
(b) Wie ändert sich der Wert einer Summe aus drei Zahlen, wenn man jeden Summanden um 7 verkleinert?
(c) Wie ändert sich der Wert einer Differenz, wenn man den Subtrahenden um 6 verkleinert und den Minuenden um 6 vergrößert?
(d) Wie ändert sich der Wert einer Differenz, wenn man Minuend und Subtrahend um 21 verkleinert?

Lösung: (a) $(3214 + 9867) - (7012 - 5876) = 11945$
(b) Der Wert der Summe verkleinert sich um 21.
(c) Der Wert der Differenz vergrößert sich um 12.
(d) Der Wert der Differenz bleibt gleich.

14. (a) Von der Summe der Zahlen 378 und 623 ist die Differenz der Zahlen 1111 und 222 zu subtrahieren.
(b) Zu der Differenz der Zahlen 1423 und 577 ist die Differenz der Zahlen 1078 und 723 zu addieren.

Lösung: (a) $(378+623)-(1111-222)=112$ (b) $(1423-577)+(1078-723)=1201$

15. In einer ,,Zahlenmauer" erhält man jede Zahl als Summe der Zahlen, die links bzw. rechts darunter liegen. Z. B.

48
20 28
8 12 16
3 5 7 9
1 2 3 4 5

(a) Vollende die folgende Zahlenmauer:

1557
559 ∘
∘ 384 ∘
∘ 60 ∘ ∘
∘ ∘ 36 ∘ ∘

(b) Kannst du eine Zahlenmauer bauen, bei der

i. du in der ersten Zeile fünf Zahlen einträgst, die dir gefallen?

ii. du in der ersten Zeile nur vier Zahlen vorgibst?

iii. in der zweiten Zeile nur ungerade Zahlen vorkommen?

iv. in der Spitze eine Zahl nah bei 500 steht?

v. in der Spitze genau 500 steht?
Kannst du mehrere Mauern finden, bei denen in der Spitze 500 steht?

vi. in der dritten Zeile nur Zahlen vorkommen, die durch drei teilbar sind?

vii. du anfangs fünf Zahlen reinschreibst, so dass die Mauer vollendet werden kann?

viii. du anfangs fünf Zahlen reinschreibst, so dass die Mauer **nicht** vollendet werden kann?

Quelle: Theo Heußer, Gymnasium Hemsbach

Lösung: (a)

1557
559 998
175 384 614
115 60 324 290
91 24 36 288 2

(b) i.

ii. Sind in der untersten Zeile nur 4 Zahlen, so lässt sich die Mauer nicht vervollständigen. In der nächsten Zeile fehlen dann eine (am Rand) oder zwei Zahlen.

iii. Dann muss man in der untersten Zeile gerade und ungerade Zahlen abwechselnd eintragen;
z. B. 12|7|24|9|288 oder 5|6|7|8|9

iv. Eine Lösung ist, in die Spitze eine Zahl (z. B. 502) einzutragen und dann nach unten zu arbeiten.

v. Man erhält Lösungen, indem man in die Spitze 500 einträgt und dann nach unten arbeitet.

vi. Man beginnt in der dritten Zeile (z. B. 36, 33, 24) und arbeitet sich dann immer von links nach unten sowie nach oben.

16. Familie Schwarz hat für neue Kinderzimmermöbel 1500 Euro gespart. Sie hat folgende Möbelstücke auf der Wunschliste.

1 Bett für	369 Euro
1 Schrank für	497 Euro
1 Spieltisch für	198 Euro
1 Schreibtisch für	298 Euro
1 Sofa für	425 Euro

Literatur: Materialien Mathematik M49, Weiterentwicklung der Unterrichtskultur im Fach Mathematik (WUM), Anregungen für neue Wege im 5. Schuljahr, Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart

Lösung: In der offenen Aufgabe ist keine eindeutige Fragestellung vorgegeben. Die Schüler sind aufgefordert, sich eine oder mehrere Fragen selbständig zu überlegen. Zunächst ist die Frage „Was kosten die Möbelstücke insgesamt?" naheliegend. Man stellt fest, dass das angesparte Geld nicht ausreicht, um die Möbelstücke anzuschaffen, da diese insgesamt 1787 Euro kosten. Familie Schwarz muss also eine Auswahl treffen, wobei folgende Überlegungen angestellt werden können:

- Sind bestimmte Gegenstände umbedingt auszuwählen, weil sie zur Einrichtung eines Zimmers notwendig sind?
- Sollen möglichst genau 1500 Euro ausgegeben werden?

17. Die Familie Schneider (Vater, Mutter, Sohn, Tochter) ist frisch im Urlaubsort eingetroffen und erkundigt sich an der Liftstation nach den Preisen:

Sportzentrum Alpin - Winterangebot

<u>Liftkarten</u>

	Erwachsene	Kinder
3-Tages-Karte	74 €	59 €
2-Tages-Karte	55 €	38 €
Tageskarte	31 €	23 €
Nachmittagskarte (gültig ab 12:30 Uhr)	19 €	13 €
Hallenbad	2 €	1,50 €

Ski- und Snowboardverleih

	1 Tag	2 Tage	3 Tage
Alpin-Ski (Erwachsene)	20 €	31,50 €	55,50 €
Alpin-Ski (Kinder)	16,50 €	26 €	46 €
Snowboard	17,50 €	27,50 €	48,50 €

Skikurs: 25.- € pro Person und Tag

Familienangebot: 3 Tage für 385 € (Lift incl. Ski- oder Snowboard-Ausleihe für alle Familienmitglieder)

(a) Lohnt sich das Familienangebot?

(b) Welche Möglichkeiten hat Familie Schneider bei einem Einsatz von 250 €?

(c) Eine andere Familie (ebenfalls Vater, Mutter, Sohn, Tochter) hat insgesamt 500 € zur Verfügung und 4 Tage Zeit. Wie kann das Geld sinnvoll genutzt werden?

(d) Eure eigene Familie macht eine Woche Winterurlaub in diesem Ort. Welche Wünsche habt ihr und was würden sie euch kosten?

Literatur: Materialien Mathematik M49, Weiterentwicklung der Unterrichtskultur im Fach Mathematik (WUM), Anregungen für neue Wege im 5. Schuljahr, Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart

Lösung: (a) Das Familienangebot lohnt sich, wenn alle Leistungen benötigt werden. Diese würden regulär 468 € kosten!

Bei den Teilaufgaben (a), (b) und (c) sind mehrere verschiedene Lösungen möglich!

18. (a) Es werden drei Spielwürfel übereinander zu einem Turm aufgebaut. Man addiert alle sichtbaren Augenzahlen, die nicht durch den Tisch oder Nachbarwürfel verdeckt sind. Wie muss man die Würfel anordnen, damit die Augensumme maximal wird? Wie groß ist die Augensumme?

(b) Bearbeite Teilaufgabe (a) für vier, fünf und allgemein für n Würfel.

(c) Es werden drei (vier, fünf, n) Würfel nebeneinander in eine Reihe gelegt. Wie groß ist dann die maximale Augensumme?

(d) Es werden acht Würfel zu einem quadratischen Rahmen gelegt. Wie groß ist die maximale Augensumme?

(e) Es werden neun (16, n^2) Würfel zu einem Quadrat gelegt. Wie groß ist die maximale Augensumme?

Literatur:
H. Schupp, Thema mit Variationen, in: mathematiklehren 100, Juni 2000
H. Schupp, Aufgabenvariation im Mathematikunterricht, Materialien zum BLK-Programm

Lösung: (a) Die Augensumme gegenüberliegender Würfelseiten beträgt immer 7. Daher erhält man von den beiden unteren Würfeln jeweils einen Beitrag von 14 zur Augensumme. Vom obersten Würfel erhält man von den vertikalen Seitenflächen ebenfalls einen Beitrag von 14 zur Augensumme.

Um die maximale Augensumme zu erreichen muss beim obersten Würfel die 6 oben liegen. Die Lage der unteren Würfel ist unerheblich. Die maximale Augensumme beträgt $3 \cdot 14 + 6 = 48$.

(b) vier Würfel: Die maximale Augensumme beträgt $4 \cdot 14 + 6 = 62$.
fünf Würfel: Die maximale Augensumme beträgt $5 \cdot 14 + 6 = 76$.
n Würfel: Die maximale Augensumme beträgt $n \cdot 14 + 6$.

(c) Von den inneren Würfeln der Reihe sind zwei gegenüberliegende Seiten (Augensumme 7) und eine weitere Seite (maximal 6) sichtbar. Von den Würfeln am Ende der Reihe sind zwei Seiten verdeckt. $\Rightarrow$
drei Würfel: Die maximale Augensumme beträgt $13 + 2 \cdot 18 = 49$.
vier Würfel: Die maximale Augensumme beträgt $2 \cdot 13 + 2 \cdot 18 = 62$.
fünf Würfel: Die maximale Augensumme beträgt $3 \cdot 13 + 2 \cdot 18 = 75$.
n Würfel: Die maximale Augensumme beträgt $(n-2) \cdot 13 + 2 \cdot 18$.

(d) Von den vier Eckwürfeln sind drei Seiten sichtbar, von denen keine Seiten gegenüberliegen $(6+5+4=15)$. Von den vier anderen Würfeln sind ebenfalls drei Seiten sichtbar, von denen jedoch zwei gegenüberliegen $(7+6=13)$.$\Rightarrow$
Die maximale Augensumme beträgt $4 \cdot 13 + 4 \cdot 15 = 112$

(e) neun Würfel:
Die maximale Augensumme beträgt $4 \cdot 11 + 4 \cdot 15 + 6 = 110$
16 Würfel:
Die maximale Augensumme beträgt $4 \cdot 2 \cdot 11 + 4 \cdot 15 + 6 \cdot 4 = 172$
n^2 Würfel: Die maximale Augensumme beträgt
$4 \cdot (n-2) \cdot 11 + 4 \cdot 15 + 6 \cdot (n-2)^2$

19. In einer Zielscheibe mit konzentrischen Ringen erhält man für den innersten Ring 87 Punkte und für die nach außen darauffolgenden Ringe 73, 59 und 31 Punkte.

Bei dieser Zielscheibe wurden mit dem Pfeil genau 301 Punkte erzielt. Finde heraus, wie oft in welche Ringe getroffen wurde.

Lösung: $31+31+31+31+31+59+87 = 301$, $\quad 31+31+31+31+31+73+73 = 301$

$31+31+31+31+59+59+59 = 301$

20. Entscheide durch Überschlagen, welche Zahlen I bis X am nächsten bei den Ergebnissen der Rechnungen (a) bis (d) liegen:

    (a) $215689 + 498123$ (b) $197342 + 302576$ (c) $983215 - 604342$
    (d) $1775674 - 904543$

I)	776543	II)	702678	III)	501231	IV)	1098987	V)	385978
VI)	578987	VII)	872345	VIII)	123432	IX)	25	X)	439876

Lösung: (a) II: 702678 (b) III: 501231 (c) V: 385978 (d) VII: 872345

21. Die Mädchen und Jungen von zwei 5. Klassen wurden gefragt, welche Sportart sie am liebsten betreiben:

Sportart	Mädchen	Jungen
Schwimmen	9	7
Fußball	2	13
Reiten	11	2
Radfahren	2	4
Tischtennis	3	4
Tennis	1	3
Turnen	4	1
Skiport	2	1

Überlege dir eine Frage und beantworte sie.

Literatur: Materialien Mathematik M49, Weiterentwicklung der Unterrichtskultur im Fach Mathematik (WUM), Anregungen für neue Wege im 5. Schuljahr, Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart

Lösung: Mehrere Möglichkeiten, z. B.
Wieviele Mädchen, Jungen oder Schüler sind den den 5. Klassen?
34 Mädchen, 35 Jungen, 69 Schüler
Welche Sportart ist am beliebtesten?
Schwimmen

1.2.2 Rechengesetze

1. Welche Zahl kannst du hier einsetzen? Mache deinen Lösungsweg sichtbar.

   (a) $7 \cdot (12+?) = 84 + 28 = 112$

(b) $6 \cdot (12 - ?) = 144$

Literatur: Materialien Mathematik M49, Weiterentwicklung der Unterrichtskultur im Fach Mathematik (WUM), Anregungen für neue Wege im 5. Schuljahr, Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart

Lösung: (a) $7 \cdot (12 + 4) = 84 + 28 = 112$, Distributivgesetz anwenden!

(b) Keine Lösung, da $6 \cdot 12 = 72 \geq 6 \cdot (12 - ?)$

2. (a) Berechne geschickt! $147 + 411 + 343 + 589$, $315 + 42 + 346 + 654 + 785 + 78$

   (b) Zerlege zweckmäßig und berechne! $498 + 279$, $626 + 499$, $440 + 659$, $157 - 102$

Lösung: (a) Hier sind jeweils verschiedene Lösungen möglich, z. B.
$(147 + 343) + (411 + 589) = 490 + 1000 = 1490$,
$(315 + 785) + (42 + 78) + (346 + 654) = 1100 + 120 + 1000 = 2220$

(b) $498 + 279 = 500 - 2 + 280 - 1 = 780 - 3 = 777$,
$626 + 499 = 620 + 6 + 500 - 1 = 1120 + 5 = 1125$,
$440 + 659 = 440 + 660 - 1 = 1100 - 1 = 1099$,
$157 - 102 = 157 - 2 - 100 = 55$

3. (a) Schreibe das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz der Addition in Worten und als Formel hin.

   (b) Berechne vorteilhaft unter Verwendung der beiden Gesetze:

$$328 + 67 + 116 + 234 + 272 + 133 =$$

Lösung: (b) $(328 + 272) + (67 + 133) + (116 + 234) = 600 + 200 + 350 = 1150$

4. Schreibe das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz der Addition in Worten und als Formel hin. Erläutere an einem selbstgewählten Beispiel, wie man **beide** Gesetze anwendet, um vorteilhaft zu rechnen.

Lösung: z.B. $83 + 29 + 17 = (83 + 17) + 29 = 129$

5. Berechne die Summe aller natürlichen Zahlen von 1000 bis 2000.

Lösung: $2000 \cdot 2001 : 2 - 999 \cdot 1000 : 2 = 2001000 - 499500 = 1501500$

6. Welche Gesetze kennst du, die man zum vorteilhaften Addieren mehrerer Zahlen benötigt? Schreibe diese Gesetze in Worten und als Formel hin. Erläutere an einem selbstgewählten Beispiel, wie man **beide** Gesetze anwendet, um vorteilhaft drei Zahlen zu addieren..

Lösung: Kommutativ- und Assoziativgesetz

z.B. $38 + 29 + 42 = 29 + (38 + 42) = 29 + 80 = 109$

7. Bei einem Volksfest werden Lose verkauft. Das erste Los trägt die Nummer 10 000, das zweite Los 10 001, das dritte 10 002 und so weiter bis zum letzten Los mit der Nummer 30 000. Berechne die Summe aller Losnummern!

Lösung: $30\,000 \cdot 30\,001 : 2 - 9999 \cdot 10\,000 : 2 = 450\,015\,000 - 49\,995\,000 = 400\,020\,000$

8. (a) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 250 =$
   (b) Berechne unter Verwendung des Ergebnisses von Teilaufgabe (a) die Summe aller natürlichen Zahlen von 120 bis 250.

Lösung: (a) $250 \cdot 251 : 2 = 31\,375$

(b) $31\,375 - 119 \cdot 120 : 2 = 31\,375 - 7140 = 24\,235$

9. **Summen**
   (a) Zifferblatt
   Zerlege mit zwei Geraden das Zifferblatt einer Uhr so, dass die Summe der Ziffern in jedem der entstandenen Teile gleich groß ist.
   (b) Flugverbindungen
   Jede Hauptstadt der 15 Staaten der Europäischen Union soll von jeder anderen Hauptstadt aus durch eine direkte Flugverbindung erreichbar sein. Wie viele Flugverbindungen müssen eingerichtet werden, wenn Hin- und Rückrichtung als eine Verbindung gezählt werden?
   (c) Geraden durch Punkte
   In einer Ebene sind n Punkte gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Je zwei dieser Punkte legen genau eine Gerade fest.
      i. Wie viele Geraden werden durch die n Punkte bestimmt?
      ii. Kann die Anzahl der Geraden 55 (78; 95) betragen?

   Quelle: Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur, ISB 2001

Lösung: (a) Die Summe der Zahlen 1 bis 12 beträgt 78 und ist nicht durch vier teilbar. Daher führt eine Zerlegung in vier Bereiche nicht zum Ziel. Nachdem 78 durch drei teilbar ist gelingt dies aber mit drei Bereichen: $1+2+11+12 = 3+4+9+10 = 5+6+7+8 = 26$

(b) Verschiedene Lösungswege:

- Von der ersten Hauptstadt gehen 14 Verbindungen, von der zweiten 13 Verbindungen usw. aus. $\Rightarrow 14 + 13 + 12 + \cdots + 2 + 1 = 105$ Verbindungen

- schrittweises Vorgehen:
  zwei Städte $\Rightarrow$ 1 Verbindung
  drei Städte $\Rightarrow$ 3 Verbindungen
  vier Städte $\Rightarrow$ 6 Verbindungen
  ...
  15 Städte $\Rightarrow$ 105 Verbindungen

(c) i. Lösung analog zu (b): $1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)$

ii. Lösung durch probieren: $1+2+3+\cdots+10=55 \Rightarrow 11$ Punkte,

$1+2+3\cdots+12=78 \Rightarrow 13$ Punkte,

$1+2+3+\cdots+13=91$, damit ist 95 nicht möglich

10. (a) Wie verändert sich der Wert einer Summe, wenn man den ersten Summanden um 1 vergrößert?

(b) Wie verändert sich der Wert einer Summe, wenn man den zweiten Summanden um 2 vergrößert?

(c) Wie verändert sich der Wert einer Differenz, wenn man den Minuenden um 3 vergrößert?

(d) Wie verändert sich der Wert einer Differenz, wenn man den Subtrahenden um 4 vergrößert?

Lösung: (a) Der Wert der Summe wird um 1 größer.

(b) Der Wert der Summe wird um 2 größer.

(c) Der Wert der Differenz wird um 3 größer.

(d) Der Wert der Differenz wird um 4 kleiner.

11. (a) Wie verändert sich der Wert einer Summe, wenn man den ersten Summanden um 2 vergrößert und den zweiten Summanden um 3 vergrößert?

(b) Wie verändert sich der Wert einer Differenz, wenn man den Minuenden um 4 vergrößert und den Subtrahenden um 5 vergrößert?

(c) Wie verändert sich der Wert einer Summe, wenn man den ersten Summanden um 2 vergrößert und den zweiten Summanden um 5 verkleinert?

(d) Wie verändert sich der Wert einer Differenz, wenn man den Minuenden um 3 verkleinert und den Subtrahenden um 5 vergrößert?

(e) Wie verändert sich der Wert einer Differenz, wenn man den Minuenden um 7 vergrößert und den Subtrahenden um 4 vergrößert?

Lösung: (a) Der Wert der Summe wird um 5 größer.

(b) Der Wert der Differenz wird um 1 kleiner.

(c) Der Wert der Summe wird um 3 kleiner.

(d) Der Wert der Differenz wird um 8 kleiner.

(e) Der Wert der Differenz wird um 3 größer.

12. **Der kleine Gauss**

Ein Lehrer, der in Ruhe seine Zeitung lesen wollte, stellte den Schülern die Aufgabe, alle Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Nach einer Minute meldete sich der damals siebenjährige CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1885) schon mit dem richtigen Ergebnis und überraschte damit seinen Lehrer gründlich. Carl Friedrich, der später ein berühmter Mathematiker wurde, hat wie folgt gerechnet:

$$\begin{aligned}
&1+2+3+\ldots+98+99+100= \\
&=\underbrace{(1+100)}_{101}+\underbrace{(2+99)}_{101}+\underbrace{(3+98)}_{101}+\ldots+\underbrace{(50+51)}_{101}= \\
&=50\cdot 101=\underline{\underline{5050}}
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis erhält man auch mit folgender Rechnung:

$$100\cdot(100+1):2=10100:2=5050$$

(a) Berechne wie der kleine Gauss die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 40. Überprüfe, ob folgende Rechnung das gleiche Ergebnis liefert:

$$40\cdot(40+1):2$$

(b) Versuche nach der Methode von Gauss die Summe aller Zahlen von 1 bis 11 zu berechnen. Wenn es nicht funktioniert, rechne wie bisher gewohnt. Überprüfe das Ergebnis mit folgender Rechnung:

$$11\cdot(11+1):2$$

(c) Die bisherigen Ergebnisse lassen vermuten, dass folgende Regel richtig ist, wobei n irgend eine natürliche Zahl ist:

$$\boxed{\text{Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis } n=n\cdot(n+1):2}$$

Überprüfe die Regel durch direktes Nachrechnen für $n=5$, $n=9$ und $n=20$.

(d) Man kann exakt beweisen, dass die Regel der vorhergehenden Teilaufgabe für alle natürlichen Zahlen n richtig ist. Berechne damit die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer Million.

Lösung: (a) 820

(b) $(1+11)+(2+10)+(3+9)+(4+8)+(5+7)+6 = 5 \cdot 12 + 6 = 66$

(c) 15, 45, 210

(d) $1\,000\,000 \cdot 1\,000\,001 : 2 = 500\,000 \cdot 1\,000\,001 = 500\,000\,500\,000$

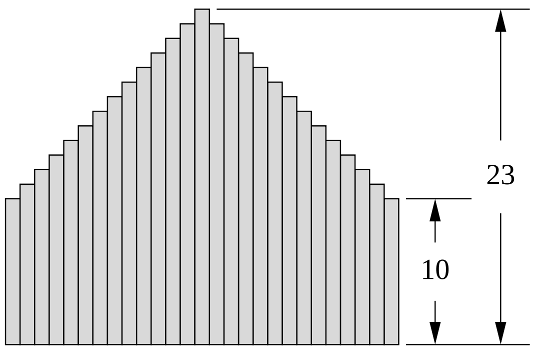
13. Der Nikolaus besucht die fünften Klassen einer Schule mit lauter unterschiedlich braven Kindern. Das böseste Kind bekommt einen Lebkuchen, das etwas bravere zwei, das nächste drei bis zum 98. und bravsten Kind, das gleich 98 Lebkuchen bekommt.
    (a) Wie viele Lebkuchen muss der Nikolaus mit sich herumtragen?
    (b) Im nächsten Jahr beschließt der Nikolaus, nur noch die bravere Hälfte der Kinder zu beschenken, die böse Hälfte soll leer ausgehen. Wie viele Lebkuchen muss der Nikolaus im nächsten Jahr mitbringen, wenn die braven Kinder wieder genauso viel bekommen wie in diesem Jahr?

Lösung: (a) $1+2+3+\ \ldots\ +98 = 98 \cdot 99 : 2 = 4851$

(b) $1+2+3+\ \ldots\ +49 = 49 \cdot 50 : 2 = 1225$

$50+51+52+\ \ldots\ +98 = 4851 - 1225 = 3626$

14. Nebenstehende Abbildung zeigt einen Palisadenzaun aus insgesamt 27 Palisaden. Die kürzesten Palisaden (links und rechts) sind 10 m lang. Zur Mitte hin nimmt die Länge der Palisaden jeweils um 1 m zu, die mittlere Palisade ist also 23 m lang. Berechne die Gesamtlänge aller 27 Palisaden.



Lösung: $2 \cdot (10+11+...+22)+23 = 2 \cdot (22 \cdot 23 : 2 - 9 \cdot 10 : 2) + 23 = 439$

1.2.3 Terme

1. Stelle mit den Zahlen 24, 9, 8 und 5 verschiedene Terme auf und berechne sie.
    (a) Bei mindestens drei Termen soll das Ergebnis zwischen 0 und 10 liegen.
    (b) Bei mindestens drei Termen soll das Ergebnis zwischen 100 und 110 liegen.

Literatur: Materialien Mathematik M49, Weiterentwicklung der Unterrichtskultur im Fach Mathematik (WUM), Anregungen für neue Wege im 5. Schuljahr, Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart

Lösung: Verschiedene Lösungen, z. B.

(a) $24 - 9 - 8 - 5$, $\quad 9 \cdot 8 : 24 + 5$, $\quad 24 : 8 + 9 - 5$

(b) $9 \cdot 8 + 24 + 5$, $\quad 24 \cdot 5 - 9 - 8$, $\quad 9 \cdot 8 + 24 + 5$

2. Gegeben ist folgender Term:

$$65432 - [(2264 - 675) - (123 + 432 + 1)] - 10$$

(a) **Gliedere** den Term.

(b) **Berechne** den Wert des Terms in einer Zeile.

(c) Wie verändert sich der Wert des Terms, wenn alle Zahlen um 2 vergößert werden?

Lösung: (a) (b) 64389
(c) Ergebnis ist um 6 größer.

3. Gegeben ist folgender Term:

$$5763 + [(1342 - 43) - (234 + 32 + 1) - 10]$$

(a) **Gliedere** den Term.

(b) **Berechne** den Wert des Terms in einer Zeile.

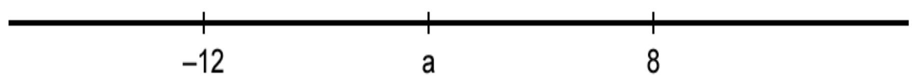
(c) Wie verändert sich der Wert des Terms, wenn alle Zahlen um 3 vergößert werden?

Lösung: (a) (b) 6785
(c) Ergebnis ist um 9 kleiner.

1.3 Die ganzen Zahlen, ihre Addition und Subtraktion

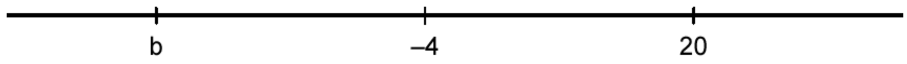
1.3.1 Menge der ganzen Zahlen, Zahlengerade

1. (a) Die Zahl a liegt auf der Zahlengerade genau in der Mitte zwischen -12 und 8.



Für welche Zahl steht a?

(b) Die Zahl -4 liegt auf der Zahlengerade genau in der Mitte zwischen 20 und der Zahl b.



Für welche Zahl steht a?

Quelle: Vergleichsarbeit bundesland- und schulartübergreifend in der Jahrgangsstufe 8, Materialien zur Weiterarbeit

Lösung: (a) -2, (b) -28

2. Streiche aus der Zahl $-87\,906\,128$ vier Ziffern so weg, dass die entstehende Zahl möglichst klein ist.

Lösung: $-9\,628$

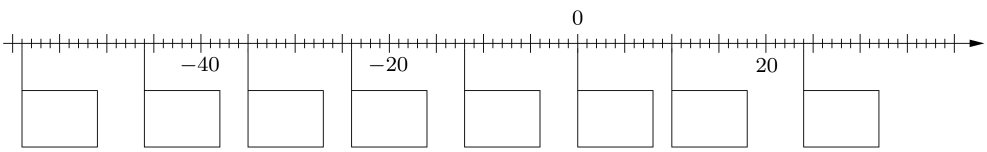
3. Zeichne eine Zahlengerade mit Einheit 1 cm und trage die ganzen Zahlen zwischen -6 und 6 ein.

Lösung:

4. Zeichne eine Zahlengerade mit Einheit 1 Kästchen und trage die Zahlen -7, 3, -4, 0, -5, 6, 12, -10 und 9 ein.

Lösung:

5. Lies die markierten Zahlen ab!



Lösung: -59, -46, -35, -24, -12, 0, 10, 24

6. Wie weit sind die folgenden Zahlen an der Zahlengeraden voneinander entfernt?
   (a) 6 und 18 (b) -6 und 18 (c) -6 und 6
   (d) -8 und 4 (e) -2 und 18

Lösung: (a) 12 (b) 12 (c) 12 (d) 12 (e) 20

7. Gib jeweils die Zahl an, die auf der Zahlengeraden genau in der Mitte liegt:

   (a) 6 und 18 (b) -6 und 18 (c) -6 und 6
   (d) -8 und 4 (e) -2 und 18

Lösung: (a) 12 (b) 6 (c) 0 (d) -2 (e) 8

8. Welche Zahlen besitzen an der Zahlengeraden die Entfernung

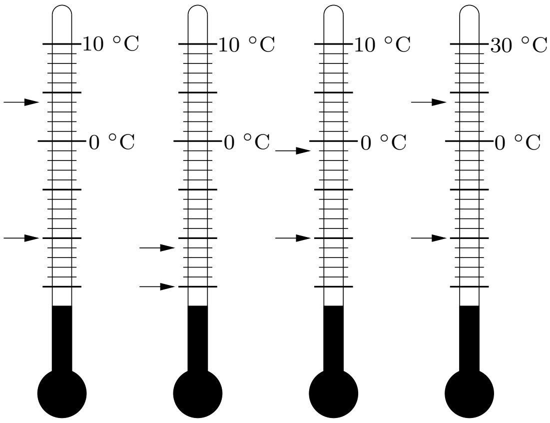
   (a) 4 von 7 (b) 4 von 2 (c) 7 von 0
   (d) 8 von -20 (e) 10 von 3 (f) 50 von -38

Lösung: (a) 3, 11 (b) -2, 6 (c) -7, 7
(d) -28, -12 (e) -7, 13 (f) -88, 12

9. **Temperaturmessung**

   (a) Lies an jedem Thermometer die beiden gekennzeichneten Temperaturen ab und bestimme den Temperaturunterschied!

   (b) Bestimme beim ersten Thermometer den Temperaturmittelwert!



Lösung: (a) $\Delta T:$ $14\,°\mathrm{C}, 4\,°\mathrm{C}, 9\,°\mathrm{C}, 14\,°\mathrm{C}$ (b) $-3\,°\mathrm{C}$

10. Suche in deinem Atlas die größte vorkommende Meerestiefe, die tiefste Stelle des Mittelmeers, die Zugspitze und den höchsten Berg der Erde. Notiere jeweils die Höhenangabe und trage diese Daten an eine geeignete Zahlengerade an!

Lösung: größte vorkommende Meerestiefe:
Witjastiefe im Marianengraben 10924 m u.d.M.
die tiefste Stelle des Mittelmeers: 5092 m u.d.M.
die Zugspitze: 2962 ü.d.M.
den höchsten Berg der Erde: Mount Everest 8848 m ü.d.M.

11. Suche in deinem Atlas negative Höhenangaben im Nordwesten Ägyptens, im Jordantal (Israel), östlich des Kaspischen Meeres und im Death Valley (USA).

Lösung: im Nordwesten Ägyptens: Kattarasenke, 133 m u. d. M.
im Jordantal (Israel): totes Meer, 403 m u. d. M.
östlich des Kaspischen Meeres: 26 m u. d. M
im Death Valley (USA): arides Becken in O-Kalifornien, USA, bis 86 m u.d.M., Sommertemperatur bis 57°, Salzwüste

12. Viele Thermometer speichern die höchste Tages- und die niedrigste Nachttemperatur ab. Im Verlauf einer Woche ergaben sich mit einem solchen Gerät folgende Werte:

	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
höchste Temperatur in °C	8	6	6	2	−3	−3	1
niedrigste Temperatur in °C	2	−3	−5	−6	−8	−5	−9

Um wie viel °C sank die Temperatur jeweils von einem gespeicherten Höchstwert zum nächsten. Um wie viel °C stieg sie anschließend wieder?

Lösung: höchste Temperatur in °C:

Mo $\to$ Di: -2°C, Di $\to$ Mi: 0°C, Mi $\to$ Do: -4°C, Do $\to$ Fr: -5°C, Fr $\to$ Sa: 0°C, Sa $\to$ So: $+4$°C

niedrigste Temperatur in °C

Mo $\to$ Di: -5°C, Di $\to$ Mi: -2°C, Mi $\to$ Do: -1°C, Do $\to$ Fr: -2°C, Fr $\to$ Sa: 3°C, Sa $\to$ So: -4°C

13. Setze die Zahlenfolgen fort:
   (a) $11, 8, 5, ...$
   (b) $14, 13, 11, 8, ...$
   (c) $-20, -16, -12, ...$
   (d) $-14, -9, -5, -2, ...$
   (e) $15, 12, 11, 8, ...$
   (f) $20, 19, 17, 13, ...$
   (g) $1, 2, 0, 3, -1, 4, ...$
   (h) $1, 2, -2, -4, 4, 8, ...$

Lösung:
(a) $11, 8, 5, 2, -1, -4, -7, ...$
(b) $14, 13, 11, 8, 4, -1, -7, -14, ...$
(c) $-20, -16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, ...$
(d) $-14, -9, -5, -2, 0, 1, 1, 0, -2, -5, ...$
(e) $15, 12, 11, 8, 7, 4, 3, 0...$
(f) $20, 19, 17, 13, 5, -11, ...$

(g) $1, 2, 0, 3, -1, 4, -2, 5, -3, 6, -4, 7, ...$

(h) $1, 2, -2, -4, 4, 8, -8, -16, 16, 32, -32, ...$

14. Trage die Punkte $A(-2|-3)$, $B(2|-3)$, $C(2|1)$, $D(-2|1)$ und $E(0|3)$ in ein Gitternetz ein und verbinde ABCDACEDB.

    (a) Stelle Dir vor, die entstehende Figur würde um eine Einheit nach links verschoben. Wie lauten dann die Koordinaten der Eckpunkte?

    (b) Welche Eckpunkte ergeben sich, wenn man die Figur so verschiebt, dass sich ihre ,,Spitze" bei (2|1) befindet?

Lösung: (a) $A'(-3|-3), B'(1|-3), C'(1|1), D'(-3|1), E'(-1|3)$

(b) $A''(0|-5), B''(4|-5), C''(4|-1), D''(0|-1), E''(2|1)$

15. Sortiere nach der Größe:

    (a) $-14, 16, -15, 12, -13$

    (b) $18-7$; Zahl, die an der Zahlengerade in der Mitte zwischen 4 und -8 steht; um 1 weniger als 5; der größte gemeinsame Teiler von 12 und 18.

Lösung: (a) $-15 < -14 < -13 < 12 < 16$

(b) $-2 < 4 < 6 < 11$

16. Sortiere nach der Größe: 23 € Schulden, 4 € Schulden, 20 € Haben, −10 €, 20 €, −7 €, Durchschnitt von −10 € und −20 €.

Lösung: 23 € Schulden, Durchschnitt von −10 € und −20 €, −10 €, −7 €, 4 € Schulden, 20 € Haben = 20 €

17. Zeichne eine Zahlengerade mit Einheit 1 cm und trage −6 bis 6 ein. Kennzeichne in grün alle Zahlen, die kleiner als 3 sind, in blau alle, die kleiner als −3 sind und in rot alle, deren Abstand von Null kleiner als 5 ist.

Lösung:

18. Bestimme die Lösungsmengen für $G = \mathbb{Z}$

    (a) $x > -4$ (b) $x < 3$ (c) $-6 < x < -5$

Lösung: (a) $L = \{-3, -2, -1, \dots\}$ (b) $L = \{2, 1, 0, -1, \dots\}$ (c) $L = \{\,\}$

19. Drei Mädchen nehmen an einem Sprungwettbewerb teil. Ausgehend von Nicoles Sprungweite landete Sabine bei $-30\,\mathrm{cm}$ und Katharina bei $-8\,\mathrm{cm}$. In welcher Reihenfolge gehören Katharina, Sabine und Nicole auf das Siegertreppchen?

Lösung: Nicole, Katharina, Sabine

20. Zeichne in ein Gitternetz (Rechtswerte und Hochwerte jeweils von -6 bis 6) und verbinde
    (a) alle Punkte, deren Rechtswert um 1 kleiner als der Hochwert ist.
    (b) alle Punkte, bei denen der Rechtswert um 2 größer als der Hochwert ist.
    (c) alle Punkte, deren Hochwert halb so groß ist wie der Rechtswert.

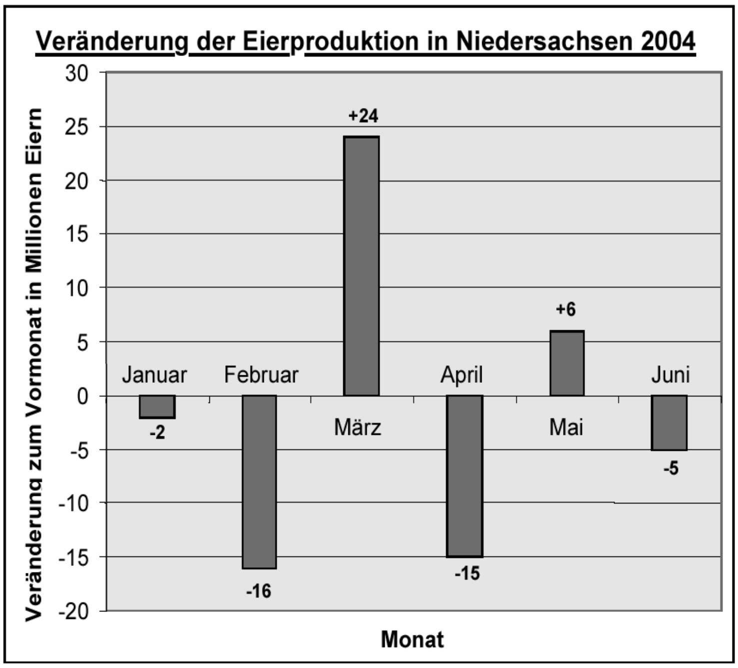
Lösung:

21. Zeichne in einem Gitternetz (Rechtswerte und Hochwerte jeweils von -6 bis 6)
    (a) rot alle Punkte, deren Rechtswert kleiner als 1 und deren Hochwert größer als -3 ist.
    (b) grün alle Punkte, deren Rechtswert den Betrag 5 und deren Hochwert einen Betrag besitzt, der kleiner als 3 ist.

Lösung:

1.3.2 Berechnung von Summen- und Differenzwerten

1. Viele der in Deutschland verbrauchten Eier werden in Niedersachsen gelegt. Im Jahr 2003 waren dies 2323 Millionen Eier, davon 283 Millionen Eier im Dezember 2003. Für das Folgejahr ist im untenstehenden Diagramm die Zu- oder Abnahme zum jeweiligen Vormonat dargestellt. Zum Beispiel sind im März 24 Millionen Eier mehr verkauft worden als im Februar 2004.



Quelle: Niedersächsisches Landesamt für Statistik

(a) Wie viele Eier werden im Juni im Vergleich zum Januar verkauft?

(b) Wie viele Eier werden im Juni verkauft?

nach: Vergleichsarbeit bundesland- und schulartübergreifend in der Jahrgangsstufe 8, Materialien zur Weiterarbeit

Lösung: (a) 6 Millionen weniger (b) 8 Millionen weniger als im Dezember 2003, also 275 Millionen

2. Gegeben sind die Zahlen -1271, 1498, -1765, 3374.

   Welches ist der größtmögliche Differenzwert, wenn man zwei Zahlen subtrahiert? Gib deine Rechnung an!

Lösung: $3374 - (-1765) = 5139$

3. Suche unter den acht angegebenen Termen solche mit gleichem Wert.

   A: $32 - 56$ B: $-32 - 56$ C: $56 - (-32)$ D: $(-32) - (+56)$

   E: $(+56) + 16 + 16$ F: $-32 - (-56)$ G: $32 + (-56)$ H: $56 - 40 + 8$

Lösung: A/G, B/D, C/E, F/H

4. (a) $8 + (-17)$ (b) $-8 + (-17)$ (c) $8 - (-17)$ (d) $-8 - (-17)$

Lösung: (a) $8 - 17 = -9$ (b) $-8 - 17 = -25$
(c) $8 + 17 = 25$ (d) $-8 + 17 = 9$

5. (a) $13+(-27)$ (b) $-13+(-27)$ (c) $13-(-27)$ (d) $-13-(-27)$

Lösung: (a) $13 - 27 = -14$ (b) $-13 - 27 = -40$
(c) $13 + 27 = 40$ (d) $-13 + 27 = 14$

6. Im Stützpfeiler einer Ölplattform windet sich eine Wendeltreppe nach unten. Die Treppe beginnt oben an der Plattform, 43 m über dem Meeresspiegel. In welcher Tiefe unter dem Meer endet die Treppe, die aus 384 Stufen der Höhe 25 cm besteht?

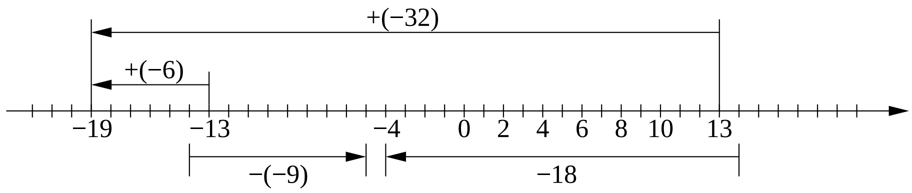
Lösung: $43\,\mathrm{m} - (384 : 4)\,\mathrm{m} = 43\,\mathrm{m} - 96\,\mathrm{m} = -53\,\mathrm{m}$

7. (a) Welche Zahl muss man fünfmal zu 5 addieren, um -30 zuerhalten?
   (b) Welche Zahl muss man sechsmal von 6 subtrahieren, um -60 zuerhalten?
   (c) Welche Zahl muss man siebenmal von -7 subtrahieren, um -63 zuerhalten?
   (d) Welche Zahl muss man achtmal zu -8 addieren, um 64 zuerhalten?
   (e) Welche Zahl muss man neunmal zu -90 addieren, um -36 zuerhalten?

Lösung: (a) -7 (b) 11 (c) 8 (d) 9 (e) 6

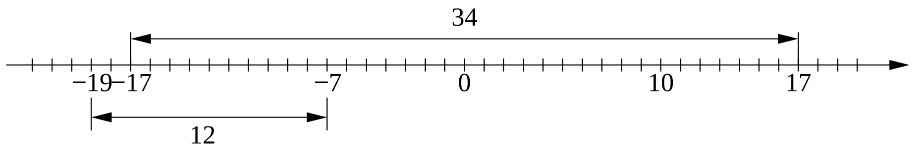
8. Zeichne eine Zahlengerade in der Einheit 5 mm von -20 bis $+20$. Erstelle für jede der folgenden Teilaufgaben einen Ansatz, veranschauliche die Rechnung an der Zahlengeraden und schreibe die fertige Rechnung und die Antwort hin:
   (a) Welche Zahl muss man zu 13 addieren, um -19 zu erhalten?
   (b) Welche Zahl muss man zu -13 addieren, um -19 zu erhalten?
   (c) Welche Zahl muss man von 14 subtrahieren, um -4 zu erhalten?
   (d) Von welcher Zahl muss man -9 subtrahieren, um -5 zu erhalten?

Lösung: (a) $13 + x = -19,\quad 13 + (-32) = -19,\quad x = -32$
(b) $-13 + x = -19,\quad -13 + (-6) = -19,\quad x = -6$
(c) $14 - x = -4,\quad 14 - 18 = -4,\quad x = 18$
(d) $x - (-9) = -5,\quad -14 - (-9) = -5,\quad x = -14$



9. Zeichne eine Zahlengerade in der Einheit 5 mm von -20 bis $+20$. Veranschauliche jede der folgenden Teilaufgaben an der Zahlengeraden und schreibe die fertige Rechnung und die Antwort hin:
   (a) Wie weit ist die Zahl $+17$ von ihrer Spiegelzahl entfernt?
   (b) Wie weit ist die Zahl -7 von der Spiegelzahl von $+19$ entfernt?

Lösung: (a) $2 \cdot 17 = 34$
(b) $|(-7) - (-19)| = 12$



10. Berechne der Reihe nach:
    (a) $(7 - 15) + 55$
    (b) $(78 - 150) + 55$
    (c) $(-11) + (85) + (-36)$
    (d) $(-10) + (85) + (-40)$

Lösung: (a) 47 (b) -17 (c) 38 (d) 35

11. Übertrage die Tabelle auf das Blatt und berechne folgende Terme für

a	-1	-3	+1	+3
b	+5	-5	+5	-5
$a-b$				
$a+b$				
$\|a\| - \|b\|$				

Lösung:

a	-1	-3	$+1$	$+3$
b	$+5$	-5	$+5$	-5
$a-b$	-6	$+2$	-4	$+8$
$a+b$	$+4$	-8	$+6$	-2
$\|a\| - \|b\|$	-4	-2	-4	-2

12. Übertrage die Tabelle auf das Blatt und berechne folgende Terme für

a	-2	-4	+1	+6
b	+5	-5	-5	-5
$a-b$				
$a+b$				
$\|a\|-\|b\|$				

Lösung:

a	-2	-4	$+1$	$+6$
b	$+5$	-5	-5	-5
$a-b$	-7	$+1$	$+6$	$+11$
$a+b$	$+3$	-9	-4	$+1$
$\|a\|-\|b\|$	-3	-1	-4	$+1$

13. Stelle auf der Zahlengeraden (Einheit ein Kästchen) eine Übersicht über die Fortschritte bzw. Rückschritte im Weitsprung auf!

    Beispiel: Daniela springt im Jahr 2000 21 cm weiter als 1999, wir schreiben ihren Namen deshalb bei 21 (Kästchen) an die Zahlengerade!

Beste Saisonleistung in cm	1999	2000
Daniela	344	365
Carolin	345	335
Sabine	360	375
Stefan	420	410
Monique	325	340
Michael	390	401
Volker	440	428

Lösung:

14. Berechne:
    (a) $7-17$, $70-170$, $71-169$, $51-169$
    (b) $3-38$, $38-3$, $38+3$, $220-17$
    (c) $220-37$, $37-220$, $180\cdot 15-180:5$, $(13-3\cdot 2)-8$
    (d) $3-3:3$, $[30-(20-8)]-45$, $180-180\cdot 3$, $53-84$

Lösung: (a) -10, -100, -98, -118
(b) -35, 35, 41, 203
(c) 183, -183, 2664, -1

(d) $2, -27, -360, -31$

15. Betrachte die natürlichen Zahlen 1, 3, 4, 7, 11, 12, 25, 34, 36. Aus jeweils zwei verschiedenen dieser Zahlen lassen sich Differenzen bilden.
    (a) Bei welchen Differenzen ist der Differenzwert kleiner als -20?
    (b) Finde die drei kleinsten und die drei größten Differenzwerte.
    (c) Gib 5 Beispiele von Differenzen an, bei denen die Differenzwerte zwischen -5 und 0 liegen.
    (d) Welche Differenzen haben den Betrag 4?

Lösung: (a) $1-25$, $3-25$, $4-25$, $1-34$, $3-34$, $4-34$, $7-34$, $11-34$, $12-34$, $1-36$, $3-36$, $4-36$, $7-36$, $11-36$, $12-36$

(b) die drei kleinsten Differenzwerte: $1-36=-35$, $1-34=3-36=-33$, $4-36=-32$
die drei größten Differenzwerte: $36-1=35$, $34-1=36-3=33$, $36-4=32$

(c) z. B. $1-3$, $3-4$, $7-11$, $11-12$, $34-36$

(d) $7-3$, $3-7$, $11-7$, $7-11$

16. (a) Nach einer Überweisung sinkt der Kontostand von 73 € auf -16 €. Wie hoch war der Überweisungsbetrag?
    (b) Bei einem Kontostand von 260 € liegen Herrn Scholz 5 Rechnungen vor, und zwar über 70 €, 92 €, 54 €, 68 € und 120 €. Welche Überweisungen kann er tätigen, ohne sein Konto zu überziehen? Wie hoch überzieht er sein Konto, wenn er alle 5 Rechnungsbeträge überweist?

Lösung: (a) 89 €

(b) Wenn er alle Rechnungsbeträge überweist überzieht er sein Konto um 144 €.

70 €, 92 € und 54 € oder
70 €, 92 € und 68 € oder
70 €, 54 € und 68 € oder
92 €, 54 € und 68 € oder
92 €, 54 € und 120 € oder
70 €, 54 € und 120 € oder
70 €, 68 € und 120 €
54 €, 68 € und 120 €

17. (a) Welche Zahl muss man von 200 subtrahieren, um -318 zu erhalten?
    (b) Von welcher Zahl muss man 36 subtrahieren, um -19 zu erhalten?

(c) Wie oft muss man von 230 die Zahl 30 subtrahieren, um weniger als -10 zu erhalten?

Lösung: (a) 518 (b) 17 (c) 9 mal

18. (a) Welche natürlichen Zahlen kann man von 20 subtrahieren, um mehr als -40 zu erhalten?
    (b) Welche Zahlen kann man von 20 subtrahieren, um weniger als 10 zu erhalten?
    (c) Von welcher Zahl muss man 81 subtrahieren, um -37 zu erhalten?
    (d) Formuliere die Teilaufgaben (a), (b) und (c) als Gleichungen bzw. Ungleichungen.

Lösung: (a) $59, 58, 57, \ldots, 1$ (b) $11, 12, 13, \ldots$ (c) 44
(d) $20 - x > -40 \quad G = \mathbb{N}$, $20 - x < 10 \quad G = \mathbb{N}$, $x - 81 = -37 \quad G = \mathbb{N}$

19. Addiere:

(a) $-17 + 13$	(b) $-17 + (-13)$	(c) $17 + 13$	(d) $17 + (-13)$
(e) $2 + 29$	(f) $(+2) + (-29)$	(g) $(-2) + 29$	(h) $(-2) + (-29)$
(i) $27 + 0$	(k) $0 + (-27)$	(l) $-4 + 17$	(m) $4 + 17$
(n) $-125 + 375$	(o) $-385 + (-17)$		

Lösung:

(a) -4	(b) -30	(c) 30	(d) 4
(e) 31	(f) -27	(g) 27	(h) -31
(i) 27	(k) -27	(l) 13	(m) 21
(n) 250	(o) -402		

20. Löse durch Nachdenken! ($G = \mathbb{Z}$).

(a) $-4 + x = 13$ (b) $x + (-4) = -3$ (c) $x + 17 = -4$
(d) $23 + x = 6$ (e) $x + (-44) = 12$

Lösung:
(a) $L = \{17\}$ (b) $L = \{1\}$ (c) $L = \{-21\}$
(d) $L = \{-17\}$ (e) $L = \{56\}$

21. Welche Zahl muss man zum Betrag von 54 addieren, um 28 zu erhalten?

Lösung: -26

22. Zu welcher Zahl muss man den Betrag von -54 addieren, um 13 zu erhalten?

Lösung: -41

23. In der Zeile „Rechtswert“ sollst du nach rechts von jeder Spalte zur nächsten 2 addieren, in der Spalte „Hochwert“ sollst du jeweils -1 addieren. Zeichne dann die Punkte in ein Gitternetz. (Einheit 1 Kästchen)

	A	B	C	D	E	F	G	H
Rechtswert	-6	-4						
Hochwert	3	2						

Lösung:

24. In der Zeile „Rechtswert“ sollst du nach rechts von jeder Spalte zur nächsten -2 addieren, in der Spalte „Hochwert“ sollst du jeweils -3 addieren. Zeichne dann die Punkte in ein Gitternetz. (Einheit 1 Kästchen)

	A	B	C	D	E	F	G	H
Rechtswert	5	3						
Hochwert	9	6						

Lösung:

25. Vergleiche $27 - (-13)$ und $27 + 13$, aber auch $0 - 45$ mit $0 + (-45)$.

Lösung: $27 - (-13) = 27 + 13$, $0 - 45 = 0 + (-45)$

26. Subtrahiere:

(a) $-17 - 13$ (b) $-17 - (-13)$ (c) $17 - (+13)$ (d) $17 - (-13)$ (e) $2 - 29$
(f) $2 - (-29)$ (g) $-2 - (+29)$ (h) $-2 - (-29)$ (i) $27 - 0$ (k) $0 - (-27)$

Lösung:
(a) -30 (b) -4 (c) 4 (d) 30 (e) -27
(f) 31 (g) -31 (h) 27 (i) 27 (k) 27

27. Berechne:

(a) $-4 + 17$ (b) $4 - 17$ (c) $-4 - 17$ (d) $4 + 17$ (e) $-125 + 375$
(f) $-623 - 165$ (g) $-385 + (-17)$ (h) $672 - 52$ (i) $-391 - 416$ (f) $290 - (-415)$

Lösung:
(a) 13 (b) -13 (c) -21 (d) 21 (e) 250
(f) -788 (g) -402 (h) 620 (i) -807 (f) 705

28. Ersetze x so durch eine ganze Zahl, dass eine wahre Aussage entsteht:

(a) $x - (-4) = -3$ (b) $x - 22 = -33$ (c) $5 - x = 10$ (d) $-4 - x = 13$

Lösung: (a) -7 (b) -11 (c) -5 (d) -17

29. Welche Zahl muss ich von 48 subtrahieren, um 60 zu erhalten?

Lösung: -12

30. Von welcher Zahl muss ich 15 subtrahieren, um 26 zu erhalten?

Lösung: 41

31. (a) Nach rechts sollst du zum Rechtswert jeweils 2 und zum Hochwert -2 addieren. Nach links sollst du vom Rechtswert 2 und vom Hochwert -2 subtrahieren. Zeichne dann die Punkte A bis H in ein Gitternetz.

	A	B	C	D	E	F	G	H
Rechtswert					1			
Hochwert					3			

(b) Wenn „„Minus-Minus“ nicht „Plus“ wäre, dann würde die Tabelle aus (a) so aussehen, wie sie unten dargestellt ist. Zeichne wieder die Punkte in ein Gitternetz.

	A	B	C	D	E	F	G	H
Rechtswert	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7
Hochwert	-5	-3	-1	1	3	1	-1	-3

Lösung:

32. Berechne
(a) $-32 + (45 - 80)$ (b) $(-32 + 45) - 80$ (c) $-32 + 45 - 80$ (d) $32 - 45 + 80$

Lösung: (a) -67 (b) -67 (c) -67 (d) 67

33. (a) Die Zahlen von 1 bis 16 lassen sich in einem „magischen Quadrat“ anordnen. Davon spricht man, wenn die Summe der Zahlen aller Spalten und aller Zeilen sowie der beiden Diagonalen einer quadratischen Anordnung von 16 Zahlen gleich ist. Ergänze zu einem magischen Quadrat.

1	14	15	4
	7		
	11	10	5

(b) Nachdem Klaus die Aufgabe gelöst hat, ruft er blitzschnell:
„Ich kenne noch drei andere magische Quadrate“ und schreibt an die Tafel:

−7	6	7	−4
4	−1	−2	1
0	3	2	−3
5	−6	−5	8

−7	4	3	−10
−2	−5	−4	1
−6	−1	0	−3
5	−8	−9	2

−14	8	6	−20
−4	−10	−8	2
−12	−2	0	−6
10	−16	−18	4

Sind das wirklich magische Quadrate? Wie hat Klaus sie so schnell gefunden?

(c) Gib magische Quadrate an, bei denen alle Summen -6 (-18, -120) sind.

Lösung: (a)

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

(b) Es handelt sich um magische Quadrate. Im ersten Quadrat wurde von jeder Zahl aus dem Quadrat aus (a) 8 subtrahliert. Im zweiten Quadrat erhält man aus dem ersten Quadrat, indem man von jeder Zahl 3 subtrahiert und die Spalten in umgekehrter Reihenfolge schreibt. Das dritte Quadrat erhält man aus dem zweiten Quadrat, indem man jede Zahl mit 2 multipliziert.

(c)

−9	4	5	−6
2	−3	−4	−1
−2	1	0	−5
3	−8	−7	6

−27	12	15	−18
6	−9	−12	−3
−6	3	0	−15
9	−24	−21	18

−84	48	36	−120
−24	−60	−48	12
−72	−12	0	−36
60	−96	−108	24

34. Berechne:

(a) $2-(-14)$, $4-(-11)$, $(-14)-4$, $(-14)-(-4)$, $(-7)-(-8)$

(b) $24-38$, $24-(-19)$, $(-38)-48$, $(-8)-(-19)$, $(-32)-(-190)$

Lösung: (a) 16, 15, −18, −10, 1

(b) −14, 43, −86, 11, 158

35. (a) Die Gleichung $25+x=37$ konnte mit den „alten“ Zahlen gelöst werden. Ersetzt man die Zahl 25 durch (-65), so befindet man sich im neuen Zahlenbereich. Ermittle die Lösungsmenge.

(b) Verändere das Beispiel auf andere Weise so, dass man zur Lösung nun die neuen Zahlen benötigt. Beachte dass es insgesamt vier grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten gibt.

(c) Verfahre mit der Gleichung $24 \cdot x = 120$ genauso wie bei (a).

Lösung: (a) $L = \{102\}$

(b) z. B. $(-65) + x = 37$, $(-65) + x = (-14)$, $(+88) + x = (-57)$, $89 + x = 37$

(c) $-24 \cdot x = 120 \quad L = \{-5\}$

36. Entscheide durch Überschlagen, welche Zahlen I bis X am nächsten bei den Ergebnissen der Rechnungen (a) bis (d) liegen:

(a) $215689 - 498123$ (b) $197342 - 302576$ (c) $983215 + 604342$ (d) $1775674 + 904543$

I)	2706432	II)	1609876	III)	230988	IV)	103324	V)	12334
VI)	1909776	VII)	−103324	VIII)	290988	IX)	−240988	X)	−280988

Lösung: (a) X: −280988 (b) VII: −103324 (c) II: 1609876 (d) I: 2706432

37. Gib verschiedene Summen an, die den Wert 123 haben.

Lösung: Z. B. $123 = 122 + 1 = 124 + (-1) = (-2) + 125$

38. (a) 10 Millionen − 1 Milliarde

(b) 1 Million − 1 Milliarde + 1 Billion − 1 Billiarde

Lösung: (a) $-990\,000\,000$

(b) $1\,000\,001\,000\,000 - 1\,000\,001\,000\,000\,000\,000 = -999\,000\,999\,000\,000$

39. Der Wert einer Differenz mit dem Minuenden zwei Milliarden ist drei Billionen. Wie groß ist der Subtrahend?

Lösung: 2Milliarden $- x = 3$ Billionen, $x = -2998$ Milliarden

40. Berechne den Wert der Differenz mit dem Subtrahenden minus dreihundert Milliarden und dem Minuenden minus zwanzig Billionen.

Lösung: $-20\,\mathrm{B} - (-300\,\mathrm{Md}) = -(20\,\mathrm{B} - 300\,\mathrm{Md}) = -19\,\mathrm{B}\,700\,\mathrm{Md}$

1.3.3 Rechenregeln

1. Überprüfe, ob für ganze Zahlen das Kommutativgesetz gilt:
   (a) $-12+27$ (b) $27-12$ (c) $27+(-12)$ (d) $-27+12$
   (e) $33-85$ (f) $-85+33$ (g) $33+(-85)$ (h) $85-33$

Lösung: (a) 15 (b) 15 (c) 15 (d) -15
(e) -52 (f) -52 (g) -52 (h) 52

Es gilt das Kommutativgesetz der Addition, es gilt kein Kommutativgesetz der Subtraktion.

2. Prüfe an Beispielen, ob der Betrag der Differenz zweier ganzer Zahlen stets ihr Abstand auf der Zahlengerade ist.

Lösung: z. B. Abstand der Zahlen 3 und 7 beträgt $4 = |7-3|$,
Abstand der Zahlen -3 und 7 beträgt $10 = |7-(-3)|$,
Abstand der Zahlen 17 und -3 beträgt $20 = |(-3)-17|$

3. Berechne
   (a) $1-2+3-4+5-6+7-8+9-10$
   (b) $11-13+15-17+19-21$
   (c) $210-220+230-240+250-260$
   (d) Formuliere eine Regel wie man diese und ähnliche Terme berechnen kann.

Lösung: (a) $(1-2)+(3-4)+(5-6)+(7-8)+(9-10) = 5\cdot(-1) = -5$
(b) $(11-13)+(15-17)+(19-21) = 3\cdot(-2) = -6$
(c) $(210-220)+(230-240)+(250-260) = 3\cdot(-10) = -30$
(d) Z. B.: Lassen sich in einer Summe jeweils zwei Summanden als Paar mit gleichem Summenwert zusammenfassen, so erhält man den Wert der Summe, in dem man den Summenwert mit der Anzahl der Paare multipliziert.

1.3.4 Einfache Terme

1. Berechne:
   (a) $17-8-(-3)$, $18-(-5)+32$, $3-7-(-4)-(-9)$, $8-237+(-17)-28$
   (b) $25+(-26)-(-27)$, $25-26-27$, $(25-26)-27$, $(25-26)-(-27)$

Lösung: (a) 12, 55, 9, -274
(b) 26, -28, -28, 26

2. Zeichne zwei verschiedene Rechenbäume zur Berechnung von $54 - 23 - 17$. Welcher ist der günstigere?

Lösung:

3. Addiere geschickt:

(a) $182 + [(+38) + 18]$	(b) $[13 + (-17)] + (-13)$
(c) $-17 + [(-13) + (-27)]$	(d) $[(-154) + 97] + (-56)$
(e) $-67 + (92 - 33)$	(f) $(87 - 195) + (205 - 87) + (-205 + 195)$

Lösung:

(a) $182 + 18 + 38 = 238$	(b) $[13 + (-13)] + (-17) = -17$
(c) $-17 + [(-13) + (-27)] = -57$	(d) $[(-154) + (-56)] + 97 = -113$
(e) $92 + (-67 - 33) = -8$	(f) $(87 - 87) + (205 - 295) + (195 - 195) = 0$

4. Berechne

(a) $-45 + 24 - 83 + 46$

(b) $71 - 23 - 97 + 49$

(c) $3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8$

Lösung: (a) -58 (b) 0 (c) -3

5. (a) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10$

(b) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 + 11$

(c) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 + ... + 99 - 100$

(d) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 + ... + 99 - 100 + 101$

(e) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 + ... + 999 - 1000$

(f) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 + ... + 999 - 1000 + 1001$

(g) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + ... +$ vorletzte Zahl $-$ letzte Zahl

(h) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + ... -$ vorletzte Zahl $+$ letzte Zahl

Lösung: (a)

$$(1 - 2) + (3 - 4) + (5 - 6) + (7 - 8) + (9 - 10) =$$
$$= (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -5$$

(b)

$$1 + (3 - 2) + (5 - 4) + (7 - 6) + (9 - 8) + (11 - 10) =$$
$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$$

(c) -50

(d) $+51$

(e) -500

(f) $+501$

(g) $-$letzte Zahl : 2

(h) $+$(letzte Zahl + 1) : 2

6. (a) $10 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8$

   (b) $100 - 1 - 2 - 3 - 4 - ... - 49$

   (c) $-30 + 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 12$

   (d) $1 - 10 + 2 - 11 + 3 - 12 + 4 - 13 + 5 - 14 + 6 - 15$

   (e) $1 - 10 + 2 - 11 + 3 - 12 + 4 - 13 + 5 - 14 + 6 - 15 + ... + 20 - 29$

Lösung: (a) $10 - (1 + 2 + ... + 8) = 10 - 36 = -26$

(b) $100 - (1 + 2 + .. + 49) = 100 - 49 \cdot 50 : 2 = 100 - 1225 = -1125$

(c) $-30 + 12 \cdot 13 : 2 = -30 + 78 = 48$

(d) $$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) - (10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15) = \\ = 21 - 75 = -54$$

(e) $$(1 + 2 + ... + 20) - (10 + 11 + ... + 29) = 210 - 390 = -180$$

oder

$$(1 + 2 + .. + 9) + (10 - 10) + ... + (20 - 20) - (21 + 22 + .. + 29) = \\ = (1 + 2 + ... + 9) - [9 \cdot 20 + (1 + 2 + .. + 9)] = -180$$

7. Addiere alle ganzen Zahlen, die größer als -200 und kleiner als 100 sind.

Lösung: $$(-199) + (-198) + ... + (-1) + 0 + 1 + 2 + ... + 99 = \\ = (1 + 2 + ... + 99) - (1 + 2 + ... + 199) = \\ = 99 \cdot 100 : 2 - 199 \cdot 200 : 2 = 4950 - 19900 = -14950$$

8. Ein Flugzeug startet auf einem kleinen Flugplatz im Hochland von Nepal. Die Maschine steigt zunächst um 2500 m, sinkt dann um 1900 m, steigt wieder um 1500 m und sinkt bis zur Landung noch einmal um 4800 m. Um wie viele Meter liegt der Landeplatz tiefer als der Startplatz?

Lösung: Um 2700 m tiefer.

9. Eva hat von ihren Eltern zum Geburtstag eine Bankkarte mit 110 € Guthaben bekommen, das zur Karte gehörende Konto kann bis zu 50 € überzogen werden. Voller Tatendrang stellt sich Eva folgenden Wunschzettel zusammen:

Harry Potter und der Feuerkelch:	22,50 €
CD (Backstreet Boys):	31,45 €
Zweimal Kino (Herr der Ringe):	je 7,55 €
T-Shirt:	17,99 €
Baseballkappe:	9,99 €
Hose:	37,89 €
Turnschuhe:	42,56 €

Welche Wünsche muss Eva von ihrer Liste streichen, um möglichst viel Geld ausgeben zu können? Welchen Betrag zeigt ihr Konto in diesem Fall nach den Einkäufen?

Lösung: Einmal Kino und Baseballmütze streichen:

110 € − 22,50 € − 31,45 € − 7,55 € − 17,99 € − 37,89 € − 42,56 € = −49,94 €

10. In jedes Kästchen gehört eines der Zeichen + oder −. Schreibe die Aufgabe mit den richtigen Zeichen hin und berechne die linke Seite der Gleichung in nachvollziehbarer Weise.

$$(\boxed{}18) - (\boxed{}12) + (\boxed{}20) + (\boxed{}5) - (\boxed{}13) = -2$$

Lösung: $\left(\boxed{-}18\right) - \left(\boxed{+}12\right) + \left(\boxed{+}20\right) + \left(\boxed{-}5\right) - \left(\boxed{-}13\right) = -2$

$-18 - 12 + 20 - 5 + 13 = (20 + 13) - (18 + 12 + 5) = 33 - 35 = -2$

11. Nachstehend siehst du einen Kontoauszug. H hinter einem Geldbetrag bedeutet „Haben“, d.h. die Zahl ist positiv, der Geldbetrag kommt zum Konto dazu. Ein S hinter einem Geldbetrag bedeutet „Soll“, d.h. die Zahl ist negativ, der Geldbetrag kommt vom Konto weg. Berechne das neue Guthaben in der letzten Zeile des Kontoauszugs.

		alter Kontostand	:	145,17	H
Datum		Verwendungszweck			
02.01.2004	:	Miete	:	637,00	S
02.01.2004	:	Gehalt	:	3420,20	H
04.01.2004	:	Gemeindewerke	:	453,44	S
07.01.2004	:	Überweisung	:	2466,85	S
07.01.2004	:	Tankstelle	:	69,00	S
08.01.2004	:	Supermarkt	:	392,38	S
11.01.2004	:	Steuerausgleich	:	211,90	H
		neuer Kontostand	:	???	?

Lösung: Wir rechnen in Cent:

$$\begin{aligned}
&14517 - 63700 + 342020 - 45344 - 246685 - 6900 - 39238 + 21190 = \\
&= (14517 + 342020 + 21190) - (63700 + 45344 + 246685 + 6900 + 39238) = \\
&= 377727 - 401867 = -24140
\end{aligned}$$

neuer Kontostand: 241,40 S

12. Nachstehend siehst du den Kontoauszug einer großen Firma. Ein H hinter einem Geldbetrag bedeutet „Haben“, d.h. die Zahl ist positiv, der Geldbetrag kommt zum Konto dazu. Ein S hinter einem Geldbetrag bedeutet „Soll“, d.h. die Zahl ist negativ, der Geldbetrag kommt vom Konto weg. Berechne das neue Guthaben in der letzten Zeile des Kontoauszugs.

		alter Kontostand in €	:	55 760 000	S
Datum		Verwendungszweck			
02.01.2004	:	Lohnzahlungen	:	3 879 540	S
02.01.2004	:	Mayer AG	:	34 720 000	H
04.01.2004	:	Aktienverluste	:	2 822 349	S
07.01.2004	:	Verkauf Fabrikgebäude B	:	5 900 000	H
07.01.2004	:	Spenden	:	10 000	S
08.01.2004	:	Kauf von Rohstoffen	:	2 146 393	S
		neuer Kontostand in €	:	???	?

Lösung:

$$\begin{aligned}
&- 55\,760\,000 - 3\,879\,540 + 34\,720\,000 - 2\,822\,349 + \\
&\qquad + 5\,900\,000 - 10\,000 - 2\,146\,393 = \\
&= (34\,720\,000 + 5\,900\,000) - \\
&\qquad - (55\,760\,000 + 3\,879\,540 + 2\,822\,349 + 10\,000 + 2\,146\,393) = \\
&= 40\,620\,000 - 64\,618\,282 = -23\,998\,282
\end{aligned}$$

neuer Kontostand: 23 798 282 S

13. Nachstehend siehst du den Kontoauszug einer kleinen Firma. H hinter einem Geldbetrag bedeutet „Haben“, d.h. die Zahl ist positiv, der Geldbetrag kommt zum Konto dazu. Ein S hinter einem Geldbetrag bedeutet „Soll“, d.h. die Zahl ist negativ, der Geldbetrag kommt vom Konto weg. Leider fehlen wegen eines Computerfehlers die meisten S und H und auch der Verwendungszweck ist unsinnig. Finde durch Probieren heraus, in welches Kästchen ein S und in welches ein H gehört. Alle Versuche hinschreiben!

		alter Kontostand in €	:	3 500	S
Datum		Verwendungszweck			
02.02.2004	:	Qwertysx	:	15 000	
04.02.2004	:	%#	:	7 000	
07.02.2004	:	2y3x4c5v	:	22 500	
07.02.2004	:	?!;:oo;.	:	13 000	
08.02.2004	:	***	:	4 000	
		neuer Kontostand in €	:	6 000	

Lösung: $-3500 - 15000 = -18500$, $-18500 + 7000 = -11500$, $-11500 + 22500 = 11000$

$11000 - 13000 = -2000$, $-2000 - 4000 = -6000$

		alter Kontostand in €	:	3 500	S
Datum		Verwendungszweck			
02.02.2004	:	Qwertysx	:	15 000	S
04.02.2004	:	%#	:	7 000	H
07.02.2004	:	2y3x4c5v	:	22 500	H
07.02.2004	:	?!;:oo;.	:	13 000	S
08.02.2004	:	***	:	4 000	S
		neuer Kontostand in €	:	6 000	S

14. Addiere alle ganzen Zahlen, die größer als -300 und kleiner als -200 sind.

Lösung: $(-299) + (-298) + ... + (-202) + (-201) =$
$= -(201 + 202 + ... + 299) = -[(1 + 2 + ... + 299) - (1 + 2 + ...200)] =$
$= -(299 \cdot 300 : 2 - 201 \cdot 200 : 2) = -(44850 - 20100) = -24750$

15. Bestimme die Lösungsmenge für $G = \mathbb{Z}$.

(a) $x + (22 - 34) = 15$ (b) $(55 - 75) + x = -10$
(c) $x - [-81 + 27] = 81$ (d) $[-83 - (-96)] - x = [96 - 83] + 5$
(e) $(-34 + x) + 34 = 100$ (f) $(0 - x) + (-17) = -17$

Lösung: (a) $L = \{27\}$ (b) $L = \{10\}$
(c) $L = \{27\}$ (d) $L = \{-5\}$
(e) $L = \{100\}$ (f) $L = \{0\}$

16. Bestimme die Lösungsmenge für $G = \mathbb{Z}$.

(a) $[x + 13] + 15 = -37$ (b) $(x + 72) - 25 = -42$
(c) $[17 + x] + (-45) = -80$ (d) $(66 - x) + 80 = 54$
(e) $[17 - x] - (-45) = -80$

Lösung: (a) $L = \{-65\}$ (b) $L = \{-89\}$
(c) $L = \{-52\}$ (d) $L = \{92\}$
(e) $L = \{142\}$

17. Für Roulettefreunde: Martina spielt Roulette mit ihren Freundinnen um Gummibärchen (G). Jede hat am Anfang 50 G. Martina setzt in jedem Spiel 2 G. Im 5. Spiel gewinnt sie 5 G (d. h. sie setzt 2 G und erhält 5 G zurück), im 7. Spiel gewinnt sie 3 G, im 26. Spiel gewinnt sie 36 G. Nach einer Pechsträhne gewinnt sie im 50 und im letzten Spiel wieder, so dass sie am Ende 66 G hat.
    (a) Wie viel hat Martina im 50. Spiel gewonnen?
    (b) Ihre Freundin Yvonne behauptet, dass Martina diese Geschichte erfunden hat. Woran könnte das liegen?
    (c) Unter welchen Umständen könnte das Spiel doch stattgefunden haben? (Rechne!)

Lösung: (a) 72 G
(b) Die Gummibärchen müssen Martina schon vor dem 50. Spiel ausgegangen sein.
(c) Martina hat sich mindestens 6 G ausgeliehen

18. Tour-de-France-Sieger Marco Pantani trainiert in der Gegend des toten Meeres. Sein Trainer notiert das Streckenprofil:

    (0 km — 222 ü.d.M.), (3 km — 54 u.d.M.), (11 km — 22 u.d.M.), (24 km — 122 u.d.M.), (41 km — 322 ü.d.M.), (58 km — 46 u.d.M.), (79 km — 2 u.d.M.), (101 km — 244 u.d.M.), (144 km — 58 ü.d.M.), (158 km — 7 u.d.M.), (166 km — 222 ü.d.M.).

    (a) Zeichne das Streckenprofil in ein sauberes Koordinatensystem (1 km entspricht 1 mm auf der horizontalen Achse und 2 Höhenmeter entsprechen 1 mm auf der vertikalen Achse)
    (b) Berechne, wie viele Höhenmeter (aufwärts und abwärts) Pantani auf seiner Radtour zurückgelegt hat.
    (c) Gib an, wie groß der Höhenunterschied zwischen höchstem und niedrigstem Punkt der Trainingsstrecke war.

Lösung: (b) 2102 m (1051 m aufwärts und 1051 m abwärts)
(c) 566 m

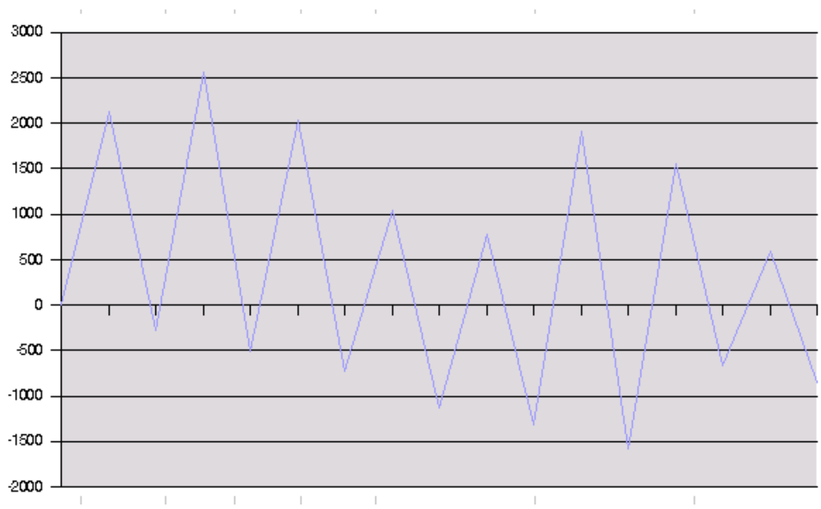
19. Bei der Transalp Challenge, dem härtesten Mountainbikerennen Europas, wird in Mittenwald gestartet. Folgende Tabelle zeigt die pro Tag gefahrenen Höhenmeter der Challenge 2002.

Transalp Challenge 2002				Höhenmeter auf	Höhenmeter ab
1. Tag	Mittenwald	-	Imst	2122	2398
2. Tag	Imst	-	Ischgl	2842	3081
3. Tag	Ischgl	-	Nauders	2549	2761
4. Tag	Nauders	-	Naturns	1771	2179
5. Tag	Naturns	-	Meran	1918	2103
6. Tag	Meran	-	Male	3233	3494
7. Tag	Male	-	Andalo	3128	2218
8. Tag	Andalo	-	Riva del Garda	1271	1445

Wie viele Meter höher oder tiefer als Mittenwald liegt der Zielort Riva del Garda am Gardasee? Trage die Tageshöchstwerte und die Tagestiefstwerte in ein Diagramm ein (Höhenprofil), wobei Mittenwald auf der Höhe 0 liegen soll. Dabei nehmen wir an, dass jeden Tag zuerst nur aufwärts und dann nur abwärts gefahren wird.

Lösung: $(2122 + 2842 + 2549 + 1771 + 1918 + 3233 + 3128 + 1271)-$
$-(2398 + 3081 + 2761 + 2179 + 2103 + 3494 + 2218 + 1445) =$
$= 18834 - 19679 = -845$

	Höchstwert	Tiefstwert
1. Tag	$0 + 2122 = 2122$	$2122 - 2398 = -276$
2. Tag	$-276 + 2842 = 2566$	$2566 - 3081 = -515$
3. Tag	$-515 + 2549 = 2034$	$2034 - 2761 = -727$
4. Tag	$-727 + 1771 = 1044$	$1044 - 2179 = -1135$
5. Tag	$-1135 + 1918 = 783$	$783 - 2103 = -1320$
6. Tag	$-1320 + 3233 = 1913$	$1913 - 3494 = -1581$
7. Tag	$-1581 + 3128 = 1547$	$1547 - 2218 = -671$
8. Tag	$-671 + 1271 = 600$	$600 - 1445 = -845$



2 Weiterentwicklung geometrischer Grundvorstellungen

2.1 Zeichnen geometrischer Figuren, Bauen einfacher Modelle

1. Aus einem Draht von einem Meter Länge wurde das Kantenmodell eines Würfels gebaut. Es blieb ein Reststück von 4,0cm. Wie lang ist eine Würfelkante?

   Quelle: Vergleichsarbeit bundesland- und schulartübergreifend in der Jahrgangsstufe 8, Materialien zur Weiterarbeit

Lösung: 8cm

2. Ein Stück Faden kann ein sehr interessantes Hilfsmittel für geometrische Zeichnungen und Überlegungen sein! Probiere doch einmal aus:
   (a) Wickle in der Zeichenebene von einem Geldstück einen Faden ab, den du um die Münze gewickelt hast. Welche Linie durchläuft das Ende des stets gespannten Fadens, wenn man die Münze festhält?
   (b) Experimentiere selbst und wickle einen Faden um geeignete Gegenstände ab!
   (c) Befestige die Enden eines Fadens locker an zwei auf eine Unterlage (Pappe) gepinnte Reißnägel. Welche Linie beschreibt ein Bleistift, wenn man ihn so bewegt, dass der Faden stets gespannt ist?

   Nach: D. Roth, Basismathematik 7 Geometrie, München 1991, S. 59

2.2 Grundbegriffe, Grundfiguren und Körper

2.3 Winkel und Geraden

1. Bestimme die größte Anzahl von Schnittpunkten, die 2, 3, ..., n Geraden bilden können.

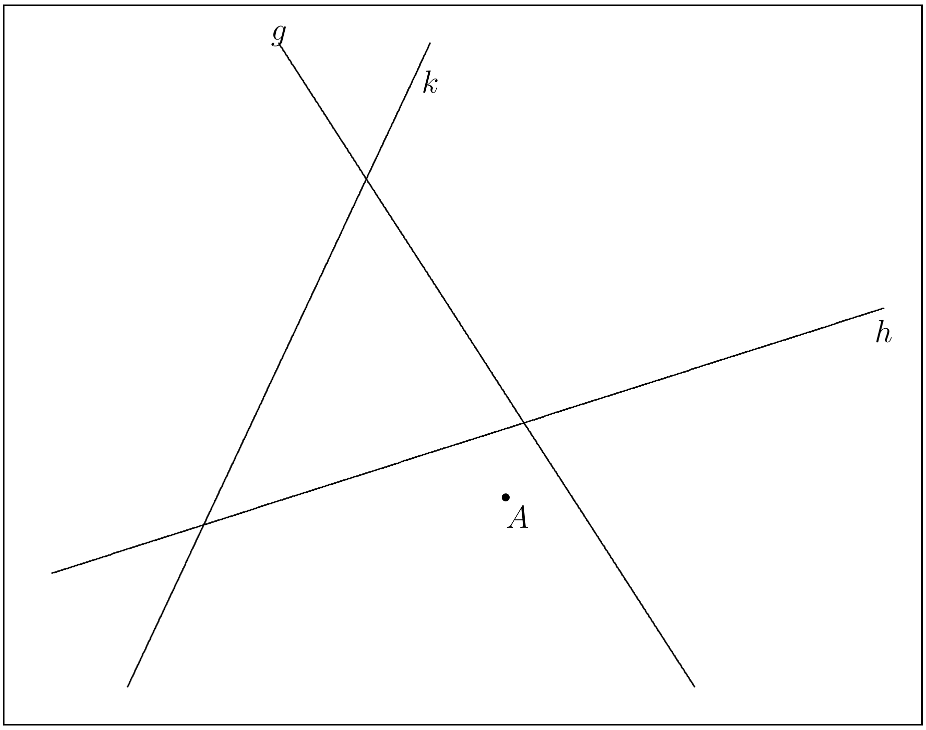
   Literatur: Materialien Mathematik M49, Weiterentwicklung der Unterrichtskultur im Fach Mathematik (WUM), Anregungen für neue Wege im 5. Schuljahr, Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart

Lösung:

Anzahl der Geraden	2	3	4	5	...	n
Anzahl der Schnittpunkte	1	$3 = 1+2$	$6 = 3+3$	$10 = 6+4$	...	$\frac{1}{2}n(n-1)$

2. Gegeben sind die Geraden g, h und k sowie der Punkt A. Markiere blau die Menge aller Punkte P, die folgende Bedingungen erfüllen:

   P ist vom Punkt A höchstens $2,5\,\text{cm}$ und von der Geraden k mehr als $2\,\text{cm}$ entfernt, außerdem gilt $d(P,g) \leqq d(P,h)$.



Lösung:

3. (a) Zeichne einen Kreis k mit dem Radius $4\,\text{cm}$ und in dieses Kreis eine Sehne s der Länge $7\,\text{cm}$. Konstruiere nunmehr alle Sekanten durch k, die mit s einen Winkel von 70^o einschließen und die Länge $5\,\text{cm}$ besitzen. (Sämtliche Konstruktionslinien müssen deutlich erkennbar sein!)

   (b) Schreibe kurz (evtl. stichpunktartig) die einzelnen Konstruktionsschritte auf.

Lösung:

2.4 Koordinatensystem

1. Zeichne ein Gitternetz und trage die Punkte A(3|2), X(3|1) und Y(6|9) ein.
   (a) Fälle von Y das Lot auf AX.
   (b) Zeichne die Parallele zu XY durch A.
   (c) Zeichne eine Parallele zu AX im Abstand 8 cm.

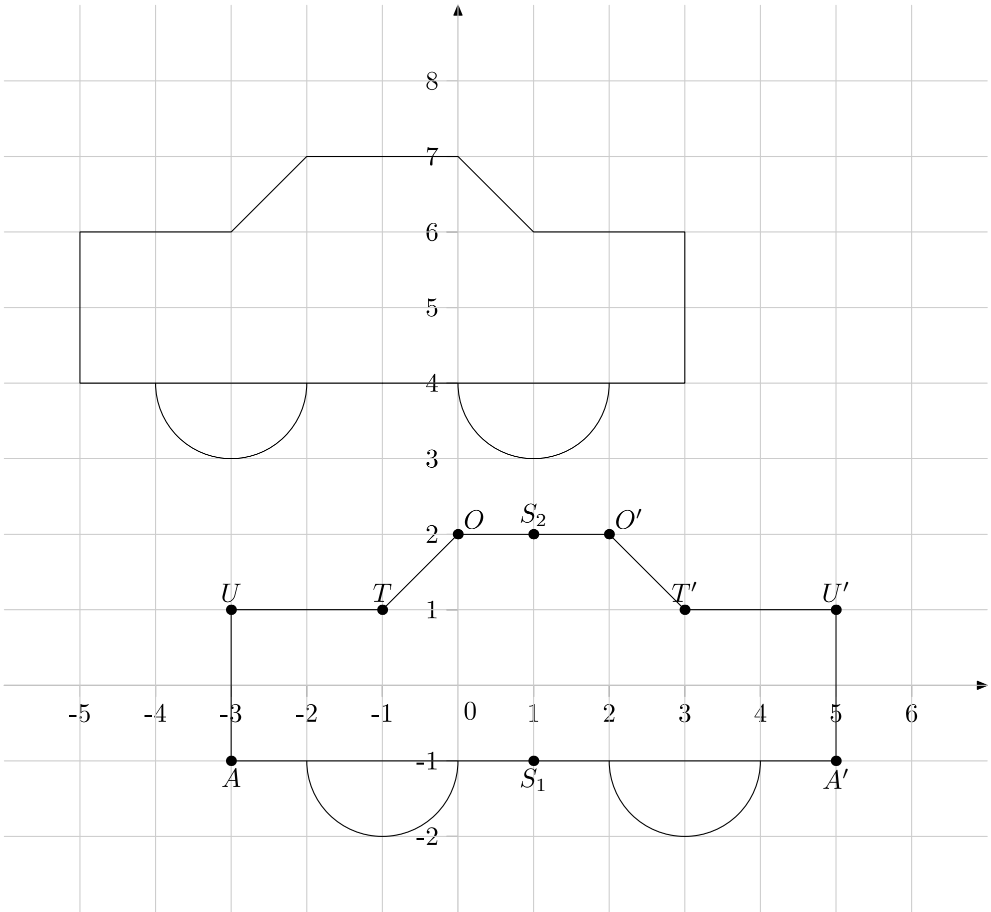
Lösung:

2. Zeichne ein Gitternetz und trage die Punkte A(3|3), B(7|6), C(3|9) und D(2|5) ein.
   (a) Zeichne AB, [CB und [AD] ein.
   (b) Fälle von C das Lot auf AD.

Lösung:

3. Zeichne die Punkte $S_1(1|-1)$, $A(-3|-1)$, $U(-3|1)$, $T(-1|1)$, $O(0|2)$ und $S_2(1|2)$ in ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm.
   (a) Füge im Koordinatensystem einen nach oben geöffneten Halbkreis mit Mittelpunkt $M(-1|-1)$ und Radius 1 cm hinzu.
   (b) Spiegle die Punkte AUTO und den Halbkreis an der Gerade S_1S_2. Zeichne das Auto ein!
   (c) Verschiebe das Auto im Koordinatensystem um 2 Einheiten nach links und 5 Einheiten nach oben. Gib die Koordinaten der neu entstandenen Punkte an.
   (d) Formuliere eine Regel, wie man die Koordianten der verschobenen Punkte berechnen kann.
   (e) Welche Koordinaten haben die Punkte, wenn das Auto um 13 Einheiten nach rechts und um 7 Einheiten nach unten verschoben wird?

Lösung: (a) s. u.
(b) s. u.
(c) $S_{1\text{neu}}(-1|4)$, $S_{2\text{neu}}(-1|7)$, $A_{\text{neu}}(-5|4)$, $A'_{\text{neu}}(3|4)$, $U_{\text{neu}}(-5|6)$, $U'_{\text{neu}}(3|6)$, $T_{\text{neu}}(-3|6)$, $T'_{\text{neu}}(1|6)$, $O_{\text{neu}}(-2|7)$, $O'_{\text{neu}}(0|7)$



(d) Verschiebung um n Einheiten nach links → n von x-Koordinate subtrahieren
Verschiebung um n Einheiten nach rechts → n zur x-Koordinate addieren
Verschiebung um n Einheiten nach unten → n von y-Koordinate subtrahieren
Verschiebung um n Einheiten nach oben → n zur y-Koordinate addieren

(e) $\mathrm{S}_{1\mathrm{neu}2}(14|-8)$, $\mathrm{S}_{2\mathrm{neu}2}(14|-5)$, $\mathrm{A}_{\mathrm{neu}2}(10|-8)$, $\mathrm{A}'_{\mathrm{neu}2}(18|-8)$, $\mathrm{U}_{\mathrm{neu}2}(10|-6)$, $\mathrm{U}'_{\mathrm{neu}2}(18|-6)$, $\mathrm{T}_{\mathrm{neu}2}(12|-6)$, $\mathrm{T}'_{\mathrm{neu}2}(16|-6)$, $\mathrm{O}_{\mathrm{neu}2}(13|-5)$, $\mathrm{O}'_{\mathrm{neu}2}(15|-5)$

4. Lies die Koordinaten der Punkte ab und verbinde die Punkte zu einer Figur. Spiegle jeden Punkt an der y-Achse. Was fällt dir am Rechts- und am Hochwert auf?

Lösung: $A(-2|-2)$, $B(-1|-1)$, $C(-1|-3|)$, $D(3|-1)$, $E(-4|-2)$
Rechtswert wechselt Vorzeichen, Hochwert hat den gleichen Wert.

5. Einen **Linienzug** erhält man durch das geradlinige Verbinden aufeinanderfolgender Punkte. A bedeutet den Anfang und E das Ende eines Linienzuges. Die Linienzüge sind in **ein** Koordinatensystem zu zeichnen. Verwende die Einheit 0,5 cm (ein Kästchen).

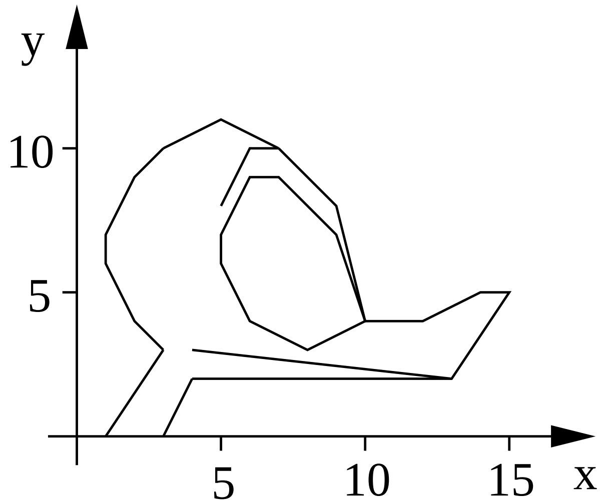
A (1|0) (3|3) (2|4) (1|6) (1|7) (2|9) (3|10) (5|11) (7|10) (9|8) (10|4) (12|4) (14|5) (15|5) (13|2) (4|2) (3|0) E

A (10|4) (9|7) (7|9) (6|9) (5|7) (5|6) (6|4) (8|3) (10|4) E

A (7|10) (6|10) (5|8) E

A (4|3) (13|2) E

Lösung:



6. Einen **Linienzug** erhält man durch das geradlinige Verbinden aufeinanderfolgender Punkte. A bedeutet den Anfang und E das Ende eines Linienzuges. Die Linienzüge sind in **ein** Koordinatensystem zu zeichnen. Verwende die Einheit 0,5 cm (ein Kästchen).

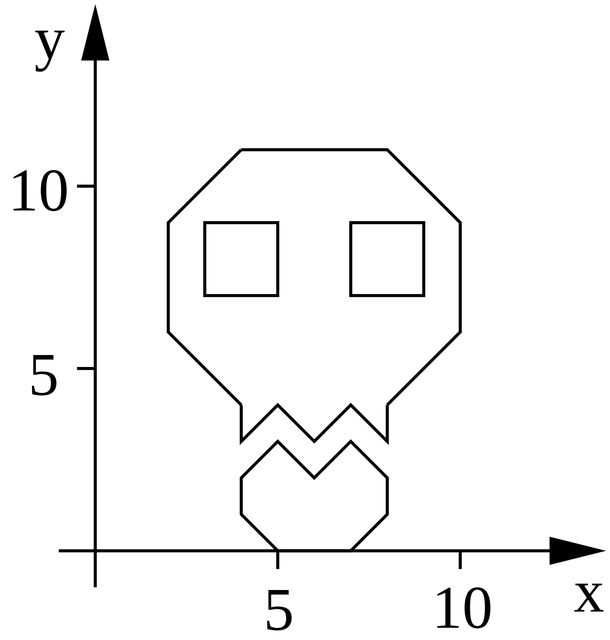
   A (4|11) (2|9) (2|6) (4|4) (4|3) (5|4) (6|3) (7|4) (8|3) (8|4) (10|6) (10|9) (8|11) (4|11) E

   A (4|2) (5|3) (6|2) (7|3) (8|2) (8|1) (7|0) (5|0) (4|1) (4|2) E

   A (3|9) (3|7) (5|7) (5|9) (3|9) E

   A (7|7) (7|9) (9|9) (9|7) (7|7) E

Lösung:



7. Einen **Linienzug** erhält man durch das geradlinige Verbinden aufeinanderfolgender Punkte. A bedeutet den Anfang und E das Ende eines Linienzuges. Die Linienzüge sind in **ein** Koordinatensystem zu zeichnen. Verwende die Einheit 0,5 cm (ein Kästchen).

   A (7|15) (11|15) (13|14) (14|12) (14|9) (15|9) (16|7) (15|5) (14|4) (12|3) (11|3) (10|2) (8|2) (7|3) (6|3) (4|4) (3|5) (3|7) (4|8) (3|10) (5|14) (7|15) E

   A (4|8) (5|8) (4|11) (5|13) (7|14) (8|14) (9|13) (10|14) (12|13) (13|11) (13|9) (12|8) E

   A (4|6) (5|7) (6|7) (5|7) (5|6) (6|5) (9|4) (12|5) (13|6) (13|7) (14|6) (13|7) (12|7) E

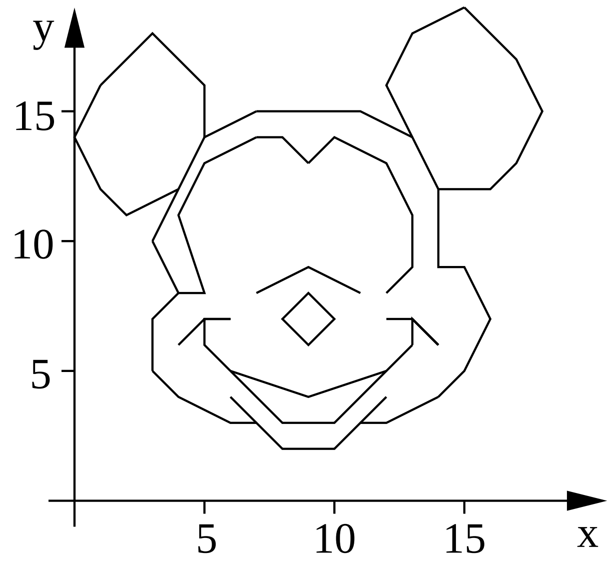
   A (13|14) (12|16) (13|18) (15|19) (17|17) (18|15) (17|13) (16|12) (14|12) E

   A (4|12) (2|11) (1|12) (0|14) (1|16) (3|18) (5|16) (5|14) E

   A (6|5) (8|3) (10|3) (12|5) E, A (9|6) (10|7) (9|8) (8|7) (9|6) E

   A (7|8) (9|9) (11|8) E, A (6|4) (7|3) E, A (11|3) (12|4) E

Lösung:

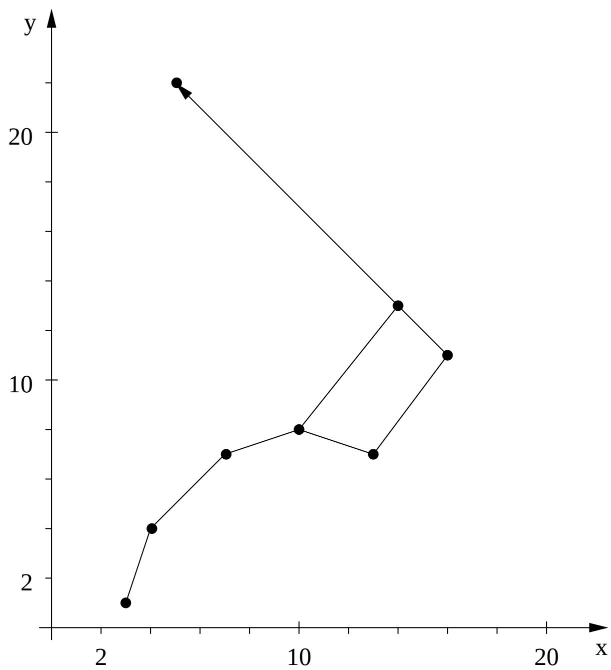


8. Zeichne in ein Koordinatensystem mit der Einheit 5 mm die Sterne des großen Wagens, die durch folgende Koordinaten gegeben sind:

$$(3\,|\,1),\ (4\,|\,4),\ (7\,|\,7),\ (10\,|\,8),\ (13\,|\,7),\ (16\,|\,11),\ (14\,|\,13)$$

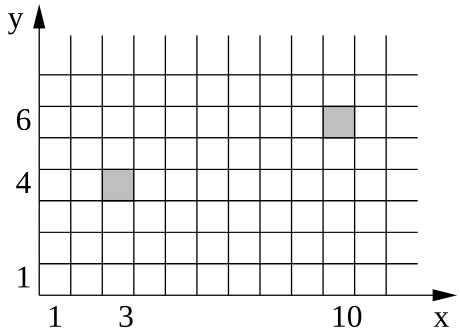
Zeichne auch noch den Polarstern ein, der dem Punkt $(5\,|\,22)$ entspricht. Suche eine Regel, die bei Sichtbarkeit des großen Wagens das Auffinden des Polarsterns ermöglicht.

Lösung:



9. Die Kamera einer Weltraumsonde oder jede andere Digitalkamera speichert ihre Bilder als Folge von Zahlen. Jedem Bildpunkt (Pixel) entsprechen drei Zahlen, wobei die beiden ersten Zahlen die Koordinaten des Punktes angeben und die dritte Zahl die Farbe des Punktes kennzeichnet. Für naturgetreue Bilder werden $2^{24} \approx 16$ Millionen Farben verwendet. Zum Speichern eines Farbwertes braucht man auf der Festplatte oder der CD 3 Byte, für ein Bild mit 3 Millionen Pixeln also 9 MB (Megabyte). Die Koordinaten der Bildpunkte müssen nicht gespeichert werden, wenn dem Punkt links oben der erste Farbwert, dem Punkt rechts daneben der zweite Wert u.s.w. entspricht.

Als Beispiel betrachten wir ein einfaches Bild mit nur zwei Farben, das die Raumsonde *Nosharp* von einem Ureinwohner des Planeten *Thikskin* zur Erde funkte. Einem Bildpunkt entspricht dabei ein ganzes Kästchen. In nebenstehender Abbildung sind z. B. die Punkte (3 | 4) und (10 | 6) dargestellt.

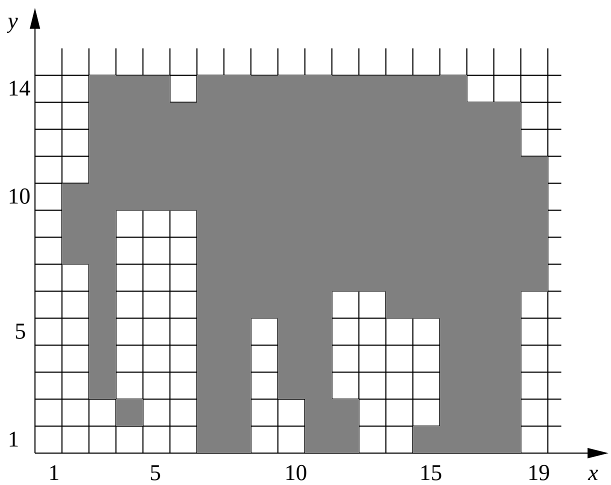


Rote Punkte:

(2 | 8) bis (2 | 10), (3 | 3) bis (3 | 14), (4 | 2), (4 | 10) bis (4 | 14), (5 | 10) bis (5 | 14), (6 | 10) bis (6 | 13), (7 | 1) bis (7 | 14), (8 | 1) bis (8 | 14), (9 | 6) bis (9 | 14), (10 | 3) bis (10 | 14), (11 | 1) bis (11 | 14), (12 | 1) bis (12 | 2), (12 | 7) bis (12 | 14), (13 | 7) bis (13 | 14), (14 | 6) bis (14 | 14), (15 | 1), (15 | 6) bis (15 | 14), (16 | 1) bis (16 | 14), (17 | 1) bis (17 | 13), (18 | 1) bis (18 | 13), (19 | 7) bis (19 | 11)

Weiße Punkte: Alle nicht roten Punkte

Lösung:



10. In einer Landkarte mit Koordinatensystem (Einheit: 1 Kästchen (5 mm) $\hat{=}$ 1 km) sind folgende Ortschaften eingezeichnet:

Achkirchen	Bergheim	Dachshausen	Eberfing
A(4|3)	B(24|18)	D(21|3)	E(3|15)

Von Achkirchen nach Bergheim und von Dachshausen nach Eberfing führt jeweils eine ganz gerade Straße, weiter ist Achkirchen mit Dachshausen durch einen geraden Feldweg verbunden.

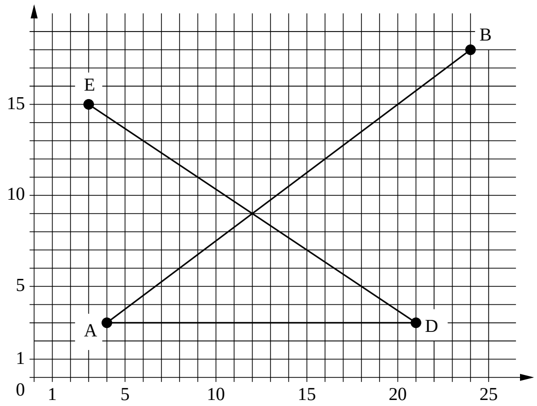
(a) Zeichne die Orte, die beiden Straßen und den Feldweg in ein Koordinatensystem. Welche Koordinaten hat die Kreuzung K der beiden Straßen?

(b) Ein Fußgänger legt auf der Straße 7 km in einer Stunde zurück, auf dem Feldweg schafft er in einer Stunde nur 5 km. Wie lange braucht der Fußgänger auf der Straße, wie lange auf dem Feldweg von Achkirchen nach Dachshausen? Verwende ein Lineal zum Ausmessen der benötigten Straßenlängen und runde dabei auf ganze km.

Lösung:

(a) K(12|9)

(b) $\overline{\mathrm{AK}} = 10\,\mathrm{km}$, $\overline{\mathrm{KD}} \approx 11\,\mathrm{km}$
Straßenlänge: 21 km
3 h auf der Straße
Länge des Feldwegs: 17 km
Für 1 km braucht er
$60\,\mathrm{min} : 5 = 12\,\mathrm{min}$
3 h 24 min auf dem Feldweg



11. Auf eine Landkarte, in der 5 mm einem Kilometer entsprechen, ist ein Koordinatensystem aufgedruckt. Albert wohnt bei A(8|6), Eva bei E(−6|3) und Bert bei B(−4|−5), die Schule ist am Ort S(3| − 6) (alle Zahlenwerte entsprechen Kilometern).

    (a) Welchen Maßstab hat die Karte?

    (b) Zeichne die Punkte A, E, B und S in ein Koordinatensystem (gleicher Maßstab wie die Landkarte).

    (c) Durch jeden Wohnort und durch den Ort der Schule gehen zwei Straßen, die parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen (waagrecht und senkrecht). Zeichne diese Straßen in das Koordinatensystem ein.

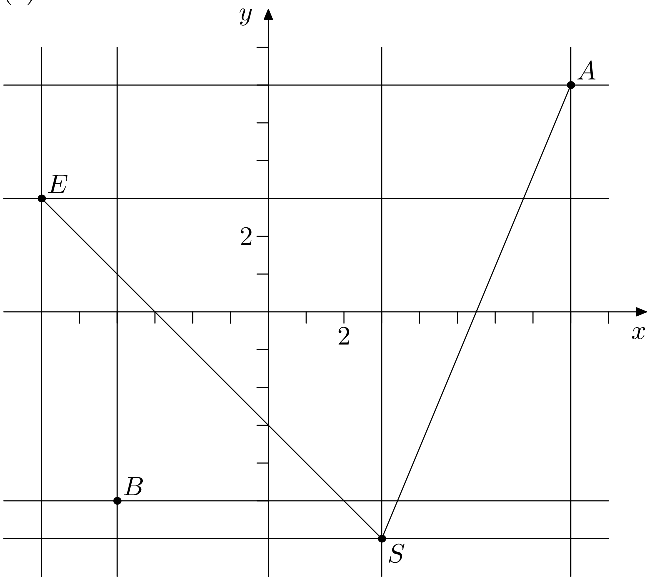
    (d) Ermittle die kürzesten Weglängen von den Wohnorten zur Schule (auf den Straßen).

    (e) Auf wie vielen verschiedenen kürzesten Wegen kann Eva in die Schule gehen?

    (f) Wie weit ist es querfeldein (geradlinig) von Alberts Wohnort zur Schule? Wie lang wäre eine gerade Straße von Evas Wohnort zur Schule?

Lösung: (a) 1 : 200 000

(b) (c)



(d) A: 17 km B: 8 km E: 18 km

(e) 6 Wege

(f) $\overline{\mathrm{AS}} = 13{,}0\,\mathrm{km}$, $\overline{\mathrm{ES}} = 12{,}7\,\mathrm{km}$

2.5 Achsensymmetrische Figuren

3 Rechnen mit ganzen Zahlen

3.1 Multiplikation und Division natürlicher Zahlen

3.1.1 Produkt und Quotient natürlicher Zahlen

1. Wie viele Reiskörner isst ein Chinese in seinem Leben?

   Quelle: http://db.learnline.de/angebote/materialdatenbank/

   SINUS Transfer - W. Matschke Set 1 n

Lösung: z. B.

- Wie viele Reiskörner isst ein Chinese am Tag?

  Annahme: ein Chinese wird 75 Jahre alt und isst am Tag ca. 125 g Reis. Abwiegen von 50 Reiskörnern liefert als Masse ca. 1g. Damit sind in 125g Reis ca. 6250 Körner.
- Wie viele Reiskörner isst ein Chinese im Jahr?

  $6250 \cdot 265 = 2.281.250$ Reiskörner
- Wie viele Reiskörner isst ein Chinese in seinem Leben?

  $2.281.250 * 75 = 171.093.750$ Reiskörner

2. Die Aula einer Schula hat 80 Sitzplätze. Für die 5. und 6. Klassen soll ein Film vorgeführt werden. Jede Aufführung kostet 120 Euro.

Klasse	5a	5b	5c	6a	6b	6c
Schüler	32	25	29	30	23	21

   Literatur: Materialien Mathematik M49, Weiterentwicklung der Unterrichtskultur im Fach Mathematik (WUM), Anregungen für neue Wege im 5. Schuljahr, Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart

Lösung: 2 Vorstellungen (5a, 5b, 6c und 5c, 6a, 6b) mit jeweils 80 Schülern. Jeder Schüler muss 1,50 Euro bezahlen.

3. Karla geht oft ins Freibad. Sie bezahlt dafür 3 DM Eintritt. Eine Zehnerkarte kostet 25 DM.

   Literatur: Materialien Mathematik M49, Weiterentwicklung der Unterrichtskultur im Fach Mathematik (WUM), Anregungen für neue Wege im 5. Schuljahr, Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart

Lösung: Wenn Karla die Zehnerkarte ganz ausnutzt spart sie 5 DM.
Die Zehnerkarte lohnt sich für Karla, wenn sie mindestens neunmal ins Freibad geht.

4. Der Dividend eines Quotienten ist die größte sechsstellige Zahl, der Wert des Quotienten ist die größte dreistellige Zahl. Wie groß ist der Divisor? Ansatz!!

Lösung: $999\,999 : x = 999 \quad \Longrightarrow \quad x = 999\,999 : 999 = 1001$

5. Die kleine Eva stellt der Oma die Frage nach ihrem Alter. „Ach“, sagt die Oma, „wenn man mein Alter durch eine bestimmte Zahl teilt, erhält man 13 R 4. Ausserdem habe ich meinen siebzigsten Geburtstag schon hinter mir. Und übrigens, in sechs Jahren bin ich immer noch keine Hundert.“

   Wie alt ist die Oma?

Lösung: $x : y = 13\,\mathrm{R}\,4 \Longrightarrow x = y \cdot 13 + 4$ und $y > 4 \Longrightarrow L = \{69, 82, 95, 108, \, ...\}$

Mit $70 < x < 94$ folgt für das Alter der Oma 82 Jahre.

6. Hansi will wissen, wie alt sein Opa ist. Dieser antwortet:

   (a) Teilt man mein Alter durch 9, dann bleibt der Rest 6.

   (b) Teilt man 66 durch mein Alter, dann bleibt auch der Rest 6.

   Berechne zuerst die Lösungsmengen von (a) und (b) und suche dann das Alter des Großvaters. Schreibe bei (a) mindestens die ersten acht Elemente der Lösungsmenge hin!

Lösung: (a) $x : 9 = y\,\mathrm{R}\,6 \Longrightarrow x = 9 \cdot y + 6 \Longrightarrow L_{\mathrm{a}} = \{6, 15, 24, 33, 42, 51, 60, 69, \, ...\}$

(b) $66 : x = y\,\mathrm{R}\,6 \Longrightarrow 66 = y \cdot x + 6$ und $x > 6 \Longrightarrow y \cdot x = 60 \Longrightarrow x \,|\, 60$

$L_{\mathrm{b}} = \{\, x \,|\, x \,|\, 60 \text{ und } x > 6\} = \{10, 12, 15, 20, 30, 60\,\}$

$L = L_{\mathrm{a}} \cap L_{\mathrm{b}} = \{15, 60\}$, „Großvater“ $\Longrightarrow$ 60 Jahre

7. Konrad hat insgesamt 40 € Schulden. Jeden Donnerstag kauft er sich für 2 € eine Pizza. Im Monat bekommt er 15 € Taschengeld. Wie lange braucht er, um seine Schulden zurückzuzahlen?

Lösung: $40 : (15 - 4 \cdot 2) = 5$ Rest $5 \Longrightarrow$ Er braucht 6 Monate.

8. Rosi will wissen, wie alt ihr Onkel Toni ist. Dieser antwortet:
   (a) Es gibt Divisionsaufgaben, in denen der Dividend mein Alter ist und das Ergebnis 3 Rest 7 lautet.
   (b) Teilt man 328 durch bestimmte Zahlen, dann erhält man mein Alter und den Rest 6.

   Berechne zuerst die Lösungsmengen von (a) und (b) und suche dann das Alter des Onkels. Schreibe bei (a) mindestens die ersten acht Elemente der Lösungsmenge hin, bei (b) alle!

Lösung: (a) $x : y = 3\,\mathrm{R}\,7 \implies x = 3 \cdot y + 7$ und $y > 7$

$\implies L_{\mathrm{a}} = \{31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, \ ...\}$

(b) $328 : y = x\,\mathrm{R}\,6 \implies 328 = x \cdot y + 6$ und $y > 6$

$\implies x \cdot y = 322$ und $y > 6 \implies L_{\mathrm{b}} = \{1, 2, 7, 14, 23, 46\}$

$L = L_{\mathrm{a}} \cap L_{\mathrm{b}} = \{46\}$ Onkel Toni ist 46 Jahre alt.

9. Forme die Gleichung zunächst um wie bei einer Probe und schreibe dann die Lösungsmenge in Form einer xy-Tabelle hin. Mache die Probe für mindestens zwei x-Werte der Lösungsmenge:

   (a) $85 : x = 7\,\mathrm{R}\,y$ (b) $x : y = 7\,\mathrm{R}\,12$

Lösung: (a) $85 = 7 \cdot x + y$ und $y < x \implies$

x	12	11
y	1	8

(b) $x = 7 \cdot y + 12$ und $y > 12 \implies$

x	103	110	117	124	...
y	13	14	15	16	...

10. (a) Suche unter den zweistelligen Zahlen „additive Zwillinge“, z. B. $21 + 34 = 55$ $12 + 43 = 55$.
    (b) Versuche eine Regel zu finden, nach der man zweistellige „additiven Zwillinge“ finden kann.
    (c) Suche unter den zweistelligen Zahlen „multiplikative Zwillinge“, z.B. $46 \cdot 32 = 1472$, $64 \cdot 23 = 1472$.
    (d) Versuche eine Regel zu finden, nach der man zweistellige „multiplikative Zwillinge“ finden kann.

Lösung: (a) z. B. $31 + 24 = 13 + 42 = 55$, $41 + 25 = 14 + 52 = 66$, $42 + 57 = 24 + 75 = 97$, $46 + 97 = 64 + 79 = 143, \dots$

(b) z. B.: Die Summe der Ziffern an den Zehnerstellen der beiden Zahlen muss genauso groß sein wie die Summe der Ziffern an den Einerstellen der beiden Zahlen.

(c) z. B. $64 \cdot 23 = 46 \cdot 32 = 1472$, $84 \cdot 36 = 48 \cdot 63 = 3024$, $69 \cdot 32 = 96 \cdot 23 = 2208, \dots$

(d) z. B.: Das Produkt der Ziffern an den Zehnerstellen der beiden Zahlen muss genauso groß sein wie das Produkt der Ziffern an den Einerstellen der beiden Zahlen.

11. Entscheide durch Überschlagen, welche Zahlen I bis X das Ergebnis der Rechnungen (a) bis (d) sind:

(a) $3776 \cdot 12$ (b) $712 \cdot 18$ (c) $2129 \cdot 47$ (d) $3238 \cdot 7$

I)	12816	II)	100065	III)	22666	IV)	32666	V)	45312
VI)	22668	VII)	12817	VIII)	17816	IX)	45315	X)	100063

Lösung: (a) V: 45312 (b) I: 12816 (c) X: 100063 (d) III: 22666

12. Entscheide durch Überschlagen, welche Zahlen I bis X am nächsten bei den Ergebnissen der Rechnungen (a) bis (d) liegen:

(a) $215 \cdot 198$ (b) $712 \cdot 182$ (c) $21 \cdot 4743$ (d) $338 \cdot 92$

I)	52543	II)	1000000	III)	129543	IV)	31986	V)	42543
VI)	327643	VII)	39543	VIII)	1300234	IX)	229543	X)	41986

Lösung: (a) V: 42543 (b) III: 129543 (c) II: 1000000 (d)IV: 31986

13. Berechne: $(-5) \cdot (-3) \cdot 2 - (-2) \cdot 10$

Lösung: 50

14. Du hast vier Siebener. Versuche durch Verknüpfen aller vier Siebener die Ergebnisse von 0 bis 10 zu erhalten. Du darfst alle vier Grundrechenarten und Klammern verwenden.

Literatur: Materialien Mathematik M49, Weiterentwicklung der Unterrichtskultur im Fach Mathematik (WUM), Anregungen für neue Wege im 5. Schuljahr, Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart

Lösung: Jeweils mehrere Möglichkeiten, z. B. $7+7-7-7=0$, $(7+7):(7+7)=1$, $7:7+7:7=2$, $(7+7+7):7=3$, $77:7-7=4$, $7-(7+7):7=5$, $(7\cdot 7-7):7=6$, $(7-7)\cdot 7+7=7$, $(7\cdot 7+7):7=8$, $7+(7+7):7=9$, $(77-7):7=10$

15. Welche Zahl kann man für n einsetzen, damit die Gleichung

$$961 + n \cdot 700 = 3^n$$

richtig ist?

Lösung: Probieren liefert $n = 8$

16. Bei einem Glücksspiel muss man innerhalb von drei Sekunden aus einem Zahlenbereich, den der Spielleiter nennt, eine Zahl wählen. Den Rest, der bei der Teilung dieser Zahl durch 337 bleibt, erhält man als Gewinn in Euro. Welche Zahlen aus dem Bereich zwischen 11 000 und 12 000 sind für den Spieler am günstigsten?

Lösung: Die günstigsten Zahlen sind um eins kleiner als die Vielfachen von 337.

$11\,000 : 337 = 32\,\mathrm{R}\,216 \quad \Longrightarrow \quad$ kleinste Zahl ist $\quad 33 \cdot 337 - 1 = 11\,120$

Die nächsten Zahlen sind $\quad 11\,120 + 337 = 11\,457$ und $11\,457 + 337 = 11\,794$

3.1.2 Faktorisieren von Zahlen, Primzahlen

1. Auf wie viele Nullen endet 10! und 20! ?

Lösung: Die Nullen ergeben sich durch Faktorenpaare, die jeweils 10 ergeben.

In 10! kommt der Faktor 5 zweimal vor, der Faktor 2 mehr als zweimal $\Rightarrow$ zwei Nullen am Ende.

In 20! kommt der Faktor 5 viermal vor, der Faktor 2 mehr als zweimal $\Rightarrow$ vier Nullen am Ende.

2. Bestimme alle zweistelligen natürlichen Zahlen x, welche zugleich folgende Bedingungen erfüllen:
   - x ist größer als 60,
   - x hat genau vier Teiler,
   - x ist ungerade,
   - vertauscht man bei x die beiden Ziffern, so erhält man eine Primzahl.

   Begründe, warum du die gesuchten Zahlen schneller findest, wenn du dich nicht streng an die vorgegebene Reihenfolge der Bedingungen hältst.
   Begründe, warum die vierte Bedingung die 60er und 80er Zahlen ausschließst.
   In welcher Reihenfolge führen die Bedingungen deiner Meinung nach am schnellsten zur Lösung?

   Literatur: Routineaufgaben - erweitert und variiert, Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung München, 1999

Lösung: Die Zahlen 91 und 95 erfüllen alle geforderten Eingenschaften.
Eine zu frühe Einbeziehung der zweiten Bedingung ist wenig effektiv.
Zahlen mit den Endziffern 6 und 8 sind durch 2 teilbar. Nach dem Vertauschen wird die Endziffer zur Zehnerziffer. Damit schließt die vierte Bedingung die 60er und 80er Zahlen aus.

3. **Primzahlzwillinge und Primzahldrillinge**
   (a) Ein Primzahlzwilling besteht aus zwei Primzahlen, deren Differenz zwei ist z. B. (5,7). Gib alle Primzahlzwillinge zwischen 1 und 100 an.
   (b) Primzahldrillinge werden entsprechend den Primzahlzwillingen festgelegt, z. B. (3,5,7). Gib alle Primzahldrillinge zwischen 0 und 100 an.
   (c) Schreibe drei natürliche Zahlen auf, von denen die zweite um 2 und die dritte um 4 größer ist als die erste, z. B. (13,15,17).
      i. Dividiere jede der drei aufgeschriebenen Zahlen durch 3 und notiere die Reste.
      ii. Wähle entsprechend (c) noch weitere Beispiele dreier Zahlen und schreibe bei jedem Beispiel die Reste bei Division durch 3 auf.
      iii. Welche Aussage kann man in allen Beispielen über die auftretenden Reste machen?
      Begründe: Wenn von drei natürlichen Zahlen die zweite um 2 und die dritte um 4 größer ist als die erste, dann ist eine der Zahlen durch 3 teilbar.
   (d) Wie viele Primzahldrillinge gibt es also?

   Quelle: Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur, ISB 2001

Lösung: (a) (3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31), (41,43), (71,73)
   (b) $(3{,}5,7)$
   (c) i. Z. B. (20,22,24) liefert die Reste $(2{,}1,0)$
      ii. Z. B. (19,21,22) liefert die Reste $(1{,}0,2)$
      iii. Es bleiben immer je einmal die Reste 0, 1 und 2.
      Von drei Zahlen, die entsprechend (c) ausgewählt wurden, ist eine durch drei teilbar.
      1. Fall: Erste Zahl durch drei teilbar, qed
      2. Fall: Erste Zahl lässt bei Division durch 3 den Rest 1 $\Rightarrow$ die zweite Zahl lässt bei Division durch 3 den Rest 0, qed
      3. Fall: Erste Zahl lässt bei Division durch 3 den Rest 2 $\Rightarrow$ die zweite Zahl lässt bei Division durch 3 den Rest 1 $\Rightarrow$ die dritte Zahl lässt bei Division durch 3 den Rest 0, qed

   (d) Es gibt nur eine Gruppe von Primzahldrillingen, nämlich $(3{,}5,7)$.

4. (a) Zerlege in Primfaktoren: 377 208
   (b) Zerlege 931 in Primfaktoren und bestimme mit Hilfe dieser Primfaktoren die Teilermenge $T(931)$.

Lösung: (a) $377208 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 31$

(b) $931 = 7 \cdot 7 \cdot 19, \quad T(931) = \{1, 7, 19, 49, 133, 931\}$

5. Zerlege 11011 in Primfaktoren und bestimme die Teilermenge T(11011).

Lösung: $11011 = 7 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13$

$$\mathrm{T}(11011) = \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} 1 & , & 7 & , & 11 & , & 13 & , & 77 & , & 91 \\ 11011 & , & 1573 & , & 1001 & , & 847 & , & 143 & , & 121 \end{array} \right\}$$

6. Zerlege in Primfaktoren: 945 252 000

Lösung: $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 31$

7. Zerlege 3059 in Primfaktoren und bilde die Teilermenge T(3059).

Lösung: $3059 = 7 \cdot 19 \cdot 23, \qquad \mathrm{T}(3059) = \left\{ \begin{array}{ccccccc} 1 & , & 7 & , & 19 & , & 23 \\ 3059 & , & 437 & , & 161 & , & 133 \end{array} \right\}$

8. Berechne die Teilermenge T(819) und den ggT(819, 1001).

Lösung: $819 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{T}(819) = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1, & 3, & 7, & 9, & 13, & 21 \\ 819, & 273, & 117, & 91, & 63, & 39 \end{array} \right\}$

$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{ggT}(819, 1001) = 7 \cdot 13 = 91$

3.1.3 Begriff der Potenz, Darstellen großer Zahlen mit Zehnerpotenzen

1. Eine Potenz enthält genau zweimal die Ziffer 2 und einmal die Ziffer 3. Beispiele sind 23^2, 2^{2^3} und 2^{23}.

   (a) Schreibe alle möglichen Potenzen dieser Art hin, **ohne** sie auszurechnen.

   (b) Berechne vorteilhaft den Wert der größten Potenz dieser Art.

Lösung: (a) 22^3, 23^2, 32^2, 2^{23}, 2^{32}, 3^{22}, 2^{2^3}, 2^{3^2}, 3^{2^2}

(b) $3^{22} = 3^{11} \cdot 3^{11} = 177\,147 \cdot 177\,147 = 31\,381\,059\,609$

$[2^{32} = 4\,294\,967\,296,\ 22^3 = 10\,648]$

2. (a) Schreibe die Zahl $173 \cdot 10^{11}$ in Ziffern und als Zahlwort.

   (b) Welche Zahl ist die größte fünfzehnstellige Zahl, die alle Ziffern enthält? Gib die nächstgelegene Stufenzahl als Zahlwort an!

Lösung: (a) 17 300 000 000 000, siebzehn Billionen dreihundert Milliarden

(b) 999 999 876 543 210, eine Billiarde

3. Das Halbierungsspiel

Du startest mit einer Zahl. Ist sie gerade, so wird sie **halbiert**, wenn nicht, wird eins dazu addiert. Mit der neuen Zahl machst du wieder das gleiche, bis du bei der 1 ankommst.

Beispiel: 22 - 11 - 12 - 6 - 3 - 4 - 2 - 1

Hier waren 7 Schritte bis zur 1 nötig.

(a) Führe das Halbierungsspiel durch für die Zahlen 9, 27, 31, 21, 1000. Wie lange dauert es jeweils?

(b) Wie lange dauert es, wenn du bei 10000 (bei 776, 9999) startest?

(c) Finde drei Zahlen, bei denen es 8 Schritte dauert bis die 1 am Ende erreicht ist.

(d) Zeichne aus der Tabelle ein Diagramm, das die Anzahl der Schritte beim Halbierungsspiel für verschiedene Startzahlen zeigt. Vervollständige zuerst die Tabelle.

Startzahl	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Anzahl Schritte			6	5	6	5	5			

(e) Suche Zahlen, bei denen das Halbierungsspiel schnell endet und solche, bei denen es sehr lange dauert.

(f) Kannst du diese Zahlen beschreiben?

(g) Wie heißt die Zahl unter 100, bei der das Halbierungsspiel am längsten dauert?

Quelle: Theo Heußer, Gymnasium Hemsbach

Lösung: (a) 9: 7 Schritte: 10 - 5 - 6 - 3 - 4 - 2 - 1
27: 7 Schritte: 28 - 14 - 7 - 8 - 4 - 2 - 1
31: 6 Schritte: 32 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1
21: 8 Schritte: 22 - 11 - 12 - 6 - 3 - 4 - 2 - 1
1000: 12 Schritte: 500 - 250 - 125 - 126 - 63 - 64 - 32 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1

(b) 10000: 20 Schritte, 776: 15 Schritte, 9999: 21 Schritte

(c) Es gibt viele Zahlen, bei denen es genau 8 Schritte dauert, z. B. 18, 54, 61, 256

(d)

Startzahl	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Anzahl Schritte	7	6	6	5	6	5	5	4	9	8

(e) Das Halbierungsspiel endet schnell bei allen Zahlen, die man immer wieder durch zwei teilen kann. Das sind die Zweierpotenzen wie 2^4, 2^7. Das Halbierungsspiel dauert lange, bei den ungeraden Zahlen, die um eins größer sind als die Zweierpotenzen. Durch das Addieren entfernt man sich immer wieder von einer Zweierpotenz.

(f) vgl. (e)

(g) Von den Zahlen unter 100 erfordert die Zahl 65 die meisten Schritte, nämlich 13 Schritte. 65 ist eins mehr als die Zweierpotenz 64 und die nächste Zweierpotenz ist schon größer als 100.

4. Das Fünferspiel

Du startest mit einer Zahl. Ist sie durch 5 teilbar, so wird sie **durch 5 geteilt**, wenn nicht, wird eins dazu addiert. Mit der neuen Zahl machst du wieder das gleiche, bis du bei der 1 ankommst.

Beispiel: 39 - 40 - 8 - 9 - 10 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1

Hier waren 9 Schritte bis zur 1 nötig.

(a) Wie lange dauert es, wenn du bei 12 (bei 24, 119, 125, 126) startest?

(b) Suche Zahlen, bei denen das Fünferspiel schnell endet und solche, bei denen es sehr lange dauert.

(c) Kannst du diese Zahlen beschreiben?

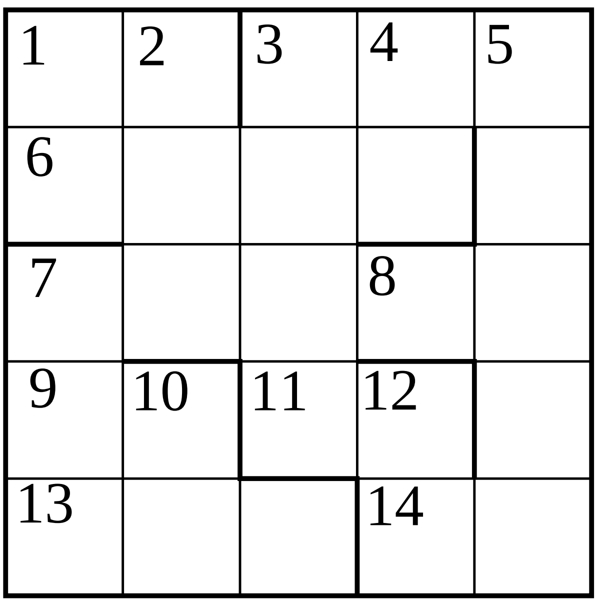
Quelle: Theo Heußer, Gymnasium Hemsbach

Lösung: (a) 12: 7 Schritte, 24: 3 Schritte, 119: 5 Schritte, 125: 3 Schritte, 126: 19 Schritte

(b) Das Fünferspiel endet schnell bei allen Zahlen, die man immer wieder durch 5 teilen kann. Das sind die Fünferpotenzen wie 5^2, 5^3. Das Fünferspiel dauert lange, bei den Zahlen, die um eins größer sind als die Fünferpotenzen. Durch das Addieren entfernt man sich immer wieder von einer Fünferpotenz.

(c) vgl. (b)

5. Fülle folgendes Kreuzzahlrätsel aus.



waagrecht:
1. Zahl mit 9 Teilern
3. Ein Dutzend Dutzend
6. Quadrat
7. Palindrom
9. Biquadrat
11. Biquadrat
13. Zahl, die vorwärte und rückwärts gelesen jeweils ein Quadrat ist
14. Palindrom

senkrecht
1. Zweierpotenz
2. Biquadrat
3. Palindrom mit 8 Teilern
4. Quadrat
5. Durch 11 teilbares Palindrom
7. Quadrat
8. Zahl der Arme eines Seesterns
10. Potenz von 2
12. Zahl mit 7 Teilern

Hinweis: Biquadrat = Quadrat eines Quadrats, Palindrom = Zahl, die vorwärts und rückwärts gelesen den gleichen Wert hat

Quelle: Fürther Mathematik Olympiade, 1. Runde, 2003/2004

Lösung:

3	6	1	4	4
2	2	0	9	5
2	5	0	5	2
8	1	1	6	5
9	6	1	4	4

6. Eine sehr große Zahl ist
$$x = 10^{\left(7^7\right)}$$
   (a) Aus welchen und aus wie vielen Ziffern besteht x?
   (b) Wie lange brauchst du, um x aufzuschreiben, wenn du für jede Ziffer eine Sekunde benötigst? Schreibe das Ergebnis als gemischte Zahl!

Lösung: (a) Eine Eins und $7^7 = 823\,543$ Nullen

(b) $823\,544\,\mathrm{s} = 9\,\mathrm{d}\,12\mathrm{h}\,45\,\mathrm{min}\,44\,\mathrm{s}$

7. Eine sehr große Zahl ist
$$x = 10^{\left(10^7\right)}$$
   (a) Aus welchen und aus wie vielen Ziffern besteht x?
   (b) Wie lange brauchst du, um x aufzuschreiben, wenn du für jede Ziffer eine Sekunde benötigst? Schreibe das Ergebnis als gemischte Zahl!

Lösung: (a) Eine Eins und $10^7 = 10\,000\,000$ Nullen

(b) $10\ 000\,001\,\mathrm{s} = 115\,\mathrm{d}\,17\mathrm{h}\,46\,\mathrm{min}\,41\,\mathrm{s}$

8. Schreibe die größte Potenz hin, die aus zweimal der Ziffer 2 und einmal der Ziffer 1 gebildet werden kann und berechne ihren Wert.

Lösung: $2^{21} = 1024 \cdot 1024 \cdot 2 = 2\,097\,152$

9. Ordne die Werte der folgenden Terme der Größe nach!

$$10 + 10, \quad 10 - 10, \quad 10 \cdot 10, \quad 10 : 10, \quad 10^{10}$$

Lösung: $10 - 10 < 10 : 10 < 10 + 10 < 10 \cdot 10 < 10^{10}$

10. **Große Zahlen:**

Die Namen großer Zahlen orientieren sich an den lateinischen Zahlwörtern. Man muss sich nur die Bedeutung folgender Vorsilben merken:

bi	tri	quad	quint	sext	sept	okt	non	dez
2	3	4	5	6	7	8	9	10

Eine Quadrillion ist z.B. eine Eins mit vier Sechsergruppen von Nullen, d.h. eine Eins mit 24 Nullen oder einfach 10^{24}. Eine Quadrilliarde hat drei Nullen mehr als die Quadrillion, ist also 10^{27}.

Noch ein Beispiel: Eine Septillion hat $7 \cdot 6 = 42$ Nullen, die Septilliarde 45 Nullen.

Million (M)	10^6	Milliarde (Md)	10^9
Billion (B)	10^{12}	Billiarde (Bd)	10^{15}
Trillion (Tr)	10^{18}	Trilliarde (Trd)	10^{21}
Quadrillion (Qa)	10^{24}	Quadrilliarde (Qad)	10^{27}
Quintillion (Qi)	10^{30}	Quintilliarde (Qid)	10^{33}
Sextillion (Sx)	10^{36}	Sextilliarde (Sxd)	10^{39}
Septillion (Sp)	10^{42}	Septilliarde (Spd)	10^{45}
Oktillion (Ok)	10^{48}	Oktilliarde (Okd)	10^{51}
Nonillion (N)	10^{54}	Nonilliarde (Nd)	10^{57}
Dezillion (D)	10^{60}	Dezilliarde (Dd)	10^{63}

Um eine große Zahl zu lesen, schreibt man am Besten mit Bleistift, von rechts her beginnend, über Dreiergruppen von Ziffern die Namen:

$$\overbrace{70}^{\text{Qid}}\ \overbrace{209}^{\text{Qi}}\ \overbrace{000}^{\text{Qad}}\ \overbrace{001}^{\text{Qa}}\ \overbrace{600}^{\text{Trd}}\ \overbrace{050}^{\text{Tr}}\ \overbrace{000}^{\text{Bd}}\ \overbrace{280}^{\text{B}}\ \overbrace{000}^{\text{Md}}\ \overbrace{003}^{\text{M}}\ \overbrace{000}^{\text{T}}\ \overbrace{000}^{\text{E}} =$$

70 Quintilliarden 209 Quintillionen 1 Quadrillion 600 Trilliarden 50 Trillionen 280 Billionen 3 Millionen

(a) Schreibe als Zehnerpotenz: hundert Qintillionen
zehn Quadrilliarden
hundert Oktilliarden

(b) Wie heißen die Zahlen: 10^{10}, 10^{14}, 10^{19}, 10^{29}, 10^{35}, 10^{40}, 10^{45}, 10^{50}, 10^{65}

(c) Aus wie vielen Ziffern besteht die Zahl zwanzig Quintilliarden?

(d) Schreibe in der Sprechschreibweise:

$$12\,005\,060\,700\,120\,309\,876\,000\,003\,000\,000\,100\,000$$

Lösung: (a) 10^{32}, 10^{28}, 10^{53}

(b) 10^{10} = zehn Milliarden, 10^{14} = hundert Billionen
10^{19} = zehn Trillionen, 10^{29} = hundert Quadrilliarden
10^{35} = hundert Quintilliarden, 10^{40} = zehn Sextilliarden
10^{45} = eine Septilliarde, 10^{50} = hundert Oktillionen
10^{65} = hundert Dezilliarden

(c) 35

(d) 12 Sextillionen 5 Quintilliarden 60 Quintillionen 700 Quadrilliarden

120 Quadrillionen 309 Trilliarden 876 Trillionen 3 Billionen hunderttausend

11. **Die Größe von Festplatten**

Bei der Herstellung von Speicherchips und Festplatten werden bestimmte Strukturen oft verdoppelt. Die Zahl der Zeichen (**Byte**), die auf einem Speichermedium Platz haben, ist daher oft eine Zweierpotenz (Potenz mit der Basis zwei).

(a) Der Speicherplatz für ein Byte besteht aus acht kleinen Speicherzellen, die jeweils mit 0 oder 1 beschrieben werden können. Wie viele verschiedene Zeichen können mit einem Byte dargestellt werden?

(b) Die Vorsilben Kilo, Mega, Giga und Tera haben in der Computertechnik eine etwas andere Bedeutung als sonst:

Vorsilbe	normal	Computer
Kilo	10^3	2^{10}
Mega	10^6	2^{20}
Giga	10^9	2^{30}
Tera	10^{12}	2^{40}

Vergleiche die Bedeutung der einzelnen Vorsilben im normalen Gebrauch und in der Computertechnik.

(c) Eine Buchseite hat 40 Zeilen mit je 80 Zeichen. Wie viele Seiten Text können auf einer 125 GB (Gigabyte) Festplatte gespeichert werden? Wie dick wäre das Buch mit dieser Seitenzahl, wenn 100 Blätter einen Zentimeter dick sind?

Lösung: (a) $2^8 = 256$ verschiedene Zeichen

(b)

Vorsilbe	normal	Computer
Kilo	$10^3 = 1000$	$2^{10} = 1024$
Mega	$10^6 = 1\,000\,000$	$2^{20} = 1024^2 = 1\,048\,576$
Giga	$10^9 = 1\,000\,000\,000$	$2^{30} = 2^{20} \cdot 1024 = 1\,073\,741\,824$
Tera	$10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$	$2^{40} = 2^{30} \cdot 1024 = 1\,099\,511\,627\,776$

(c) Zahl der Zeichen: $125 \cdot 2^{30} = 134\,217\,728\,000$

Zahl der Seiten: $134\,217\,728\,000 : 3200 = 41\,943\,040$

Zahl der Blätter: $41\,943\,040 : 2 = 20\,971\,520$

Dicke des Buches: $209\,715{,}2\,\text{cm} = 2\,\text{km}\,97\,\text{m}\,15\,\text{cm}\,2\,\text{mm}$

3.1.4 Rechengesetze

1. (a) Wie verändert sich der Wert eines Produkts, wenn man den ersten Faktor vergrößert?

   (b) Wie verändert sich der Wert eines Produkts, wenn man den zweiten Faktor vergrößert?

   (c) Wie verändert sich der Wert eines Quotienten, wenn man den Dividenden so vergrößert, dass die Division aufgeht?

   (d) Wie verändert sich der Wert eines Quotienten, wenn man den Divisor so vergrößert, dass die Division aufgeht?

Lösung: (a) Der Wert des Produkts wird größer.

(b) Der Wert des Produkts wird größer.

(c) Der Wert des Quotienten wird größer.

(d) Der Wert des Quotienten wird kleiner.

2. (a) Wie verändert sich der Wert eines Produkts, wenn man den ersten Faktor um 1 vergrößert?

   (b) Wie verändert sich der Wert eines Produkts, wenn man den zweiten Faktor um 1 vergrößert?

   (c) Wie verändert sich der Wert eines Quotienten, wenn man den Dividenden um den Wert des Divisors vergrößert?

   (d) Wie verändert sich der Wert eines Quotienten, wenn man den Dividenden um den doppelten Wert des Divisors vergrößert?

Lösung: (a) Der Wert des Produkts wird um den zweiten Faktor größer.

(b) Der Wert des Produkts wird um den ersten Faktor größer.

(c) Der Wert des Quotienten wird um 1 größer.

(d) Der Wert des Quotienten wird um 2 größer.

3. Nutze jeden Vorteil:
   (a) Multipliziere die Potenz mit der Basis 6 und dem Exponenten 4 mit der Potenz mit der Basis 5 und dem Exponenten 3.
   (b) Dividiere die Potenz mit der Basis 6 und dem Exponenten 4 durch das Produkt aus 9 und 16.
   (c) Dividiere die Potenz mit der Basis 75 und dem Exponenten 3 durch die Potenz mit der Basis 5 und dem Exponenten 5.
   (d) Dividiere die Summe der Zahlen 77 und 66 durch ihre Differenz.

Lösung: (a) $6^4 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 \cdot 2 \cdot 3^4 = 1000 \cdot 162 = 162\,000$

(b) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 : 3 : 3 : 2 : 2 : 2 : 2 = 9$

(c) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 : 5 : 5 : 5 : 5 : 5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 27 \cdot 5 = 135$

(d) $(77 + 66) : (77 - 66) = (77 + 66) : 11 = 7 + 6 = 13$

4. Dividiere die Potenz mit der Basis 18 und dem Exponenten 4 durch die Potenz mit der Basis 3 und dem Exponenten 7. Rechne so vorteilhaft wie möglich!

Lösung: $18^4 : 3^7 = 2^4 \cdot 3^8 : 3^7 = 16 \cdot 3 = 48$ $(104\,976 : 2187 = 48)$

5. Berechne den Wert des Terms $12 - 2 \cdot 5^3$.

   Durch das Setzen von Klammern kann man die Reihenfolge der Rechenschritte Verändern. Berechne alle möglichen Werte des Terms, die durch das Setzen von Klammern entstehen. Ordne die Ergebnisse der Größe nach.

Lösung: $12 - (2 \cdot 5)^3 = 12 - 10^3 = 12 - 1000 = -988$

$12 - 2 \cdot 5^3 = 12 - 2 \cdot 125 = 12 - 250 = -238$

$(12 - 2 \cdot 5)^3 = 2^3 = 8$

$(12 - 2) \cdot 5^3 = 10 \cdot 125 = 1250$

$[(12 - 2) \cdot 5]^3 = 50^3 = 125\,000$

6. Berechne den Wert des Terms $30 - 4 \cdot 5^4$.

   Durch das Setzen von Klammern kann man die Reihenfolge der Rechenschritte Verändern. Berechne alle möglichen Werte des Terms, die durch das Setzen von Klammern entstehen. Ordne die Ergebnisse der Größe nach.

Lösung: $30 - (4 \cdot 5)^4 = 30 - 2^4 \cdot 10^4 = 30 - 160\,000 = -159\,970$

$30 - 4 \cdot 5^4 = 30 - 100 \cdot 25 = 30 - 2500 = -2470$

$(30 - 4 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10\,000$

$(30 - 4) \cdot 5^4 = 26 \cdot 625 = 16\,250$

$[(30 - 4) \cdot 5]^4 = 130^4 = 16\,900^2 = 285\,610\,000$

3.1.5 Gliedern einfacher Terme und Berechnen ihrer Werte

1. Stelle mit den Zahlen 25, 9, 11 und 4 verschiedene Terme auf und berechne sie.
   (a) Bei mindestens drei Termen soll das Ergebnis mindestens 0 und höchstens 10 sein.
   (b) Bei mindestens drei Termen soll das Ergebnis mindestens 100 und höchstens 120 sein.

Lösung: (a) Z. B. $25 \cdot 4 - 9 \cdot 11 = 1$, $25 - 9 - 11 - 4 = 1$, $4 \cdot 9 - 11 - 25 = 0$

(b) Z. B. $25 \cdot 4 + 11 - 9 = 102$, $9 \cdot 11 - 4 + 25 = 120$, $25 \cdot 4 + 9 + 11^0 = 110$

3.1.6 Zählprinzip, Veranschaulichung in Baumdiagrammen

1. **„Nur einmal zweimal" - Ein Würfelspiel für 2 oder mehr Spieler**

   Jeder Spieler würfelt so lange, bis eine Zahl zum zweiten Mal erscheint, z. B. 1 - 3 - 4 - 3. Er erhält dann soviele Punkte, wie er zusammen gewürfelt hat, in diesem Beispiel 11 Punkte.

   Spielt das Spiel so oft, bis jeder Mitspieler zehnmal an der Reihe war und schreibt euch alle Spielverläufe auf.

   (a) Welche Punktzahl ist am häufigsten vorgekommen?
   (b) Was war die größte und was die kleinste Punktzahl, die vorgekommen ist?
   (c) Wie viele Punkte habt ihr im Durchschnitt pro Spiel bekommen?
   (d) Warum kann ein Spieler nie 3 Punkte bekommen?
   (e) Was ist die größte Punktzahl, die man in einem Spiel bekommen kann?
   (f) Wie viele verschiedene Spielverläufe gibt es, bei denen ein Spieler 5 Punkte bekommt?

   aus: Stochastik in der Realschule - Fortbildungsmaterialien, Prof. Dr. Timo Leuders, Pädagogische Hochschule Freiburg

Lösung: (a)

(b)

(c)

(d) Spielende nach dem zweiten Wurf liefert eine gerade Punktzahl;
Spielende nach dem dritten Wurf heißt, eine Zahl zweimal und eine weitere Zahl, also z. B. 1 - 2 - 1. 3 kann mit drei Würfen nur mit 1 - 1 - 1 erzeugt werden, was nicht möglich ist und auch nicht mit mehr als drei Würfen.

(e) $27 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 6$

(f) vier verschiedene Spielverläufe: 2 - 1 - 2, 1 - 2 - 2, 1 - 3 - 1, 3 - 1 - 1

2. Führe in deiner Klasse eine Umfrage durch und stelle das Ergebnis in einem Diagramm dar. Frage nach
   (a) der Lieblingssportart.
   (b) dem Lieblingsfach in der Schule.
   (c) der Anzahl der Haustiere.
   (d) der Art der Haustiere.

3. (a) Bei wie vielen zweistelligen Quadratzahlen ist die Einerziffer ungerade?
   (b) Wie viele Diagonalen hat jedes regelmäßige Sechseck?

   Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

Lösung: (a) bei 3, nämlich 25, 49, 81
(b) 9

4. **Handy-PINs**
   (a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für eine vierstellige Handy-PIN?
   (b) Wie viele verschiedene PINs lassen sich aus den Ziffern 2, 3, 4 und 5 bilden, wenn jede der Ziffern auch mehr als einmal vorkommen darf?
   (c) Manuelas Handy-PIN ist gerade und hat die Ziffern 1, 3, 4, und 5. Wie könnte ihre PIN lauten? Gib alle Möglichkeiten an.
   (d) Der Produktwert der Ziffern von Stefans Handy-PIN ist 21. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für Stefans PIN? Gib sie alle an.
   (e) Beas und Kais Handy-PINs sind verschieden, bestehen aber aus den gleichen Ziffern 5, 7, 3 und 9. Um mindestens wie viel unterscheiden sie sich?
   (f) Die Tausenderziffer von Leos Handy-PIN ist 8, die Zehnerziffer 7; die Einerziffer ist dreimal so groß wie die Hunderterziffer. Wie könnte Leos PIN lauten? Gib alle Möglichkeiten an.

Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

Lösung: (a) $10^4 = 10000$

(b) $4^4 = 256$

(c) 6 Möglichkeiten: 1354, 1534, 3154, 3514, 5134, 5314

(d) 12 Möglichkeiten:1173, 1137, 1371, 1731, 1713, 1317, 7113, 3117, 7131, 3171, 3711, 7311

(e) Sie unterscheiden sich um mindestens 18, z. B. $3597 - 3579$.

(f) 4 Möglichkeiten: 8070, 8173, 8276, 8379

5. Wie viele verschiedene Blumentöpfe sind nötig, damit du sie an jedem Tag eines Jahres in einer anderen Reihenfolge nebeneinander aufstellen kannst?

   Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

Lösung: 6 Blumentöpfe, da $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 > 365$ und $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 < 365$

6. Lucas würfelt dreimal und schreibt die Augenzahlen nebeneinander. Wie viele verschiedene

   (a) dreistellige Zahlen sind dabei möglich?

   (b) gerade dreistellige Zahlen sind dabei möglich?

   (c) dreistellige Quadratzahlen sind dabei möglich?

   Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

Lösung: (a) $6^3 = 216$ (b) $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$,
(c) 8, nämlich 121, 144, 225, 256, 324, 361, 441, 625

7. **Für Modebewusste/Wechselwähler**

   In einer Schublade liegen 25 rote und 25 schwarze Socken. Wie viele Socken muss man „blind" mindestens entnehmern, um sicher zu sein, mindestens zwei gleichfarbige Socken in der Hand zu haben? Wie viele muss man nehmen, wenn man unbedingt zwei rote Socken haben will?

   Quelle: G. M. Ziegler, FOCUS 23/2006

Lösung: 26, 27

8. Wenn die Bundesliega auf 20 Mannschaften vergrößert werden soll, wie viele Spiele finden dann in jeder Saison statt?

   Quelle: G. M. Ziegler, FOCUS 23/2006

Lösung: Mannschaften spielen pro Saison zweimal gegeneinander, also $20 \cdot 19 = 380$ Spiele

9. In einer Gummibärentüte sind 27 gelbe, 18 weiße, 33 grüne und 25 rote Bärchen. Die „Naschkatze" Lisa lässt sich gerne überraschen und nimmt daher blind immer ein Bärchen aus der Tüte.

   (a) Wie oft muss sie in die Tüte greifen, um sicher einen grünen Bären zu erhalten?

   (b) Wie viele Gummibären muss sie im Höchstfall herausnehmen, damit sie von jeder Farbe mindestens ein Bärchen bekommt?

   (c) Nach wie vielen Ziehungen hat sie sicher mindestens 3 Bären einer Farbe?

   Quelle: Fürther Mathematik Olympiade, 2. Runde, 2003/2004

Lösung: (a) Wenn Lisa Pech hat, erwischt sie das erste grüne Bärchen erst, wenn alle anderen Bärchen weg sind, d. h. spätestens beim $27 + 18 + 25 + 1 = 71$ mal erwischt sie einen grünen Bären.

(b) Im ungüstigsten Fall bleiben nur noch alle Bärchen einer Farbe übrig. Da die wenigsten Bärchen weiß sind, tritt der ungünstigste Fall ein, wenn nur noch die 18 weißen Bären in der Tüte zurückbleiben, also nach $27 + 33 + 25 = 85$ Ziehungen. Spätestens nach 86 Ziehungen hat Lisa von jeder Farbe ein Gummibärchen.

(c) Im ungüstigsten Fall hat sie nach 8 Ziehungen genau 2 Bären von jeder Farbe. Bei der 9. Ziehung bekommt sie sicher den 3. Bären einer Farbe.

10. Wie viele Möglichkeiten gibt es, das Produkt $111 \cdot 222 \cdot 333 \cdot 444$ hinzuschreiben? Den Produktwert selbst sollst du nicht ausrechnen.

Lösung: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten

11. Gib alle dreistelligen Zahlen an, die man aus den Ziffern

    (a) 7, 8 und 9 bilden kann.

    (b) 7, 8 und 9 bilden kann, wenn jede Ziffer nur einmal auftreten darf.

    (c) 8, 9 und 0 bilden kann.

    (d) 8, 9 und 0 bilden kann, wenn jede Ziffer nur einmal auftreten darf.

    Literatur: PM 1/44, Jg. 2002

Lösung: (a) 27 Zahlen: 789, 798, 879, 897, 978, 987, 778, 787, 877, 779, 797, 977, 887, 878, 788, 889, 898, 988, 997, 979, 799, 998, 989, 899, 777, 888, 999

(b) 6 Zahlen: 789, 798, 879, 897, 978, 987

(c) 18 Zahlen: 890, 809, 980, 908, 889, 898, 988, 880, 808, 990, 909, 998, 989, 899, 800, 900, 888, 999,

(d) 4 Zahlen: 890, 809, 980, 908

12. Chris will alle fünfstelligen Zahlen addieren, die jede der Ziffern 1, 3, 5, 7, und 9 genau einmal enthalten. Wie viele solcher Summanden gibt es und welchen Wert hat die Summe?

    Quelle: Fürther Mathematik Olympiade, 1. Runde, 2002/2003

Lösung: Es gibt $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Summanden.

An der Einerstelle tritt jede Ziffer 24-mal $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$ auf $\Rightarrow$ Summe der Einerstellen $24 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = 600$. An jeder anderen Stelle ergibt sich analog 600 $\Rightarrow$ Summe $= 600 + 600 \cdot 10 + 600 \cdot 100 + 600 \cdot 1000 + 600 \cdot 10000 = 600 \cdot 11111 = 6666600$

13. Anja schreibt verdeckt eine dreistellige Zahl, in der nur die Ziffern 1 und 2 vorkommen. Wie viele Zahlen muss Iris auf jeden Fall aufschreiben, damit mit Sicherheit eine Zahl dabei ist,

    (a) die mit Anjas Zahl übereinstimmt?

    (b) die an mindestens einer Stelle mit Anjas Zahl übereinstimmt?

    (c) die an mindestens zwei Stellen mit Anjas Zahl übereinstimmt?

    Quelle: Fürther Mathematik Olympiade, 1. Runde, 2002/2003

Lösung: (a) Iris muss mindestens acht Zahlen nennen: 222, 221, 212, 122, 111, 112, 121, 211

(b) Iris muss zwei Zahlen nennen: 222, 111. Jede der acht Möglichkeiten enthält mindestens einen Zweier oder mindestens einen Einser.

(c) Es genügen wieder die Zahlen 222, 111, da jede der acht Möglichkeiten mindestens zwei Zweier oder mindestens zwei Einser enthält.

14. Die Fußballvereine aus Vilsbiburg, Seyboldsdorf, Frontenhausen und Geisenhausen tragen ein Turnier aus, bei dem jeder Verein gegen jeden anderen Verein genau einmal spielt. Jeder Verein erhält für einen Sieg drei Punkte, für ein Unentschieden einen Punkt und für eine Niederlage keinen Punkt.

    (a) Wie viele Punkte können bei den sechs Spielen des Turniers insgesamt vergeben werden?

(b) Bei dem Turnier erhielt Vilsbiburg sieben Punkte, Seyboldsdorf fünf Punkte, Frontenhausen drei Punkte und Geisenhausen einen Punkt. Wie endeten die einzelnen Spiele (nur Sieg bzw. Unentschieden)?

Lösung: (a) 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12

(b) Vilsbiburg gegen Seyboldsdorf: unentschieden,
Vilsbiburg gegen Frontenhausen: Vilsbiburg siegt,
Vilsbiburg gegen Geisenhausen: Vilsbiburg siegt,
Seyboldsdorf gegen Frontenhausen: Seyboldsdorf siegt,
Seyboldsdorf gegen Geisenhausen: unentschieden,
Frontenhausen gegen Geisenhausen: Frontenhausen siegt

15. Auf wie viele Arten kann man einen 50-Euro-Schein in andere Euro-Scheine wechseln?

Lösung: 12 Möglichkeiten

16. (a) Wie viele verschiedene dreistellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 3, 5 und 7 bilden?

(b) Wie viele verschiedene dreistellige Zahlen mit zwei Ziffern 5 bzw. mit einer Ziffer 5 gibt es?

Lösung: (a) 6 (b) 26 bzw. 225

17. Zum Ausklang von Judits Geburtstagsfeier wird Eis angeboten. Es gibt fünf Sorten: Erdbeere, Himbeere, Schokolade, Vanille, Zitrone

(a) Jedes Kind darf sich drei Klugeln unterschiedlicher Sorten aussuchen. Wie viele Kombinationen sind möglich?

(b) Wie vielen Zusammenstellungen gibt es, wenn die drei Kugeln auch von derselben Sorte sein dürfen?

Lösung: (a) $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

(b) $5^3 = 125$

18. (a) Wie viele verschiedene Worte lassen sich aus den Buchstaben der Wörter IDA bzw. MATHE bilden?

(b) Wie viele verschiedene Produkte lassen sich aus den Primfaktoren 5, 7 und 11 bilden, wenn jeder Faktor höchstens einmal vorkommen darf? Berechne die Differenz des kleinsten und des größten dieser Produkte.

(c) Wie viele verschiedene Produkte lassen sich aus den Primfaktoren der Zahl 425 bilden, wenn jeder Faktor höchstens so oft auftreten darf, wie in der Zerlegung der Zahl 425?

(d) Wie viele Zahlen lassen sich als Summe oder Differenz aus den Primfaktoren der Zahl 114 bilden.

Lösung: (a) 6, 120

(b) 7 verschiedene Produkte: 5, 7, 11, $5 \cdot 7 = 35$, $5 \cdot 11 = 55$, $7 \cdot 11 = 77$, $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$, $5 \cdot 7 \cdot 11 - 5 = 380$

(c) 5, 17, $5 \cdot 5 = 25$, $5 \cdot 17 = 85$, $5^2 \cdot 17 = 425$

(d) Primfaktoren: 2, 3, 19
$2+3=5$, $2+19=21$, $3+19=22$, $2-3=-1$, $2-19=-17$, $3-19=-16$, $3-2=1$, $19-2=17$, $19-3=16$

19. **Passwörter**

(a) Das Alphabet hat 26 Buchstaben. Wie viele verschiedene Wörter (auch sinnlose) gibt es mit zwei Buchstaben?

(b) Wie viele verschiedene Wörter gibt es mit drei Buchstaben?

(c) Verwende die Ergebnisse aus (a) und (b) um zu berechnen, wie viele verschiedene Wörter es mit acht Buchstaben gibt.

(d) Für Computerpasswörter kann man Großbuchstaben, Kleinbuchstaben, die Ziffern und noch acht Sonderzeichen (!?; : + <> #) verwenden. Wie viele Passwörter mit zwei Zeichen gibt es? Wie viele sind es mit drei, wie viele mit acht Zeichen?

Lösung: (a) $26^2 = 676$

(b) $26^3 = 17576$

(c) $26^8 = 26^3 \cdot 26^3 \cdot 26^2 = 208\,827\,064\,576$

(d) Es gibt $2 \cdot 26 + 8 = 60$ verschiedene Zeichen.

Mit 2 Zeichen : $60^2 = 3600$
Mit 3 Zeichen : $60^3 = 216\,000$
Mit 8 Zeichen : $60^8 = 167\,961\,600\,000\,000$

20. (a) Wie viele Wörter kann man mit den vier Buchstaben B, O, O und T schreiben?

(b) $M = \{x \mid x \text{ ist Primzahl und } 17 \leqq x < 53\}$. Schreibe M ausführlich hin. Wie groß ist $|M|$?

Lösung: (a) 12 (b) $M = \{17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$, $|M| = 9$

21. Wie viele verschiedene Buchstabenfolgen kann man aus dem Wort FREITAG bilden?

Lösung: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

22. Ein Ausrufezeichen hinter einer natürlichen Zahl bedeutet „Fakultät". 7! liest man z.B. als „sieben Fakultät". $n!$ ist eine Kurzschreibweise für das Produkt aller natürlichen Zahlen, die kleiner oder gleich n sind.

    Beispiele: $1! = 1$
    $2! = 1 \cdot 2 = 2$
    $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
    $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

    (a) Berechne $n!$ für alle $n \leqq 10$.

    (b) Es gilt $20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$. Berechne 21!.

    Wie heißt das Ergebnis in Worten?

    (c) Wie oft enthält 30! den Primfaktor 3?

    (d) Wie oft hintereinander kann man 50! ohne Rest durch zwei teilen?

    (e) Die Zahl 1000! hat am Ende viele Nullen; wie viele sind es?

    Hinweis: Primfaktoren!

Lösung: (a) $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$,

$8! = 40320$, $9! = 362880$, $10! = 3628800$

(b) $21! = 20! \cdot 21 = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000 \cdot 21 = 51\,090\,942\,171\,709\,440\,000 =$

51 Trillionen 90 Billiarden 942 Billionen 171 Milliarden 709 Millionen

440 Tausend

(c) 30! enhält 10 Faktoren, die ein Vielfaches von 3 sind, 3 Faktoren, die ein Vielfaches von $3^2 = 9$ sind und einen Faktor, der ein Vielfaches von $3^3 = 27$ ist. Insgesamt enthält 30! also $10 + 3 + 1 = 14$ mal den Faktor 3.

(d) 50! enhält 25 gerade Faktoren, 12 Faktoren aus V_4, 6 Faktoren aus V_8, 3 Faktoren aus V_{16} und 1 Faktor aus V_{32}. Insgesamt enthält 50! also $25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 47$ mal den Faktor 2.

(e) 1000! enthält sicher mehr Faktoren 2 als 5. Jedes Paar aus den Faktoren 2 und 5 ergibt eine Schlussnull. Die Zahl der Schlussnullen ist also gleich der Zahl aller Primfaktoren 5. Die Zahlen von 1 bis 1000 enthalten $1000 : 5 = 200$ Vielfache von 5. $200 : 5 = 40$ dieser Zahlen sind Vielfache von 25 und enthalten einen weiteren Faktor 5. $40 : 5 = 8$ der Vielfachen von 25 sind sogar Vielfache von 125 und tragen noch einen Faktor 5 bei. Als letztes liefert die Zahl $625 = 5^4$ noch einen Faktor 5. Insgesamt hat man also $200+40+8+1 = 249$ Faktoren 5 und genauso viele Schlussnullen. Nur zur Information: 1000! hat 2568 Stellen.

23. Die elf Mädchen der Klasse 5a lassen sich fotografieren.

(a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für die jungen Damen, sich nebeneinander aufzustellen?

(b) Wie viele verschieden Aufstellungen gibt es, wenn zusätzlich noch die beiden Klassensprecher mit auf das Bild sollen? Wie viele Tage dauert es, alle Aufstellungen auszuprobieren, wenn man für jede Anordnung eine Minute benötigt? Wie viele Jahre sind das ungefähr?

Lösung: (a) $11! = 39\,916\,800$

(b) $13! = 39\,916\,800 \cdot 12 \cdot 13 = 6\,227\,020\,800$

$6\,227\,020\,800\,\text{min} = 4\,324\,320\,\text{d} \approx 11\,847\,\text{a}$

24. Scrabble ist ein Spiel, bei dem mit Spielsteinen, auf die je ein Buchstabe aufgedruckt ist, Wörter gelegt werden. Wie viele verschiedene Wörter, auch unsinnige, können mit folgenden Steinen gelegt werden (kein Stein darf übrig bleiben):

(a) $\boxed{\mathbf{A}}\ \boxed{\mathbf{E}}\ \boxed{\mathbf{R}}\ \boxed{\mathbf{T}}$

(b) $\boxed{\mathbf{A}}\ \boxed{\mathbf{B}}\ \boxed{\mathbf{D}}\ \boxed{\mathbf{E}}\ \boxed{\mathbf{N}}\ \boxed{\mathbf{S}}$

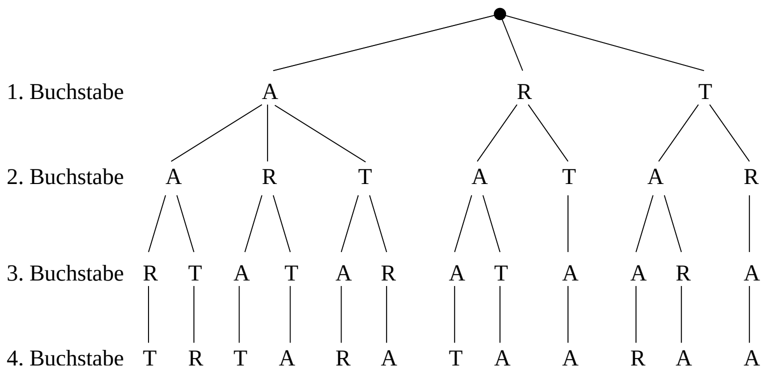
(c) $\boxed{\mathbf{A}}\ \boxed{\mathbf{A}}\ \boxed{\mathbf{R}}\ \boxed{\mathbf{T}}$

(d) $\boxed{\mathbf{A}}\ \boxed{\mathbf{A}}\ \boxed{\mathbf{T}}\ \boxed{\mathbf{T}}\ \boxed{\mathbf{T}}$

Lösung: (a) $4! = 24$

(b) $6! = 720$

(c)

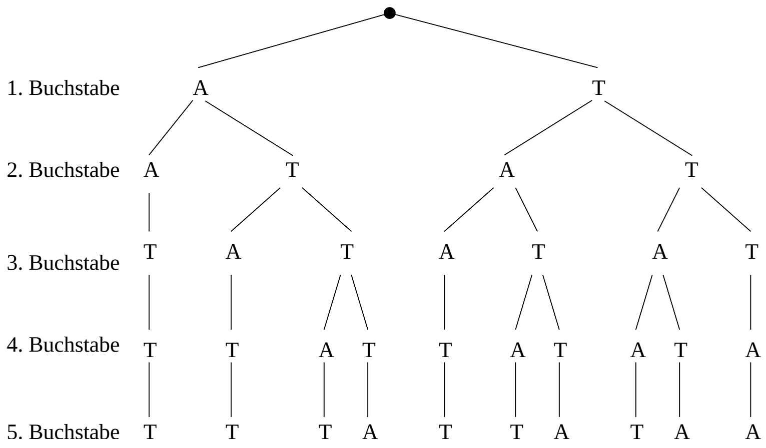


Es geht auch mit einer Tabelle (die beiden freien Plätze können mit RT und TR belegt werde, also zwei Möglichkeiten für jede Zeile):

A	A			
A		A		
A			A	3
	A	A		
	A		A	2
		A	A	1

$(3 + 2 + 1) \cdot 2 = 12$

(d)



Es geht auch mit einer Tabelle:

A	A				
A		A			
A			A		
A				A	4
	A	A			
	A		A		
	A			A	3
		A	A		
		A		A	2
			A	A	1

$4 + 3 + 2 + 1 = 10$

25. Es stehen zehn Spielsteine zur Verfügung, die mit den Ziffern von 0 bis 9 bedruckt sind:

$\boxed{\mathbf{0}}\ \boxed{\mathbf{1}}\ \boxed{\mathbf{2}}\ \boxed{\mathbf{3}}\ \boxed{\mathbf{4}}\ \boxed{\mathbf{5}}\ \boxed{\mathbf{6}}\ \boxed{\mathbf{7}}\ \boxed{\mathbf{8}}\ \boxed{\mathbf{9}}$

(a) Wie viele verschiedene zweistellige Zahlen kann man mit den Steinen legen?

(b) Berechne auch, wie viele dreistellige, vierstellige, fünfstellige, sechsstellige, siebenstellige, achtstellige, neunstellige und zehnstellige Zahlen man mit den Spielsteinen legen kann.

Lösung: (a) Erste Stelle nur Ziffern 1 bis 9: $9 \cdot 9 = 81$

(b) dreistellig: $9 \cdot 9 \cdot 8 = 81 \cdot 8 = 648$
vierstellige: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 648 \cdot 7 = 4\,536$
fünfstellige: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 4\,536 \cdot 6 = 27\,216$
sechsstellige: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 27\,216 \cdot 5 = 136\,080$
siebenstellige: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 136\,080 \cdot 4 = 544\,320$
achtstellige: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 544\,320 \cdot 3 = 1\,632\,960$
neunstellige: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1\,632\,960 \cdot 2 = 3\,265\,920$
zehnstellige: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,265\,920 \cdot 1 = 3\,265\,920$

26. Die Freundinnen Anna, Kathrin, Johanna und Vreni gehen zum Fotografen. Jede hat drei Hüte und zwei Sonnenbrillen dabei.

    (a) Der Fotograf stellt die vier Mädchen nebeneinander auf, jede der jungen Damen setzt dabei einen ihrer Hüte und eine ihrer Brillen auf. Wie viele verschiedenartige Bilder der Freundinnen könnten aufgenommen werden?

    (b) Auf dem Heimweg führen die Mädchen folgendes Gespräch:

    Anna: „Wenn wir nicht nur unsere eigenen Hüte und Brillen aufgesetzt hätten sondern auch getauscht hätten, wie viele verschiedene Aufnahmen hätten wir dann wohl machen können?“

    Katrin: „Zuerst müssen wir uns überlegen, auf wie viele Arten wir die zwölf Hüte aufsetzen können.“

    Johanna: „Ich nehme mir als Erste einen Hut und habe somit zwölf Möglichkeiten.“

    Vreni: „Dann nehme ich als nächste einen Hut und habe damit noch elf zur Auswahl. Ha, jetzt weiß ich, wie ich weiterrechnen muss. Und mit den Brillen gehts genauso. Ui, das gibt eine riesige Zahl von Möglichkeiten.“

    Anna: „Wie lange würden wir wohl brauchen, all diese Fotos zu machen?“

    (c) Berechne $12! = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ und vergleiche mit dem Ergebnis von Teilaufgabe (b). Ist das Zufall oder steckt ein Gesetz dahinter?

Lösung: (a) Jedes Mädchen hat $3 \cdot 2 = 6$ verschiedene Outfits. Zu jeder Sitzordnung gibt es $6^4 = 1296$ verschiedene Outfits. Da es $4! = 24$ verschiedene Sitzordungen gibt, ist die Geamtzahl der möglichen Aufnahmen $1296 \cdot 24 = 31\,104$.

(b) Es gibt $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11\,880$ verschieden Anordnungen der Hüte auf den Köpfen der Mädchen.

Es gibt $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ verschieden Möglichkeiten, die acht Brillen aufzusetzen.

Damit gibt es $11\,880 \cdot 1680 = 19\,958\,400$ verschiedene Outfits, die Zahl der verschiedene Aufnahmemöglichkeiten ist also

$$\underbrace{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}_{\text{Hüte}} \cdot \underbrace{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}_{\text{Brillen}} \cdot \underbrace{4!}_{\text{Anordnungen}}$$

$19\,958\,400 \cdot 24 = 479\,001\,600$.

Zur Abschätzung der Zeit nehmen wir Folgendes an: In 10 s schaffen sie eine Aufnahme und am Tag wird 10 h lang fotografiert. Damit schaffen sie pro Tag 3600 Aufnahmen und sie brauchen $479\,001\,600 : 3600 = 133\,056$ Tage oder ungefähr 365 Jahre.

(c) Die Gleichheit der Ergebnisse ist Zufall und gilt nur bei 2 Brillen und 3 Hüten (oder 3 Brillen und 2 Hüten) pro Mädchen, die Zahl der Mädchen ist aber beliebig. Z.B. gibt es mit 7 Mädchen 21 Hüte und 14 Brillen:

$$\underbrace{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}_{\text{Hüte}} \cdot \underbrace{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}_{\text{Brillen}} \cdot \underbrace{7!}_{\text{Anordnungen}} = 21!$$

Bei 5 Hüten und 2 Brillen pro Mädchen und 4 jungen Damen ist die Gesamtzahl der Fotos (20 Hüte, 8 Brillen):

$$\underbrace{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}_{\text{Hüte}} \cdot \underbrace{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}_{\text{Brillen}} \cdot \underbrace{4!}_{\text{Anordnungen}} \neq 20!$$

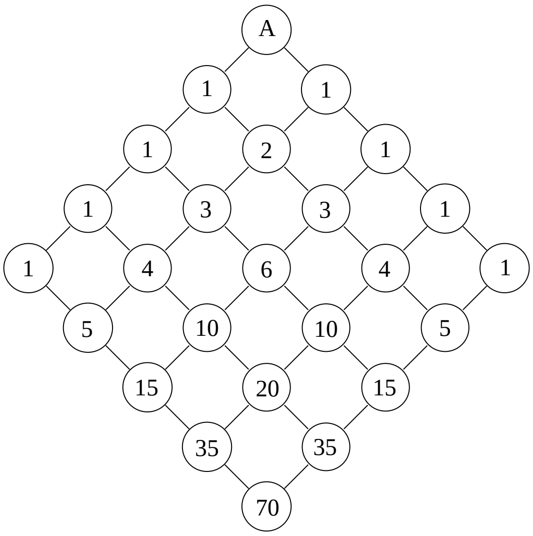
27. Nebenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Stadtplans von New York.

   (a) Auf wie vielen verschiedenen kürzesten Wegen (man darf nur nach Osten oder Süden fahren) kann ein Taxi von A nach B gelangen?

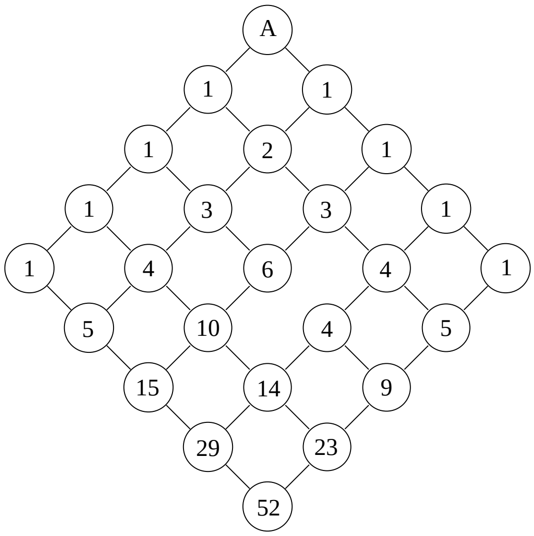
   (b) Wie viele verschiedene Wege sind für das Taxi noch möglich, wenn die 79. Straße zwischen Second Avenue und Third Avenue gesperrt ist?

   (c) Welcher Straßenabschnitt muss gesperrt werden, damit es für das Taxi möglichst wenig Möglichkeiten gibt, von A nach B zu gelangen? Für welche Sperrung gibt es für das Taxi noch möglichst viele Wege?

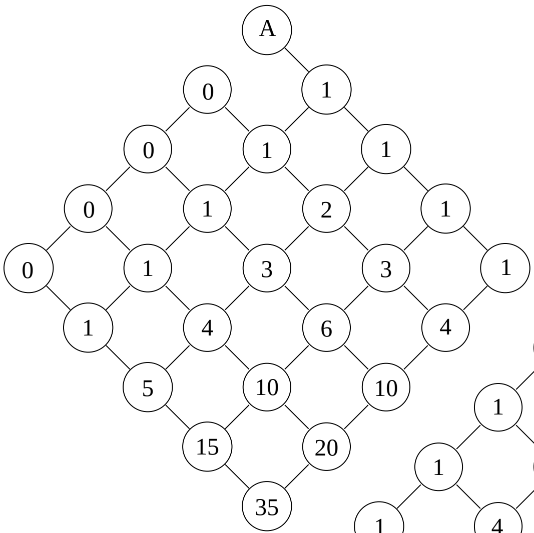
Lösung: (a)

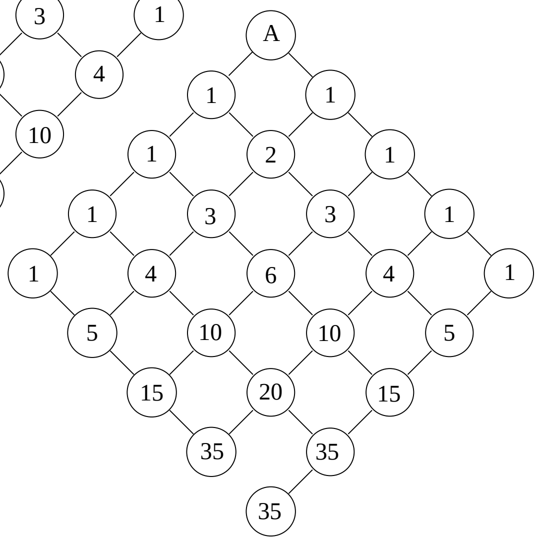


(b)

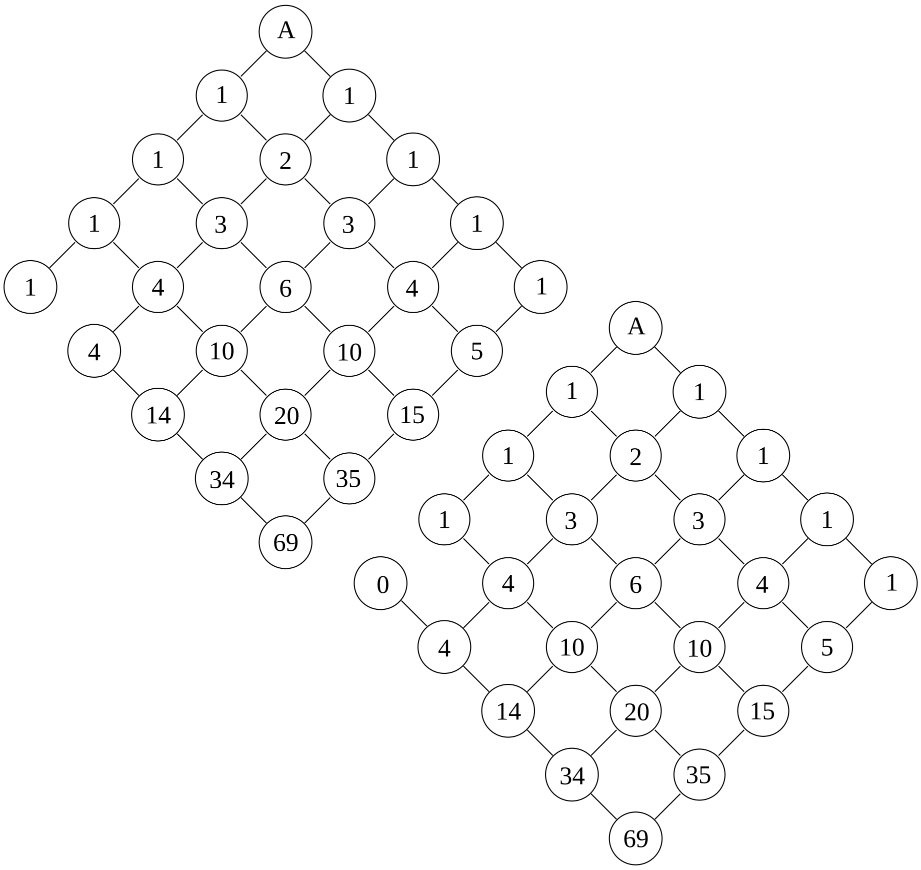


(c) Möglichst wenig:

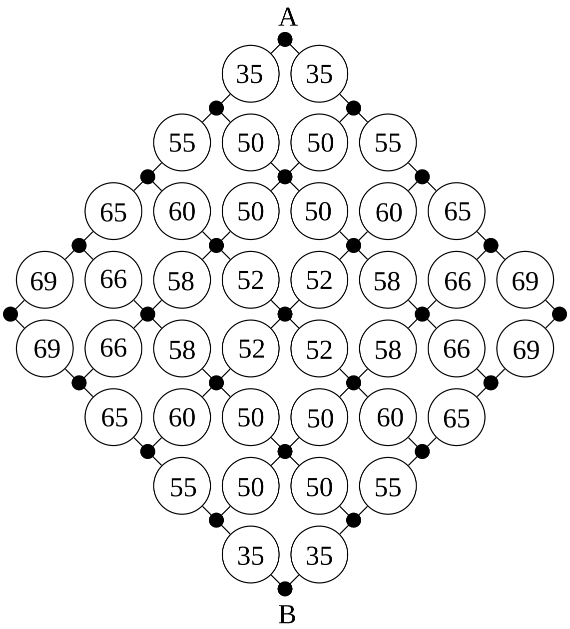




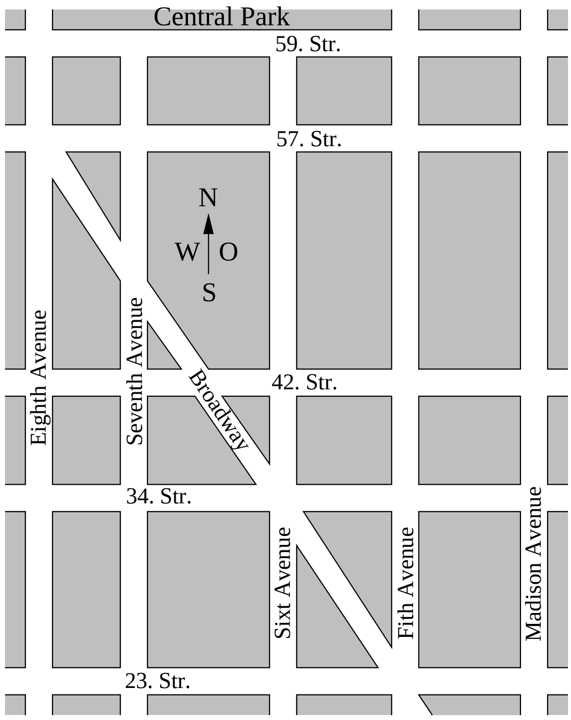
Möglichst viel:



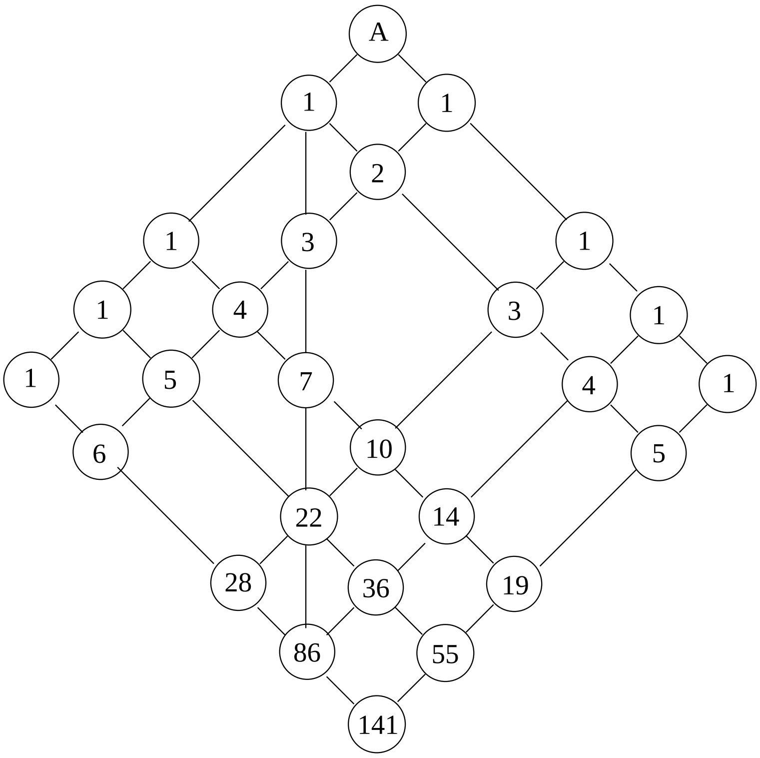
Alle Möglichkeiten: die Zahlen in den Kreisen geben die Zahlen aller möglichen Wege an, wenn sich die Sperrung am Ort des Kreises befindet:



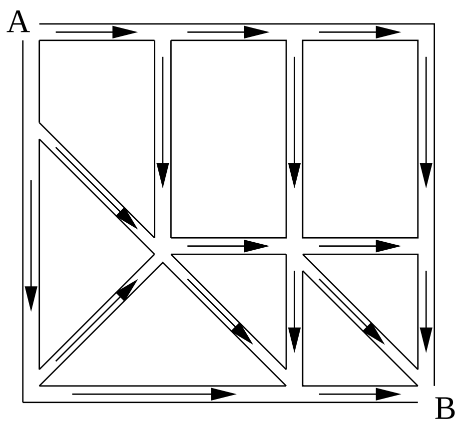
28. Nebenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Stadtplans von New York. Auf wie vielen verschiedenen Wegen (man darf nur nach Osten oder Süden bzw. Südosten gehen) kann man von der Ecke Eighth Avenue – 59. Straße zur Ecke Madison Avenue – 23. Straße gelangen?



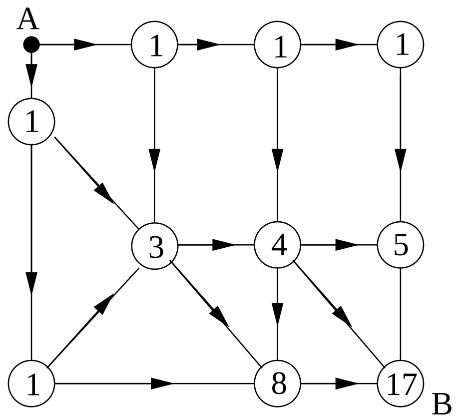
Lösung:



29. Auf wie vielen verschiedenen Wegen (man darf alle Straßen in Pfeilrichtung befahren) gelangt man von A nach B?



Lösung:



30. Ist das Ergebnis positiv oder negativ? Begründe deine Antwort!

$$(-18)^{37} \cdot 2^{17} \cdot (-100)^{18} \cdot (-3)^5$$

Lösung: $\underbrace{(-18)^{37}}_{\ominus} \cdot \underbrace{(+2)^{17}}_{\oplus} \cdot \underbrace{(-100)^{18}}_{\oplus} \cdot \underbrace{(-3)^5}_{\ominus} = \underbrace{\text{Ergebnis}}_{\oplus}$

3.2 Multiplikation und Division ganzer Zahlen

3.2.1 Berechnen von Produkt- und Quotientenwerten

1. Wie viele Produkte aus zwei verschiedenen der Zahlen -11, -10,..., -1, 0, 1, ... 10, 11 haben einen
   (a) Wert größer als 100.
   (b) haben einen Betrag kleiner als 3.

   Z. B. $3 \cdot 4$ und $4 \cdot 3$ zählen nur als ein Produkt.

Lösung: (a) vier Produkte: $10 \cdot 11$, $-10 \cdot (-11)$, $11 \cdot 11$, $-11 \cdot (-11)$

(b) 22 Produkte: $0\cdot$ beliebiger zweiter Faktor $\neq 0$,
6 Produkte: $(-1) \cdot (-1)$, $1 \cdot (\pm 1)$, $(-1) \cdot (-2)$, $1 \cdot (\pm 2)$,
also insgesamt 28 Produkte

2. Welches ist die richtige Lösung der Multiplikation $(456) \cdot (-321)$? Begründung ohne Rechnung.

   $-14\,376$ $\quad$ $146\,376$ $\quad$ $-146\,374$ $\quad$ $-146\,376$

Lösung: Ergebnis muss eine negative Zahl sein; Endstelle muss 6 sein; Überschlag liefert $500 \cdot (-300) = -150\,000 \Rightarrow -146\,376$

3. Berechne: $(-5) \cdot (-3) \cdot 2 - (-2) \cdot 10$

Lösung: 50

4. (a) Fülle die Multiplikationstabelle aus, indem du in jedes Feld den Wert einträgst, der sich ergibt, wenn man die zugehörigen Zahlen in der Spalte und in der Zeile multipliziert.

	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
4									
3									
2									
1					0				
0				0	0	0			
-1					0				
-2									
-3									
-4									

(b) Betrachte die obige Multiplikationstabelle. Schaue zuerst die erste von dir ausgefüllte Spalte an. Jede eingetragene Zahl hast du durch eine Multiplikation errechnet. Deute jeweils den ersten Faktor (Zahlen der linken Spalte) als Rechtswert und den Wert des Produkts als Hochwert von Punkten:
$(4|-16)$, $(3|-12)$, $(2|-8)$, $(1|-4)$, $(0|0)$, $(-1|4)$ usw.

i. Zeichne alle Punkte, die so aus der ersten Spalte entstehen, grün in ein Gitternetz ein.

ii. Zeichne alle Punkte, die aus der dritten Spalte entstehen, blau ein.

iii. Wenn Minus mal Minus Minus wäre, würden die Punkte $(4|-16)$, $(3|-12)$, $(2|-8)$, $(1|-4)$, $(0|0)$, $(-1|-4)$, $(-2|-8)$, $(-3|-12)$ und $(-4|-16)$ entstehen. Zeichne diese Punkte rot ein. Was fällt dir auf?

Lösung: (a)

	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
4	-16	-12	-8	-4	0	4	8	12	16
3	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12
2	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
1	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
-2	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8
-3	12	9	6	3	0	-3	-6	-9	-12
-4	16	12	8	4	0	-4	-8	-12	-16