SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Neue Aufgaben (Gymnasium)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

23. Januar 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Neue Aufgaben, Januar 2008

1. Quelle: PM 6/42 (2000)

   (a) $p(\text{krank}) = 0,82\%$, $p(\text{Befund auffällig}) = 3,37\%$, usw.
   $p(\text{krank} \cap \text{Befund auffällig}) = 0,75\%$, $p(\text{nicht krank} \cup \text{Befund auffällig}) = 2,62\%$
   $p_{\text{Befund auffällig}}(\text{krank}) = \frac{0,75\%}{3,37\%} = 22,2\%$,
   d. h. bei einem auffälligem Befund ist nur etwa jeder fünfte Untersuchte krank.
   $p_{\text{krank}}(\text{Befund auffällig}) = \frac{0,75\%}{0,82\%} = 91,5\%$

   (b) Z. B.:
   Da die Untersuchungen immer mit Fehlern behaftet sind, müssen Ergebnisse sachlich gedeutet werden. Bei der Entwicklung von Untersuchungsmethoden ist es primär wichtig von den kranken Personen einen sehr hohen Anteil zu erkennen, hier $p_{\text{krank}}(\text{Befund auffällig}) = 91,5\%$. Oft, insbesondere bei seltenen Erkrankungen, muss man damit in Kauf nehmen, dass viele gesunde ebenfalls das Ergebnis Befund auffällig erhalten. Dieses muss dann in weiteren Untersuchungen geklärt werden.

2 Neue Aufgaben, Dezember 2007

1. - Fläche der Wand: $4,00\text{m} \cdot 2,50\text{m} = 10\text{m}^2$
   - Farbe der Büchse reicht für 10m^2 bis $12,5\text{m}^2$
   - Also reicht die Farbe in der Büchse.

2. (a) 6 Millionen weniger (b) 8 Millionen weniger als im Dezember 2003, also 275 Millionen

3. 8cm

4. 250

5. $\frac{3}{4}$

6. 50 Fahrzeuge, 16% Motorräder, 25 PKW, 4 Busse, 8 Motorräder

7. etwa $\frac{2}{3}$ vom Bruttolohn, also ca. 1600 EUR

8. (a) $(n-2) \cdot 180°$
   (b) $720°$
   (c) Fünfeck ($n = 5$)
   (d) Achteck ($n = 8$)

9.

3 Neue Aufgaben, November 2007

1. 500
2. ca. 20cm
3. 3cm
4. (a) 1:100 000 (b) 25m
5. Die Aussage ist falsch. Wird 0 Addiert ist das Ergebnis 5. Wird eine negative Zahl addiert, ist das Ergebnis kleiner 5.
6. (a) -2, (b) -28
7. (a) $\frac{42}{70} = 0,6 = 60\%$
   (b) (II)
8. 1% kleiner
9. $\frac{1}{8}$
10. alle Teilflächen mit Ausnahme
    - von zwei Quadrate
    - von vier Dreiecken
    - von einem Quadrat und zwei Dreiecken (
11. (a) $-\frac{1}{5}$, (b) z. B. $(0; 0)$, (c) z. B. $(1; -1)$
12. Z. B. ohne Mehrwertsteuer kostete die Digitalkamera $199\text{EUR} : 1,16$; mit 19% Mehrwertsteuer kostet sie $199\text{EUR} : 1,16 \cdot 1,19$
13. (a)
    (b) $\triangle PQR$ ist rechtwinklig, weil R auf dem Thaleskreis über $[PQ]$ liegt.
    (c) Die zweite und vierte Aussage sind richtig.

14. (a) $\frac{4}{21}$
    (b) $0,25$

15. (a) Rechteck, Quadrat, Raute
    (b) Kreis (unendlich viele Symmetrieachsen)

16. 2 gleichlange Seiten, zwei gleichgroße Winkel, achsensymmetrisch; es handelt sich um ein gleichschenkliges Dreieck.

17. B1: III, B2: V, B3: IV, B4: VI, B5: VII

18. C

19. (a) 50°, (b) 80°, (c) Innenwinkel im rechten Dreieck sind 90° und 48°, daraus kann der Winkel unten zu 42° berechnet werden, woraus die Parallelität wegen gleicher Z-Winkel folgt

20. (a) Z. B. 3 x 4 Bratwürstl kosten 12,60 EUR; 2 x 6 Bratwürstl kosten 9,90 EUR; damit liegt keine direkte Proportionalität vor
    (b) 25 x 4 Bratwürstl kosten 105,00 EUR; Jeder Schüler spart ($105,00$ EUR - $64,50$ EUR): 25 =$1,62$ EUR

21. Man legt die Schnur kreisförmig, um den maximalen Flächeninhalt zu erhalten: 1,3m^2

22. (a) $g = \sqrt{\frac{3V}{h}}$
    (b) 45°
    (c)
    (d) $\frac{1}{4}$
    (e) $\frac{1}{8}$

23. $x_1 = 2$; $x_2 = -2$

4 Neue Aufgaben, Juni 2007

1. Ein Pfennigstück wiegt ca. 2 g. Also Gewicht von 1800.000 Pfennigen: 3,6 t
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9. (a) Z. B. Das Dreieck $\triangle ABC$ ist gleichschenklig. Die Fläche des Dreiecks halbiert die Fläche des Quadrats. Im Dreieck $\triangle ABC$ gilt $\alpha = \beta$. h ist Symmetrieachse von $\triangle ABC$ und vom Quadrat. Das Quadrat hat 4 Symmetrieachsen.
   (b)
   - Das Dreieck ist gleichseitig, also sind alle Winkel $60°$ und es gilt $\tan 60° = \frac{2h'}{a}$. Wegen $\tan 60° = \sqrt{3}$ folgt: $h' = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.
   - Eine weitere Lösungsmöglichkeit: Die Kantenlänge des Quadrats ist a. Dann soll für das Dreieck laut Pythagoras gelten: $(\frac{1}{2}a)^2 + h'^2 = a^2$. Daraus folgt dann die Lösung für h'.

   (c) $A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow 43\%$

10. Quelle: Fich, O.: Mathelogik

    (a) i. Ausgehend vom Satz des Pythagoras muss die Länge der Diagonalen $\sqrt{125}$ cm betragen. Das Doppelte hiervon ist $\sqrt{500}$ cm. Die Länge der senkrechten Linie ist unverändert 10 cm und damit 100, wenn sie quadriert wird. Die Breite zum Quadrat muss daher 400 sein, wenn die Summe 500 betragen soll. Die Quadratwurzel aus 400 ist 20, d.h. die neue Breite ist also 15 cm größer als vorher.

    ii. Die Verdopplung entspricht in diesem Fall einer schrägen Linie mit der Länge $\sqrt{2000}$ cm, und da die Länge der senkrechten Linie unverändert ist, muss die Breite des Buchstabens $\sqrt{900}$ cm $= 43,6$ cm sein, was einer Vergrößerung um ca. 23,6 cm entspricht.

(b) i. Wenn wir die Länge der senkrechten Linie als 1 definieren, muss die Fläche des großen Dreiecks (das ganze A) sein: A (großes Dreieck) $= \frac{1}{2} \cdot \tan 15° \cdot 1 \cdot 2 = \tan 15°$. Der Querstrich soll nun entsprechend der Hälfte der Fläche des As platziert werden. Wenn wir die Länge der Linie, die von der Spitze des As rechtwinklig zum Querstrich verläuft, b nennen, ist die Fläche des Dreiecks über dem Querstrich: A (kleines Dreieck) $= \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot \tan 15° \cdot 2 = b^2 \tan 15°$. Dies soll gleich $\frac{1}{2} \cdot \tan 15°$ sein, weshalb $b = \sqrt{0,5} \approx 0,707$ entsprechend $70,7\%$ ist, oder $29,3\%$, von unten nach oben gemessen.

ii. Die Länge der Querlinie beträgt: $L = 2 \cdot \sqrt{0,5} \cdot \tan 15° \approx 0,379$.

11. (a) $x = y = z = 1$
    (b) keine Lösung

12. (a) $x = 0$, $y = 2$, $z = 1$
    (b) $x = y = z = 1$

13. (a) $l = m = n = 0$
    (b) $l = \frac{1}{2}$, $m = -\frac{1}{2}$, $n = 5$
    (c) $n = 5$, $m = -6$, $l = -7$

14. (a) $p(A \cup B) = 0,21$

	A	$\overline{A}$	
B	0,21	0,02	0,23
$\overline{B}$	0,25	0,52	0,77
	0,46	0,54	1

(b) $p(\overline{A} \cap B) = 0,25$

	A	$\overline{A}$	
B	0,20	0,25	0,55
$\overline{B}$	0,13	0,32	0,45
	0,33	0,57	1

$p(\overline{A} \cap B)$

15. (a) $p(A) = 0,35$

	A	$\overline{A}$	
B	0,22	0,33	0,55
$\overline{B}$	0,13	0,32	0,45
	0,35	0,65	1

(b) $p(A \cap \overline{B}) \cup p(\overline{A} \cap B) = 0,13 + 0,25 = 0,38$

16. (a) $\frac{1}{365} \approx 0,27\%$

    (b) $\frac{1}{12} \approx 8,3\%$

17. (a) 162 Schüler haben weder Mofa noch Fahrrad

	F	$\overline{F}$	
M	72	18	90
$\overline{M}$	648	162	810
	720	180	900

    (b) $\frac{250 \cdot 249 \cdot 248 \cdot 247 \cdot 246 \cdot 245 \cdot 244 \cdot 243 \cdot 242}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9,1 \cdot 10^{15}$

18. (a) $3 \cdot 0,22^2 \cdot 0,78 = 11\%$

    (b) $0,95^{30} = 21\%$

    (c) $1 - 0,95^{30} = 79\%$

    (d) $1 - 0,8^n \geq 0,5 \Rightarrow$ Ben muss mindestens 4 Riegel kaufen.

19. (a) $29 \cdot 0,034 = 98,6\%$

    (b) $(1 - 0,034)^{29} = 37\%$

20. $p = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^3 = 88\%$

21. (a) $1 - p(\text{fünf män. Ferkel}) = 1 - 0,45^5 = 98\%$

    (b) $1 - p(\text{fünf män. Ferkel}) - p(\text{fünf weibl. Ferkel}) = 1 - 0,45^5 - 0,55^5 - 0, = 93\%$

    (c) $p = 10 \cdot 0,55^3 \cdot 0,45^2 = 34\%$

    (d) $p(\text{mind. drei weibl. Ferkel}) =$
    $p(\text{drei weibl. Ferkel}) + p(\text{vier weibl. Ferkel}) + p(\text{fünf weibl. Ferkel}) =$
    $10 \cdot 0,55^3 \cdot 0,45^2 + 5 \cdot 0,55^4 \cdot 0,45^3 + 0,55^5 = 59\%$

22. (a) $p(W \cap R) = p(W) \cdot p_W(R) = 0,4 \cdot 0,15 = 6,0\%$

    (b) i. $p_R(W) = \frac{p(W \cap R)}{p(R)} = \frac{0,06}{0,1} = 60\%$

    ii. $p_R(M) = 1 - p_R(W) = 40\%$

    iii. $p_M(R) = \frac{p(M \cap R)}{p(M)} = \frac{0,04}{0,6} = 6,7\%$

23. T: Tonstörung, B: Bildstörung

(a) $p_T(\overline{B}) = \frac{p(T \cap \overline{B})}{p(T)} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}05}{0{,}9 \cdot 0{,}05 + 0{,}1 \cdot 0{,}7} = 0,39$

(b) $p(T) = 0,9 \cdot 0,05 + 0,1 \cdot 0,7 = 0,115,$
$p(\overline{B}) = 0,9$; $p(T) \cdot p(\overline{B}) = 0,115 \cdot 0,9 = 0,1035 \neq 0,39$
$\Rightarrow$ stochastisch abhängig

5 Neue Aufgaben, Mai 2007

1. (a) falsch (b) richtig (c) richtig (d) falsch
2. (a) $2,40\text{t} - 2,05\text{t} = 0,35\text{t} = 350\text{kg}$
   (b) $2,40$t entspricht 80%, also $2,40\text{t} : 0,8 = 3\text{t}$
3. (a) 250 m (b) 0,5m, 1m^2
4. (a) $x = -5$ (b) $x = 1\frac{1}{5}$ (c) $x = 3\frac{3}{16}$ (d) $x = 2,84$
5. (a) 27%, (b) $y = 4x + 158$
   (c) z. B. in den alten Bundesländern gibt es mehr Zuschauer als in den neuen Bundesländern
6. (a) $2 \cdot 3 = 6$, also 625
   (b) $(10x + 5)^2 = 100x^2 + 100x + 25 = 100 \cdot x(x + 1) + 25$

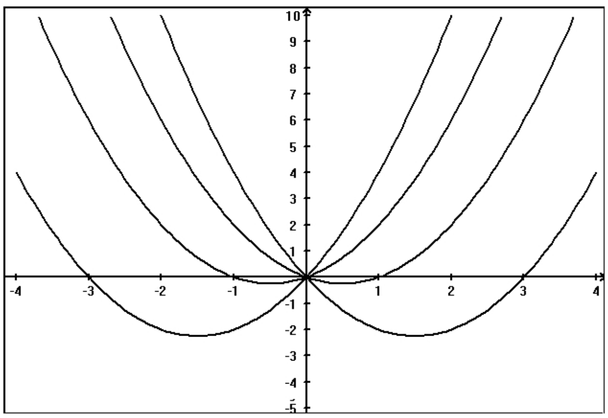
6 Neue Aufgaben, Februar 2007

1. (a) Z. B.: Annahme: Tür 2,5 m hoch ⇒ Höhe des Fußballes ca. 15 m, Größe eines Spielers ca. 130 m
   (b) ca. 7 km
   (c) Fuß müsste ca. 20 m lang sein, ist jedoch kürzer; passt also nicht

2. (a) z. B.: Fahrtzeit $6,5\,s$, Stockwerkshöhe: $5\,m$
   (b) f: Karola, g Hanna

3. (a) .
   (b) Verschiebung entlang der y-Achse um -3, -1, 1, 3
   (c) $S(0|c)$
   (d) Der Scheitel wandert auf der y-Achse.

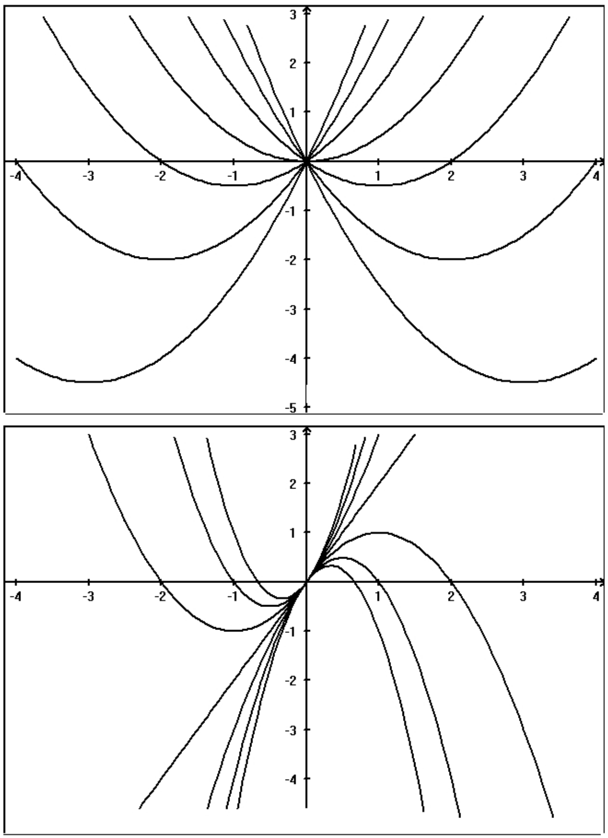
4. (a) .



.

   (b) Verschiebung entlang der x-Achse um $1,5$; $0,5$; $-0,5$; $-1,5$
   (c) $S(-\frac{b}{2}| - \frac{b^2}{4})$
   (d) $x = -\frac{b}{2} \Rightarrow b = -2x$; $y = -\frac{b^2}{4} = -\frac{(-2x)^2}{4} = -x^2$. Der Scheitel wandert auf der Parabel $s(x) = -x^2$

5. (a) .



(b) $S(-\frac{b}{2a}|-\frac{b^2}{4a})$

(c) Der Scheitel wandert auf der Parabel $s_a(x) = -ax^2$

(d) Der Scheitel wandert auf der Gerade $s_b(x) = \frac{b}{2}x$

6. (a) $A(-1|3)$

(b) $B_1(2|5,5)$, $B_2(-4|19)$

(c) $C_1(-2|2)$, $C_2(1,7|0,52)$

(d) Die Graphen schneiden sich nicht.

7. (a) $A(1\frac{43}{70}|3\frac{13}{14})$

(b) $B_1(3|59)$, $B_2(-7|159)$

(c) Die Graphen schneiden sich nicht.

(d) $D_1(\frac{5+\sqrt{33}}{4}|\frac{\sqrt{33}-1}{2})$, $D_2(\frac{5-\sqrt{33}}{4}|\frac{-\sqrt{33}-1}{2})$

8. (a) .

(b) Z. B. $P_1(0|\frac{1}{2}) : \overline{P_1A} = \frac{1}{2}$
$P_2(1|1) : \overline{P_2A} = 1$
$P_3(2|2\frac{1}{2}) : \overline{P_3A} = \sqrt{2^2 + \frac{3}{2}^2} = 2\frac{1}{2}$
$P_4(-2|2\frac{1}{2}) : \overline{P_4A} = \sqrt{(-2)^2 + \frac{3}{2}^2} = 2\frac{1}{2}$
$P_5(4|8\frac{1}{2}) : \overline{P_5A} = \sqrt{4^2 + (7\frac{1}{2})^2} = 8\frac{1}{2}$
Vermutung: Der Abstand ist die y-Koordinate von P_i. Die Punkte der Parabel haben von A und von der x-Achse gleichen Abstand

(c) $P(x|y)$; $\overline{PA}^2 = x^2 + (y-1)^2 = x^2 - 2y + 1 + y^2$;
$d = y$: Abstand des Punktes P von der x-Achse Bedingung für gleichen Abstand von A und der x-Achse: $y^2 = x^2 - 2y + 1 + y^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

9. (a) $p_a(x) = 5(x-1)^2 - 2$
   (b) $p_b(x) = \frac{1}{35}(-23x^2 + 59x + 105)$
   (c) $p_c(x) = 2(x-1)(x-3)$
   (d) unendlich viele Lösungen der Form $p_d(x) = a(x-b)^2; ab^2 = -2$
   (e) $p_e(x) = (x-2)^2 - 3$

10. (a) $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$, $A(1|0)$
   (b) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $D_2 = \mathbb{R}$, $B(2|1)$
   (c) $D_1 = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $D_2 = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$, $C_1(\frac{1}{4}(-3+\sqrt{104})|\frac{8}{-7+\sqrt{104}})$, $C_2(\frac{1}{4}(-3-\sqrt{104})|\frac{8}{-7-\sqrt{104}})$
   (d) $D_1 = \mathbb{R}$, $D_2 = \mathbb{R}$, $D_1(3|0)$, $D_2(-3|12)$

11. Z. B.: Scheitelpunkt der Parabel auf $(0|45)$, weiter liegen dann die Punkte $(124|0)$ und $(-124|0)$ auf der Parabel $\Rightarrow y = -0,003x^2 + 45$

7 Neue Aufgaben, Januar 2007

1. (b) A auf Parallele zu BE durch A verschieben, usw.

2. (a) 200 Rasengittersteine werden benötigt
   (b) Fläche Rasengittersteine: $40\text{cm} \cdot 60\text{cm} = 2400\text{cm}^2$
   durchlässige Fläche: $6 \cdot (8\text{cm} \cdot 8\text{cm} + 2 \cdot 6\text{cm} \cdot 6\text{cm}) = 816\text{cm}^2 \Rightarrow 34\%$
   (c) z. B.: 5 Steine pro Ebene und 10 Ebenen liegen auf der Palette $\Rightarrow$ 50 Steine
   (d) Volumen der Steine auf einer Palette:
   $50 \cdot (2400\text{cm}^2 - 816\text{cm}^2) \cdot 10\text{cm} = 792000\text{cm}^3 \Rightarrow$
   Masse der Steine auf einer Palette: $792000\text{cm}^3 \cdot 2{,}3\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1{,}8216\text{t}$
   4 Paletten $\hat{=}$ 200 Rasengittersteine $\hat{=}$ $4 \cdot 1{,}8216\text{t} = 7{,}2864\text{t}$, also kann ein LWK alle Steine liefern

3. (a) 20cm, 60cm
   (b) Volumen eines Blocks: 12dm^3; 9 Blöcke $\Rightarrow$ Volumen: $9 \cdot 12\text{dm}^3 = 108\text{dm}^3$
   (c) am meisten: zweiter Block von links in der mittleren Ebene berührt 7 andere Blöcke;
   am wenigsten: quer obenauf liegender Block berührt 4 Blöcke und der obere der beiden Blöcke in der mittleren Ebene berührt ebenfalls 4 Blöcke
   (d) 3 Blöcke ergänzen, Kantenlängen: 6dm, 6dm, 4dm

4. Vergleicht man die Größe der Hand mit der der Dose kann man als Kantenlängen der Dose 20cm, 8cm und 6 cm abschätzen $\Rightarrow$
   $V = 2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6\text{dm}^3 = 0{,}96\text{dm}^3 \approx 1\text{l}$

5. Von 1998 bis 2004 stiegen die Ausgaben um 9,1 Milliarden Euro, dies entspricht einem Anstieg von ca. 19%!

6. (a) ca. 10 km
   (b) 9 Serpentinen
   (c) einmal
   (d) ca. 30-35km/h

7. m_a, m_b und m_c sind die Mittelsenkrechten der Seiten a, b und c und U deren Schnittpunkt, der Umkreismittelpunkt. s ist die Senkrechte zu UB durch B.

   $M_a = s \cap m_a$, $M_c = s \cap m_c$, $M_b = CM_a \cap m_b$

   Beweis:
   B in $M_aM_c \Rightarrow$ Kreis um M_a und M_c durch B berühren sich in B.
   UCM_bA ist Raute mit rechten Winkeln bei C (wegen Konstruktion) und A. Rechter Winkel bei A, da $M_b \in m_c$ und $\overline{AU} = \overline{CU}$.

8. M_1 ist Mittelpunkt der Sehne $[AB]$ und M_2 ist Mittelpunkt der Sehne $[CD]$; P beschreibt einen Kreis durch M mit Radius $d := \overline{M_1M}$

   Beweis:
   $\overline{M_1M} = \overline{M_2M} = d$, da die beiden Sehnen $[AB]$ und $[CD]$ achsensymmetrisch zu AP sind $\Rightarrow M_2$ wandert auf dem Kreis um M mit Radius d $\Rightarrow$

   P entsteht aus M_2 durch zentrische Streckung an M_1 mit Faktor $\frac{1}{2}$.

9. (a) 36%
   (b) Z. B.: $0,12\,\text{EUR} \cdot 46 = 5,52\,\text{EUR} < 7,19\ \text{EUR}$
   Bei diesem Auftrag ist der Drogeriemarkt billiger.
   (c) Drogeriemarkt: Preis = Anzahl $\cdot$ $0,12\,\text{EUR}$
   Versand: Preis = Anzahl $\cdot$ $0,10\,\text{EUR} + 2,59\,\text{EUR}$
   (d) Ab 130 bestellten Bildern ist der Versand günstiger.
   (e)
   (f) Aufgrund der Preissprünge sind beispielsweise 95 Bilder teuerer als 100. Ein Kunde, der 95 Bilder benötigt, sollte eigentlich 5 Bilder zusätzlich bestellen, und kommt damit billiger weg.

10. (a) 18 Magnete, 10 Kugeln
    (b) a = Kugelradius + Magnetlänge + Kugeldurchmesser + Magnetlänge + Kugelradius
    (c) $V = \frac{1}{3}G_\triangle \cdot h_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_\triangle) \cdot h_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3}) \cdot 8\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 60\text{cm}^3$
    (d) 6 kleine Dreiecke, 3 Parallelogramme
    (e) 18 Magnete, 9 Kugeln
    (f) Spitze und drei weitere Etagen, Kantenlänge der Pyramide: 16 cm
    (g) n: Etage (Spitze: n=0);
    Anzahl Magnete: $M(n) = (n+1) \cdot 6 \quad (n \geqq 0)$;
    Anzahl Kugeln: $K(n) = (n+1) \cdot 3 \quad (n > 0)$

8 Neue Aufgaben, Dezember 2006

1. (a) $1\text{ha} : 8 \cdot 15 = 10000\text{m}^2 : 8 \cdot 15 = 18750\text{m}^2 = 187,5\text{a} = 1,875\text{ha}$

   (b) $150000000 : 1080 = 138888,9$, also etwa 140 Tausend Ärzte

2. (a) Vögel: $4,2\text{Mio} : 0,913 \approx 4,6\text{Mio}$;
   Hunde: $5,3\text{Mio} : 1,06 \approx 5,0\text{Mio}$

   (b)

Tier	Anzahl	Winkel
Hunde	5,3 Mio	$82,60°$
Katzen	7,5 Mio	$116,88°$
Vögel	4,2 Mio	$65,45°$
Kleintiere	6,1 Mio	$95,06°$
Alle Tiere	23,1 Mio	$360°$

   (c) Viele Leute haben mehrere Haustiere, damit haben mehr als 60 Mio Bundesbürger kein Haustier.

3. G: Betrag, den er zu Beginn hat,
   g: Betrag, den er im Moment hat,
   a Anteil, den er jeweils einsetzt,
   $a \cdot g$: Einsatz beim Spiel,
   Gewinnt er, hat er nach dem Spiel $(1+a)g$, erliert er hat er $(1+a)g$. D. g. bei Gewinn wird der Betrag mit $(1+a)$ multipliziert, beim Verlieren mit $(1-a)$. Wegen dem Kommutativgesetz ist die Reihenfolge der Faktoren unerheblich $\Rightarrow$

   Betrag nach n-mal Gewinn und n-mal Verlust:

   $G \cdot (1+a)^n \cdot (1-a)^n = G \cdot (1-a^2)^n$

   Da $(1-a^2)^n < 1$ ist, hat er insgesamt Verlust gemacht!

4. (a)

Name	Weite	W-Pkt	K1	K2	K3	K4	K5	H-Pkt	Pkt	Rang
Müller	113m	51,6	17,5	17,0	18,0	17,5	18,5	53	104,6	4
Meier	127m	68,4	18,0	17,5	18,0	18,0	18,0	54	122,4	2
Schluze	131m	73,2	19,0	17,5	19,5	20,0	18,5	57	130,2	1
Huber	118m	57,6	17,5	18,5	18,5	19,0	19,0	56	113,6	3

   (b) W: Weitenpunkte; w: gesprungene Weite; n: Normweite; s: Schanzenfaktor
   $\Rightarrow W(w) = 60 + s \cdot (w - n)$

5. (a) nach vier Stunden: 5cm, nach zehn Stunden: 12,5cm
   (b) $t \to t \cdot 1,25cm$
   (c) 16 Stunden

6. Z. B.: Annahme: Bezinverbrauch 8l pro 100km
   Kosten für Fahrt zur Tankstelle: $1,21\frac{\text{EUR}}{\text{l}} \cdot 40\text{km} \cdot 0,08\frac{\text{l}}{\text{km}} = 3,88\,\text{EUR}$
   Ersparnis bei ganzer Tankfüllung (50l):
   $50 \cdot (1,30\,\text{EUR} - 1,21\,\text{EUR}) = 5,5\,\text{EUR}$
   Die Fahrt lohnt sich, wenn die dazu benötigte Zeit und Umweltgesichtspunkte keine Rolle spielen.

7. (a) $6,53$
   (b) $0,094\text{l}$; 16
   (c) $2r^2\pi + 2r\pi h = A \Rightarrow r = -h \pm \sqrt{h^2 + \frac{2A}{\pi}} \Rightarrow r \approx 7,62cm$
   $\Rightarrow V = r^2\pi h = 463cm^3$

8. Z. B.:
   Die Geraden G_f und G_g sind parallel.
   Nullstellen der Parabel G_p sind die Nullstellen der Geraden G_f und G_g.
   y-Wert zu einem x-Wert von h erhält mann, indem man die y-Werte von f und g multipliziert.

9. (a) Z. B.: $g(x) - p(x) = (x-3)^2 - 3 \Rightarrow$ Differenz am kleinsten für $x = 3$
   (b) Verschiebung um $a \Rightarrow g(x) - p(x) = (x-3)^2 - 3 + a \Rightarrow$ Differenz am kleinsten für $x = 3$; Differenz der Funktionswerte verändert sich: g(3)-p(3)=-3+a
   (c) Differenz am kleinsten für $x = 3$; Differenz der Funktionswerte verändert sich: g(3)-p(3)=-3+4b

10. (a) .
    (b) Z. B.: zwei Punkten $g(x) = 0,5x + 3$, kein Punkt $g(x) = 0,5x - 5$, genau ein Punkt $g(x) = 0,5x - 3$
    (c) Z. B.: $y = 0,5x^2$ oder $y = x^2 + 7$
    (d) wahr, falsch, wahr

11. Annahmen: Blattoberfläche proportional zum Volumen der Krone, Baumkrone kugelförmig

    $\Rightarrow V_{alt} = \frac{4}{3}(6\text{m})^3\pi \approx 905\text{m}^3$; $V_{neu} = \frac{4}{3}(0,75\text{m})^3\pi \approx 1,8\text{m}^3$

    Also müssten ca. 500 neue Bäume geplanzt werden

12. (a) $p(l) = 0,1 \cdot \frac{2}{3} = 7\%$, $p(r) = 0,9 \cdot 1 + 0,1 \cdot \frac{1}{3} = 93\%$

    (b) $p_r(l_v) = \frac{p(r \cap l_v)}{p(r)} = 4\%$

13. $V_{Zylinder} = 1,5^2 \cdot \pi \cdot 7\text{mm}^3 \approx 50\text{mm}^3$

    $O_{Seifenblase} = 4 \cdot \pi \cdot 40^2\text{mm}^2 \approx 20000\text{mm}^2$

    $d_{Seifenblasenhaut} = V_{Zylinder} : O_{Seifenblase} = 0,0025\text{mm}$

9 Neue Aufgaben, Oktober 2006 2

1. Die Nullen ergeben sich durch Faktorenpaare, die jeweils 10 ergeben.

   In 10! kommt der Faktor 5 zweimal vor, der Faktor 2 mehr als zweimal $\Rightarrow$ zwei Nullen am Ende.

   In 20! kommt der Faktor 5 viermal vor, der Faktor 2 mehr als zweimal $\Rightarrow$ vier Nullen am Ende.

2. (a) 156 EUR (b) 2 (c) 38 EUR (d)624 EUR

   (e) 855 EUR (f) 525 km

3. (a) $13 \cdot 11 = 143$ (b) 111 (c) $\Delta = \frac{645 \cdot 100}{516} = 125$

   (d) Kantenlänge des Würfels: $7m \Rightarrow$ Oberfläche $= 6 \cdot 7^2 m^2 = 294 m^2$

   (e)$\frac{1}{2} + \frac{3}{19} = \frac{25}{38} = \frac{50}{\Delta} \Rightarrow \Delta = 76$

4. Anzahl der Diagonalen in Abhängigkeit der Eckenzahl:

Ecken	3	4	5	6
Diagonalen	0	2	5	9

   Anzahl der zusätzlichen Diagonalen bei der n-ten Ecke: $n - 2$ für $n \geq 4$

   Anzahl Diagonalten bei 16-Eck: $14 + 13 + 12 + \cdots 3 + 2 = 104$

5. (a) 12 (b) 2 (c) 112 (d) 150 (e) $\frac{1}{5}$

6. (a) 2 (b) $\Delta = 24$ (c) 45°

   (d) 30° (e) 21

7. (a)6 (b) 15 (c) 0 (d) 520 (e) 45°

8. (a) 24 (b) $(7 + 11) \cdot (13 + 21) = 612$ (c) 20 (d) $\frac{1}{2}(6 + 8) \cdot 18 = 126$

9. (a) $f(-93) = -(-93) - 1 = 92$

   (b) 1. Möglichkeit: beliebigen Punkt Q wählen und Geradengleichung durch P und Q aufstellen.

   2. Möglichkeit: Beliebigen Steigung $m \neq -1$ wählen und Geradengleichung durch P mit Steigung m aufstellen.

   (c) $f(x) = g_m(x) \Rightarrow$ Schnittpunkt $S(\frac{-3}{m+1}|\frac{2-m}{m+1})$ für $m \neq -1$.
   II. Quadrant für $\frac{-3}{m+1} < 0$ und $\frac{2-m}{m+1} > 0 \Rightarrow -1 < m < 2$.

10. (a) Ca. 83% der Würfelfläche sind rot.
    (b) X: Anzahl der rot angestrichene Flächen(n)
    $P(0) = \frac{2}{27}$, $P(1) = \frac{9}{27}$, $P(2) = \frac{12}{27}$, $P(3) = \frac{4}{27}$, $P(4) = \frac{0}{27}$

11. (a) 196 (b) 23 (c) 43
    (d) 62 (e) 721

12. (a) $\frac{1}{2}(15 + 3) \cdot 8 = 72$
    (b) $P(2|12)$, $A = 2 \cdot 12 = 24$
    (c) $F(x) = x \cdot (-1,5x + 15)$
    (d) Maximum am Scheitel der nach unten geöffneten Parabel $F(x)$, der in der Mitte der Nullstellen $N_1(0|0)$ und $N_2(10|0)$ liegt $\Rightarrow x = 5$, $F(5) = 37,5$

13. (a) $103\frac{km}{h}$
    (b) $\tan\alpha = 0,63$ ergibt $\alpha \approx 32°$
    (c) 32%

14. (a) 111 (b) 6 (c) 51 (d) 57 (e) 361

15. (a) 43 (b) 108 (c) 81 (d) 12

16. (a) 5 (b) 11 (c) 169 (d) 147 (e) 2

17. (a) 40 (b) 697 (c) 621 (d) 22 (e) 1

10 Neue Aufgaben, Oktober 2006 1

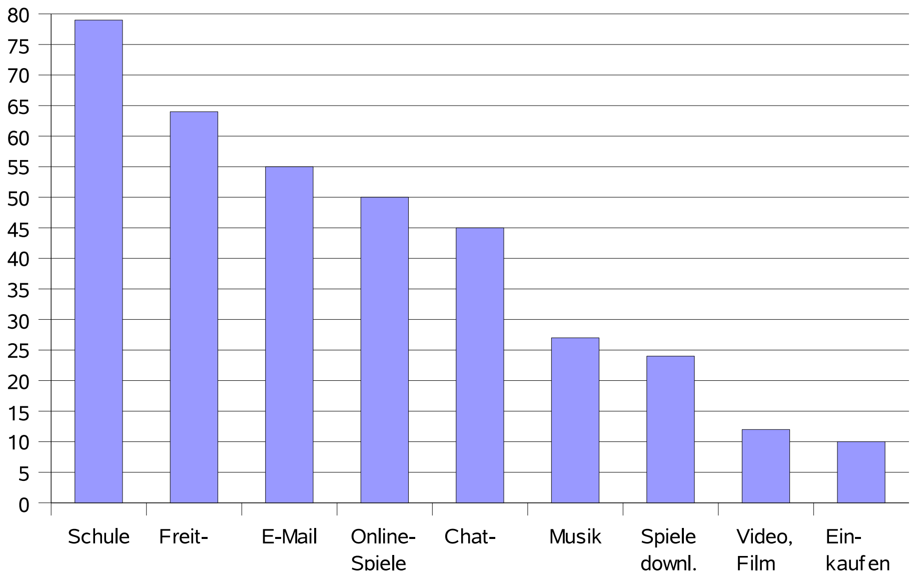
1. (a) $L = \{5\frac{1}{6}\}$
   (b) $L_1 = \{5\frac{1}{6}\}$, $L_2 = \{\}$, $L_3 = \{\}$, $L_4 = \{5\frac{1}{6}\}$.
   (c) z. B. $\frac{2}{5}(x-7) - \frac{3}{5}(2-3x) = x + 9\frac{1}{5}$
   $\frac{2}{5}(x-7) - \frac{3}{5}(2-3x) = x - 4$
   $\frac{2}{5}(x-7) - \frac{3}{5}(2-3x) = 2\frac{1}{5}x$
   $\frac{2}{5}(x-7) - \frac{3}{5}(2-3x) = 2\frac{1}{5}x - 4$
   (d) Nein
   (e) Genau eine Lösung für $a \neq \frac{11}{5} \Longrightarrow L = \left\{\frac{31}{11-5a}\right\}$
   Für $a = \frac{11}{5}$ folgt $L = \{\}$
   (f) b hat keinen Einfluss auf die Anzahl der Lösungen.

2. (a) i. $T(x) = 13{,}60 + (x-12) \cdot 0{,}11$
   ii. Für die sinnvolle Grundmenge $G = \mathbb{N}_0$ ist $D = \{12; 13; 14; \cdots\}$
   Z. B. $T(15) = 13{,}93$, $T(62) = 19{,}10$, ...
   (b) i. $T(x; y) = 13{,}60 + (x-8) \cdot 0{,}05 + y \cdot 0{,}15$
   Z. B. $T(0; 50) = 21{,}10$, $T(50; 0) = 15{,}70$, $T(25{,}25) = 18{,}20$
   ii. Z. B.: Es ist besser beim Anbieter FONO zu telefonieren, wenn für mindestens 12 Nahgespräche die Anzahl der Ferngespräche mehr als $\frac{6x-92}{15}$ (x: Anzahl der Ortsgespräche) ist.

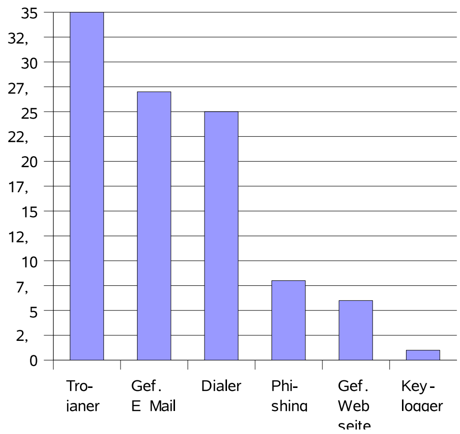
3. Die Feuerstelle ist Mittelpunkt des Feuerbachschen Neunpunktekreises und liegt zusammen mit M und H auf der Eulerschen Geraden.

4. (a) 18 EUR (b) 612 EUR

5. in %

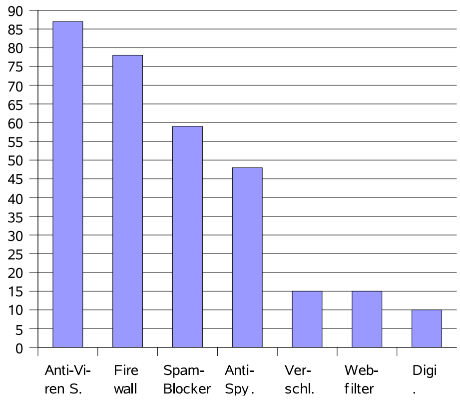


6. (a) in %



Opfer von ...	
Trojanern	35%
gefälschte E-Mails	27%
Dialer	25%
Phishing	8%
gefälschte Webseite	6%
Keylogger	1%

(b) in %



Schutz durch ...	
Anti-Viren-Software	87%
Firewall	78%
Spam-Blocker	59%
Anti-Spyware-Software	48%
Verschlüsselungssoftware	15%
digitale Signaturen	10%

7. 10 Teile $= 1000g$; 1 Teil $= 100g$.

   Es werden $300g$ Haferflocken, $200g$ Cornflakes, $200g$ Rosinen, $100g$ Nüsse, $100g$ Bananenchips und $100g$ getrocknete Aprikosen benötigt.

8. $280m^2 \hat{=} 610,05$ EUR $\Rightarrow 1m^2 \hat{=} \frac{610,05}{280}$ EUR

Wohnungsfläche in m^2	45	68	72	95
Umgelegte Kosten in EUR	98,04	148,16	156,87	206,98

9. Grundkosten gesamt: $1675,88$ EUR : $2 = 837,94$ EUR $\hat{=} 280m^2$

   Die Grundkosten betragen für die $95m^2$ große Wohnung also $284,30$ EUR.

   Verbrauchskosten gesamt: $1675,88$ EUR : $2 = 837,94$ EUR $\hat{=}65$ Einheiten

   Die Verbrauchskosten betragen für die $95m^2$ große Wohnung also $283,61$ EUR.

   Die gesamten Heizkosten belaufen sich auf $284,30EUR + 283,61EUR = 567,91$ EUR.

   Die Hausverwaltung hat sich also geringfügig zugunsten des Mieters verrechnet.

10. (a) Privatbereich: $\frac{3}{5} \cdot 145m^2 = 87m^2$; Anwaltsbüro: $58m^2$

    (b) Mietanteil für den Privatbereich: $4,83\frac{EUR}{m^2} \cdot 87m^2 = 420,21EUR$ Mietanteil für den Anwaltsbereich: $498,20EUR$

11. (a) Wohnhaus mit Garage: 200 m^2; versiegelte Freifläche: 266,67 m^2; unversiegelte Fläche: 333,33 m^2

    (b) versiegelte Freifläche: 200 m^2; unversiegelte Freifläche: 400 m^2

12. Regelmäßig mit dem Auto: 14 Kinder
    Ab und zu mit dem Auto: 14 Kinder
    Mit dem Fahrrad: 4 Kinder

13. Es werden 250 g Salzlösung hergestellt. Dafür benötigt man 247,5 g Wasser. Das entspricht einem Volumen von 247,5 ml.

14. Es sei p% der prozentuale Volumenanteil des Alkohols im Kirschwein.

    Volumen des Alkohols: $1l \cdot \frac{p}{100}$

    Masse des Alkohols: $0,785\frac{kg}{l} \cdot 1l \cdot \frac{p}{100} = 0,785kg \cdot \frac{p}{100}$

    Volumen des Wassers: $1l \cdot \frac{100-p}{100}$

    Masse des Wassers: $1\frac{kg}{l} \cdot 1l \cdot \frac{100-p}{100} = 1kg \cdot \frac{100-p}{100}$

    Masse des Kirschweins: $0,785kg \cdot \frac{p}{100} + 1kg\frac{100-p}{100} = 0,973125kg$

    Durch Auflösen nach p ergibt sich ein Prozentsatz von $12,5\%$.

15. 125 g Crème Fraiche enthalten 37,5 g Fett. 45,73 g Butter enthalten die gleiche Menge Fett wie ein Becher mit 125 g Crème Fraiche.

16. (a) 597,35 EUR

    (b) 550,46 EUR

    (c) Elfriede hat nicht recht. Ein Rabatt von 8 % auf den in a) berechneten Grundwert ergibt 549,56 EUR. Der Rabatt ist also kleiner als 8 %.

17. Fassungsvermögen: $1hl = 100l = 100dm^3$

    Kantenlänge des Innenraumes: $\sqrt[3]{100dm^3} = 4,64dm = 46,4cm$

    Länge und Breite des Kübels: $46,4cm + 2 \cdot 5cm = 56,4cm$

    Höhe des Kübels: $46,4cm + 5cm = 51,4cm$

18. (a) 112°, (b) 131°, (c) 20, (d) 4

19. (a) 55° (b) 0 (c) 119° (d)10

20. (a) 75° (b) 8 (c) 816° (d) 1

21. (a) 17° (b) 2 (c) 20 (d) 385° (e) 351°

22. (a) 120° (b) 10 (c) 2 (d) 1

23. (a) 35° (b) 150 (c) 41° (d) 108

24. (a) 1 (b) 5 (c) 813° (d) 12

25. (a) 101° (b) 25 (c) 3

11 Neue Aufgaben, September 2006

11.1 Jahrgangsstufe 7

1. (a) $88\,\text{cm}\cdot 1{,}125 = 99\,\text{cm}$

   (b) $x\%\cdot 480 = 480 - 408 = 72, \qquad x\% = \frac{72}{480}\cdot 100\% = 15\%$

   (c) $x\cdot 1{,}1 = 2706\,€, \qquad x = \frac{2706\,€}{1{,}1} = 2460\,€$

2. $50\cdot(1 + x\%) = 200\cdot(1 - x\%), \quad x\% = 60\%$

   Beide besitzen nach dem Spiel $50\,€\cdot 1{,}6 = 200\,€\cdot 0{,}4 = 80\,€$

3. (a) $\text{k}(\text{B}; r = \overline{\text{BA}})\cap[\text{BC}] = \{\text{E}\}$

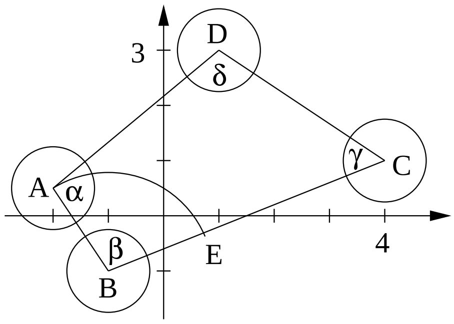
   $\overline{\text{BC}} - \overline{\text{AB}} = \overline{\text{EC}} = 3{,}6\,\text{cm}$

   (b) $\alpha = 96°$, $\beta = 102°$

   $\gamma = 55{,}5°$, $\delta = 106{,}5°$

   $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

   (c) $(360° - \beta) + (360° - \gamma) + (360° - \delta) + (360° - \alpha) = 3\cdot 360° = 1080°$



4. (a) $120°, \quad 144°, \quad 150°, \quad 247{,}5°, \quad 187{,}2°$

   (b) $15°, \quad 22{,}5°, \quad 37{,}5°, \quad 33{,}75°, \quad \left(38\tfrac{4}{7}\right)^\circ$

5. (a) $30°42''; \quad 55°39'36''; \quad 240°5'6''; \quad 22'12''; \quad 3{,}6''; \quad 9''; \quad 4°3'0{,}72''; \quad 5'$

   (b) $35{,}3°; \quad 200{,}4°; \quad 0{,}007\overline{3}^\circ; \quad 0{,}0002\overline{7}^\circ; \quad 18{,}305°; \quad 0{,}02°; \quad 12{,}015°; \quad 1{,}0169\overline{4}^\circ$

6. $0{,}0072'' = \frac{0{,}0072°}{3600} = \frac{1°}{500\,000} = 0{,}000\,002°$

7. (a) $303°, \quad 94{,}35° = 94°21', \quad 202°59'13'' = 202{,}9869\overline{4}^\circ$

   $346°21'45{,}7'' = 346{,}36269\overline{4}^\circ$

(b) $146°44'32''$, $81°28'55''$, $194°45'23''$

8. (a)

	1 h	1 min	1 s
großer Zeiger	$360°$	$6°$	$0{,}1° = 6'$
kleier Zeiger	$30°$	$0{,}5° = 30'$	$0{,}5' = 30''$

(b)
13:00 : $30°$, 04:00 : $120°$
16:15 : $120° + 15 \cdot 0{,}5° - 90° = 37{,}5°$
08:45 : $270° - (8 \cdot 30° + 45 \cdot 0{,}5°) = 7{,}5°$
01:42 : $\underbrace{42 \cdot 6°}_{252°} - \underbrace{(30° + 42 \cdot 0{,}5°)}_{51°} = 201°, \quad 360° - 201° = 159°$
00:00:09 : $9 \cdot 6' - 9 \cdot 0{,}5' = 49{,}5' = 0{,}825°$
07:42:51 : $\underbrace{42 \cdot 6° + 51 \cdot 0{,}1°}_{257{,}1°} - \underbrace{(7 \cdot 30° + 42 \cdot 0{,}5° + 51 \cdot 0{,}5')}_{231{,}425°} = \underbrace{25°40'30''}_{25{,}675°}$
03:47:05 : $\underbrace{47 \cdot 6° + 5 \cdot 0{,}1°}_{282°30'} - \underbrace{(3 \cdot 30° + 47 \cdot 0{,}5° + 5 \cdot 0{,}5')}_{113°32'30''} = \underbrace{168°57'30''}_{168{,}958\overline{3}°}$

9. t bezeichnet im Folgenden die Zahl der Minuten nach der vollen Stunde.

(a) $180° + t \cdot 0{,}5° = t \cdot 6°, \quad t = \dfrac{180°}{5{,}5°} = 32{,}\overline{72} \quad \Longrightarrow \quad 6\,\text{h}\,32\,\text{min}\,43{,}\overline{63}\,\text{s}$

(b) $270° + t \cdot 0{,}5° - t \cdot 6° = 180°, \quad t = \dfrac{90°}{5{,}5°} = 16{,}\overline{36} \quad \Longrightarrow \quad 21\,\text{h}\,16\,\text{min}\,21{,}\overline{81}\,\text{s}$

(c) $60° + t \cdot 0{,}5° - t \cdot 6° = 50°, \quad t = \dfrac{10°}{5{,}5°} = 1{,}\overline{81} \quad \Longrightarrow \quad 2\,\text{h}\,1\,\text{min}\,49{,}\overline{09}\,\text{s}$

$t \cdot 6° - 60° - t \cdot 0{,}5° = 50°, \quad t = \dfrac{110°}{5{,}5°} = 20 \quad \Longrightarrow \quad 2\,\text{h}\,20\,\text{min}$

(d) $240° + t \cdot 0{,}5° - t \cdot 6° = 20°, \quad t = \dfrac{220°}{5{,}5°} = 40 \quad \Longrightarrow \quad 8\,\text{h}\,40\,\text{min}$

$t \cdot 6° - 240° - t \cdot 0{,}5° = 20°, \quad t = \dfrac{260°}{5{,}5°} = 47{,}\overline{27} \quad \Longrightarrow \quad 8\,\text{h}\,47\,\text{min}\,16{,}\overline{36}\,\text{s}$

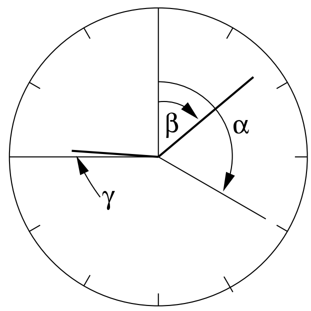
10. (a) $17°23'15'' = \left(17 + \dfrac{23}{60} + \dfrac{15}{3600}\right)^{\circ} = \left(17\dfrac{31}{80}\right)^{\circ} = 17{,}3875°$

(b) $50{,}101° = 50° + 0{,}101 \cdot 60' = 50° + 6{,}06' = 50°6' + 0{,}06 \cdot 60'' = 50°6'3{,}6''$

11. (a)

	1 min	1 s
Sekundenzeiger	$360°$	$6°$
großer Zeiger	$6°$	$0{,}1° = 6'$
kleiner Zeiger	$0{,}5° = 30'$	$\left(\frac{1}{120}\right)^{\circ} = 0{,}5' = 30''$

(b) $\underbrace{x \cdot 6°}_{\alpha} - \underbrace{(8 \cdot 6° + x \cdot 0{,}1°)}_{\beta} = 70°$



$x \cdot 5{,}9° = 118°$

$x = \dfrac{118°}{5{,}9°} = 20 \quad \Longrightarrow t_2 = 21:08:20$

(c) $\alpha = 20 \cdot 6° = 120°$

$\beta = 8 \cdot 6° + 20 \cdot 0{,}1° = 50°$

$\gamma = 8 \cdot 0{,}5° + 20 \cdot 0{,}5' = 4°\,10'$

12. $\dfrac{N_5 \cdot 110 + 3{,}5 \cdot 100 + 3{,}8 \cdot 90}{110 + 100 + 90} = 3{,}59, \quad 110 \cdot N_5 + 692 = 3{,}59 \cdot 300$

$N_5 = \dfrac{1077 - 692}{110} = 3{,}5$

13. Ohne MWSt.: $x \cdot (1 + 16\%) = x \cdot 1{,}16 = 58\,€ \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{58\,€}{1{,}16} = 50\,€$

Mit 18% MWSt.: $50\,€ \cdot (1 + 18\%) = 50\,€ \cdot 1{,}18 = 59\,€$

$58 \cdot (1 + p\%) = 59 \quad \Longrightarrow \quad p\% = \dfrac{59}{58} - 1 = \dfrac{1}{58} = \dfrac{100\%}{58} \approx 1{,}7\%$

14. Die 20% bei der Preissenkung beziehen sich auf den höheren Preis, d.h. die Senkung ist größer als die Erhöhung $\Longrightarrow$ der neue Preis ist kleiner als der ursprüngliche Preis.

$n = (1 + 20\%)(1 - 20\%)u = 1{,}2 \cdot 0{,}8u = 0{,}96u = (1 - 4\%) \cdot u$

Der neue Preis ist um 4% kleiner als der ursprüngliche Preis.

15. (a) $\dfrac{50 \cdot G_{\text{A}} + 30 \cdot 3200}{50 + 30} = 2500, \qquad 50 \cdot G_{\text{A}} + 96\,000 = 80 \cdot 2500 = 200\,000$

$50 \cdot G_{\text{A}} = 104\,000, \qquad G_{\text{A}} = \dfrac{104\,000}{50} = 2080$

(b) $3150 \leqq G_{\text{B}} < 3250, \quad 2450 \leqq G < 2550 \quad \Longrightarrow$

$G_{\text{Amin}} = \dfrac{80 \cdot 2450 - 30 \cdot 3250}{50} = \dfrac{196\,000 - 97\,500}{50} = \dfrac{98\,500}{50} = 1970$

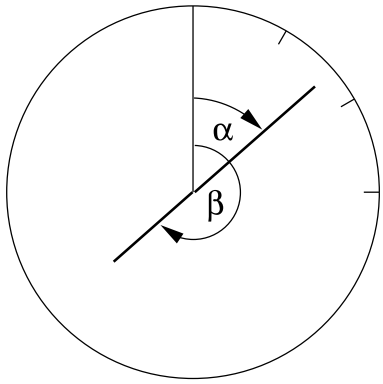
$G_{\text{Amax}} = \dfrac{80 \cdot 2550 - 30 \cdot 3150}{50} = \dfrac{204\,000 - 94\,500}{50} = \dfrac{109\,500}{50} = 2190$

Mögliche Werte für G_{A}: 2000, 2100, 2200

16. (a)

	1 h	1 min	1 s
großer Zeiger	$360°$	$6°$	$0{,}1° = 6'$
kleier Zeiger	$30°$	$0{,}5° = 30'$	$0{,}5' = 30''$

(b) $\underbrace{x \cdot 6°}_{\beta} - \underbrace{(30° + x \cdot 0{,}5°)}_{\alpha} = 180°$



$x \cdot 5{,}5° = 210°$

$x = \frac{210°}{5{,}5°} = \frac{420}{11} = 38\frac{2}{11} = 38{,}\overline{18} \quad \Longrightarrow$

$\frac{2}{11}\,\text{min} = \frac{120}{11}\,\text{s} = 10\frac{10}{11}\,\text{s} = 10{,}\overline{90}\,\text{s}$

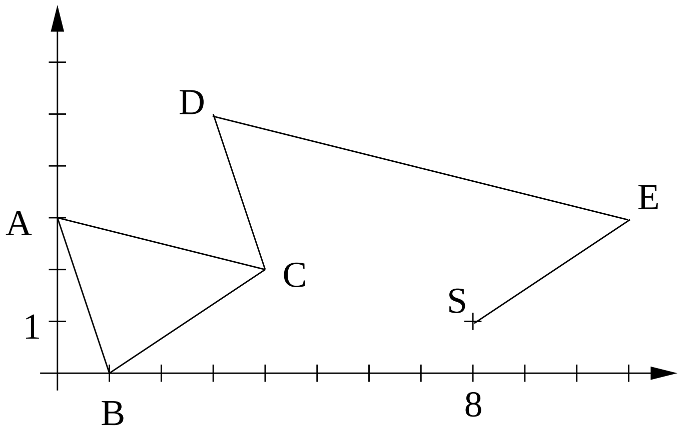
$t_0 = 13 : 38 : 10{,}\overline{90}$

$\alpha = 30° + 38\tfrac{2}{11} \cdot 0{,}5° = \left(49\tfrac{1}{11}\right)^\circ = 49{,}\overline{09}^\circ$

17. S(8|1)

$\overline{\text{AS}} = 8{,}2\,\text{cm}$

$8{,}2\,\text{cm} \cdot 1500 = 123\,\text{m}$



18. (a) $\alpha = \beta = \gamma = 90°$

(b) $\alpha = 60°$, $\gamma = 40°$, $\beta = \delta = 80°$

(c) $\beta = 20°$, $\varepsilon = \alpha = \varphi = \gamma = 90° - 20° = 70°$

$\sigma = \delta = 90° - \varphi = 20°$

19. (a) $\alpha + 2\alpha + 4\alpha + 8\alpha = 15\alpha = 180° \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 12°$

$\beta = 24°$, $\gamma = 48°$ und $\delta = 96°$

(b) $\alpha + 3\alpha + \frac{9}{2}\alpha + 6\alpha = \frac{29}{2}\alpha = 180° \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \left(\frac{360}{29}\right)^\circ = \left(12\frac{12}{29}\right)^\circ$

$\beta = \left(37\frac{7}{29}\right)^\circ$, $\gamma = \left(55\frac{25}{29}\right)^\circ$ und $\delta = \left(74\frac{14}{29}\right)^\circ$

20. $\triangle$ABC : spitzwinklig und gleichschenklig
$\triangle$ABD : rechtwinklig
$\triangle$ADC : stumpfwinklig
$\triangle$BDC : stumpfwinklig

21. (a) $\overline{HU} = \overline{ER}$, $\overline{UB} = \overline{RT}$

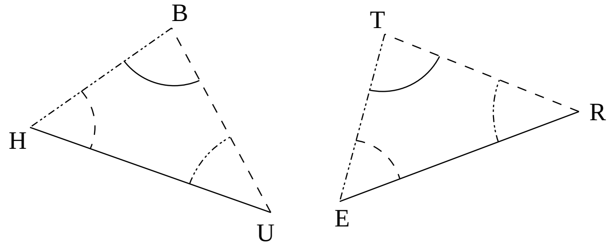
$\overline{ET} = \overline{HB}$

$\sphericalangle BUH = \sphericalangle TRE$

$\sphericalangle RET = \sphericalangle UHB$

$\sphericalangle ETR = \sphericalangle HBU$

$\sphericalangle HUB = \sphericalangle ERT$



(b) $\triangle BUH \cong \triangle RET$ (falsch), $\triangle UHB \cong \triangle RET$ (richtig)

$\triangle TER \cong \triangle BUH$ (falsch)

22. $\overline{KA} = \overline{WA} = \overline{SE} = 5\,\text{cm}$

$\overline{SK} = \overline{SW} = \overline{SR} = 3\,\text{cm}$

$\overline{SA} = \overline{ER} = 4\,\text{cm}$

23. $\triangle MPD \cong \triangle REI$

24. $\gamma = \sigma$, $\delta = \pi$, $\mu = \varphi$, $\triangle CDU \cong \triangle SPD$

25. $\sphericalangle BSA = \sphericalangle CSD$ (Scheitelwinkel) $\Longrightarrow$ $\overline{BA} = \overline{CD}$, $\overline{BS} = \overline{SC}$, $\overline{AS} = \overline{SD}$

$\triangle ASB \cong \triangle DSC$

26.

(a)	$a = d$	$b = f$	$c = e$	$\alpha = \delta$	$\beta = \varphi$	$\gamma = \varepsilon$	$A \mathrel{\widehat{=}} D$	$B \mathrel{\widehat{=}} F$	$C \mathrel{\widehat{=}} E$
(b)	$a = d$	$b = f$	$c = e$	$\alpha = \delta$	$\beta = \varphi$	$\gamma = \varepsilon$	$A \mathrel{\widehat{=}} D$	$B \mathrel{\widehat{=}} F$	$C \mathrel{\widehat{=}} E$
(c)	$a = f$	$b = d$	$c = e$	$\alpha = \varphi$	$\beta = \delta$	$\gamma = \varepsilon$	$A \mathrel{\widehat{=}} F$	$B \mathrel{\widehat{=}} D$	$C \mathrel{\widehat{=}} E$
(d)	$a = e$	$b = f$	$c = d$	$\alpha = \varepsilon$	$\beta = \varphi$	$\gamma = \delta$	$A \mathrel{\widehat{=}} E$	$B \mathrel{\widehat{=}} F$	$C \mathrel{\widehat{=}} D$
(e)	$a = d$	$b = f$	$c = e$	$\alpha = \delta$	$\beta = \varphi$	$\gamma = \varepsilon$	$A \mathrel{\widehat{=}} D$	$B \mathrel{\widehat{=}} F$	$C \mathrel{\widehat{=}} E$

27.
$$\left.\begin{array}{c} a = b \\ \overline{CD} = \overline{CD} \\ \overline{AD} = \overline{DB} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \Longrightarrow \quad \triangle ADC \cong \triangle BDC \quad (\text{sss}) \\ \Longrightarrow \quad \alpha = \beta, \quad \underbrace{\sphericalangle CDA}_{\varphi} = \underbrace{\sphericalangle BDC}_{\delta} \end{array}$$

$$\delta + \varphi = 2\varphi = 180^\circ \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \delta = 90^\circ$$

In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich und die Seitenhalbierende der Basis ist zugleich Höhe.

28. $\triangle$RZP ist gleichschenklig $\Longrightarrow$ $\beta = \gamma$ $\Longrightarrow$ $\alpha = \beta = \gamma = \delta$ (Scheitelwinkel).

$$\left.\begin{array}{c}\left.\begin{array}{r}\alpha=\delta\\ \overline{\mathrm{IR}}=\overline{\mathrm{ZE}}\\ \overline{\mathrm{FR}}=\overline{\mathrm{TZ}}\end{array}\right\}\Longrightarrow\ \triangle\mathrm{FRI}\cong\triangle\mathrm{TZE}\quad(\mathrm{sws})\\ \left.\begin{array}{r}\alpha=\beta\\ \overline{\mathrm{FR}}=\overline{\mathrm{RZ}}\\ \overline{\mathrm{IR}}=\overline{\mathrm{RP}}\end{array}\right\}\Longrightarrow\ \triangle\mathrm{TZE}\cong\triangle\mathrm{ZRP}\quad(\mathrm{sws})\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\triangle\mathrm{FRI}\cong\triangle\mathrm{TZE}\cong\triangle\mathrm{ZRP}$$

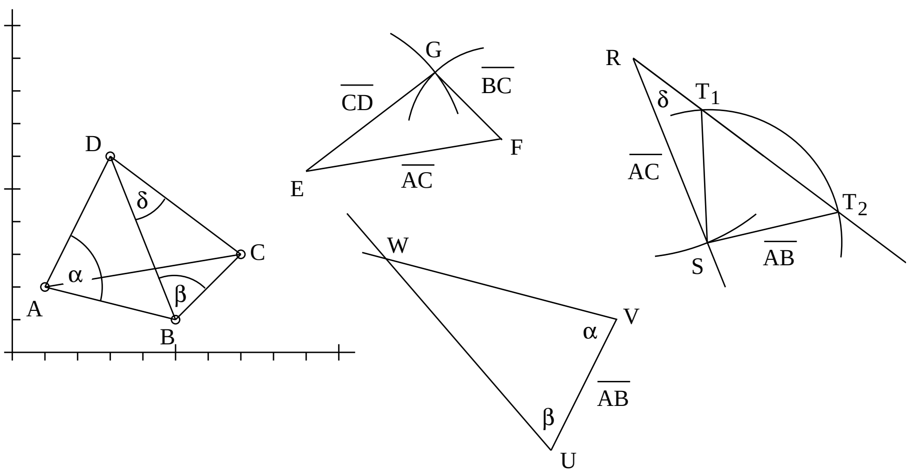
29.

(a)	$\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$A'B'C' (sws)	(b)	muss nicht kongruent sein (ssw)
(c)	nicht kongruent	(d)	$\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$B'A'C' (sws)
(e)	$\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$C'A'B' (wsw)	(f)	$\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$A'B'C' (wsw)
(g)	$\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$C'A'B' (sws)	(h)	$\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$C'B'A' (ssW)
(i)	$\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$C'B'A' (wsw)	(k)	nicht kongruent
(l)	$\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$B'C'A' (sws)	(m)	$\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$B'A'C' (sws)
(n)	nicht kongruent	(o)	$\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$C'B'A' (wsw)

30.
$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle\mathrm{HDG}=\sphericalangle\mathrm{CDB}\quad(\text{Scheitelw.})\\ \overline{\mathrm{DG}}=\overline{\mathrm{BD}}=4\\ \sphericalangle\mathrm{DGH}=\sphericalangle\mathrm{DBC}=60^\circ\end{array}\right\}\begin{array}{l}\Longrightarrow\ \triangle\mathrm{BDC}\cong\triangle\mathrm{GDH}\quad(\mathrm{wsw})\\ \Longrightarrow\ \overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{GH}}=2\\ \Longrightarrow\ \triangle\mathrm{ABC}\cong\triangle\mathrm{GDF}\quad(\mathrm{sss})\end{array}$$

Keines der Dreiecke ist zu $\triangle$BED kongruent.

31.



32. Konstruktion: $\overline{\mathrm{MP}}\,\widehat{=}\,6{,}5\,\mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{MW}}\,\widehat{=}\,4{,}5\,\mathrm{cm}\quad\Longrightarrow\quad\overline{\mathrm{WP}}\,\widehat{=}\,6{,}9\,\mathrm{cm}$

$\overline{\mathrm{WP}}=6{,}9\,\mathrm{cm}\cdot 200\,000=13{,}8\,\mathrm{km}$

33. (a) Maßstab 1:250 000, d.h. $1\,\mathrm{cm}\,\widehat{=}\,2{,}5\,\mathrm{km}$

(b) $h=\overline{\mathrm{CF}}=3{,}9\,\mathrm{cm}\,\widehat{=}\,9{,}8\,\mathrm{km}$

(c) $\overline{\mathrm{AC}} = 3{,}4\,\mathrm{cm} \mathrel{\widehat{=}} 8{,}5\,\mathrm{km} \quad \Longrightarrow \quad t = \dfrac{8{,}5\,\mathrm{km}}{1700\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = 0{,}005\,\mathrm{h} = 18\,\mathrm{s}$

34. (a) Die drei Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt M.
    (b) Alle drei Städte liegen auf dem Kreis, d.h. alle drei Städte sind gleich weit vom Sender entfernt.

35. (a) Die drei Höhen schneiden sich in einem Punkt.
    $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{AB}} \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 6\,\mathrm{cm} \cdot 5\,\mathrm{cm} = 15\,\mathrm{cm}^2$
    (b) Die drei Höhen schneiden sich wieder in einem Punkt, allerdings außerhalb des Dreiecks.

36. Für jeden beliebigen Ort G erhält man den gleichen Punkt S (8,5 | 4,5).
    S liegt auf der Mittelsenkrechten von [AB] und hat von AB den Abstand $\frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{AB}}$.

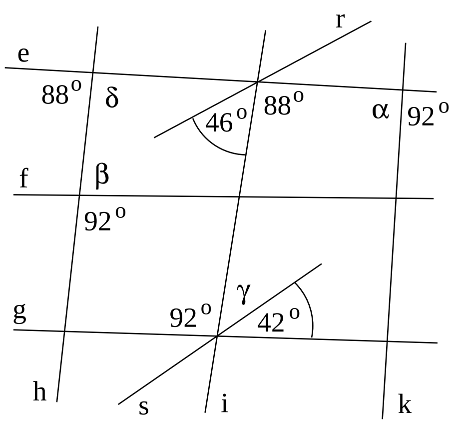
37. (a) Die drei Winkelhalbierenden schneiden sich in einem Punkt S.
    (b) k berührt alle Dreiecksseiten.
    (c) S hat von allen Dreiecksseiten den gleichen Abstand.

38. $\alpha = 112{,}5° = 90° + \dfrac{90°}{4}$, $\beta = 225° = 180° + \dfrac{90°}{2}$
    $\gamma = 78{,}75° = 90° - \dfrac{90°}{8}$, $\delta = 292{,}5° = 270° + \dfrac{90°}{4}$

39. e und f, g und h, l und m

40. Die beiden Winkel an der Geraden g müssen gleich sei.

41. $\alpha = 180° - 92° = 88°$
    $\Longrightarrow \quad h \| k$ (Stufenwinkel)
    $\beta = 180° - 92° = 88°$
    $\Longrightarrow \quad e \| f$ (Wechselwinkel)
    $\gamma = 180° - 92° - 42° = 46°$
    $\Longrightarrow \quad r \| s$ (Wechselwinkel)



42. (a) $-4x = 1 \quad \Longrightarrow \quad L = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

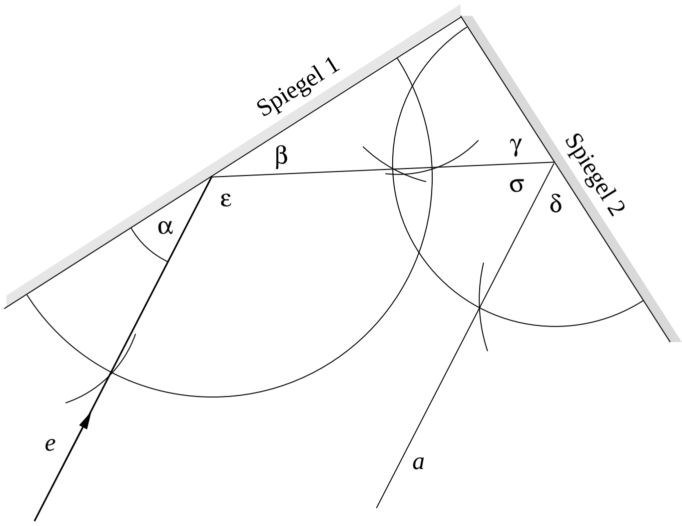
(b) $x^2 - 1 = -1 + x^2 \quad \Longrightarrow \quad L = \mathbb{Q}$

(c) $x + \frac{10}{7} = \frac{6}{7}x + \frac{2}{7} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{7}x = -\frac{8}{7} \quad \Longrightarrow \quad L = \{-8\}$

43. Preis ohne MWSt.: p_0, alter Preis: $p_a = 1{,}16p_0$

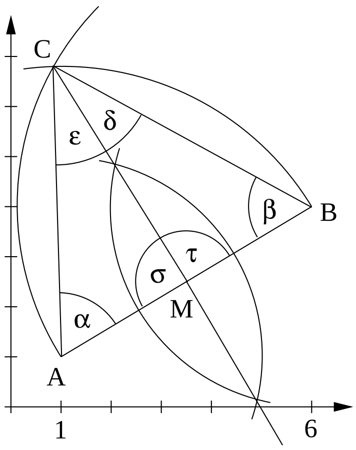
neuer Preis: $p_n = 1{,}19p_0 = \frac{1{,}19}{1{,}16}p_a = 1{,}0258p_a \quad \Longrightarrow \quad$ Erhöhung um 2,6%.

44. (a)



(b) $\beta = \alpha = 30°$ (Reflexion)
$\gamma = 180° - 90° - 30° = 60°$ (Winkelsumme im Dreieck)
$\delta = \gamma = 60°$ (Reflexion)
$\varepsilon = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$ (gestreckter Winkel)
$\sigma = 180° - 2 \cdot 60° = 60°$ (gestreckter Winkel)
$\varepsilon + \sigma = 120° + 60° = 180° \quad \Longrightarrow \quad a \| e$ (Nachbarwinkel)

45. (a)



(b) $\left.\begin{array}{r}\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{MB}}\\ \overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}\\ \overline{\mathrm{CM}}=\overline{\mathrm{CM}}\end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle\mathrm{AMC}\cong\triangle\mathrm{BMC}\,(\mathrm{sss})$

(c) $\alpha=\beta,\ \varepsilon=\delta,\ \sigma=\tau$

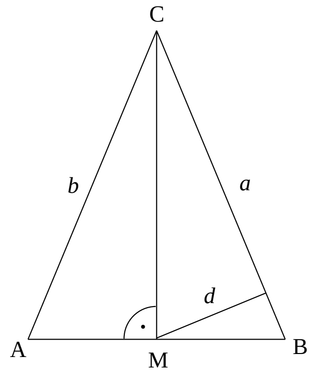
$\sigma+\tau=2\sigma=180^\circ \quad\Longrightarrow\quad \sigma=\tau=90^\circ$

$\varepsilon=\delta \quad\Longrightarrow\quad [\mathrm{MC}]=w_\gamma \text{ mit } \gamma=\sphericalangle\mathrm{ACB}$

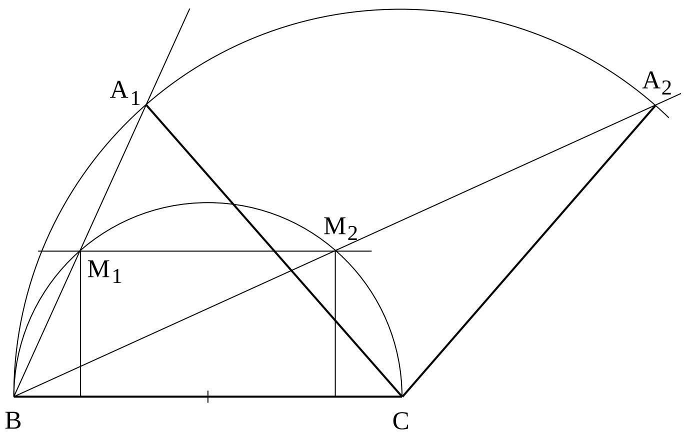
$\sigma=\tau=90^\circ \quad\Longrightarrow\quad [\mathrm{MC}]=h_c$

46. (a) Im gleichschenkligen Dreieck ist die Seitenhalbierende der Basis zugleich Höhe auf die Basis. M liegt also auf dem Thaleskreis über [BC] und auf der Parallelen zu BC im Abstand d.

A liegt auf BM und auf k(C; $r=a$)



(b)



(c)

$0<d<4\,\mathrm{cm}$	:	2 Lösungen
$d=4\,\mathrm{cm}$	:	1 Lösung
$d>4\,\mathrm{cm}$	:	keine Lösung

47. x ist der gesuchte Prozentsatz:

$$\begin{aligned}(1+x)\cdot 360 &= (1-x)\cdot 640\\ 360+360x &= 640-640x\\ 1000x &= 280\\ x &= \frac{28}{100} = 28\%\end{aligned}$$

Hans verdient 1,28 · 360 € = 460,80 € (oder 0,72 · 640 € = 460,80 €)

48. (a) $T(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + x - \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{8} = \frac{5}{4}x - \frac{5}{8} = \frac{5}{8}(2x-1)$

(b) $T\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $T(0) = -\frac{5}{8}$, $T\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$

49. (a) $L = \mathbb{Q}$ (b) $L = \{\}$ (c) $L = \mathbb{Q}\setminus\{1\}$

50. (a)

$\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$	$\Longrightarrow$	$\beta = \alpha = 70^\circ$ (Basiswinkel)
$\triangle$BDC gleichseitig	$\Longrightarrow$	$\delta = \rho = \varepsilon + \mu = 60^\circ$
gestreckter Winkel	$\Longrightarrow$	$\sigma = 180^\circ - \beta - \delta = 50^\circ$
Außenwinkel	$\Longrightarrow$	$\lambda = 90^\circ - \sigma = 40^\circ$
Z-Winkel	$\Longrightarrow$	$\varepsilon + \mu + \tau = \beta \Longrightarrow \tau = \beta - 60^\circ = 10^\circ$

(b)

$$\left.\begin{aligned}\overline{\mathrm{CM}} &= \overline{\mathrm{CM}}\\ \delta &= \rho\\ \sphericalangle \mathrm{CMB} = \sphericalangle \mathrm{DMC} &= 90^\circ\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \triangle\mathrm{BMC} \cong \triangle\mathrm{DMC}\,(\mathrm{wws}) \Longrightarrow \overline{\mathrm{BM}} = \overline{\mathrm{MD}}$$

11.2 Jahrgangsstufe 11

1. NS: $x_{01} = 2 - \sqrt{22} \approx -2{,}69$, $x_{02} = 0$, $x_{03} = 2 + \sqrt{22} \approx 6{,}69$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$

$f''(x) = x^2 - 2x - 3$

rel. Minimum bei $\left(\frac{3}{2}(1-\sqrt{5})\middle|\frac{9}{8}\left(-13+5\sqrt{5}\right)\right) \approx (-1{,}85\,|\,-2{,}05)$

rel. Maximum bei $(0\,|\,0)$

rel. Minimum bei $\left(\frac{3}{2}(1+\sqrt{5})\middle|\frac{9}{8}\left(-13-5\sqrt{5}\right)\right) \approx (4{,}85\,|\,-27{,}2)$

Wendepunkt bei $\left(-1\middle|-\frac{13}{12}\right) = (-1\,|\,-1{,}08\overline{3})$

Wendepunkt bei $\left(3\middle|-\frac{63}{4}\right) = (3\,|\,-15{,}75)$

2. f spiegeln an der x-Achse $\rightarrow$ $f_1(x) = -f(x)$

   f_1 strecken mit Zentrum $(0|0)$ in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$ und in y-Richtung mit Faktor $\frac{3}{4}$ $\rightarrow$

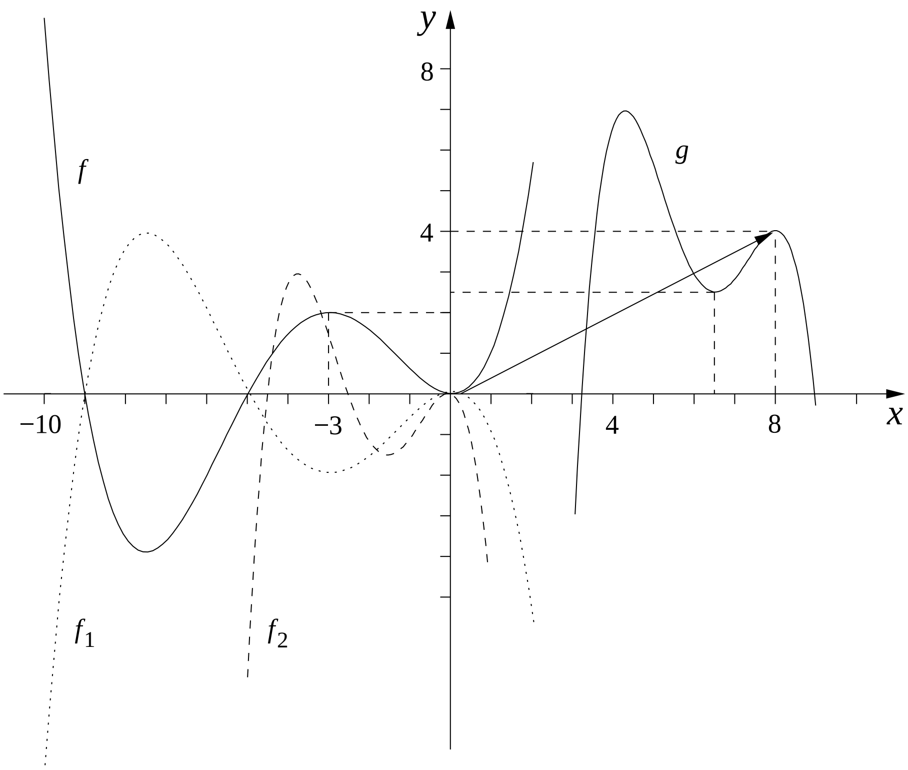
   $$f_2(x) = -\frac{3}{4}f\,(2x) = -\frac{1}{18}x^2(2x+5)(2x+9)$$

   f_2 verschieben um 8 nach rechts und um 4 nach oben $\rightarrow$

   $$g(x) = f_2(x-8) + 4 = -\frac{1}{18}(x-8)^2(2(x-8)+5)(2(x-8)+9)$$

   $$g(x) = -\frac{1}{18}(x-8)^2(2x-11)(2x-7) + 4$$

   $g(3{,}5) = 4, \quad g(6{,}5) = 2{,}5, \quad g(8) = 4$



3. $f(x) = 2 \cdot \sin\left[\frac{3}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] + 3$

   Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{4}{3}$ – Verschiebung um $\frac{\pi}{3}$ nach rechts – Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2 – Verschiebung um 3 nach oben.

   Oder:

   Verschiebung um $\frac{\pi}{4}$ nach rechts – Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{4}{3}$ – Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2 – Verschiebung um 3 nach oben.

4. $g(x) = \sin\left[\frac{1}{k}(x+a)\right] = \sin\left[\frac{3}{2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sin\left[\frac{3}{2}x + \frac{3\pi}{8}\right]$

$h(x) = \sin\left[\frac{1}{k}x + a\right] = \sin\left[\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4}\right] = \sin\left[\frac{3}{2}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$h(x) = \sin\left[\frac{3}{2}\left(x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)\right] = g\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \quad \Longrightarrow$ Verschiebung um $\frac{\pi}{12}$ nach rechts.

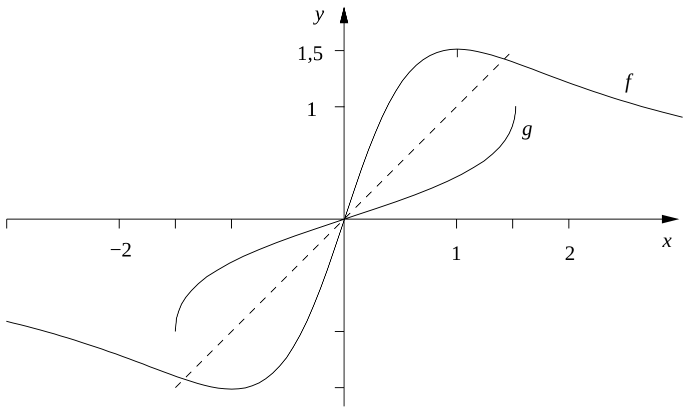
5. (a) $f(-x) = -\frac{3x}{1+x^2} = -f(x) \quad \Longrightarrow \quad$ Punktsymmetrie zum Ursprung.

$$f'(x) = \frac{3(1+x^2) - 3x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{3(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \underbrace{\frac{3}{(1+x^2)^2}}_{>0} \cdot (1-x^2)$$

$f'(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - x^2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |x| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < x < 1$

f streng steigend in $[-1;1]$, und streng fallend in $]-\infty;-1]$ und in $[1;+\infty[$.

x	$f(x)$
0	0
0,5	1,2
1,0	1,5
1,5	1,38
2,0	1,2
2,5	1,03
3,0	0,9



(b) g existiert in $[-1;1]$.

$$f(g(x)) = \frac{3\cdot\frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{2x}}{1+\left(\frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{2x}\right)^2} = \frac{3\cdot\frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{2x}}{1+\frac{18-6\sqrt{9-4x^2}-4x^2}{4x^2}} =$$

$$= \frac{6x\left(3-\sqrt{9-4x^2}\right)}{6\left(3-\sqrt{9-4x^2}\right)} = x$$

6. $f'(x) = \frac{-\sin(x^2)\cdot 2x + 2\sin(3x)\cos(3x)\cdot 3}{2\sqrt{\cos(x^2)+\sin^2(3x)}} = \frac{-2x\sin(x^2) + 3\sin(6x)}{2\sqrt{\cos(x^2)+\sin^2(3x)}}$

7. $z = \mathrm{E}(\varphi) \quad \Longrightarrow \quad z^{100} = \mathrm{E}(100\varphi) = \mathrm{E}(90^\circ)) \quad \Longrightarrow \quad 100\varphi = 90^\circ + k\cdot 360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\varphi_k = 0{,}9^\circ + k\cdot 3{,}6^\circ, \quad \mathrm{Re}(z_k) = \cos\varphi_k, \quad 0{,}60 < \cos\varphi_k < 0{,}65 \quad \Longrightarrow$

$53{,}13° > \varphi_k > 49{,}46° \quad \Longrightarrow \quad 14{,}5 > k > 13{,}5 \quad \Longrightarrow \quad k = 14, \quad \varphi_{14} = 51{,}3°$

$306{,}87° < \varphi_k < 310{,}54° \quad \Longrightarrow \quad 84{,}99 < k < 86{,}01 \quad \Longrightarrow \quad \varphi_{85} = 306{,}9°,\ \varphi_{86} = 310{,}5°$

$z_{14} = \mathrm{E}(51{,}3°) = 0{,}6252 + 0{,}7804\,i$

$z_{85} = \mathrm{E}(306{,}9°) = 0{,}6004 - 0{,}7997\,i$

$z_{86} = \mathrm{E}(310{,}5°) = 0{,}6494 - 0{,}7604\,i$

8. (a) $f(x) = \frac{x}{8}\left(x^2 - 12x + 36\right) = \frac{x}{8}(x-6)^2 \qquad f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{01} = 0,\ x_{02} = 6$

(b) $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2} = \frac{3}{8}\left(x^2 - 8x + 12\right) \qquad f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 8x + 4^2 = -12 + 16$

$x_{11} = 2,\ x_{12} = 6, \qquad f'$ ist eine nach oben geöffnete Parabel $\Longrightarrow$

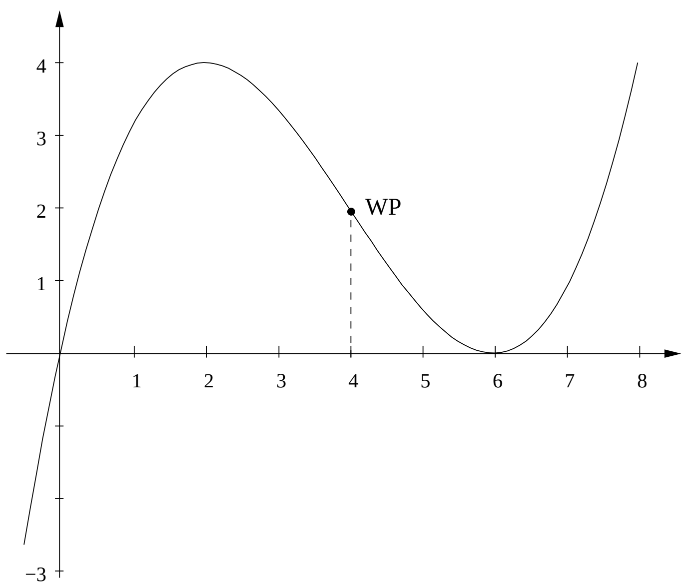
$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ und } f \text{ streng steigend in }]-\infty; 2[\text{ und in }]6; \infty[\\ f'(x) < 0 \text{ und } f \text{ streng fallend in }]2; 6[\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{rel. Max. bei } (2|4) \\ \text{rel. Min. bei } (6|0) \end{array}\right.$$

(c) $f''(x) = \frac{3}{4}x - 3 \qquad f''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 4 \quad \Longrightarrow$

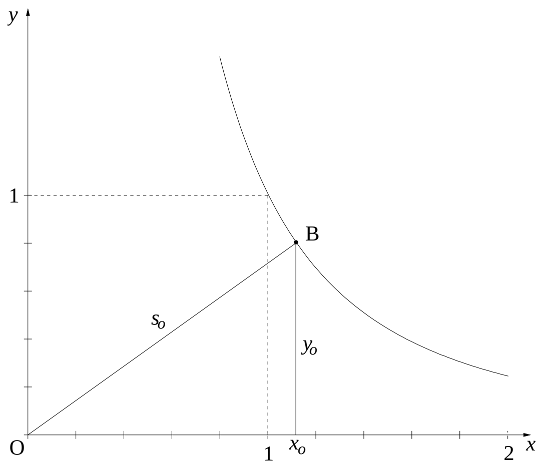
$$\left.\begin{array}{l} f''(x) < 0 \text{ und } f \text{ rechtsgekrümmt in }]-\infty; 4[\\ f'(x) > 0 \text{ und } f \text{ linksgekrümmt in }]4; \infty[\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Wendepunkt bei } (4|2)$$

(d)

x	$f(x)$
$-0{,}5$	$-2{,}64$
0	0
1	3,125
3	3,375
5	0,625
7	0,875
8	4
x	$f''(x)$
2	-1,5
6	+1,5
8	4
x	$f'''(x)$
4	0,75



9. (a)



(b) $s(x) = \sqrt{x^2 + f(x)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^4}}$

$s'(x) = \frac{2x - \frac{4}{x^5}}{2\sqrt{x^2 + f(x)^2}}$

$s'(x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = 2^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}122$

$y_0 = f(x_0) = 2^{-\frac{1}{3}} \approx 0{,}7937$

$\lim\limits_{x\to 0^+} s(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to +\infty} s(x) = +\infty$ und nur eine Nullstelle von s' $\Longrightarrow$ relatives Minimum bei $\mathrm{B}\,(\,x_0\,|\,y_0\,)$

(c) $s_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \frac{\sqrt{3}\cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2} \approx 1{,}375$

In der Zeichnung hat s_0 die Länge $5 \cdot 1{,}375\,\mathrm{cm} = 6{,}875\,\mathrm{cm}$, in der Wirklichkeit also $2000 \cdot 6{,}875\,\mathrm{cm} = 137{,}5\,\mathrm{m}$.

10. (a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{2x} - 2x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{2} - 2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{2x} - 2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} - 2} = \frac{1}{2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin 3x}{x^2 + \sin 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - 3\cos 3x}{2x + 2\cos 2x} = \frac{1-3}{2} = -1$

12 Neue Aufgaben, Juni 2006

1. 26, 27

2. Es gibt 50 ungerade Zahlen, d.h. 25 Paare ungerader Zahlen.
   $1 + 3 + 5 + \cdots + 99 = (1 + 99) + (3 + 97) + \cdots + (49 + 51) = 100 \cdot 25 = 2500$

3. Mannschaften spielen pro Saison zweimal gegeneinander, also $20 \cdot 19 = 380$ Spiele

4.

5. 19%

6. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}$, also fehlt $\frac{1}{42}$

7. (a) letzte Reihe, linkes Diagramm;
   $(5 + 7 + 6 + 4) : (5 + 7 + 6 + 4 + 5 + 1) = 22 : 28 = 78,6\%$

   (b) zweite Reihe, linkes Diagramm;
   $(5 + 18 + 30 + 12 + 5) : (5 + 9 + 10 + 3 + 1) = 70 : 28 = 2,5$

   (c) erste Reihe, rechtes Diagramm;

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Diog.	2	5	9	14	20	27	35	44	54

   (d) erste Reihe, linkes Diagramm; $2 : 8 = 0,25 = \frac{1}{4}$

   (e) zweite Reihe, rechtes Diagramm;

A	B	C	D
Würfel	Kreis	Tetraeder	vierseitige Pyramide

   (f) dritte Reihe, rechtes Diagramm;

8. (a) Dir dritte Windung ist um acht Längeneinheiten länger als die zweite Windung.

   (b) $T(n) = 6 + (n - 1) \cdot 8 = 8n - 2$

9. Nimmt man einen Laplace-Würfel an, lassen sich die Fragen wie folgt beantworten. Ansonsten kann man keine Aussagen machen.

   (a) $\frac{1}{6}$

   (b) $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6^5} = 9,3\%$

10. pro Minute: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, also dauert es $\frac{6}{5} = 1,2$ min

11.

Anzahl der Personen	Wahrscheinlichkeit p_n
2	$p_2 \approx 0,27\%$
3	$p_3 \approx 0,82\%$
4	$p_4 \approx 1,6\%$
6	$p_6 \approx 4,0\%$
8	$p_8 \approx 7,4\%$
10	$p_{10} \approx 12\%$
12	$p_{12} \approx 17\%$
14	$p_{14} \approx 22\%$
16	$p_{16} \approx 18\%$
18	$p_{18} \approx 35\%$
20	$p_{20} \approx 41\%$
25	$p_{25} \approx 57\%$
30	$p_{30} \approx 71\%$
40	$p_{40} \approx 89\%$
50	$p_{50} \approx 97\%$
60	$p_{60} \approx 99\%$
80	$p_{80} \approx 100\%$

12. (a)
    (b)
    (c) $p_1 = 1 - (\frac{5}{6})^4 \approx 52\%$
    (d) $p_2 = 1 - (1 - (\frac{1}{6})^2)^{24} \approx 49\%$

13. $0,51^8 = 0,005 = 0,5\%$

13 Neue Aufgaben, Mai 2006

1. (a) $6^3 = 216$ (b) $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$,
   (c) 8, nämlich 121, 144, 225, 256, 324, 361, 441, 625

2. (a) $\frac{3}{7} \approx 43\%$ (b) $(\frac{11}{22}) = 50\%$ (c) $2 \cdot (9 \cdot 9 \cdot 8) = 1296$

3. (a) 171 (b) 365 (c) 5 (d) 25 (e) 67

4. (a) 972 (b) 676 (c) 523 (d) 2
   (e) 930 (f) 216 (g) 125

5. (a) 99 (b) 61 (c) 75 (d) 42
   (e) 222 (f) 19 (g) 76

6. (a) $\frac{1}{6} \approx 17\%$, (b) individuelle Schätzung, (c) individuelle Schätzung
   (d) individuelle Schätzung, (e)$\frac{1}{6} \approx 17\%$, (f)100%

7. nicht vorhanden.

14 Neue Aufgaben, Mï¿½rz 2006

1. (a) Quadratzahlen (b) gerade Zahlen (c) ungerade Zahlen (d) $\mathbb{Q}$ (e) $\mathbb{N}_0$

2. (a)

x	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{2}{3}$	1	$1{,}5$
$T(x)$	-12	-2	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{2}{9}$	0	$-0{,}75$

(b)

x	-5	-2	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{7}$	1	$2{,}5$	7
$p(x)$	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	1	$2{,}5$	7

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geqq 0 \end{cases}$$

3. (a) $A = xz + \dfrac{1}{2}(y-x)z = \dfrac{x+y}{2} \cdot z, \quad A = \dfrac{3}{2}x^2$

   (b) $A = 4 \cdot \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}a^2, \quad A = 4{,}5\,\text{cm}^2$

   (c) $A = a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 = 14a^2, \quad A = 87{,}5\,\text{cm}^2$

4. (a) $A = (a+b)(c+d) - \dfrac{1}{2}bc - \dfrac{1}{2}(a+b-e)(c+d) = \dfrac{(a+e)(c+d)+bd}{2}$

   (b) $A = 36\,\text{cm}^2$

   (c) Parallelogramm: $a = e$, $d = 0$ oder wie beim Rechteck
   Rechteck: $a = e$, $b = 0$ oder $a + b = e$, $c = 0$
   Quadrat: $a = e$, $b = 0$, $c + d = e$ oder $a + b = e$, $c = 0$, $d = e$

   (d) Zwei Beispiele, alle Maße in cm: $a = d = e = 10$, $b = c = 0$ oder $a = 7$, $b = 5$, $c = 4$, $d = 6$ und $e = 10$

   (e) Zwei Beispiele: $a = e$, $b = 0$, $c = 0$ und $d = e$ oder $a = e$, $b = e$, $c = e$ und $d = 0$

5. (a) $D_1 = \mathbb{N}\backslash\{3\}$

   (b) $D_2 = \mathbb{Q}\backslash\left\{3, \frac{5}{3}\right\}$

   (c) $D_3 = \mathbb{Q}\backslash\left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, 1\right\}$

6. (a) $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   (b)

Name	S_{ges}	M_{ges}	N
Huber	3,75	4,10	3,87
Maier	4,75	5,00	4,83
Müller	1,50	1,40	1,47

(c) Nein, mit $E_4 = 1$ und $m_2 = 1$ wäre $M = 4{,}10$ und $N = 4{,}53$.

7. (a) $x + |x| = \begin{cases} 2x & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leqq 0 \end{cases}$ $\qquad D_1 = \mathbb{Q}^+ = \{x | x > 0\}$

   (b) $D_2 = \mathbb{N}$

   (c) $x - |x| = \begin{cases} 0 & \text{für } x \geqq 0 \\ 2x & \text{für } x < 0 \end{cases}$ $\qquad D_3 = \mathbb{Q}^- = \{x | x < 0\}$

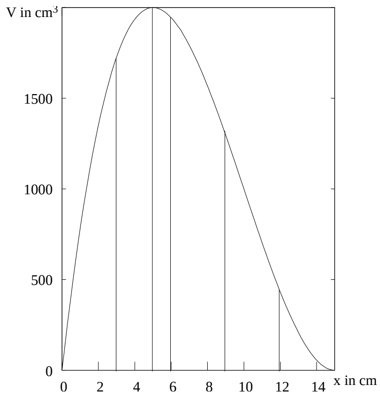
   (d) $D_4 = \{\,\}$

8. (a) Ein halbes Quadrat mit der Seitenlänge n plus n halbe Quadrate mit der Seitenlänge 1:
$$A(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

   (b) $A(10) = 55, \quad A(100) = 5050, \quad A(5000) = 12\,502\,500$

   (c) $A(9999) = \dfrac{9999 \cdot 10000}{2} = 49\,995\,000$

9.



   (a) $V(x) = (30\,\text{cm} - x)^2 \cdot x$

   (b) $D_V = \{\, x \,|\, 0 \leqq x \leqq 15\,\text{cm}\}$

   (c)

$\frac{x}{\text{cm}}$	0	3	6	9	12	15
$\frac{V(x)}{\text{cm}^3}$	0	1728	1944	1296	432	0

   (d) maximaler Wert: $V(5\,\text{cm}) = 2000\,\text{cm}^3$

10. „Rechteck mit den Seitenlängen $n+1$ und $n+2$ minus zwei kleine Quadrate mit der Fläche 1“

    oder

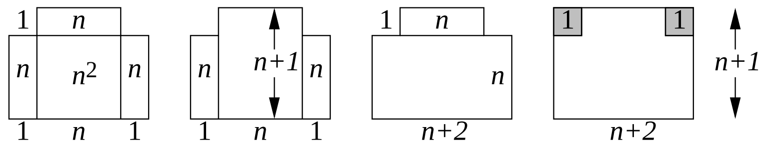
    „Rechteck mit den Seitenlängen n und $n+2$ plus Rechteck mit den Seitenlängen n und 1“

    oder

    „Rechteck mit den Seitenlängen n und $n+1$ plus zwei Rechtecke mit den Seitenlängen n und 1“

    oder

    „Quadrat mit der Seitenlänge n plus drei Rechtecke mit den Seitenlängen n und 1“

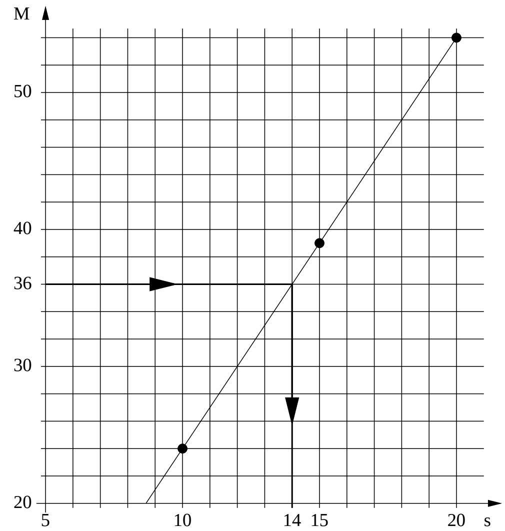


$$A(n) = (n+1)(n+2) - 2 = n(n+2) + n = n(n+1) + 2n = n^2 + 3n$$
$$A(7) = 70, \qquad A(20) = 460, \qquad A(99) = 100 \cdot 101 - 2 = 10098$$

11.
   (a) $M(s) = 3(s-2) = 3s - 6$

   $M(10) = 24$, $M(15) = 39$, $M(20) = 54$

   (b) $M(14) = 36$



12.
   (a) $-12x^2 - 5x^2 + 12x - 14x = -17x^2 - 2x$

   (b) $8a^3 + 12a^3 - 27a^3 = -7a^3$

   (c) $\dfrac{z^2}{16} - \dfrac{z^2}{4} - \dfrac{z^2}{8} - \dfrac{3z^2}{16} = \dfrac{z^2 - 4z^2 - 2z^2 - 3z^2}{16} = \dfrac{-8z^2}{16} = -\dfrac{z^2}{2}$

13. $D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{7}{2}\}$, $\quad T(0) = -\dfrac{4}{7}$, $\quad T(-1) = -\dfrac{1}{9}$, $\quad T\left(\dfrac{11}{3}\right) = \dfrac{11+4}{\frac{22}{3} - \frac{21}{3}} = 3 \cdot 15 = 45$

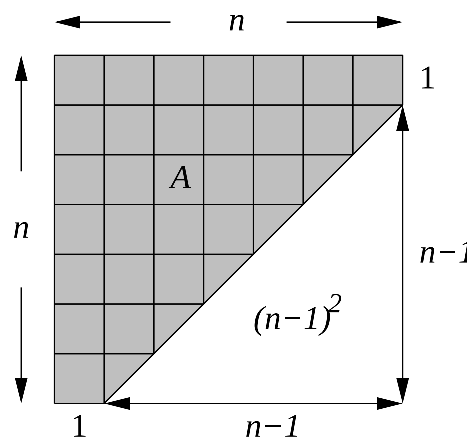
14. „Quadrat mit der Seitenlänge n minus halbes Quadrat mit der Seitenlänge $n-1$.“

$$A(n) = n^2 - \frac{1}{2} \cdot (n-1)^2$$

$A(7) = 49 - \dfrac{36}{2} = 31$

$A(30) = 900 - \dfrac{841}{2} = 479{,}5$

$A(101) = 10201 - \dfrac{10000}{2} = 5201$



15. (a) $-18x^3 + 18x^2 - 7x^3 + 12x^3 = 18x^2 - 13x^3$

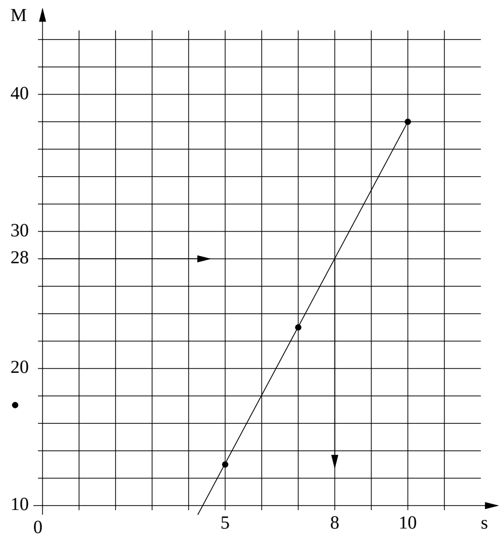
(b) $\dfrac{a^2}{36} - \dfrac{a^2}{9} - \dfrac{a^2}{12} - \dfrac{3a^2}{9} = \dfrac{a^2 - 4a^2 - 3a^2 - 12a^2}{36} = -\dfrac{18a^2}{36} = -\dfrac{a^2}{2}$

16.

(a) $M(s) = 5(s-3) + 3 = 5s - 12$

$M(5) = 13,\ M(7) = 23,\ M(10) = 38$

(b) $M(8) = 5 \cdot 8 - 12 = 28$



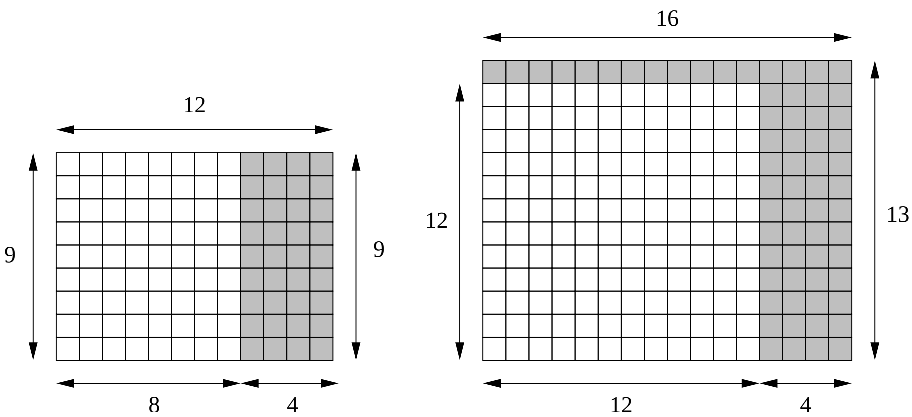
17. $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2; 2\}, \quad T(0) = -\dfrac{5}{2}, \quad T(-1) = -6, \quad T\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{5 + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - 2} = -\dfrac{16}{5} = -3{,}2$

18. (a) $x^2 - x - x^2 - x = -2x$

(b) $ax^2 - \dfrac{x^3}{2} - ax^2 + \dfrac{x^3}{3} = \dfrac{-3x^3 + 2x^3}{6} = \dfrac{-x^3}{6} = -\dfrac{x^3}{6}$

19. $A(x) = x(x-3) - \dfrac{3}{4}x(x-4) = x^2 - 3x - \dfrac{3}{4}x^2 + 3x = \dfrac{1}{4}x^2$

$A(12) = \dfrac{12^2}{4} = \dfrac{144}{4} = 36, \quad A(16) = \dfrac{16^2}{4} = \dfrac{256}{4} = 64$



Die Figur ist nur für $x \geqq 12$ zeichenbar, da sonst $\frac{3}{4}x > x - 3$ wäre.

20. (a) -1 (b) 1 (c) x^2 (d) $-x^9$
(e) $-32b^5$ (f) $81z^4$ (g) $125c^3$ (h) $-625e^4$

21. (a) $-a^3 - a^3 - a^2 - a^2 = -2a^3 - 2a^2$
(b) $\left(-a^3\right) \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot (-a^2) = a^{10}$
(c) $x^2x^2 \cdot 2x^4x\left(-x^3\right) = -2x^{12}$
(d) $x^4 - 2x^4 - x\left(-x^3\right) = x^4 - 2x^4 + x^4 = 0$
(e) Wenn n gerade ist, ist $n-1$ ungerade, wenn n ungerade ist, ist $n-1$ gerade, d.h. eine der beiden Potenzen $(-1)^n$ oder $(-1)^{n-1}$ ist -1, die andere ist 1:
$a(-a)^n(-a)^{n-1} = a(-1)^n a^n (-1)^{n-1} a^{n-1} = -a^{2n}$
(f) $a(-a)^n + (-a)^{n+1} = a(-1)^n a^n + (-1)^{n+1} a^{n+1} = (-1)^n a^{n+1} - (-1)^n a^{n+1} = 0$

22. (a) $5am^2 - 5am - 5a^2m - 6am + 15a^2m - 8am^2 = -3am^2 - 11am + 10a^2m$
(b) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)x^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)x - \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{13}{6}$
(c) $0{,}6xy - 0{,}1x^2 - \frac{1{,}1y^2}{7} - 0{,}6xy + 0{,}1x^2 - \frac{y^2}{7} = -\frac{2{,}1y^2}{7} = -0{,}3y^2$

23. (a) $x^2 - x - x^2 - x + x^2 + x = x^2 - x$
(b) $-2u^2 + 4uy - 2uy - 2y^2 = -2u^2 + 2uy - 2y^2$
(c) $-\frac{e^2}{2} - \frac{5ef}{8} - \frac{3ef}{8} + 2f + \frac{e^2}{4} - 2f = -\frac{e^2}{4} - ef$

24. (a) $3x(4x^2 - 3xy + 6y^2)$ (b) $u^3(u^2 - u + 1)$
(c) $12x^3\left(1 - \frac{3y}{4x} + \frac{3y^2}{2x^2}\right)$ (d) $u^5\left(1 - \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}\right)$
(e) $\frac{x}{4}\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3} - 1\right)$ (f) $2z(4z^2 - 2z + 1)$
(g) $-\frac{x}{24}(-3x + 2y + 6)$ (h) $8z^3\left(1 - \frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^2}\right)$

25. (a) $18x^3y(2y - 3x + 4y^2)$ (b) $16u^3(2u^2 - 4u^3 - 1)$
(c) $a^2b^2c^3(-c + ac^2 - ab)$ (d) $42ay(2x - 3z + 5b)$

26. (a) $\frac{1}{8}(2x - 4y - z)$ (b) $\frac{ab}{6}(2b + 3a - 1)$
(c) $\frac{1}{231}(33rs + 77rt + 21st)$ (d) $\frac{a^2}{630}(27a - 40 + 54a^2)$

27. (a) $6a^2 - 13ab + 6b^2$ (b) $1 - a - b - c + ab + ac + bc - abc$
(c) $ax^2 - a^2xy - xy + ay^2$ (d) $1 - x - x^2 + x^3$
(e) $u^4 - 2u^2w^2 + w^4$ (f) $6 - 11x + 6x^2 - x^3$
(g) $x^2 - \frac{13}{6}xy + y^2$ (h) $1 - \frac{x^4}{16}$

28. Das Jahreseinkommen ist $12x$, die zu zahlenden Steuern pro Jahr sind

$$s = 25\% \cdot (12x - n \cdot 8000)$$

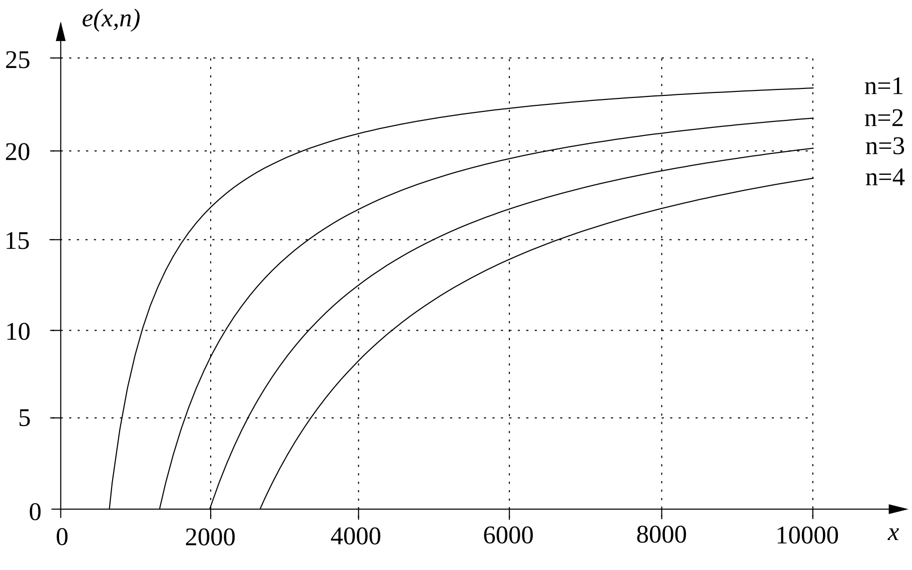
$$e = \frac{s}{12x} = 25\% \cdot \frac{12x - 8000n}{12x} = 25\% \cdot \left(1 - \frac{2000n}{3x}\right)$$

Diese Formel gilt nur, wenn $12x > 8000n$ ist, für $12x \leqq 8000n$ zahlt man keine Steuern:

$$\boxed{e(x,n) = \begin{cases} 25\% \cdot \left(1 - \frac{2000n}{3x}\right) & \text{für } x > \frac{2000n}{3} \\ 0 & \text{für } x \leqq \frac{2000n}{3} \end{cases}}$$

Die folgende Wertetabelle gibt den effektiven Steuersatz in Prozent an:

x	1000	2000	4000	6000	8000	10000
$n = 1$	8,3	16,7	20,8	22,2	22,9	23,3
$n = 2$	0	8,3	16,7	19,4	20,8	21,7
$n = 3$	0	0	12,5	16,7	18,8	20,0
$n = 4$	0	0	8,3	13,9	16,7	18,3



29. $\frac{a^2}{4} - 1 + \frac{1}{8} - \frac{a^2}{2} = -\frac{a^2}{4} - \frac{7}{8}$

30. $\frac{1}{4} - b^2 + \frac{b^2}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} - \frac{7}{8}b^2$

31. $\frac{u^2w^3}{24}(8uw - 3u + 24)$

32. $\frac{a^3b^3}{28}(7ab^2 - 2a - 28b)$

33. (a) $-5x = 20, \quad x = -4 \in G \quad \Longrightarrow \quad L = \{-4\}$
    (b) $\frac{6}{7}x = \frac{6}{4}, \quad x = \frac{6}{4} : \frac{6}{7} = \frac{7}{4} = 1{,}75 \in G \quad \Longrightarrow \quad L = \{1{,}75\}$
    (c) $0 = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad L = \{\}$
    (d) $0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad L = G = \mathbb{Z}$
    (e) $x - 3 = 0$ oder $x + 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad L = \{-5; 3\}$

34. (a) $-7x = 17, \quad x = -\frac{17}{7} \notin G \quad \Longrightarrow \quad L = \{\,\}$
    (b) $\frac{9}{8}x = \frac{9}{7}, \quad x = \frac{9}{7} : \frac{9}{8} = \frac{8}{7} \in G \quad \Longrightarrow \quad L = \left\{\frac{8}{7}\right\}$
    (c) $-3 - 3x = -3 - 3x \quad \Longrightarrow \quad L = G = \mathbb{N}$
    (d) $x^2 \geqq 0$ für alle $x \quad \Longrightarrow \quad L = \{\,\}$
    (e) $x = -4$ oder $x = 1$ oder $x = 2 \quad \Longrightarrow \quad L = \{1; 2\}$

35. 1. Seite: x, 2. Seite: $5x$

$$\begin{aligned} 2 \cdot (x + 5x) &= 30 \\ 12x &= 30 \\ x &= \frac{30}{12} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \end{aligned} \tag{14.1}$$

Die Seitenlängen sind 2,5 cm und 12,5 cm.

36. x ist das Alter der Tochter.

$$\begin{aligned} x + 5x + 28 &= 10x \\ 28 &= 10x - x - 5x \\ 28 &= 4x \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Tochter: 7 a Mutter: 35 a Opa: 70 a

37. (a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

(b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-2xh - h^2}{h\, x^2\,(x+h)^2} == \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-(2x-h)}{x^2\,(x+h)^2} = -\dfrac{2}{x^3}$

38.

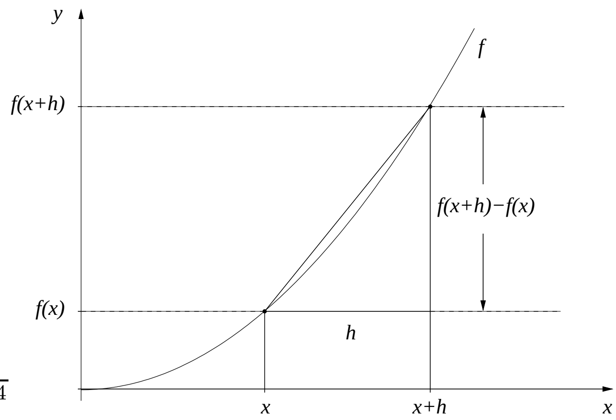
(a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

(b)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^3} - \frac{1}{x^3}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3x^2h - 3xh^2 - h^3}{h\,x^3\,(x+h)^3} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-(3x^2 + 3xh + h^2)}{x^3\,(x+h)^3} = -\frac{3}{x^4}$$



39.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x+h})(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})} = \lim_{h\to 0} \frac{x - (x+h)}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})} = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{1\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x})} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

Mit $(x^n)' = nx^{n-1}$ und $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ folgt

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

40. $g'(x) = \sin\dfrac{1}{x} + x\cos\dfrac{1}{x} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$

$x = \dfrac{1}{u} \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$

41. (a) $D_f = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{4\}$; die Nullstelle des Zählers ist $4 \notin D_f$, d.h. keine NS.

(b) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{\sqrt{x} + 2} = \dfrac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x} + 2} = 0^+$; $f(0) = \frac{1}{2}$

(c) Zuerst $f(x)$ umformen: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$

$f'(x) = -\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+2)^2} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2}$

oder direkt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-4)\frac{1}{2\sqrt{x}} - (\sqrt{x}-2)}{(x-4)^2} = -\frac{x-4\sqrt{x}+4}{2\sqrt{x}(x-4)^2} = \\ &= -\frac{(\sqrt{x}-2)^2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^2(\sqrt{x}+2)^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2} \end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\infty$

42. (a) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$

$t(x) = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a^2}(x-a) = \dfrac{2}{a} - \dfrac{x}{a^2}$

Schnittpunkte mit den Achsen: $\left(0\,\middle|\,\frac{2}{a}\right)$ und $(2a\,|\,0)$

(b) a durch $\frac{1}{a}$ in $t(x)$ ersetzen:

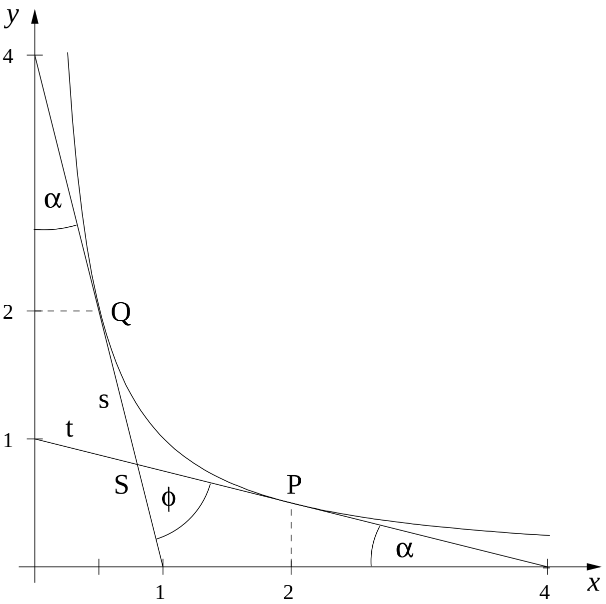
$s(x) = 2a - a^2x$

Schnittpunkte mit den Achsen: $(0\,|\,2a)$ und $\left(\frac{2}{a}\,\middle|\,0\right)$

$t(x_\mathrm{s}) = s(x_\mathrm{s}) \quad \Longrightarrow \quad x_\mathrm{s} = 2\,\dfrac{a-\frac{1}{a}}{a^2-\frac{1}{a^2}} = \dfrac{2a}{1+a^2}$

$y_\mathrm{s} = 2a - a^2x_\mathrm{s} = \dfrac{2a}{1+a^2} = x_\mathrm{s}$

(c) $\tan\alpha = \dfrac{\frac{2}{a}}{2a} = \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \approx 14^\circ \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 90^\circ - 2\alpha \approx 62^\circ$



43. (a) $f'(x) = x + 1, \quad g'(x) = -\dfrac{5}{x^2}.$

(b) $f'(x_s) = x_s + 1 = 0, \quad x_s = -1, \quad y_s = f(x_s) = -2, \quad f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$

(c)

x	-1	0	1	2	3	4
f	-2	$-1{,}5$	0	2,5	6	10,5
g	-5	–	5	2,5	1,67	1,25

x	$-0{,}5$	0,5	1,5	2,5
f	$-1{,}875$	$-0{,}875$	1,125	4,125
g	-10	10	3,33	2

Schnittpunkt: S (2 | 2,5)

(d) $g'(2) = -\frac{5}{4}, \quad t(x) = -\frac{5}{4}x + b$

S $\in t$: $\quad t(2) = g(2) = \frac{5}{2} = -\frac{5}{4} \cdot 2 + b$

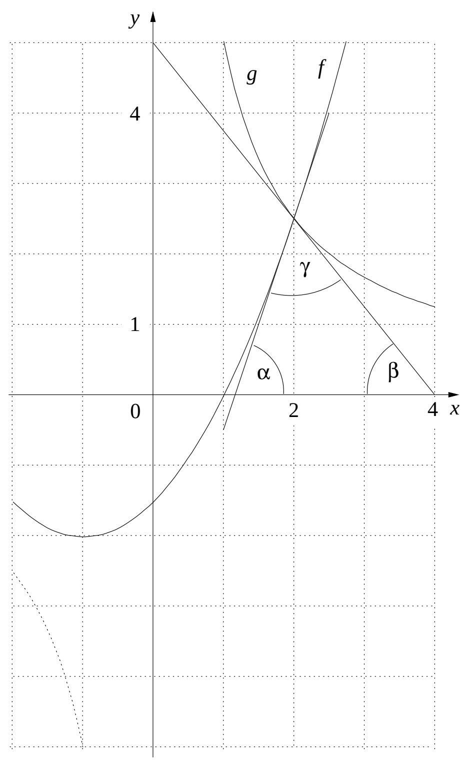
$\Longrightarrow \quad b = 5, \quad t(x) = -\frac{5}{4}x + 5$

Schnittp. mit Achsen: (0|5) und (4|0)

(e) $\tan\beta = |g'(2)| = 1{,}25, \quad \beta = 51{,}34°$

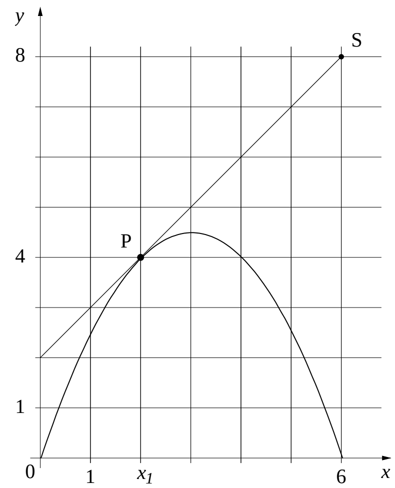
$\tan\alpha = f'(2) = 3, \quad \alpha = 71{,}57°$

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 57{,}1°$



44.
$$\frac{8-f(x_1)}{6-x_1} = f'(x_1) = -x_1+3$$
$$8-f(x_1) = (6-x_1)(-x_1+3)$$
$$8+\frac{x_1^2}{2}-3x_1 = 18-9x_1+x_1^2$$
$$\frac{x_1^2}{2}-6x_1 = -10$$
$$x_1^2-2\cdot 6x_1+6^2 = 36-20 = 16$$
$$x_1 = 6\pm 4$$

$x_1 = 2$ (bei $x_1 = 10$ zeigen die Rückstrahler zum Schloss), also P (2 | 4).



45. (a)

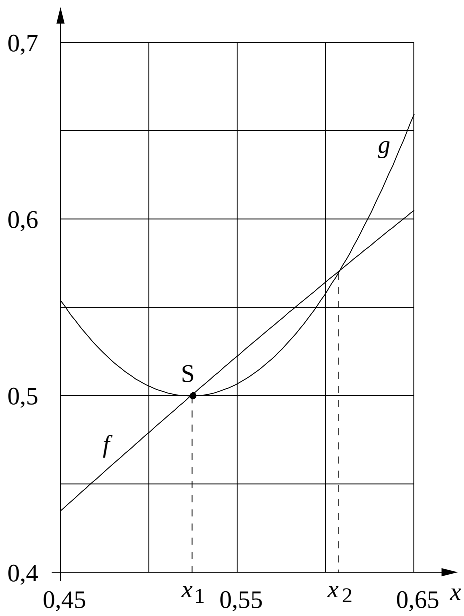
x	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65
f	0,435	0,479	0,525	0,565	0,605
g	0,554	0,506	0,507	0,558	0,660

Scheitel von g: S $\left(\frac{\pi}{6}\,\middle|\,\frac{1}{2}\right)$

(b) Mit $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$ und $f'(x) = \cos x$ folgt

$$f(x_1) = \frac{1}{2} \text{ und } f'(x_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$t(x) = f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1) = \\ = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \\ = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x+\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$$



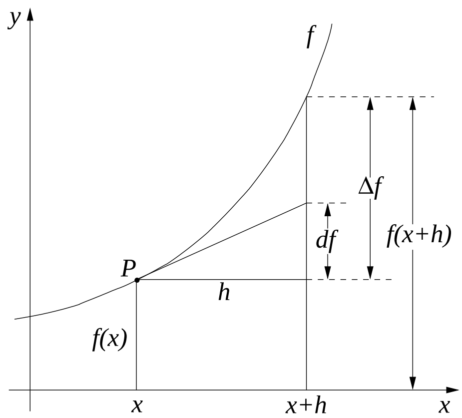
(c) Aus $g(x) = t(x)$ folgt

$$10\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \quad\Longrightarrow\quad 10\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$10\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Longrightarrow\quad x = x_2^* = \frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{20} = 0{,}61020$$
$$\delta_{\text{rel}} = \frac{x_2^*-x_2}{x_2} = 0{,}364\%$$

46. $v(t) = A\omega\cos\omega t, \qquad a(t) = -A\omega^2\sin\omega t = -\omega^2\cdot x(t)$

47. (a) Die Tangente an f in $\mathrm{P}\,(\,x\,|\,f(x)\,)$ hat die Steigung $\dfrac{\mathrm{d}f}{h} = f'(x)$. Das Differential $\mathrm{d}f = f'(x)h$ ist für kleine $|h|$ eine gute Näherung für $\Delta f = f(x+h) - f(x)$, d.h.

$$f(x+h) = f(x) + \Delta f \approx f(x) + f'(x)h$$



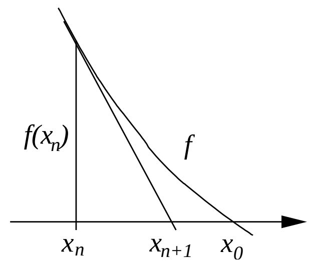
(b) Mit $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$, $(1+h)^2 \approx 1 + 2h$ und $\dfrac{1}{1+h} \approx 1 - h$ für $|h| \ll 1$ folgt

$$f^* \approx f\frac{1+\frac{\beta}{2}}{1-\frac{\beta}{2}} \approx f\left(1+\frac{\beta}{2}\right)^2 \approx f(1+\beta)$$

48. (a) x_n sei ein Näherungswert für die Nullstelle x_0 von f. Die Tangente an f in $\mathrm{P}\,(\,x_n\,|\,f(x_n)\,)$ hat die Steigung

$$f'(x_n) = \frac{0 - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \quad \Longrightarrow$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



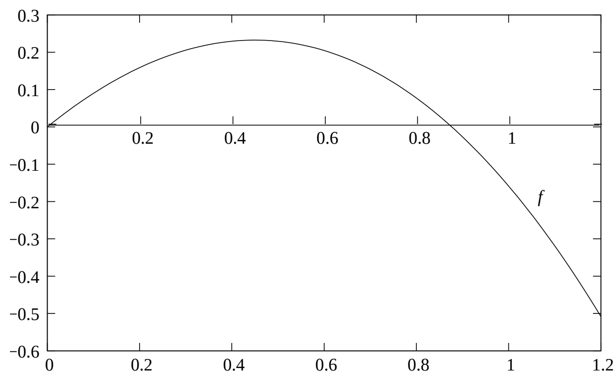
(b) Erste Nullstelle: $x_{01} = 0$

Geeignete Startwerte für die zweite Nullstelle x_{02}:

$x_1 = 1$ oder $x_1 = 0,8$

$f'(x) = \cos x - 2x$

$$x_{x+1} = x_n - \frac{\sin x_n - x_n^2}{\cos x_n - 2x_n}$$



x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$f(x)$	0	0,159	0,229	0,205	0,077	−0,159	−0,508

$x_1 = 1{,}0$	$x_1 = 0{,}8$
$x_2 = 0{,}8913959953$	$x_2 = 0{,}8856378451$
$x_3 = 0{,}8769848448$	$x_3 = 0{,}8768229140$
$x_4 = 0{,}8767262985$	$x_4 = 0{,}8767262271$
$x_5 = 0{,}8767262154$	$x_5 = 0{,}8767262153$
$x_6 = 0{,}8767262154$	$x_6 = 0{,}8767262154$
	$x_7 = 0{,}8767262154$

49. (a) $-1 \leqq \sin x \leqq 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 \leqq 2 + \sin x \leqq 3$, d.h. der Nenner von $f(x)$ kann nie null werden.

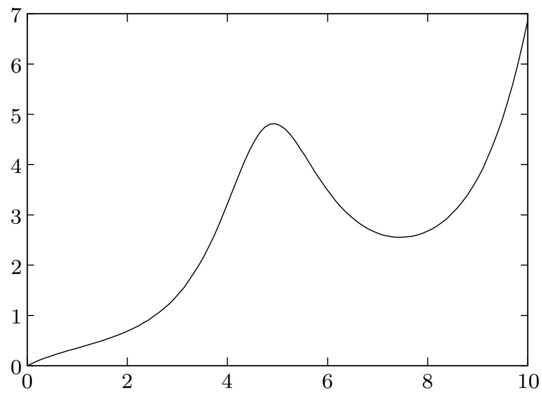
(b)

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	0,352	0,687	1,40

x	4	5	6	7
$f(x)$	3,22	4,80	3,49	2,63

x	8	9	10
$f(x)$	2,67	3,73	6,87

Zwei waagrechte Tangenten, d.h. zwei Nullstellen von f'.



(c) $f'(x) = \dfrac{2 + \sin x - x\cos x}{(2 + \sin x)^2}$

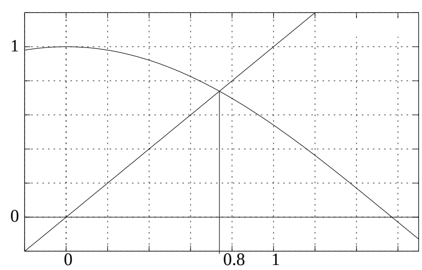
(d) $f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad g(x) = 2 + \sin x - x\cos x = 0$

$g'(x) = \cos x - (\cos x + x(-\sin x)) = x \sin x$

$x_{k+1} = x_k - \dfrac{g(x_k)}{g'(x_k)} = x_k - \dfrac{2 + \sin x_k - x_k \cos x_k}{x_k \sin x_k}$

$x_0 = 5,\ x_1 = 4{,}921321169,\ x_2 = 4{,}921526621,\ x_3 = 4{,}921526621$

50. (a) $n(x) = x - \cos x = 0$ löst man mit dem Newton-Verfahren. Einen geeigneten Startwert findet man z.B., wenn man die Grafen von x und $\cos x$ schneidet: $x_0 = 0{,}8$. $n'(x) = 1 + \sin x \quad \Longrightarrow$



$$x_{k+1} = x_k - \frac{n(x_k)}{n'(x_k)} = x_k - \frac{x_k - \cos x_k}{1 + \sin x_k}$$

$x_0 = 0{,}8,\ x_1 = 0{,}7398533064,\ x_2 = 0{,}7390852634,\ x_3 = 0{,}7390851332$

(b)

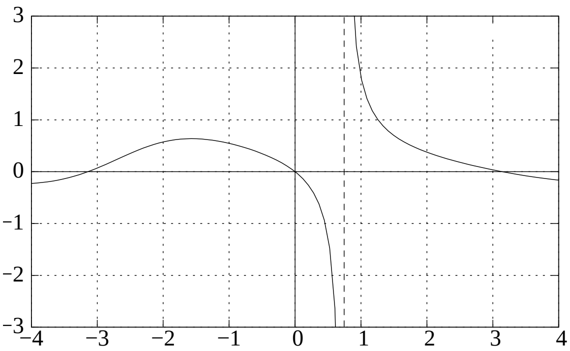
x	-4	-3	-2	-1
$f(x)$	$-0{,}22$	$0{,}07$	$0{,}57$	$0{,}54$

x	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$
$f(x)$	0	$-1{,}27$	$1{,}83$	$0{,}70$

x	2	3	4
$f(x)$	$0{,}38$	$0{,}035$	$-0{,}16$

Nullstellen:

$$x_{01} = -\pi, \quad x_{02} = 0, \quad x_3 = \pi$$



(c) $$f'(x) = \frac{\cos x \cdot (x - \cos x) - \sin x \cdot (1 + \sin x)}{(x - \cos x)^2} = \frac{x \cos x - \sin x - 1}{(x - \cos x)^2}$$

51. (a) $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}\,x \cdot \left(\frac{1}{3}\,x^2 - x\right) - x = -\frac{1}{9}\,x^3 + \frac{1}{3}\,x^2 - x & \text{für } x \leqq 0 \\ \frac{1}{3}\,x \cdot \left(\frac{1}{3}\,x^2 - x\right) - x = \frac{1}{9}\,x^3 - \frac{1}{3}\,x^2 - x & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$$x \leqq 0: \quad -x\left(\frac{1}{9}\,x^2 - \frac{1}{3}\,x + 1\right) = -x\left[\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] = 0$$

$$x > 0: \quad x\left(\frac{1}{9}\,x^2 - \frac{1}{3}\,x - 1\right) = x\left[\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right] = 0$$

Nullstellen bei $x_{01} = 0$ und $x_{02} = \frac{3}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 4{,}85$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

(b) f ist in ganz $\mathbb{R}$ stetig.

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}\,x^2 + \frac{2}{3}\,x - 1 = -\frac{1}{3}\left[(x-1)^2 + 2\right] & \text{für } x \leqq 0 \\ \frac{1}{3}\,x^2 - \frac{2}{3}\,x - 1 = \frac{1}{3}\left[(x-1)^2 - 4\right] & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = -1$, d.h. f ist in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

(c) $f'(x) < 0$ für $x < 3$, $f'(3) = 0$, $f'(x) > 0$ für $x > 3 \quad \Longrightarrow$

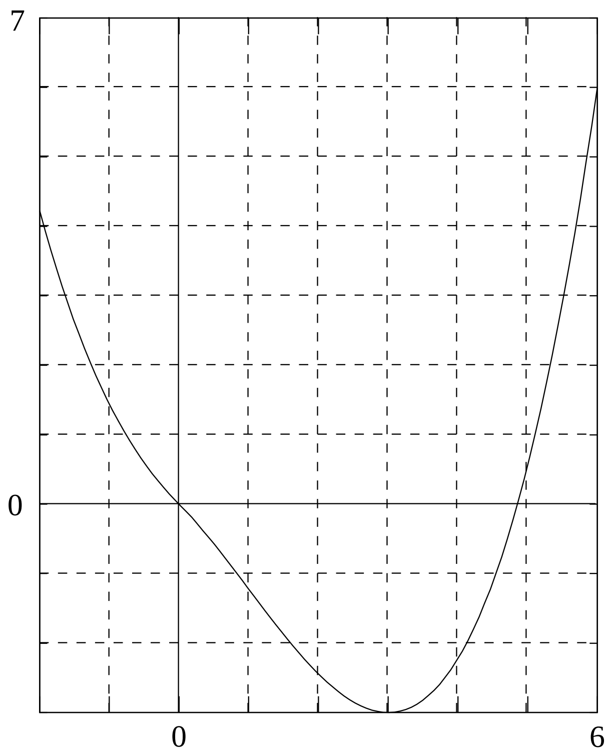
relatives Minimum bei $(3|-3)$

(d) $$f''(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}\,x + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}(x-1) & \text{für } x \leqq 0 \\ \frac{2}{3}\,x - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(x-1) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$f''(x) > 0$ für $x < 0$ und für $x > 1$, $f''(x) < 0$ für $0 < x < 1 \quad \Longrightarrow$ Wendepunkte bei $(0|0)$ und $\left(1\,\middle|\,-\frac{11}{9}\right)$

(e)

x	-2	-1	2	4	5	6
$f(x)$	$4{,}22$	$1{,}44$	$-2{,}44$	$-2{,}22$	$0{,}55$	6



(f) $f'(0) = -1 \quad \Longrightarrow \quad t_1(x) = -x$

$f'(1) = -\frac{4}{3} \quad \Longrightarrow \quad t_2(x) = -\frac{11}{9} - \frac{4}{3}(x-1) = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{9}$

Schnittpunkt von t_1 und t_2 bei $\left(\frac{1}{3}\,\middle|\,-\frac{1}{3}\right)$

52. (a) $\dfrac{1+i}{i} = \dfrac{(1+i)i}{i^2} = \dfrac{-1+i}{-1} = 1-i$

(b) $\dfrac{i}{1+i} = \dfrac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1+i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

(c) $i^{73} = i^{72} \cdot i = 1 \cdot i = i$

(d) $\dfrac{(5+12i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)} = \dfrac{-15+48+(-36-20)i}{9+16} = \dfrac{33}{25} - \dfrac{56}{25}\,i = 1{,}32 - 2{,}24\,i$

53. (a) $\dfrac{1-i}{-i} = \dfrac{(1-i)i}{-i^2} = \dfrac{1+i}{1} = 1+i$

(b) $\dfrac{i}{1-i} = \dfrac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{-1+i}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

(c) $(-i)^{1003} = -i^{1000} \cdot i^3 = -1 \cdot (-i) = i$

(d) $\dfrac{(3-4i)(12+5i)}{(12-5i)(12+5i)} = \dfrac{36+20+(-48+15)i}{144+25} = \dfrac{56}{169} - \dfrac{33}{169}\,i$

54. $z_1 = 6\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot 6\sin\frac{\pi}{3} = 3 + 3\sqrt{3}\,i$

$$z = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} = \frac{(2+4\sqrt{3}\,i)(4-2\sqrt{3}\,i)}{(4+2\sqrt{3}\,i)(4-2\sqrt{3}\,i)} = \frac{32+12\sqrt{3}\,i}{28} = \frac{8}{7} + \frac{3\sqrt{3}}{7}\,i$$

$$z = r\mathrm{E}(\varphi) \text{ mit } r = \sqrt{\left(\frac{8}{7}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{91}}{7}, \quad \tan\varphi = \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 33{,}0^\circ$$

55. (a) $|z_1| = \sqrt{1+3} = 2$

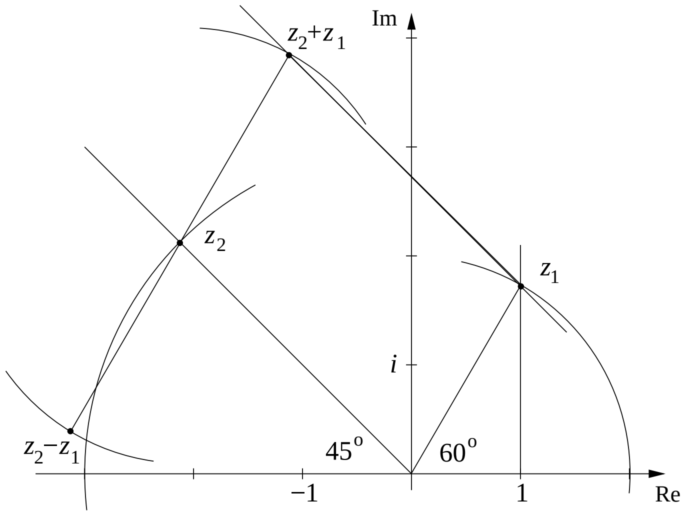
$\tan\varphi_1 = \sqrt{3}$

$\varphi_1 = 60^\circ$

$z_1 = 2\,\mathrm{E}(60^\circ) = 2\,\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\varphi_2 = 135^\circ$

$z_2 = 3\,\mathrm{E}(135^\circ)$



(b) $z_1 z_2 = 2\cdot 3\,\mathrm{E}(60^\circ + 135^\circ) = 6\,\mathrm{E}(195^\circ) = \underbrace{6\cos 195^\circ}_{-5{,}795555} + i\cdot\underbrace{6\sin 195^\circ}_{-1{,}5529}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\,\mathrm{E}(60^\circ - 135^\circ) = \frac{2}{3}\,\mathrm{E}(-75^\circ) = \frac{2}{3}\,\mathrm{E}(285^\circ) = \underbrace{\frac{2}{3}\cos 285^\circ}_{0{,}17255} + i\cdot\underbrace{\frac{2}{3}\sin 285^\circ}_{-0{,}64395}$$

(c) $(z_1)^8 = 2^8\,\mathrm{E}(8\cdot 60^\circ) = 256\,\mathrm{E}(480^\circ) = 256\,\mathrm{E}(120^\circ) = -128 + 128\sqrt{3}\,i = -128 + 221{,}7\,i$

(d) $(z_2)^n = 3^n\,\mathrm{E}(n\cdot 135^\circ) \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad n\cdot 135^\circ = m\cdot 180^\circ$ mit $m \in \mathbb{N}$

$3n = 4m$ ist erfüllt, wenn $n = 4k$ mit $k \in \mathbb{N}$

56. $a^n = 3^n\,\mathrm{E}(n\cdot 35^\circ)$ rein imaginär $\quad \Longleftrightarrow \quad n\cdot 35^\circ = 90^\circ + m\cdot 180^\circ$ mit $m \in \mathbb{N}$

$\Longleftrightarrow \quad n\cdot 7 = 18 + m\cdot 36 = 18(1+2m)$

Da $1+2m$ ungerade ist, muss n ein ungerades Vielfaches von 18 sein:

n	18	$3\cdot 18$	$5\cdot 18$	$7\cdot 18$
m	3	10	17	24
$\varphi = n\cdot 35^\circ$	630°	1890°	3150°	4410°
$\mathrm{E}(\varphi)$	E(270°)	E(90°)	E(270°)	E(90°)
a^n	$-3^{18}\,i$	$3^{54}\,i$	$-3^{90}\,i$	$3^{126}\,i$

15 Neue Aufgaben, Februar 2006

1. (a) $10^4 = 10000$
   (b) $4^4 = 256$
   (c) 6 Möglichkeiten: 1354, 1534, 3154, 3514, 5134, 5314
   (d) 12 Möglichkeiten:1173, 1137, 1371, 1731, 1713, 1317, 7113, 3117, 7131, 3171, 3711, 7311
   (e) Sie unterscheiden sich um mindestens 18, z. B. $3597 - 3579$.
   (f) 4 Möglichkeiten: 8070, 8173, 8276, 8379

2. 6 Blumentöpfe, da $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 > 365$ und $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 < 365$

3. (a)
   (b) 8% von 82 Millionen, also etwa 6,6 Millionen
   (c) 1 Flasche ist im Mittel schlecht gefüllt.

4. (a) E={110, 101, 011}; 1: „Prüfling besteht", 0: „Prüfling besteht nicht"
   (b) E={111, 110, 101, 011}; 1: „Prüfling besteht", 0: „Prüfling besteht nicht"
   (c) E={110, 101, 011}; 1: „Prüfling besteht", 0: „Prüfling besteht nicht"

5. (a) drei schwarze und sieben weiße Kugeln; Treffer, wenn scharze Kugel gezogen wird; es wird „mit Zurücklegen" gezogen
   (b) Urne mit 49 roten (Mädchen) und 51 blauen Kugeln (Jungen). Man zieht „mit Zurücklegen" und erhält drei rote Kugeln.

6. (a) $5 + 5 + 8 = 18$ Quadrate, $8 \cdot 3 = 24$ Dreiecke
   (b) $18 \cdot (4\,\text{cm})^2 + 24 \cdot \left(\frac{4\,\text{cm}}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 288\,\text{cm}^2 + 96\,\text{cm}^2 = 384\,\text{cm}^2$
   (c) Volumen der Verpackung:
   $V_{\text{Verpack}} = \left[4^3 + 6 \cdot 4^2 \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} + 12 \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\right] \text{cm}^3 = 527{,}53\,\text{cm}^3$

(d) Volumen der 4 Dosen: $V_{\text{Dosen}} = 4 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 3{,}1\,\text{cm} \right)^2 \pi \right] \cdot 5{,}2\,\text{cm} \approx 157\,\text{cm}^3$

Also werden 30% der Verpackung ausgefüllt.

(e) $14,3\%$

(f) $33,6\%$

16 Neue Aufgaben, Januar 2006

1. (a)
   (b)
   (c)
   (d) Spielende nach dem zweiten Wurf liefert eine gerade Punktzahl;
   Spielende nach dem dritten Wurf heißt, eine Zahl zweimal und eine weitere Zahl, also z. B. 1 - 2 - 1. 3 kann mit drei Würfen nur mit 1 - 1 - 1 erzeugt werden, was nicht möglich ist und auch nicht mit mehr als drei Würfen.
   (e) $27 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 6$
   (f) vier verschiedene Spielverläufe: 2 - 1 - 2, 1 - 2 - 2, 1 - 3 - 1, 3 - 1 - 1

2.

3. (a) bei 3, nämlich 25, 49, 81
   (b) 9

4.

5. (a) 25%, 44%
   (b) 45, 80
   (c) 200%
   (d) Am Donnerstag 80 und am Freitag 180 15 bis 24-jährige, also um 125% mehr.

6. (a) $(1 \cdot 3 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 3) : 25 \approx 2{,}4$
   (b)
   (c) Frauen, die keine Kinder haben bzw. keine Kinder im entsprechenden Alter haben, werden nicht berücksichtigt.

7. (a) $\frac{8}{44} = \frac{2}{11} \approx 18\%$
   (b) $\frac{5}{42} \approx 12\%$
   (c) ja, $\frac{6}{24} = 25\%$

(d) Sophie: $\frac{13}{25} = 52\%$, Gregor: $\frac{12}{25} = 48\%$
(e) $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 33\%$
(f) $\frac{6}{10} = 60\%$

8. (a) 33%
   (b) 80%

9. (a) $3{,}6 : 9 = 0{,}4$
   (b) $20 : 10 = 2$
   (c) Mittelwert: $170 : 5 = 34$, z. B. $15 \to 20$ und $54 \to 49$

10. $x = -\frac{4}{11}$

11. Insgesamt gibt es bei zwei Würfen 36 Möglichkeiten.

Augensumme	5	6	7	8
Anzahl Möglichkeiten	4	5	6	5

Ansgar hat 20 Gewinnmöglchkeiten und gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{20}{36} = 56\%$. Also ist seine Gewinnmöglichkeit besser.

12. Werfen einer 50-ct-Münze ist Laplace-Experiment

13. Z. B. zweimaliges Ziehen eines Loses

14. $\frac{2}{6} \approx 33\%$, $\frac{3}{6} = 50\%$

15. $\frac{7}{11} \approx 64\%$, $\frac{4}{11} \approx 36\%$, $\frac{5}{11} \approx 45\%$, $\frac{7}{11} \approx 64\%$

16. (a) $E = \{(2;1);(2;3);(2;5);(3;1);(3;3);(3;5);(5;1);(5;3);(5;5)\}$
    (b) $E = \{(2;1);(2;3);(2;5);(4;1);(4;3);(4;5);(6;1);(6;3);(6;5)\}$
    (c) $E = \{(1;1);(2;2);(3;3);(4;4);(5;5);(6;6)\}$
    (d) $E = \{(5;5);(4;6);(6;4)\}$

17. (a) (2) 100%, (3) individuelle Schätzung, (1) individuelle Schätzung
    (b) (3) individuelle Schätzung, (1) individuelle Schätzung, (2) $\frac{1}{6} \approx 17\%$
    (c) (1) 100%, (2) individuelle Schätzung,