SMART

Sammlung mathematischer Aufgaben als Hypertext mit TEX

Neue Aufgaben (Gymnasium)

herausgegeben vom

Zentrum zur Förderung des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts
der Universität Bayreuth*

23. Januar 2008

*Die Aufgaben stehen für private und unterrichtliche Zwecke zur Verfügung. Eine kommerzielle Nutzung bedarf der vorherigen Genehmigung.

Inhaltsverzeichnis

1 Neue Aufgaben, Januar 2008

1. **Krebsfrüherkennung**

   Im Folgenden sind die Ergebnisse eines schwedischen Modellversuchs zur Krebsfrüherkennung durch Mammographie dargestellt:

		Vorliegen einer Krebserkrankung		
		ja	nein	gesamt
Untersuchungs-Ergebnis	auffällig	$0,75\%$	$2,62\%$	$3,37\%$
	ohne Befund	$0,07\%$	$6,56\%$	$96,63\%$
gesamt		$0,82\%$	$99,18\%$	100%

   (a) Welche Informationen kann man aus diesen Daten entnehmen?

   (b) Versucht mithilfe dieser Resultate Außenstehende über die mathematischen Hintergründe einer solchen Vorsorgeuntersuchung zu informieren. Erstellt ein entsprechendes Wandplakat.

   Quelle: PM 6/42 (2000)

Lösung: (a) $p(\text{krank}) = 0,82\%$, $p(\text{Befund auffällig}) = 3,37\%$, usw.
$p(\text{krank} \cap \text{Befund auffällig}) = 0,75\%$, $p(\text{nicht krank} \cup \text{Befund auffällig}) = 2,62\%$
$p_{\text{Befund auffällig}}(\text{krank}) = \frac{0,75\%}{3,37\%} = 22,2\%$,
d. h. bei einem auffälligem Befund ist nur etwa jeder fünfte Untersuchte krank.
$p_{\text{krank}}(\text{Befund auffällig}) = \frac{0,75\%}{0,82\%} = 91,5\%$

(b) Z. B.:
Da die Untersuchungen immer mit Fehlern behaftet sind, müssen Ergebnisse sachlich gedeutet werden. Bei der Entwicklung von Untersuchungsmethoden ist es primär wichtig von den kranken Personen einen sehr hohen Anteil zu erkennen, hier $p_{\text{krank}}(\text{Befund auffällig}) = 91,5\%$. Oft, insbesondere bei seltenen Erkrankungen, muss man damit in Kauf nehmen, dass viele gesunde ebenfalls das Ergebnis Befund auffällig erhalten. Dieses muss dann in weiteren Untersuchungen geklärt werden.

2 Neue Aufgaben, Dezember 2007

1. Manuelas Zimmer ist 4,00m lang, 3,50m breit und 2,50m hoch. Eine der beiden großen Wandflächen soll einen gelben Farbanstrich erhalten.

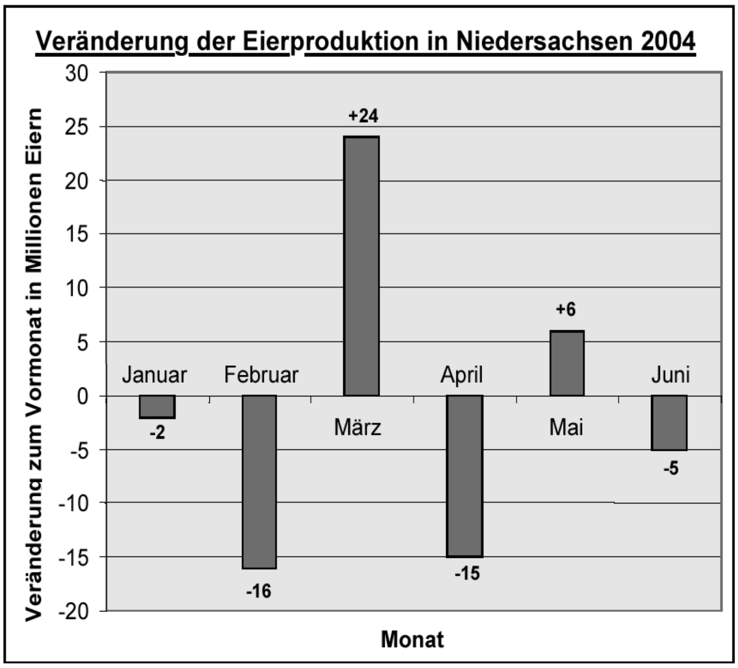
Von der letzten Renovierung ist noch eine halbe Büchse dieser Farbe übrig. Reicht die Menge für den Anstrich der Wand aus? Begründe deine Antwort.

Quelle: Vergleichsarbeit bundesland- und schulartübergreifend in der Jahrgangsstufe 8, Materialien zur Weiterarbeit

Lösung:

- Fläche der Wand: $4,00\text{m} \cdot 2,50\text{m} = 10\text{m}^2$
- Farbe der Büchse reicht für 10m^2 bis $12,5\text{m}^2$
- Also reicht die Farbe in der Büchse.

2. Viele der in Deutschland verbrauchten Eier werden in Niedersachsen gelegt. Im Jahr 2003 waren dies 2323 Millionen Eier, davon 283 Millionen Eier im Dezember 2003. Für das Folgejahr ist im untenstehenden Diagramm die Zu- oder Abnahme zum jeweiligen Vormonat dargestellt. Zum Beispiel sind im März 24 Millionen Eier mehr verkauft worden als im Februar 2004.



Quelle: Niedersächsisches Landesamt für Statistik

(a) Wie viele Eier werden im Juni im Vergleich zum Januar verkauft?

(b) Wie viele Eier werden im Juni verkauft?

nach: Vergleichsarbeit bundesland- und schulartübergreifend in der Jahrgangsstufe 8, Materialien zur Weiterarbeit

Lösung: (a) 6 Millionen weniger (b) 8 Millionen weniger als im Dezember 2003, also 275 Millionen

3. Aus einem Draht von einem Meter Länge wurde das Kantenmodell eines Würfels gebaut. Es blieb ein Reststück von 4,0cm. Wie lang ist eine Würfelkante?

   Quelle: Vergleichsarbeit bundesland- und schulartübergreifend in der Jahrgangsstufe 8, Materialien zur Weiterarbeit

Lösung: 8cm

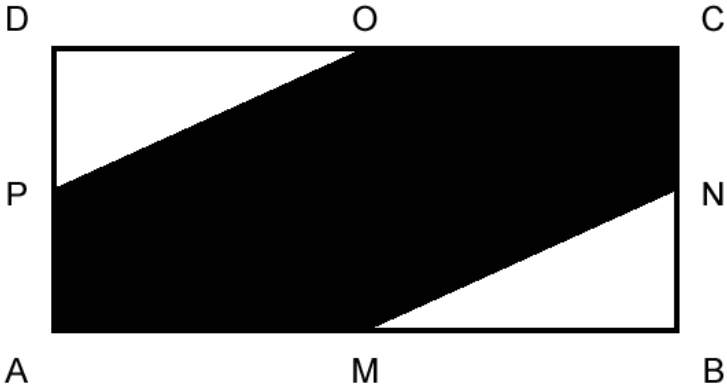
4. Nach den Regeln des Internationalen Tischtennisverbandes ITTF muss ein Tischtennis einen Durchmesser von exakt 40mm haben.Bei einem Hersteller von Tischtennisbällen befinden sich bei der Endkontrolle 5000 Bälle in einer Box. Es werden zufällig 100 Bälle ausgewählt und deren Durchmesser wird geprüft.
   Bei dieser Auswahl waren 5 Bälle außerhalb der Norm.

Wie viele Bälle, die nicht der Norm entsprechen, sind voraussichtlich in der ganzen Box enthalten?

Quelle: Vergleichsarbeit bundesland- und schulartübergreifend in der Jahrgangsstufe 8, Materialien zur Weiterarbeit

Lösung: 250

5. Gegeben ist ein Rechteck ABCD. Die Punkte M, N, O und P sind Mittelpunkte der Rechteckseiten.



Welcher Anteil der gesamten Rechteckfläche ist dunkel?

Quelle: Vergleichsarbeit bundesland- und schulartübergreifend in der Jahrgangsstufe 8, Materialien zur Weiterarbeit

Lösung: $\frac{3}{4}$

6. Corinna und Sebastian haben die Ergebnisse einer Verkehrszählung in einer Tabelle zusammengestellt:

PKW	LKW	Busse	Motorräder
50%	26%	8%	

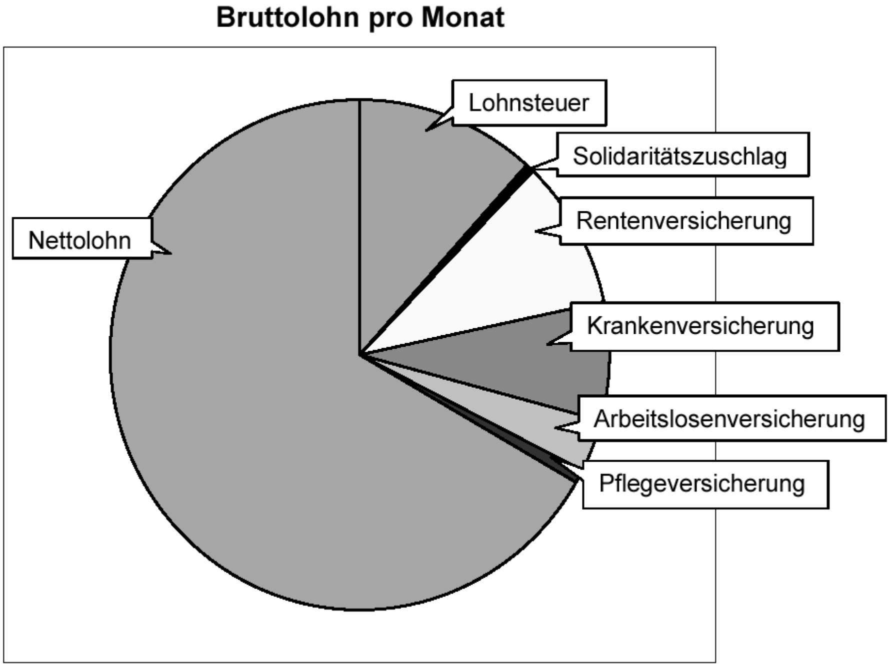
Corinna wird nach Schulschluss von ihrer Freundin nach der Anzahl der jeweils gezählten Fahrzeuge gefragt. Da Sebastian die Strichliste mit nach hause genommen hat, versucht Vorinna sich zu erinnern. Sie weiß genau, dass sie 13 LKW gezäht haben.
Berechne aus der Tabelle und Corinnas Aussage, wie viele Fahrzeuge jeweils gezählt wurden.

nach: Vergleichsarbeit bundesland- und schulartübergreifend in der Jahrgangsstufe 8, Materialien zur Weiterarbeit

Lösung: 50 Fahrzeuge, 16% Motorräder, 25 PKW, 4 Busse, 8 Motorräder

7. Frau Schulz erfährt beim Vorstellungsgespräche, dass sie für ihre neue Tätigkeit einen monatlichen Bruttolohn von 2400,00 EUR erhält.
   Den monatlichen Bruttolohn erhält ein Arbeitnehmer nicht ausgezahlt.
   Er hat noch Abgaben zu leisten. Den Auszahlungsbetrag nennt man Nettolohn.

   Der Bruttolohn von Frau Schulze setzt sich folgendermaßen zusammen:

   Wie viel Euro bekommt Frau Schulze ausgezahlt?

   Quelle: Vergleichsarbeit bundesland- und schulartübergreifend in der Jahrgangsstufe 8, Materialien zur Weiterarbeit

Lösung: etwa $\frac{2}{3}$ vom Bruttolohn, also ca. 1600 EUR

8. Innenwinkel im n-Eck

   (a) Stelle einen Term auf, mit dem sich die Summe der Innenwinkel in einem n-Eck berechnen lässt.
   (b) Berechnen die Summe der Innenwinkel für ein 6-Eck.
   (c) Für welches n-Eck beträgt die Summe der Innenwinkel 540°?
   (d) In welchem n-Eck ist jeder Innenwinkel 135° groß?

   nach: Vergleichsarbeit bundesland- und schulartübergreifend in der Jahrgangsstufe 8, Materialien zur Weiterarbeit

Lösung: (a) $(n-2) \cdot 180°$
(b) $720°$
(c) Fünfeck ($n = 5$)
(d) Achteck ($n = 8$)

9.

3 Neue Aufgaben, November 2007

1. Wie viele Pkw stehen etwa in einem 3 Kilometer langen Stau?

   Quelle: Jufo go (Spiel zum Wettbewerb Jugend forscht)

Lösung: 500

2. Auf einem Werbeplakat ist ein 6m hohes Gesicht abgebildet. Wie hoch ist ein Schneidezahn?

   Quelle: Jufo go (Spiel zum Wettbewerb Jugend forscht)

Lösung: ca. 20cm

3. Welche Höhe hat die Zugspitze in einem Modell des Maßstabs 1 : 100 000?

   Quelle: Jufo go (Spiel zum Wettbewerb Jugend forscht)

Lösung: 3cm

4. (a) Eine Strecke von 3 km erscheint auf einer Landkarte 3 cm lang. Welchen Maßstab hat die Karte?

   (b) Welche Länge hat eine Strecke von 5 mm auf einer Karte mit dem Maßstab 1 : 5 000 in Wirklichkeit?

   Quelle: Jufo go (Spiel zum Wettbewerb Jugend forscht)

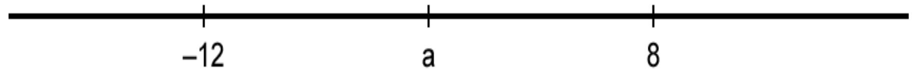
Lösung: (a) 1:100 000 (b) 25m

5. Gib an, ob die folgende Aussage richtig ist, und begründe deine Antwort:
   „Wenn man zur Zahl 5 eine Zahl addiert, dann ist das Ergebnis immer größer 5."

   Quelle: Vergleichsarbeit bundesland- und schulartübergreifend in der Jahrgangsstufe 8, Materialien zur Weiterarbeit

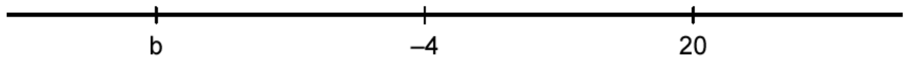
Lösung: Die Aussage ist falsch. Wird 0 Addiert ist das Ergebnis 5. Wird eine negative Zahl addiert, ist das Ergebnis kleiner 5.

6. (a) Die Zahl a liegt auf der Zahlengerade genau in der Mitte zwischen -12 und 8.



Für welche Zahl steht a?

(b) Die Zahl -4 liegt auf der Zahlengerade genau in der Mitte zwischen 20 und der Zahl b.



Für welche Zahl steht a?

Quelle: Vergleichsarbeit bundesland- und schulartübergreifend in der Jahrgangsstufe 8, Materialien zur Weiterarbeit

Lösung: (a) -2, (b) -28

7. Im Jahr 2006 hat die Deutsche Bahn zwischen Nürnberg und Ingolstadt eine 89km lange ICE-Hochgeschwindigkeitsstrecke in Betrieb genommen. Frau Dorn, die regelmäßig mit dem Zug von Nürnberg nach Ingolstadt fährt, stellt fest: ,,Für mich verkürzt sich die Fahrzeit von 70 Minuten auf 28 Minuten.”

8. Um wie viel Prozent verkürzt sich die Fahrzeit von Frau Dorn?

9. Welcher Term beschreibt die Durchschnittsgeschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, die der ICE auf der Hochgeschwindigkeitsstrecke besitzt?

(I) $\frac{89}{0{,}28}$ (II) $\frac{89}{28} \cdot 60$ (III) $\frac{89}{28} \cdot 3,6$ (IV) $\frac{28}{89} \cdot 60$

Bayerischer Mathematik Test für die 8. Klasse, 2007

Lösung: (a) $\frac{42}{70} = 0,6 = 60\%$

(b) (II)

10. Bei einem Rechteck wird eine Seite um 10% vergrößert, die andere um 10% verkleinert. Wie ändert sich der Flächeninhalt?

Quelle: Jufo go (Spiel zum Wettbewerb Jugend forscht)

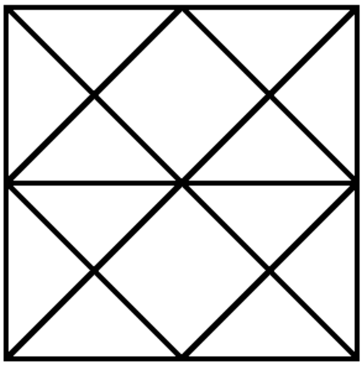
Lösung: 1% kleiner

11. Du bekommst 25% von einer halben Pizza. Welcher Bruchteil ist das?

    Quelle: Jufo go (Spiel zum Wettbewerb Jugend forscht)

Lösung: $\frac{1}{8}$

12. Ein Quadrat wurde durch seine Diagonalen und einige Verbindungslinien zwischen der Seitenmitten in Teilflächen zerlegt.

    Färbe 75% der Gesamtfläche ein. Verwende nur gegebene Teilflächen.

    Quelle: Vergleichsarbeit bundesland- und schulartübergreifend in der Jahrgangsstufe 8, Materialien zur Weiterarbeit

Lösung: alle Teilflächen mit Ausnahme

- von zwei Quadrate
- von vier Dreiecken
- von einem Quadrat und zwei Dreiecken (

13. Gegeben ist der Term $T(a;b) = \frac{a+b}{a-b}$.

    (a) Berechne den Wert des Terms für $(a;b) = (-2;3)$.
    (b) Gib ein Zahlenpaar $(a;b)$ an, das nicht in den Term eingesetzt werden darf.
    (c) Gib ein Zahlenpaar $(a;b)$ an, das den Termwert 0 liefert.

    Bayerischer Mathematik Test für die 10. Klasse, 2007

Lösung: (a) $-\frac{1}{5}$, (b) z. B. $(0;0)$, (c) z. B. $(1;-1)$

14. Händler Meier überlegte zum Jahrewechsel 2006/2007, wie er die Anhebung des Mehrwertsteuersatzes von 16% auf 19% bei seinen Preisen berücksichtigen könnte. Am Beispiel einer Digitalkamera, die im Dezember noch für 199 EUR angeboten wurde, rechnete er: ,,3% von 199 EUR aus, das sind 5,97 EUR, dann ergäbe sich rein rechnerisch ein neuer Preis von 204,97 EUR."

    Ein Kollege erklärte ihm: ,,Nein, dein Ansatz ist falsch. Du musst folgendermaßen vorgehen: Im Dezember kostete die Kamera einschließlich 16% Mehrwertsteuer 199 EUR, also ..."

    Setze die Erklärung fort, so dass der Händler Meier genau weiß, welche Rechnungen er ausführen müsste. Die Rechnungen selbst brauchen nicht durchgeführt zu werden.

    Bayerischer Mathematik Test für die 10. Klasse, 2007

Lösung: Z. B. ohne Mehrwertsteuer kostete die Digitalkamera 199EUR $: 1,16$; mit 19% Mehrwertsteuer kostet sie 199EUR $: 1,16 \cdot 1,19$

15. (a) Konstruiere die Mittelsenkrechte der waagrecht liegenden Strecke $[PQ]$ und zeichnen den Kreis, der $[PQ]$ als Durchmesser hat.

    (b) R ist derjenige Schnittpunkt von Mittelsenkrechte und Kreis, der oberhalb der Strecke $[PQ]$ liegt. Das Dreieck $\triangle PQR$ ist dann gleichschenklig, wenn R auf der Mittelsenkrechten von $[PQ]$ liegt und deshalb von P und Q gleich weit entfernt ist. Begründe, dass das Dreieck $\triangle PQR$ auch rechtwinklig ist.

    (c) Es gilt: *In jedem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck zerlegt die Mittelsenkrechte der Basis das Dreieck in zwei kongruente Teildreiecke.*

    Welche der folgenden Argumentationen ist richtig?

    Die zwei Teildreiecke sind kongurent, ...

    - *... weil man zeigen kann, dass die Teildreiecke in allen drei Winkeln übereinstimmen und Dreiecke, die in allen drei Winkeln übereinstimmen, immer kongruent sind.*
    - *... weil man zeigen kann, dass die Teildreiecke in allen drei Seiten übereinstimmen und Dreiecke, die in allen drei Seiten übereinstimmen, immer kongruent sind.*
    - *... weil man zeigen kann, dass die Flächeninhalte der Teildreiecke gleich groß sind und Dreiecke, die den gleichen Flächeninhalt besitzen, immer kongruent sind.*
    - *... weil die Mittelsenkrechte Symmetrieachse des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ist.*

    Bayerischer Mathematik Test für die 8. Klasse, 2007

Lösung: (a)

(b) $\triangle PQR$ ist rechtwinklig, weil R auf dem Thaleskreis über $[PQ]$ liegt.
(c) Die zweite und vierte Aussage sind richtig.

16. (a) Berechne den Wert des Terms $(\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} - \frac{1}{3}) : 0,5$
    (b) Durch welche Zahl muss man die zahl $0,5$ ersetzen, damit man den doppelten Termwert erhält?

    Bayerischer Mathematik Test für die 8. Klasse, 2007

Lösung: (a) $\frac{4}{21}$
(b) $0,25$

17. (a) Welche Vierecke besitzen mindestens zwei Symmetrieachsen?
    (b) Welche der folgenden Figuren hat die meisten Symmetrieachsen: Rechteck, gleichseitiges Dreieck, Kreis

    Quelle: Jufo go (Spiel zum Wettbewerb Jugend forscht)

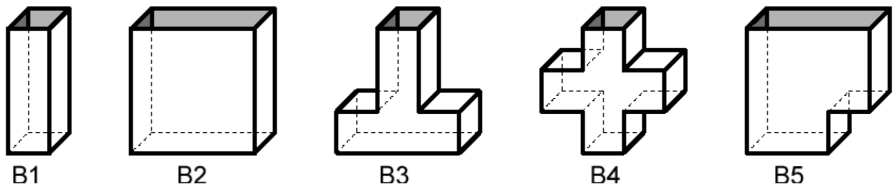
Lösung: (a) Rechteck, Quadrat, Raute
(b) Kreis (unendlich viele Symmetrieachsen)

18. Nenne 2 Eigenschaften eines Dreiecks, bei dem eine Höhe gleichzeitig Mittelsenkrechte ist.

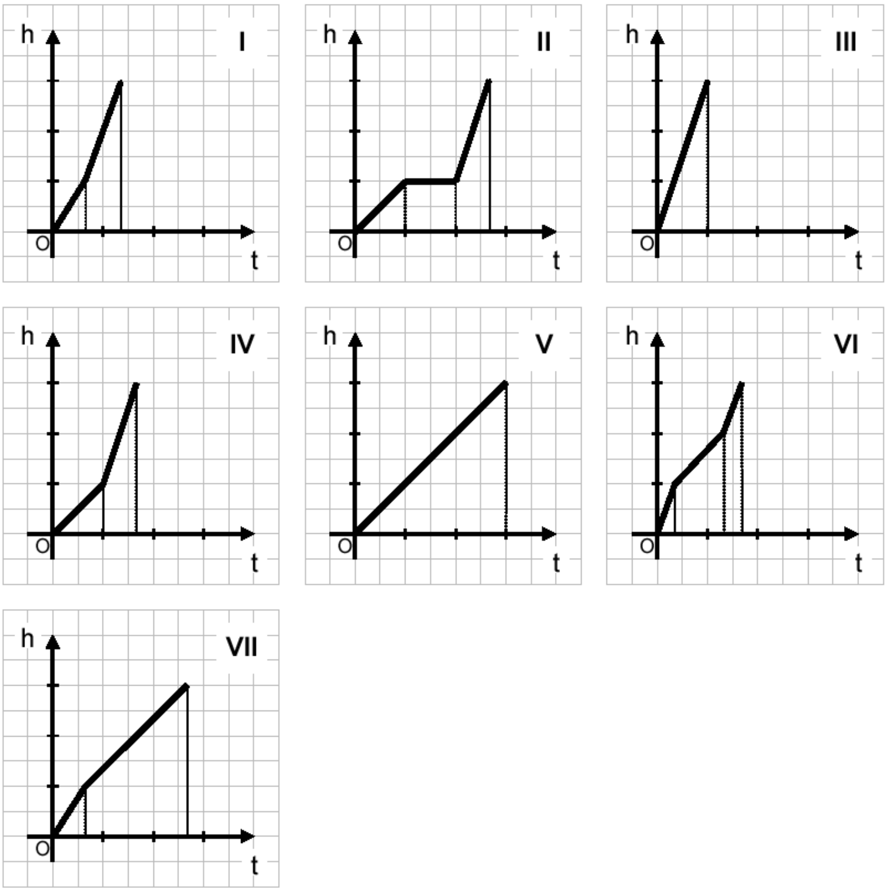
    Quelle: Jufo go (Spiel zum Wettbewerb Jugend forscht)

Lösung: 2 gleichlange Seiten, zwei gleichgroße Winkel, achsensymmetrisch; es handelt sich um ein gleichschenkliges Dreieck.

19. Jeder der abgebildeten Behälter wird gleichmäßig mit der gleichen Wassermenge pro Zeiteinheit gefüllt.



Die folgenden grafischen Darstellungen geben die Höhe h des Wasserstandes in Abhängigkeit von der Füllzeit t an.



Ordne die Behälter die zugehörigen Graphen zu.

Quelle: Vergleichsarbeit bundesland- und schulartübergreifend in der Jahrgangsstufe 8, Materialien zur Weiterarbeit

Lösung: B1: III, B2: V, B3: IV, B4: VI, B5: VII

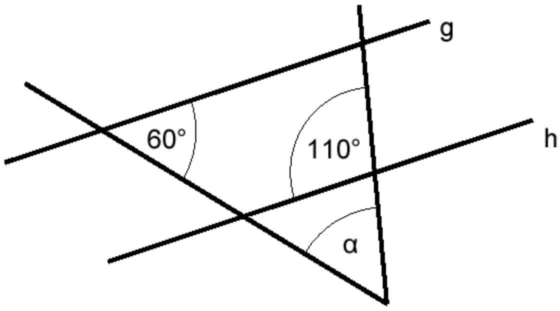
20. Max möchte sich einen Computer für 1050 EUR kaufen. Von seiner Oma bekommt er dafür 350 EUR. Er selbst kann monatlich 140 EUR sparen.
Mit welcher Gleichung kann Max berechnen, wie viele Monate er sparen muss?

A: 1050 EUR = 140 EUR $\cdot\, x$
B: x + 350 EUR = 1050 EUR
C: 1050 EUR − 350 EUR = 140 EUR $\cdot x$
D: 140 EUR $\cdot\, x$ − 350 EUR = 1050 EUR
E: 350 EUR $\cdot\, x$+ 140 EUR = 1050 EUR

Quelle: Vergleichsarbeit bundesland- und schulartübergreifend in der Jahrgangsstufe 8, Materialien zur Weiterarbeit

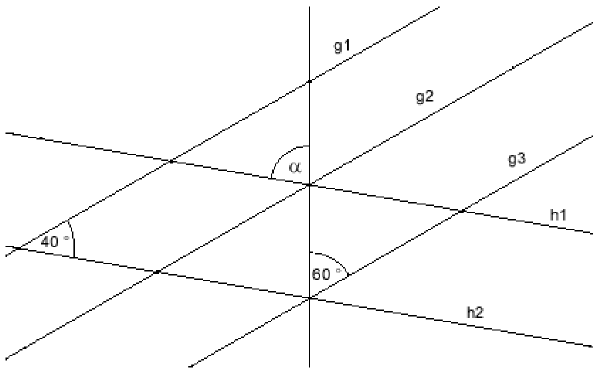
Lösung: C

21. (a) Die Geraden g und h verlaufen parallel zueinander.



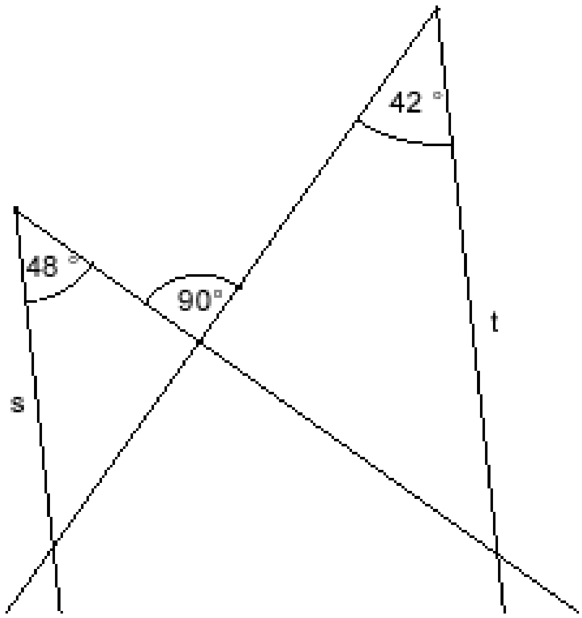
Wie groß ist α?

(b) Die Geraden g_1, g_2 und g_3 sowie h_1 und h_2 sind parallel zueinander.



Wie groß ist α?

(c) Begründe warum die Geraden s und t parallel zueinander sind.



Wie groß ist α?

Quelle: Vergleichsarbeit bundesland- und schulartübergreifend in der Jahrgangsstufe 8, Materialien zur Weiterarbeit

Lösung: (a) 50°, (b) 80°, (c) Innenwinkel im rechten Dreieck sind 90° und 48°, daraus kann der Winkel unten zu 42° berechnet werden, woraus die Parallelität wegen gleicher Z-Winkel folgt

22. In einer Gartenwirtschaft werden Bratwürste angeboten:

4 Bratwürstl	4,20 EUR	50 Bratwürstl	32,50 EUR
6 Bratwürstl	4,95 EUR	100 Bratwürstl	64,50 EUR
8 Bratwürstl	5,70 EUR	Bratwürstsemmel	1,80 EUR

(a) Zeigen Sie, dass der Preis nicht direkt proportional zur Anzahl der Bratwürste ist.

(b) Jeder der 25 Schüler einer Klasse möchte 4 Bratwürste bestellen. Berechnen Sie, wie viele Euro jeder Schüler spart, wenn die Klasse stattdessen eine Portion mit 100 Würsten bestellt.

Bayerischer Mathematik Test für die 10. Klasse, 2007

Lösung: (a) Z. B. 3 x 4 Bratwürstl kosten 12,60 EUR; 2 x 6 Bratwürstl kosten 9,90 EUR; damit liegt keine direkte Proportionalität vor

(b) 25 x 4 Bratwürstl kosten 105,00 EUR; Jeder Schüler spart (105,00 EUR - 64,50 EUR): 25 =1,62 EUR

23. Die Länge einer Schnur beträgt 4 Meter. Welchen Flächeninhalt kann man damit maximal einschließen?

    Quelle: Jufo go (Spiel zum Wettbewerb Jugend forscht)

Lösung: Man legt die Schnur kreisförmig, um den maximalen Flächeninhalt zu erhalten: 1,3m^2

24. Eine gerade Pyramide mit einer quadratischen Grundfläche der Seitenlänge g hat die Höhe h.

    (a) Löse die Formel $V = \frac{1}{3}g^2h$ für das Volumen der Pyramide nach der Seitenlänge g auf.

    (b) Wie groß ist der Winkel, den eine Seitenkante der Pyramide mit der Grundfläche einschließt, wenn die Höhe h halb so lang wie die Diagonale des Grundflächenquadrats ist?

    Die Pyramide wird nun von einer Ebene geschnitten, die parallel zur Grundfläche ist und von dieser den Abstand $\frac{h}{2}$ hat.

    (c) Zeichne die Pyramide und die entstandene Schnittfläche in einem Schrägbild.

    (d) Welchen Bruchteils des Inhalts der Grundfläche ist der Inhalt der Schnittfläche?

    (e) Welchen Bruchteils des Pyramidenvolumens ist das Volumen der abgeschnittenen kleinen Pyramide?

    Bayerischer Mathematik Test für die 10. Klasse, 2007

Lösung:
(a) $g = \sqrt{\frac{3V}{h}}$
(b) $45°$
(c)
(d) $\frac{1}{4}$
(e) $\frac{1}{8}$

25. Bestimme die Lösung der folgenden Gleichung

$$x - 3 = \frac{4 - 3x}{x} \qquad (G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

    Bayerischer Mathematik Test für die 10. Klasse, 2007

Lösung: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$

4 Neue Aufgaben, Juni 2007

1. **Münzteppich aus Pfennigen**

> **Münzteppich aus mehr als drei Tonnen Pfennigen**
>
> **Lage** (dpa) Nichts für Pfennigfuchser: Im nordrhein-westfälischen Lage bildeten am Samstag zahllose Pfennigmünzen auf der Straße einen riesigen Geldteppich im Wert von rund 18 000 Mark. Die insgesamt mehr als drei Tonnen Münzen waren von 120 Jugendlichen auf einer Fläche von etwa 397,97 Quadratkilometern ausgebreitet worden.

Leipziger Volkszeitung vom 2.12.1996 (IP)

Prüfe die Gewichtsangabe und die Flächenangabe in der Zeitungsmeldung.
Quelle: Herget/Scholz: Die etwas andere Aufgabe (1998)

Lösung: Ein Pfennigstück wiegt ca. 2 g. Also Gewicht von 1800.000 Pfennigen: $3,6\,\mathrm{t}$

2.

3.

4.

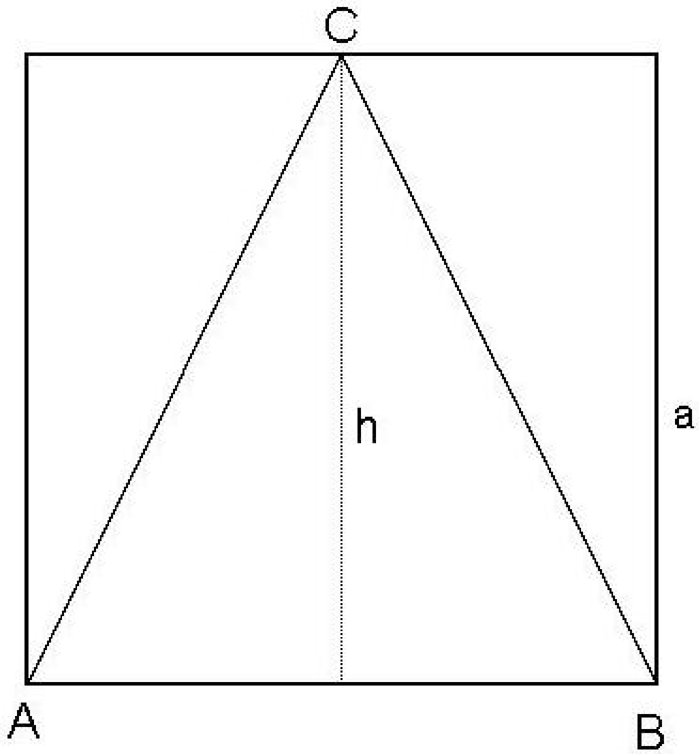
5.

6.

7.

8.

9. **Dreiecke im Quadrat**



Oben abgebildet siehst du ein Dreieck, dass in ein Quadrat „eingepasst“ wurde.

(a) Mache möglichst viele (mindestens 5) mathematische Aussagen über die Figuren (z.B. über Flächeninhalte, Winkel,...).

(b) Verschiebe den Punkt C auf der Höhenlinie h so, dass das entstehende Dreieck $\triangle ABC'$ gleichseitig ist. Wie groß ist dann h'? Beantworte die Frage mit und ohne Trigonometrie!

(c) Wie viel Prozent der Gesamtfläche nimmt das neue Dreieck ein?

Lösung: (a) Z. B. Das Dreieck $\triangle ABC$ ist gleichschenklig. Die Fläche des Dreiecks halbiert die Fläche des Quadrats. Im Dreieck $\triangle ABC$ gilt $\alpha = \beta$. h ist Symmetrieachse von $\triangle ABC$ und vom Quadrat. Das Quadrat hat 4 Symmetrieachsen.

(b)
- Das Dreieck ist gleichseitig, also sind alle Winkel 60° und es gilt $\tan 60° = \frac{2h'}{a}$. Wegen $\tan 60° = \sqrt{3}$ folgt: $h' = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.
- Eine weitere Lösungsmöglichkeit: Die Kantenlänge des Quadrats ist a. Dann soll für das Dreieck laut Pythagoras gelten: $(\frac{1}{2}a)^2 + h'^2 = a^2$. Daraus folgt dann die Lösung für h'.

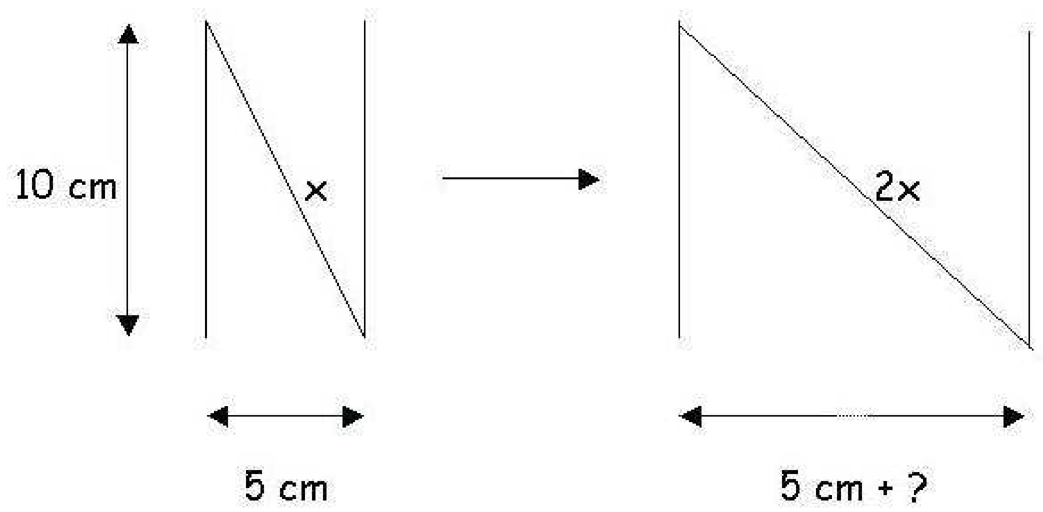
(c) $A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow 43\%$

10. **Buchstaben-Geometrie**

Einige Buchstaben sind hervorragende Repräsentanten für die Geometrie. Schauen wir uns z.B. den Buchstaben N an - er besteht aus zwei senkrechten Linien und einer schrägen Linie. Der Buchstabe ist ca. doppelt so hoch wie breit. Wir nehmen eine Breite von 5 cm an. Damit beträgt die Höhe 10 cm.

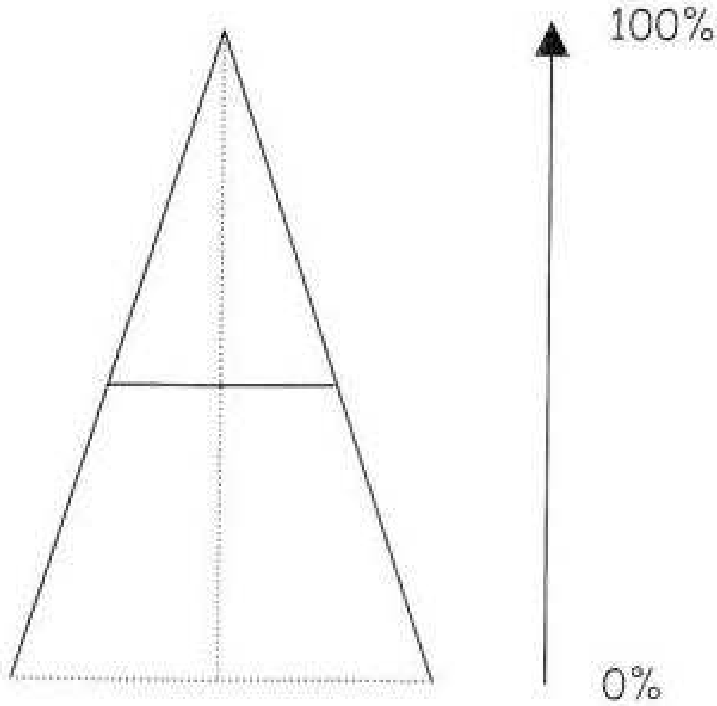
(a) Buchstabe N

i. Wenn wir uns vorstellen, dass die linke senkrechte Linie sich nicht bewegt, während sich die rechte senkrechte Linie von der feststehenden Linie fortbewegt - wie weit muss diese Linie verschoben werden, damit sich die Länge der schrägen Linie (siehe Abbildung) verdoppelt?



ii. Wenn wir die senkrechte Linie weiter parallel verschieben, so dass sich die Länge der schrägen Linie wiederum verdoppelt (d.h. eine Vervierfachung im Vergleich zur ursprünglichen Linie) - muss die Linie dann im Vergleich zur ersten Verschiebung um mehr oder um weniger verschoben werden?

(b) Buchstabe A



i.

Schauen wir uns jetzt einmal den Buchstaben A an - er besteht aus zwei schrägen Linien und einem Querstrich. Wir nehmen an, dass der Winkel zwischen den beiden Schräglinien 30° beträgt. Wenn wir uns jetzt vorstellen, dass die beiden „losen“ Enden der beiden Schräglinien mit einer geraden Linie verbunden werden, so bilden diese ein Dreieck (siehe Abbildung). Der Querstrich des Buchstaben A teilt das Dreieck in zwei Bereiche. Wir zeichnen eine Hilfslinie in Form einer Senkrechten vom höchsten Punkt zur Grundlinie.

ii. Wenn wir den unteren Punkt der Hilfslinie mit 0% bezeichnen und den obersten Punkt mit 100%, bei welchem Prozentsatz muss dann der Querstrich die Hilfslinie schneiden, wenn die beiden Flächen (geteilt durch den Querstrich des A's) gleich groß sein sollen?

iii. Wie lang ist der Querstrich in diesem Fall?

Quelle: Fich, O.: Mathelogik

Lösung: (a) i. Ausgehend vom Satz des Pythagoras muss die Länge der Diagonalen $\sqrt{125}$ cm betragen. Das Doppelte hiervon ist $\sqrt{500}$ cm. Die Länge der senkrechten Linie ist unverändert 10 cm und damit 100, wenn sie quadriert wird. Die Breite zum Quadrat muss daher 400 sein, wenn die Summe 500 betragen soll. Die Quadratwurzel aus 400 ist 20, d.h. die neue Breite ist also 15 cm größer als vorher.

ii. Die Verdopplung entspricht in diesem Fall einer schrägen Linie mit der Länge $\sqrt{2000}$ cm, und da die Länge der senkrechten Linie unverändert ist, muss die Breite des Buchstabens $\sqrt{900}$ cm $= 43,6$ cm sein, was einer Vergrößerung um ca. $23,6$ cm entspricht.

(b) i. Wenn wir die Länge der senkrechten Linie als 1 definieren, muss die Fläche des großen Dreiecks (das ganze A) sein: A (großes Dreieck) $= \frac{1}{2} \cdot \tan 15° \cdot 1 \cdot 2 = \tan 15°$. Der Querstrich soll nun entsprechend der Hälfte der Fläche des As platziert werden. Wenn wir die Länge der Linie, die von der Spitze des As rechtwinklig zum Querstrich verläuft, b nennen, ist die Fläche des Dreiecks über dem Querstrich: A (kleines Dreieck) $= \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot \tan 15° \cdot 2 = b^2 \tan 15°$. Dies soll gleich $\frac{1}{2} \cdot \tan 15°$ sein, weshalb $b = \sqrt{0,5} \approx 0,707$ entsprechend $70,7\%$ ist, oder $29,3\%$, von unten nach oben gemessen.

ii. Die Länge der Querlinie beträgt: $L = 2 \cdot \sqrt{0,5} \cdot \tan 15° \approx 0,379$.

11. Bestimme die Lösung der Gleichungssysteme

(a) $x + 4y + 7z = 12$
$2x + 5y + 8z = 15$
$3x + 6y + 10z = 19$

(b) $x + 4y + 7z = 12$
$2x + 5y + 8z = 15$
$3x + 6y + 9z = 19$

Lösung: (a) $x = y = z = 1$
(b) keine Lösung

12. Bestimme die Lösung der Gleichungssysteme

(a) $a + b + c = 3$
$a + b = 1 + c$
$b = 1 + a + c$

(b) $u + 3v + 2w = 6$
$2u = 6 - v - 3w$
$3u + w = 6 - 2v$

Lösung: (a) $x = 0,\ y = 2,\ z = 1$
(b) $x = y = z = 1$

13. Bestimme die Lösung der Gleichungssysteme

(a) $l = n$
$2m + 2n = 0$
$3l + n = 2m$

(b) $l = n - 4,5$
$2m + 2n = 9$
$3l + n = 2m + 7,5$

(c) $l = n - 12$
$2m + 2n = -2$
$3l + n = 2m - 4$

Lösung: (a) $l = m = n = 0$
(b) $l = \frac{1}{2}$, $m = -\frac{1}{2}$, $n = 5$
(c) $n = 5$, $m = -6$, $l = -7$

14. Vierfeldertafeln

(a) Ergänze die Vierfeldertafel

	A	$\overline{A}$	
B	0,21		
$\overline{B}$		0,52	0,77
			1

und gib $p(A \cup B)$ an

(b) Gib $p(\overline{A} \cap B)$ an

	A	$\overline{A}$	
B	0,20		0,55
$\overline{B}$	0,13		
			1

Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Ulrike Schätz, C. C. Buchner, 2005

Lösung: (a) $p(A \cup B) = 0,21$

	A	$\overline{A}$	
B	0,21	0,02	0,23
$\overline{B}$	0,25	0,52	0,77
	0,46	0,54	1

(b) $p(\overline{A} \cap B) = 0,25$

	A	$\overline{A}$	
B	0,20	0,25	0,55
$\overline{B}$	0,13	0,32	0,45
	0,33	0,57	1

$p(\overline{A} \cap B)$

15. Vierfeldertafeln

(a) Ergänze die Vierfeldertafel

	A	$\overline{A}$	
B			0,55
$\overline{B}$	0,13		
		0,65	1

und gib $p(A)$ an

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt weder A noch B ein?

	A	$\overline{A}$	
B	0,22		0,55
$\overline{B}$	0,13		
			1

Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Ulrike Schätz, C. C. Buchner, 2005

Lösung: (a) $p(A) = 0,35$

	A	$\overline{A}$	
B	0,22	0,33	0,55
$\overline{B}$	0,13	0,32	0,45
	0,35	0,65	1

(b) $p(A \cap \overline{B}) \cup p(\overline{A} \cap B) = 0,13 + 0,25 = 0,38$

16. (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben zwei zufällig ausgewählte Personen am selben Tag Geburtstag?

    (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben zwei zufällig ausgewählte Personen im selben Monat Geburtstag?

Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Ulrike Schätz, C. C. Buchner, 2005

Lösung: (a) $\frac{1}{365} \approx 0,27\%$

(b) $\frac{1}{12} \approx 8,3\%$

17. (a) In einer Schule haben 10% der 900 Schüler ein Mofa, 80% ein Fahrrad; 90% der Fahrradbesitzer haben kein Mofa. Wie viele Schüler haben weder ein Mofa noch ein Fahrrad?

    (b) In einem Flugzeug mit 250 Plätzen sind 241 Plätzebelegt. Wie viele verschiedene Möglichkeiten für die Lage der neun freien Plätze gibt es?

Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Ulrike Schätz, C. C. Buchner, 2005

Lösung: (a) 162 Schüler haben weder Mofa noch Fahrrad

	F	$\overline{F}$	
M	72	18	90
$\overline{M}$	648	162	810
	720	180	900

(b) $\frac{250 \cdot 249 \cdot 248 \cdot 247 \cdot 246 \cdot 245 \cdot 244 \cdot 243 \cdot 242}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9,1 \cdot 10^{15}$

18. (a) 22% der in Deutschland geprägten 2EUR Münzen werden in München hergestellt. Alex hat drei deutsche 2EUR Münzen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind davon zweit in München geprägt?
    (b) In der Bevölkerung gibt es etwa 5% Linkshänder. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse mit 30 Schülern kein Linkshänder ist?
    (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse mit 30 Schülern mindestens ein Linkshänder ist?
    (d) Jedem fünften Fitnessriegel liegt ein Sammelbild bei. Wie viele Riegel muss Ben mindestens kaufen, um mit mindestens 50% Wahrscheinlichkeit mindestens ein Bild zu erhalten?

    Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Ulrike Schätz, C. C. Buchner, 2005

Lösung: (a) $3 \cdot 0,22^2 \cdot 0,78 = 11\%$
(b) $0,95^{30} = 21\%$
(c) $1 - 0,95^{30} = 79\%$
(d) $1 - 0,8^n \geq 0,5 \Rightarrow$ Ben muss mindestens 4 Riegel kaufen.

19. Über den berühmten Bergsteiger Wolfgang Bergfried stand unter der Überschrift ,,Überlebte - Alle 14 Achttausender" vor einigen Jahren in der Zeitung:

    Wenn man bedenkt, dass die Todesquote bei den Achttausender-Bergsteigern $3,4\%$ *beträgt, hätte Wolgang Bergfried bei seinen bisher* 29 *Expeditionen zu den höchsten Bergen der Welt mit* 99% *Wahrscheinlicheit umkommen müssen"*

    (a) Wie kommt der Reporter zu dieser Aussage.
    (b) Berechnen Sie den richtigen Wert für die Wahrscheinlichkeit nach 29 Expeditionen umgekommen zu sein.

    EPA Mathematik. 2002

Lösung: (a) $29 \cdot 0,034 = 98,6\%$
(b) $(1 - 0,034)^{29} = 37\%$

20. Ein Laplace-Würfel wird solange geworfen, bis entweder eine 6 erscheint oder viermal nacheinander keine 6 erscheint. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Würfel 1, 2, 3, bzw. 4 mal geworfen wird.

Lösung: $p = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^3 = 88\%$

21. „ Ein unmöglicher Saustall"

    In einem großen Saustall wirft jede Sau zweimal im Jahr 5 Ferkel. Die Wahrscheinlichkeit für ein männliches Ferkel beträgt 0,45.

    (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in *einem* Fünferwurf mindestens ein weibliches Ferkel ist?
    (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in *einem* Fünferwurf mindestens ein weibliches Ferkel **und** mindestens ein männliches Ferkel ist?
    (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in *einem* Fünferwurf drei weibliche und zwei männliche Ferkel sind?
    (d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in *einem* Fünferwurf mindestens drei weibliche Ferkel sind?

Lösung: (a) $1 - p(\text{fünf män. Ferkel}) = 1 - 0,45^5 = 98\%$
(b) $1 - p(\text{fünf män. Ferkel}) - p(\text{fünf weibl. Ferkel}) = 1 - 0,45^5 - 0,55^5 - 0, = 93\%$
(c) $p = 10 \cdot 0,55^3 \cdot 0,45^2 = 34\%$
(d) $p(\text{mind. drei weibl. Ferkel}) =$
$p(\text{drei weibl. Ferkel}) + p(\text{vier weibl. Ferkel}) + p(\text{fünf weibl. Ferkel}) =$
$10 \cdot 0,55^3 \cdot 0,45^2 + 5 \cdot 0,55^4 \cdot 0,45^3 + 0,55^5 = 59\%$

22. In einem Betrieb sind 60% Männer beschäftigt. Von den Betriebsangehörigen rauchen 10%. Unter den weiblichen Betriebsangehörigen rauchen 15%.

    (a) Berechnen Sie den Anteil der weiblichen Raucher unter den Betriebsangehörigen.
    (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein beliebig herausgegriffener Betriebsangehöriger
        i. weiblich und raucht?
        ii. männlich, falls „er" raucht?
        iii. Raucher, falls „er" männlich ist?

Lösung: (a) $p(W \cap R) = p(W) \cdot p_W(R) = 0,4 \cdot 0,15 = 6,0\%$
(b) i. $p_R(W) = \frac{p(W \cap R)}{p(R)} = \frac{0,06}{0,1} = 60\%$
ii. $p_R(M) = 1 - p_R(W) = 40\%$
iii. $p_M(R) = \frac{p(M \cap R)}{p(M)} = \frac{0,04}{0,6} = 6,7\%$

23. Bei SMV-TV treten Bildstörungen mit 10% Wahrscheinlichkeit auf. In diesem Fall kommt es dann mit 70% Wahrscheinlichkeit zu Tonstörungen. Ist das bild einwandfrei, so ist mit 95% Wahrscheinlichkeit auch der Ton in Ordnung.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für ein einwandfreies Bild, falls der Ton gestört ist.

(b) Untersuchen Sie die Ereignisse ,,Es tritt keine Bildstörung auf" und ,,Es tritt eine Tonstörung auf" auf stochastische Unanhängigkeit.

Lösung: T: Tonstörung, B: Bildstörung

(a) $p_T(\overline{B}) = \frac{p(T\cap\overline{B})}{p(T)} = \frac{0{,}9\cdot 0{,}05}{0{,}9\cdot 0{,}05+0{,}1\cdot 0{,}7} = 0,39$

(b) $p(T) = 0,9 \cdot 0,05 + 0,1 \cdot 0,7 = 0,115,$
$p(\overline{B}) = 0,9$; $p(T) \cdot p(\overline{B}) = 0,115 \cdot 0,9 = 0,1035 \neq 0,39$
$\Rightarrow$ stochastisch abhängig

5 Neue Aufgaben, Mai 2007

1. Ein Glücksrad wurde 20-mal gedreht. Dabei ergab sich viermal ein Hauptgewinn, zweimal ein Trostpreis und vierzehnmal eine Niete als Ergebnis. Entscheide für jede der vier folgenden Aussagen, ob sie richtig oder falsch ist.

   (a) Bei 14% der Drehungen wurde eine Niete erzielt.

   (b) Die relative Häufigkeit für einen Hauptgewinn beträgt $0,2$.

   (c) Es ist möglich, bei den nächsten 20 Drehungn nur Nieten zu erzielen.

   (d) Bei den nächsten 20 Drehungn wird sicher genau zweimal ein Trostpreis erzielt.

Lösung: (a) falsch (b) richtig (c) richtig (d) falsch

2. Die Elefantenkuh Cathy wird im Zoo regelmäßig gewogen. Sie ist jetzt 6 Jahre alt und wiegt 2,40 t.

   (a) Vor einem Jahr wog Canthy noch 2,05 t. Wie viele Kilogramm nahm sie im Laufe des Jahres zu?

   (b) Der Tierpfleger stellt fest. Canty ist mir ihren 2,40 t noch 20% leichter als der Elefantenbulle Abu. Berechne, wie scher Abu ist.

   Quelle: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 8 der Gymnasien, 2006

Lösung: (a) $2,40\text{t} - 2,05\text{t} = 0,35\text{t} = 350\text{kg}$

(b) $2,40\text{t}$ entspricht 80%, also $2,40\text{t} : 0,8 = 3\text{t}$

3. In einer Ausstellung wird ein Modell der Münchner Fußball-Arena im Maßstab 1:50 gezeigt. Das Modell ist 5 Meter lang, 4,5 Meter breit und 1 Meter hoch. Das Spielfeld hat im Modell einen Flächeninhalt von 4m^2

   (a) Wie lang ist die Fußball-Arena in Wirklichkeit?

   (b) Ein Fußballfan möchte in seinem Garten ein Modell der Fußball-Arena im Maßstab 1:100 aufbauen. Welche Höhe hat dieses Modell und wie groß ist der Flächeninhalt des Spielfelds in diesem Modell?

Quelle: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 8 der Gymnasien, 2006

Lösung: (a) 250 m (b) 0,5m, 1m^2

4. Bestimme die Lösung der Gleichung
   (a) $x - 22 = 6 \cdot (0,5x - 2)$
   (b) $22 - x = 8 \cdot (0,5x + 2)$
   (c) $x - \frac{3}{4} = -6 \cdot (0,5x - 2)$
   (d) $x - 2,2 = -6 \cdot (\frac{2}{3}x - 2)$

   Quelle: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 8 der Gymnasien, 2006

Lösung: (a) $x = -5$ (b) $x = 1\frac{1}{5}$ (c) $x = 3\frac{3}{16}$ (d) $x = 2,84$

5. Die Tabelle zeigt für die Jahre 1992 bis 2004 die durchschnittliche tägliche Fernsehdauer für einen Zuschauer in Deutschland.

Jahr	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Minuten	158	166	167	175	183	183	188	185	190	192	201

   (a) Um wie viel Prozent ist die tägliche Fernsehdauer im Jahr 2002 größer als im Jahr 1992?
   (b) Welche der folgenden Geradengleichungen beschreiben die Entwicklung der täglichen Fernsehdauer am besten?
   Dabei ist y die Maßzahl der täglichen durchschnittlichen Fernsehdauer in Minuten und $x + 1992$ die jeweilige Jahreszahl, d. h. beispielsweise für das Jahr 2002 ist $x = 10$.
   $y = 4x + 158$ $y = -4x + 158$ $y = 4x - 158$
   $y = 158x + 4$ $y = 2x + 158$ $y = 2x - 158$
   (c) Die durchschnittliche tägliche Fernsehdauer für die Zuschauer in den alten Bundesländern 203 Minuten, für die Zuschauer in den neuen Budnesländern 238 Minuten.
   Berechnen Sie den Mittelwert der Zahlen 203 und 238 und begründe, warum man mit dieser Information keine Aussage über die durchschnittliche tägliche Fernsehdauer für einen Zuschauer in Deutschland machen kann.

   nach: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 8 der Gymnasien, 2006

Lösung: (a) 27%, (b) $y = 4x + 158$
(c) z. B. in den alten Bundesländern gibt es mehr Zuschauer als in den neuen Bundesländern

6. Ein ,,Rechentrick" zum quadrieren einer zweistelligen Zahl mit der Einerziffer 5 lautet so:
   Nimm die Zehnerziffer der Zahl und vergrößere sie um 1, multipliziere das Ergebnis mit der Zehnerziffer selbst. Hängt man an die Zahl, die sich dabei ergibt, die Ziffernfolge 25 an, hat man schon die gesuchte Quadratzahl.

   (a) Berechne nachvollziehbar mit dieser Methode das Quadrat der Zahl 35.

   (b) Eine zweistellige Zahl mit der Zehnerziffer x und der Einerziffer 5 lässt sich schreiben als $10x + 5$.
   Berechne $(10x + 5)^2$, forme das Ergebnis geeignet um und begründe dadurch den obigen ,,Rechentrick".

   Quelle: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 8 der Gymnasien, 2006

Lösung: (a) $2 \cdot 3 = 6$, also 625

(b) $(10x + 5)^2 = 100x^2 + 100x + 25 = 100 \cdot x(x + 1) + 25$

6 Neue Aufgaben, Februar 2007

1. **Der Fußball-Globus**

   Ein begehbarer Fußball-Globus machte bis zur Fußball-Weltmeisterschaft 2006 eine Reise durch alle zwölf Austragungsorte der Weltmeisterschaft. In diesem Riesen-Fußball fanden Veranstaltungen unter dem Motto ,,Kulturfestival im WM-Globusßtatt. Der überdimensionierte Fußball war nachts erleuchtet und stellte dann eine Weltkugel dar.

   (a) Wie groß wäre ein entsprechender Fußballspieler, der mit diesem Ball spielen würde? Beschreibe, wie du vorgegangen bist.

   (b) Wie lang wäre ein entsprechendes Spielfeld, wenn man mit diesem Fußball spielen würde? Beschreibe, wie du vorgegangen bist.

   (c) Uwe Seeler: Größter Fuß der Welt

Ein riesiger Uwe-Seeler-Bronzefuß begrüßt die Fans am Eingang der Hamburger Fußball-Arena. Dieser Bronzefuß ist 3,50 Meter hoch, 2,30 Meter breit, 5,50 Meter lang und wiegt 1,5 Tonnen. Derzeit wird geprüft, ob die Skulptur als größter Fuß der Welt in das Guinness-Buch der Rekorde aufgenommen werden kann.

Passt die Größe dieses Fußes zu dem Fußballspieler aus Aufgabe (a)?

Auszug aus den Fußball-Regeln

Der Ball ist regelgerecht, wenn er:

- kugelförmig ist,
- aus Leder oder einem anderen geeigneten Material gefertigt ist,
- einen Umfang zwischen mindestens 68 und höchstens 70 cm hat.

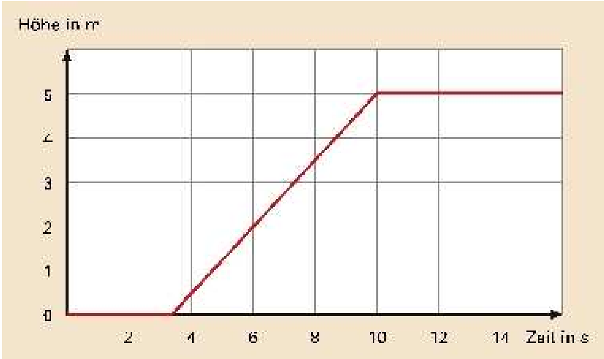
Das Spielfeld:

- Das Spielfeld muss rechtwinklig sein. Die Länge der Seitenlinien muss in jedem Falle die Länge der Torlinie übertreffen.
- Länge mindestens 90 m, höchstens 120 m Breite mindestens 45 m, höchstens 90 m
- Bei Länderspielen: Länge mindestens 100 m, höchstens 110 m Breite mindestens 64 m, höchstens 75 m

Quelle: Werner Blum u. a. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret, Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen; mit CD-Rom / IQB, Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (www.IQB.hu-berlin.de), 1. Auflage, Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor, 2006

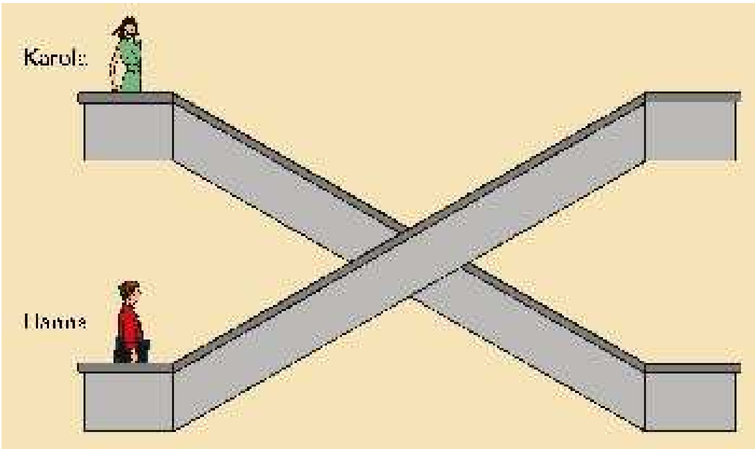
Lösung:
(a) Z. B.: Annahme: Tür 2,5 m hoch $\Rightarrow$ Höhe des Fußballes ca. 15 m, Größe eines Spielers ca. 130 m
(b) ca. 7 km
(c) Fuß müsste ca. 20 m lang sein, ist jedoch kürzer; passt also nicht

2. Hanna fährt im Kaufhaus auf der Rolltreppe aufwärts. Ihre Bewegung lässt sich als Funktionsgraph darstellen:



   (a) i. Was kann man alles aus diesem Graphen ablesen?
      ii. Der Graph gibt die Bewegung nicht ganz richtig wieder. Mache Verbesserungsvorschläge.
      iii. Stelle auch einen entsprechenden Graphen für die Bewegung eines Fahrstuhls (eines Skiliftes, eines Paternosters) dar und vergleiche.

   (b) .



   Die Zuordnungen $f(x) = -0,5x + 5$ und $g(x) = 0,625x$ stellen die Rolltreppenfahrt von Karola und Hanna stark vereinfacht dar. Dabei beschreibt x die Zeit in s und $f(x)$ bzw. $g(x)$ die Höhe in m. Welcher Funktionsterm gehört zu wem?

Quelle: Werner Blum u. a. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret, Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen; mit CD-Rom / IQB, Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (www.IQB.hu-berlin.de), 1. Auflage, Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor, 2006

Lösung: (a) z. B.: Fahrtzeit $6,5\,s$, Stockwerkshöhe: $5\,m$

(b) f: Karola, g Hanna

3. (a) Zeichne folgende Parabeln mit einem Funktionsplotprogramm:
   $p_1(x) = x^2 - 3$, $p_2(x) = x^2 - 1$, $p_3(x) = x^2 + 1$, $p_4(x) = x^2 + 3$

   (b) Wie entstehen die jeweiligen Parabeln aus der Normalparabel?

   (c) Wo liegt der Scheitel der Parabel $p(x) = x^2 + c$?

   (d) Auf welcher Kurve wandert der Scheitel der Parabeln, wenn man c verändert?

Lösung: (a) .

(b) Verschiebung entlang der y-Achse um -3, -1, 1, 3

(c) $S(0|c)$

(d) Der Scheitel wandert auf der y-Achse.

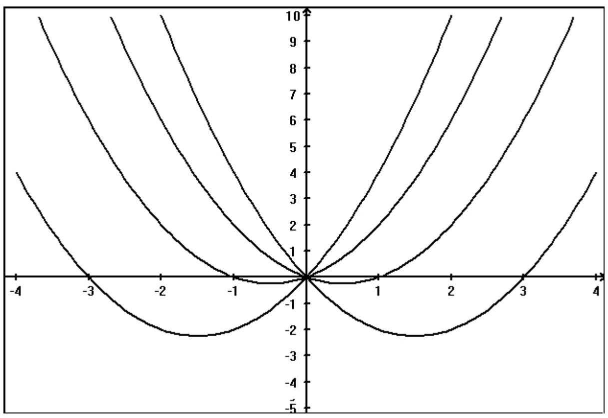
4. (a) Zeichne folgende Parabeln mit einem Funktionsplotprogramm:
   $p_1(x) = x^2 - 3x$, $p_2(x) = x^2 - 1x$, $p_3(x) = x^2 + 1x$, $p_4(x) = x^2 + 3x$

   (b) Wie entstehen die jeweiligen Parabeln aus der Normalparabel?

   (c) Wo liegt der Scheitel der Parabel $p(x) = x^2 + bx$?

   (d) Auf welcher Kurve wandert der Scheitel der Parabeln, wenn man b verändert?

Lösung: (a) .



.

(b) Verschiebung entlang der x-Achse um $1,5$; $0,5$; $-0,5$; $-1,5$

(c) $S(-\frac{b}{2}| - \frac{b^2}{4})$

(d) $x = -\frac{b}{2} \Rightarrow b = -2x$; $y = -\frac{b^2}{4} = -\frac{(-2x)^2}{4} = -x^2$. Der Scheitel wandert auf der Parabel $s(x) = -x^2$

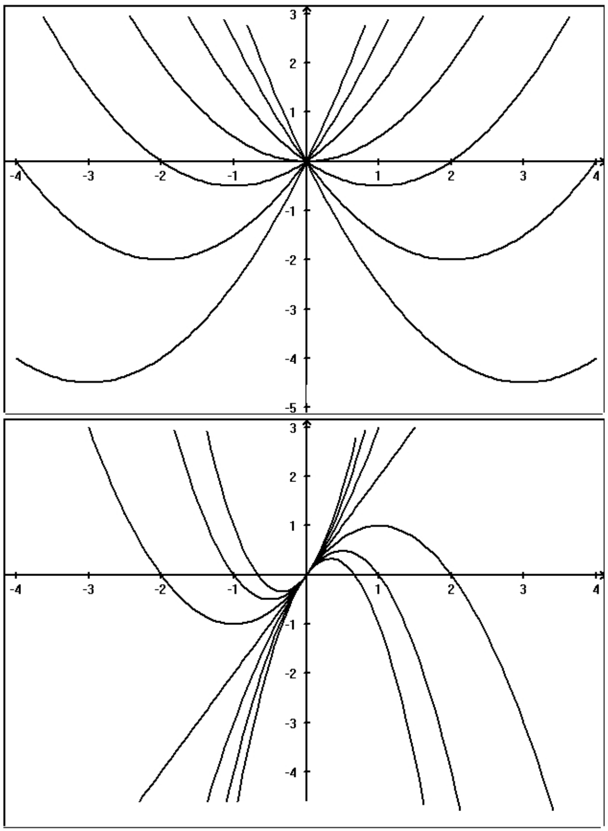
5. (a) Zeichne folgende Parabeln mit einem Funktionsplotprogramm:
   i. $p_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$, $p_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$, $p_3(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1x$, $p_4(x) = \frac{1}{2}x^2x$, $p_5(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1x$, $p_6(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$, $p_7(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x$
   ii. $p_8(x) = 3x^2 + 2x$, $p_9(x) = 2x^2 + 2x$, $p_{10}(x) = 1x^2 + 2x$, $p_{11}(x) = 2x$, $p_{12}(x) = -1x^2 + 2x$, $p_{13}(x) = -2x^2 + 2x$, $p_{14}(x) = -3x^2 + 2x$

   (b) Wo liegt der Scheitel der Parabel $p(x) = ax^2 + bx$?

   (c) Auf welcher Kurve wandert der Scheitel der Parabeln, wenn man b verändert?

   (d) Auf welcher Kurve wandert der Scheitel der Parabeln, wenn man a verändert?

Lösung: (a) .



(b) $S(-\frac{b}{2a}|-\frac{b^2}{4a})$

(c) Der Scheitel wandert auf der Parabel $s_a(x) = -ax^2$

(d) Der Scheitel wandert auf der Gerade $s_b(x) = \frac{b}{2}x$

6. Berechne die Schnittpunkte der Graphen folgender Funktionen

   (a) $a_1(x) = 5x^2 + 3x + 1$, $a_2(x) = 4x^2 + x$

   (b) $b_1(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - 2$, $b_2(x) = x^2 - \frac{1}{4}x + 2$

(c) $c_1(x) = -2x^2 - x + 8$, $c_2(x) = 0,5x^2 - 0,25x - 0,5$

(d) $d_1(x) = 2x^2 + \frac{17}{20}x + 12$, $d_2(x) = x^2 + 0,85x - 5$

Lösung: (a) $A(-1|3)$

(b) $B_1(2|5,5)$, $B_2(-4|19)$

(c) $C_1(-2|2)$, $C_2(1,7|0,52)$

(d) Die Graphen schneiden sich nicht.

7. Berechne die Schnittpunkte der Graphen folgender Funktionen

(a) $a_1(x) = 2x + 0,7$, $a_2(x) = -5x + 12$

(b) $b_1(x) = 9x^2 + 26x - 100$, $b_2(x) = -10x + 89$

(c) $c_1(x) = x^2 + 2x + 1$, $c_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3$

(d) $d_1(x) = 2x - 3$, $d_2(x) = \frac{1}{x} + 2$

Lösung: (a) $A(1\frac{43}{70}|3\frac{13}{14})$

(b) $B_1(3|59)$, $B_2(-7|159)$

(c) Die Graphen schneiden sich nicht.

(d) $D_1(\frac{5+\sqrt{33}}{4}|\frac{\sqrt{33}-1}{2})$, $D_2(\frac{5-\sqrt{33}}{4}|\frac{-\sqrt{33}-1}{2})$

8. Parabel als Ortskurve

(a) Zeichne die Parabel $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ in ein Koordinatensystem

(b) Berechne den Abstand von fünf Punkten der Parabel vom Punkt $A(0|1)$. Was fällt auf? Interpretiere die Vermutung aus (b) geometrisch.

(c) Berechne allgemein den Abstand eines Punktes der Parabel $p(x)$ vom Punkt A und zeige die Vermutung aus (b).

Lösung: (a) .

(b) Z. B. $P_1(0|\frac{1}{2}) : \overline{P_1A} = \frac{1}{2}$

$P_2(1|1) : \overline{P_2A} = 1$

$P_3(2|2\frac{1}{2}) : \overline{P_3A} = \sqrt{2^2 + \frac{3}{2}^2} = 2\frac{1}{2}$

$P_4(-2|2\frac{1}{2}) : \overline{P_4A} = \sqrt{(-2)^2 + \frac{3}{2}^2} = 2\frac{1}{2}$

$P_5(4|8\frac{1}{2}) : \overline{P_5A} = \sqrt{4^2 + (7\frac{1}{2})^2} = 8\frac{1}{2}$

Vermutung: Der Abstand ist die y-Koordinate von P_i. Die Punkte der Parabel haben von A und von der x-Achse gleichen Abstand

(c) $P(x|y)$; $\overline{PA}^2 = x^2 + (y-1)^2 = x^2 - 2y + 1 + y^2$;

$d = y$: Abstand des Punktes P von der x-Achse Bedingung für gleichen Abstand von A und der x-Achse: $y^2 = x^2 - 2y + 1 + y^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

9. **Parabel gesucht**
   Berechne die Gleichung einer Parabel, von der folgendes bekannt ist.
   (a) Scheitel $S(1|-2)$, Punkt $A(0|3)$ liegt auf der Parabel
   (b) Punkte $B(-2|-3)$, $C(0|3)$ und $D(5|-5)$ liegen auf der Parabel
   (c) Parabel schneidet die x-Achse in den Punkte $N_1(3|0)$ und $N_2(1|0)$; Punkt $E(0|6)$ liegt auf der Parabel
   (d) Parabel berührt die x-Achse, Punkt $F(0|-2)$ liegt auf der Parabel
   (e) Parabel ist nach oben geöffnet und entsteht aus der Normalparabel durch Verschiebung um 2 nach rechts und 3 nach unten

Lösung: (a) $p_a(x) = 5(x-1)^2 - 2$
(b) $p_b(x) = \frac{1}{35}(-23x^2 + 59x + 105)$
(c) $p_c(x) = 2(x-1)(x-3)$
(d) unendlich viele Lösungen der Form $p_d(x) = a(x-b)^2; ab^2 = -2$
(e) $p_e(x) = (x-2)^2 - 3$

10. **Graphen und Schnittpunkte gesucht**
    Bestimme für folgende Funktionen die Definitionsmengen. Skizziere die Graphen und berechne die Koordinaten der Schnittpunkte.
    (a) $a_1(x) = x^2 - 1$, $a_2(x) = (x-1)^2$
    (b) $b_1(x) = \frac{1}{x-1}$, $b_2(x) = (x-1)^2$
    (c) $c_1(x) = \frac{2}{x-1}$, $c_2(x) = \frac{1}{x+3} + 2$
    (d) $d_1(x) = (x-3)(x+1)$, $d_2(x) = -2x + 6$

Lösung: (a) $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$, $A(1|0)$
(b) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $D_2 = \mathbb{R}$, $B(2|1)$
(c) $D_1 = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $D_2 = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$, $C_1(\frac{1}{4}(-3+\sqrt{104})|\frac{8}{-7+\sqrt{104}})$, $C_2(\frac{1}{4}(-3-\sqrt{104})|\frac{8}{-7-\sqrt{104}})$
(d) $D_1 = \mathbb{R}$, $D_2 = \mathbb{R}$, $D_1(3|0)$, $D_2(-3|12)$

11. **Die Fehmarnsundbrücke - der größte Kleiderbügel der Welt**

Die Fehmarnsundbrücke verbindet die Insel Fehmarn mit dem deutschen Festland. Technische Angaben:

Brückenlänge insgesamt: 963,4 m

Scheitelhöhe des Bogens über dem Meeresspiegel: 68 m

Durchfahrtshöhe für Schiffe: 23 m

Spannweite des Bogens: 248 m

Höhe des Bogens über der Fahrbahn: 45 m

Der Brückenbogen hat die Form einer Parabel. Bestimme eine Funktionsgleichung, die den Brückenbogen beschreibt.

Quelle: Werner Blum u. a. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret, Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen; mit CD-Rom / IQB, Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (www.IQB.hu-berlin.de), 1. Auflage, Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor, 2006

Lösung: Z. B.: Scheitelpunkt der Parabel auf $(0|45)$, weiter liegen dann die Punkte $(124|0)$ und $(-124|0)$ auf der Parabel $\Rightarrow y = -0,003x^2 + 45$

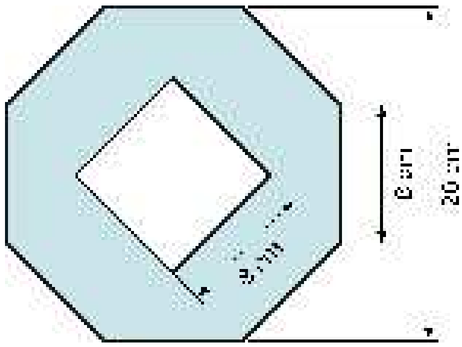
7 Neue Aufgaben, Januar 2007

1. (a) Trage die Punkte $A(1|3)$, $B(2|3)$, $C(3|2)$, $D(5|3)$ und $E(2|5)$ in ein Koordinatensystem ein und zeichne das Fünfeck $ABCDE$.
   (b) Wie kann man durch Verschieben eines Eckpunkts die Form des Fünfecks verändern, ohne dass sich der Flächeninhalt ändert.
   (c) Verändere das Fünfeck schrittweise so, dass die Fläche gleich bleibt und der Umfang kleiner wird.

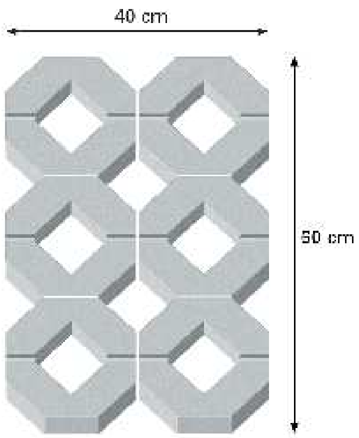
Lösung: (b) A auf Parallele zu BE durch A verschieben, usw.

2. **Offenes Pflaster**

   Bei einer wasserdurchlässigen Befestigung einer Garageneinfahrt mit Rasengittersteinen können die Niederschläge wieder im Erdreich versickern und in die Grundwasserströme gelangen. Dadurch bleibt der Wasserkreislauf erhalten und die Niederschlagswasser werden nicht direkt über den Kanal in die Flüsse abgeleitet.



Das Bild zeigt einen solchen Rasengitterstein. Er besteht aus wasserdurchlässigen Öffnungen und wasserundurchlässigen Betonteilen. Der 40 cm $\times$ 60 cm $\times$ 10 cm große Rasengitterstein besteht aus 6 gleichartigen offenen Pflastersteinen. Das folgende Bild zeigt Form und Maße eines dieser offenen Pflastersteine:



(a) Herrn Meiers Garageneinfahrt ist 8 m lang und 6 m breit. Wie viele solche Rasengittersteine werden benötigt?

(b) Wie viel Prozent der gesamten Garageneinfahrt bestehen dann aus den wasserdurchlässigen Öffnungen?

(c) Herr Meier entdeckt auf einer Palette im Hof eines Baumarktes einen Stapel mit Rasengittersteinen (siehe Bild).

Wie viele Rasengittersteine befinden sich auf der Palette, wenn sie lückenlos aneinandergereiht auf der Palette aufgestapelt sind? Erläutere, wie du deren Anzahl bestimmst.

(d) Kann man mit einem LKW mit 7,5 Tonnen Ladegewicht alle benötigten Rasengittersteine in einer Fahrt anliefern? (Dichte von Beton: 2,3 g/cm^3) Lege dar, wie du zu deiner Lösung gekommen bist.

Quelle: Werner Blum u. a. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret, Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen; mit CD-Rom / IQB, Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (www.IQB.hu-berlin.de), 1. Auflage, Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor, 2006

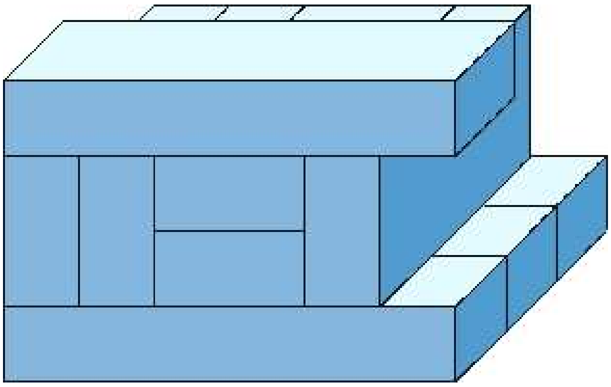
Lösung: (a) 200 Rasengittersteine werden benötigt

(b) Fläche Rasengittersteine: $40\text{cm} \cdot 60\text{cm} = 2400\text{cm}^2$
durchlässige Fläche: $6 \cdot (8\text{cm} \cdot 8\text{cm} + 2 \cdot 6\text{cm} \cdot 6\text{cm}) = 816\text{cm}^2 \Rightarrow 34\%$

(c) z. B.: 5 Steine pro Ebene und 10 Ebenen liegen auf der Palette $\Rightarrow$ 50 Steine

(d) Volumen der Steine auf einer Palette:
$50 \cdot (2400\text{cm}^2 - 816\text{cm}^2) \cdot 10\text{cm} = 792000\text{cm}^3 \Rightarrow$
Masse der Steine auf einer Palette: $792000\text{cm}^3 \cdot 2,3\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1,8216\text{t}$
4 Paletten $\hat{=}$ 200 Rasengittersteine $\hat{=}$ $4 \cdot 1,8216\text{t} = 7,2864\text{t}$, also kann ein LWK alle Steine liefern

3. Hier sind Blöcke von gleicher Form und gleicher Größe gestapelt. Die kürzeste Kantenlänge eines Blockes beträgt 10cm. Die beiden anderen Kantenlängen sind jeweils ein Vielfaches dieser Länge.



   (a) Wie lang sind die beiden anderen Kantenlängen? Schreibe auf, wie du das herausfindest.

   (b) Wie groß ist das Volumen des Blockstapels? Erläutere dein Vorgehen.

   (c) Welcher Block berührt die meisten anderen Blöcke? Welche beiden Blöcke berühren die wenigsten anderen Blöcke? Begründe deine Antworten.

   (d) Der Blockstapel ist mit möglichst wenigen Blöcken so zu ergänzen, dass ein großer Quader entsteht. Welche Kantenlängen hat dieser Quader? Erläutere deine Überlegungen.

   Quelle: Werner Blum u. a. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret, Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen; mit CD-Rom / IQB, Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (www.IQB.hu-berlin.de), 1. Auflage, Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor, 2006

Lösung: (a) 20cm, 60cm

(b) Volumen eines Blocks: 12dm^3; 9 Blöcke $\Rightarrow$ Volumen: $9 \cdot 12\text{dm}^3 = 108\text{dm}^3$

(c) am meisten: zweiter Block von links in der mittleren Ebene berührt 7 andere Blöcke; am wenigsten: quer obenauf liegender Block berührt 4 Blöcke und der obere der beiden Blöcke in der mittleren Ebene berührt ebenfalls 4 Blöcke

(d) 3 Blöcke ergänzen, Kantenlängen: 6dm, 6dm, 4dm

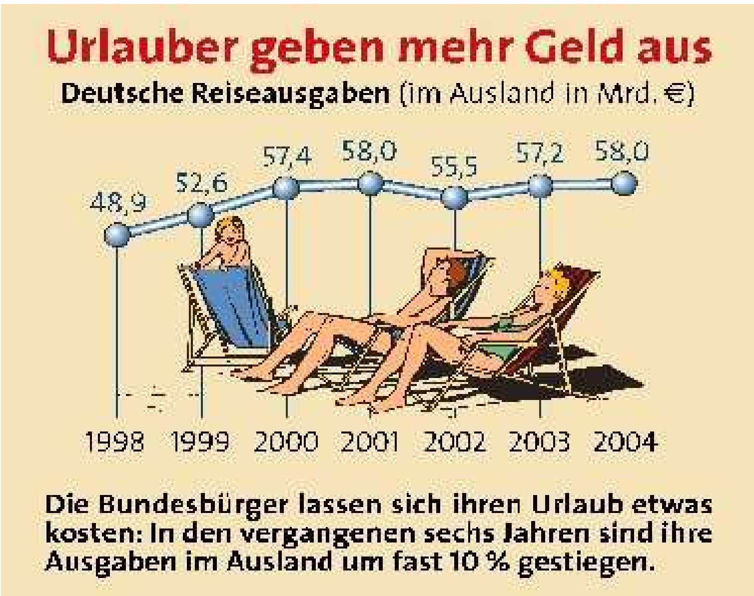
4. Sybille möchte für ihren 20. Geburtstag gerne Eis selbst machen und in dieser Dose einfrieren.

Schätze ab, wie viel Liter Eis ungefähr in diese Dose passen. Schreibe auf, wie du vorgehst.

Quelle: Werner Blum u. a. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret, Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen; mit CD-Rom / IQB, Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (www.IQB.hu-berlin.de), 1. Auflage, Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor, 2006

Lösung: Vergleicht man die Größe der Hand mit der der Dose kann man als Kantenlängen der Dose 20cm, 8cm und 6 cm abschätzen $\Rightarrow$
$V = 2 \cdot 0,8 \cdot 0,6\text{dm}^3 = 0,96\text{dm}^3 \approx 1\text{l}$

5. Urlaub im Ausland



Quelle: Deutsche Bundesbank/Dresdner Bank, BAT Freizeit Forschungsinstitut

Die Grafik zeigt, wie viel die Deutschen bei ihrem Urlaub im Ausland von 1998 bis 2004 jeweils ausgegeben haben.

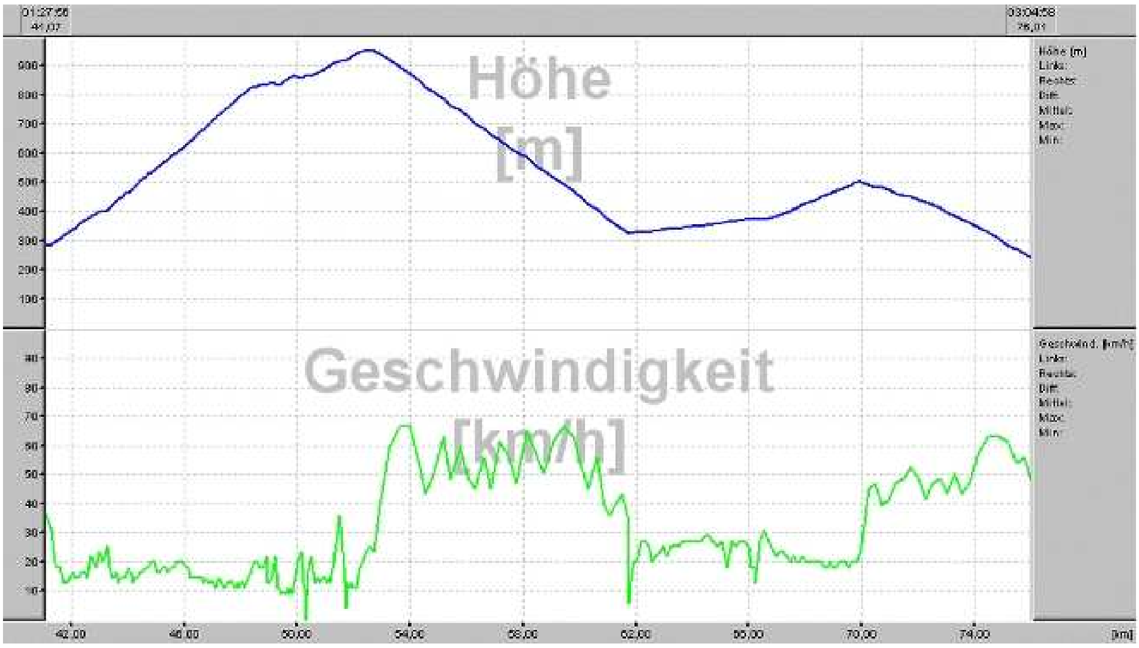
Überprüfe den Text unter der Grafik. Was fällt dir auf?

Quelle: Werner Blum u. a. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret, Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen; mit CD-Rom / IQB, Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (www.IQB.hu-berlin.de), 1. Auflage, Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor, 2006

Lösung: Von 1998 bis 2004 stiegen die Ausgaben um 9,1 Milliarden Euro, dies entspricht einem Anstieg von ca. 19%!

6. **Trainingsanalyse**

   Das unten stehende Diagramm zeigt einen Ausschnitt aus einer Trainingsaufzeichnung eines Radrennfahrers.



   (a) Wie lang ist die Abfahrt vom ersten Berg?
   (b) Wie viele Serpentinen (enge Kurven) kamen auf der Abfahrt vom ersten Berg vor?
   (c) Wie oft hat der Radrennfahrer angehalten?
   (d) Wie groß war die ungefähre Durchschnittsgeschwindigkeit des Radrennfahrers?

(e) Überlege dir noch eine weitere interessante Aufgabe, die man anhand dieses Graphen beantworten kann, und löse sie.

Quelle: Werner Blum u. a. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret, Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen; mit CD-Rom / IQB, Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (www.IQB.hu-berlin.de), 1. Auflage, Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor, 2006

Lösung: (a) ca. 10 km
(b) 9 Serpentinen
(c) einmal
(d) ca. 30-35km/h

7. Drei Kreisbögen bilden ein *Bogendreieck* $\triangle ABC$, wenn sie auf Kreisenliegen, die sich in den Punkten A, B und C berühren. Dabei sind nur Kreisbögen zugelassen, die in der Zeicheneben liegen und deren Mittelpunktswinkel kleiner als 180° sind. Gegeben sind nun die Eckpunkte A, B und C eines Dreiecks, das nicht rechtwinklig ist. Konstruiere das zugehörige Bogendreieck $\triangle ABC$.

Quelle: 9. Landeswettbewerb Mathematik, 2006

Lösung: m_a, m_b und m_c sind die Mittelsenkrechten der Seiten a, b und c und U deren Schnittpunkt, der Umkreismittelpunkt. s ist die Senkrechte zu UB durch B.
$M_a = s \cap m_a$, $M_c = s \cap m_c$, $M_b = CM_a \cap m_b$
Beweis:
B in $M_aM_c \Rightarrow$ Kreis um M_a und M_c durch B berühren sich in B.
UCM_bA ist Raute mit rechten Winkeln bei C (wegen Konstruktion) und A. Rechter Winkel bei A, da $M_b \in m_c$ und $\overline{AU} = \overline{CU}$.

8. Gegeben ist ein Kreis mit Mittelpunkt M mit zwei gleich langen Sehnen $[AB]$ und $[CD]$. P ist der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der Sehnenmittelpunkte. Die Sehne $[CD]$ gleitet am Kreis, die Sehne $[AB]$ bleibt fest.

Welche Bahn beschreibt P?

Quelle: 9. Landeswettbewerb Mathematik, 2006

Lösung: M_1 ist Mittelpunkt der Sehne $[AB]$ und M_2 ist Mittelpunkt der Sehne $[CD]$; P beschreibt einen Kreis durch M mit Radius $d := \overline{M_1M}$

Beweis:
$\overline{M_1M} = \overline{M_2M} = d$, da die beiden Sehnen $[AB]$ und $[CD]$ achsensymmetrisch zu AP sind
$\Rightarrow M_2$ wandert auf dem Kreis um M mit Radius d $\Rightarrow$
P entsteht aus M_2 durch zentrische Streckung an M_1 mit Faktor $\frac{1}{2}$.

9. Ein Fotoversand verlangt für jeden Abzug 0,10 EUR und eine Versandkostenpauschale von 2,59 EUR.

   (a) Wie viel Prozent des Endbetrags machen die Versandkosten bei 46 Bildern aus?

   (b) Im Drogeriemarkt kostet ein Abzug 12 Cent. Ist es beim vorliegenden Auftrag besser im Drogeriemarkt Abzüge machen zu lassen?

   (c) Beschreibe die die Kosten beim Fotoversand bzw. beim Drogeriemarkt durch eine Funktion.

   (d) Ab welcher Anzahl bestellter Fotos ist der Fotoversand billiger als der Drogeriemarkt.

   (e) Ein Online-Fotoversand hat folgende Preisstaffelung:

Zahl der bestellten Bilder	Preis pro Abzug
1 bis 9	15 Cent
10 bis 49	12 Cent
50 bis 99	10 Cent
100 bis 300	8 Cent
ab 301	Sonderkonditionen auf Anfrage

Zahl der bestellten Bilder	Versandkostenanteil
1 bis 9	1 EUR
10 bis 200	2 EUR
ab 201	Kosten trägt der Fotoversand

   Stelle grafisch dar, welche Gesamtkosten sich bei einer Bestellung in Abhängigkeit von der Anzahl bestellter Bilder ergeben.

   (f) Wie sollte ein Kunde beim Online-Fotoversand vorgehen, der 95 Bilder braucht?

Lösung: (a) 36%

(b) Z. B.: $0,12\,\text{EUR} \cdot 46 = 5,52\,\text{EUR} < 7,19\ \text{EUR}$
Bei diesem Auftrag ist der Drogeriemarkt billiger.

(c) Drogeriemarkt: Preis = Anzahl $\cdot\ 0,12\,\text{EUR}$
Versand: Preis = Anzahl $\cdot\ 0,10\,\text{EUR} + 2,59\,\text{EUR}$

(d) Ab 130 bestellten Bildern ist der Versand günstiger.

(e)

(f) Aufgrund der Preissprünge sind beispielsweise 95 Bilder teuerer als 100. Ein Kunde, der 95 Bilder benötigt, sollte eigentlich 5 Bilder zusätzlich bestellen, und kommt damit billiger weg.

10. **Pyramidenbau**

Mit einem Magnetspiel sollen Pyramiden gebaut werden. Die Grundfläche und die Seitenflächen sind gleichseitige Dreiecke. Die farbigen Stücke sind Magnete. Zwischen zwei Magneten befindet sich immer eine Kugel. Ein Magnet ist 27 mm lang, eine Kugel hat einen Durchmesser von 13 mm. Gebaut wird zuerst die „Spitze“ aus 4 Kugeln und 6 Magneten. Von da aus wird die 1. Etage nach unten angebaut. Damit der Bau stabiler wird, wird an jede Kugel, die sich innerhalb einer Kante befindet, ein Magnet als Querstrebe angesetzt.

Das Bild zeigt eine Pyramide mit Spitze und einer Etage.

(a) Untersuche, wie viele Magnete und wie viele Kugeln benötigt werden, um die abgebildete Pyramide zu bauen.

(b) Monika sagt: „Die Kantenlänge dieser abgebildeten Pyramide ist 8 cm“. Wie kommt sie zu dieser Antwort?

(c) Berechne mit Monikas Wert das Volumen der Pyramide.

(d) Wie viele kleine Dreiecke und wie viele Parallelogramme sind außen auf der abgebildeten Pyramide zu finden?

(e) Wie viele Magnete und Kugeln werden benötigt, um dieser Pyramide eine weitere Etage anzubauen?

(f) Monika hat in ihrem Magnetspiel 80 Magnete und 50 Kugeln. Welche Kantenlänge hat die größte solche Pyramide, die sie damit bauen kann?

(g) Erkennst du ein System für die Anzahl der Magnete und die Anzahl der Kugeln in der n-ten Etage? Notiere auch einen Term, mit dem sich die Anzahl der Magnete und die Anzahl der Kugeln bestimmen lassen.

Quelle: Werner Blum u. a. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret, Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen; mit CD-Rom / IQB, Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (www.IQB.hu-berlin.de), 1. Auflage, Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor, 2006

Lösung:
(a) 18 Magnete, 10 Kugeln
(b) a = Kugelradius + Magnetlänge + Kugeldurchmesser + Magnetlänge + Kugelradius
(c) $V = \frac{1}{3} G_{\triangle} \cdot h_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_{\triangle}) \cdot h_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3}) \cdot 8\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 60\text{cm}^3$
(d) 6 kleine Dreiecke, 3 Parallelogramme
(e) 18 Magnete, 9 Kugeln
(f) Spitze und drei weitere Etagen, Kantenlänge der Pyramide: 16 cm
(g) n: Etage (Spitze: n=0);
Anzahl Magnete: $M(n) = (n + 1) \cdot 6 \quad (n \geqq 0)$;
Anzahl Kugeln: $K(n) = (n + 1) \cdot 3 \quad (n > 0)$

8 Neue Aufgaben, Dezember 2006

1. **Petro in Brasilien**

   Brasilien ist der größte Staat Südamerikas. Er erstreckt sich auf einer Fläche von 8.511.965 km^2 und hat etwa 150 Millionen Einwohner.

   Der 15-jährige Pedro lebt in einem kleinen Dorf in der Nähe der Stadt Santarem in Brasilien mit seinen Eltern und 12 Geschwistern.

   (a) Petros Vater ist Bauer. Auf seinem Grundstück baut er Kartoffeln, Gemüse und Kakao an. 1 ha Kulturland ernährt in Brasilien durchschnittlich 8 Menschen. Wie groß muss das Grundstück sein, um Petros Familie zu ernähren?

   (b) Wenn in Petros Dorf jemand krank wird, muss ein Arzt aus dem 50 km entfernten Santarem kommen, da in Brasilien etwa 1080 Einwohner auf einen Arzt fallen.

   Quelle: Übungsheft zu den Bildungsstandards Mahtematik Klasse 9-10, Froum Verlag Herkert GmbH, Merching, 2006

Lösung: (a) $1\text{ha} : 8 \cdot 15 = 10000\text{m}^2 : 8 \cdot 15 = 18750\text{m}^2 = 187,5\text{a} = 1,875\text{ha}$

(b) $150000000 : 1080 = 138888,9$, also etwa 140 Tausend Ärzte

2. Von 2004 bis 2005 hat die Zahl der Hunde, Katzen, Vögel und Kleintiere um 1,3 Prozent auf 23,1 Millionen zugenommen. Die Hundepopulation stieg um sechs Prozent auf 5,3 Millionen Tiere, die Zahl der Katzen um 2,7 Prozent auf nunmehr 7,5 Millionen. Ein Minus wurde dagegen bei Vögeln konstatiert, hier sank die Zahl um 8,7 Prozent auf 4,2 Millionen.
   Die 40- bis 49-Jährigen, stellen 25 Prozent der Tierbesitzer, 24 Prozent sind Senioren mit mehr als 60 Jahren.

   (a) Wie viele Vögel und wie viele Hunde gab es im Jahr 2004 als Haustiere in Deutschland?

   (b) Stelle die Anzahl der Hunde, Katzen, Vögel und Kleintiere im Jahr 2005 in einem Kreisdiagramm dar.

   (c) Fabian folgert: „Jeder Vierte der etwa 80 Millionen Bundesbürgerhat ein Haustier.”
   Was ist von dieser Aussage zu halten?

Lösung: (a) Vögel: $4,2\text{Mio} : 0,913 \approx 4,6\text{Mio}$;
Hunde: $5,3\text{Mio} : 1,06 \approx 5,0\text{Mio}$

(b)

Tier	Anzahl	Winkel
Hunde	5,3 Mio	$82,60°$
Katzen	7,5 Mio	$116,88°$
Vögel	4,2 Mio	$65,45°$
Kleintiere	6,1 Mio	$95,06°$
Alle Tiere	23,1 Mio	$360°$

(c) Viele Leute haben mehrere Haustiere, damit haben mehr als 60 Mio Bundesbürger kein Haustier.

3. Zocker-Tom besucht ein Spielcasino. Er setzt bei jedem Spiel den gleichen Anteil des Geldes, das er im Moment hat. Gewinnt er, dann erhält er seinen Einsatz zurück und zusätzlich den gleichen Betrag noch einmal. Verliert er, so hat er seinen Einsatz verspielt.
Als Zocker-Tom wieder aus dem Spielcasino kommt, hat er gleich viele Spiele gewonnen wie verloren. Über die Reihenfolge von Gewinn und Verlust ist nichts bekannt. Hat er insgesamt Gewinn oder Verlust gemacht?

Quelle: 9. Landeswettbewerb Mathematik, 2006

Lösung: G: Betrag, den er zu Beginn hat,
g: Betrag, den er im Moment hat,
a Anteil, den er jeweils einsetzt,
$a \cdot g$: Einsatz beim Spiel,
Gewinnt er, hat er nach dem Spiel $(1+a)g$, erliert er hat er $(1+a)g$. D. g. bei Gewinn wird der Betrag mit $(1+a)$ multipliziert, beim Verlieren mit $(1-a)$. Wegen dem Kommutativgesetz ist die Reihenfolge der Faktoren unerheblich $\Rightarrow$

Betrag nach n-mal Gewinn und n-mal Verlust:

$G \cdot (1+a)^n \cdot (1-a)^n = G \cdot (1-a^2)^n$

Da $(1-a^2)^n < 1$ ist, hat er insgesamt Verlust gemacht!

4. **Skispringen**

Bei Skispringern erfolgt die Bewertung durch Haltungsnoten und die Weite des Sprungs.

5 Sprungrichter geben Haltungsnoten von 0 bis 20, dabei können auch halbe Punkte gegeben werden. Die höchste und die niedrigste Punktzahl werden gestrichen. Die Summe der drei verbleibenden Wertungen ergibt die Haltungsnote.

Die Punktzahl für die Weite wird für jede Schanze mithilfe des Schanzenfaktors und der Normweite der Schanze unterschiedlich errechnet. Trifft man die Normweite genau, erhält man 60 Punkte. Jeder mehr gesprungene Meter wir mit dem Schanzenfaktor multipliziert und addiert, für jeden weniger gesprungenen Meter erhält man einen entsprechenden Abzug.

Die Summe von Haltungsnote und Weitenpunkten bestimmt die Rangfolge.

Name	Weite	W-Pkt	K1	K2	K3	K4	K5	H-Pkt	Pkt	Rang
Müller	113m		17,5	17,0	18,0	17,5	18,5			
Meier	127m		18,0	17,5	18,0	18,0	18,0			
Schluze	131m		19,0	17,5	19,5	20,0	18,5			
Huber	118m		17,5	18,5	18,5	19,0	19,0			

(a) Berechne für diese vier Springer für das oben angegebene Beispiel die Haltungsnoten, die Weitenpunkte, die Punktzahl und die Rangfolge. Der Schanzenfaktor beträgt 1,2 und die Normweite 120m.

(b) Entwickle und überprüfe durch Einsetzten eine Formel zur Berechnung der Weitenpunkte.

(c) Automatisiere die Berechnung mit einem Tabellenkalkulationsprogramm.

Quelle: Übungsheft zu den Bildungsstandards Mahtematik Klasse 9-10, Froum Verlag Herkert GmbH, Merching, 2006

Lösung: (a)

Name	Weite	W-Pkt	K1	K2	K3	K4	K5	H-Pkt	Pkt	Rang
Müller	113m	51,6	17,5	17,0	18,0	17,5	18,5	53	104,6	4
Meier	127m	68,4	18,0	17,5	18,0	18,0	18,0	54	122,4	2
Schluze	131m	73,2	19,0	17,5	19,5	20,0	18,5	57	130,2	1
Huber	118m	57,6	17,5	18,5	18,5	19,0	19,0	56	113,6	3

(b) W: Weitenpunkte; w: gesprungene Weite; n: Normweite; s: Schanzenfaktor
$\Rightarrow W(w) = 60 + s \cdot (w - n)$

5. Die Wintersaison im Skigebiet hat begonnen. Auf der Piste gibt es Schneeprobleme. Schon lange liegen die Temperautren ständig unter dem Gefrierpunkt, der für den Wintersport dringend benötigte Schnee lässt auf sich warten. Endlich setzte der Schneefall ein. Es schneit zwei Tage und Nächte nahezu mit der gleichen Intensität. Die Höhe des Schnees wächst stündlich um 1,25cm. Für den Liftbetrieb muss eine Mindesthöhe von 20cm Schnee vorliegen.

   (a) Welche Schneehöhe ist nach vier Stunden erreicht, welche nach zehn Stunden?

   (b) Gib eine Gleichung für die Zurodnung Zeit $\rightarrow$ Schneehöhe an und zeichen den Graphen.

   (c) Nach welcher Zeitspanne ist die für den Liftbetrieb erforderliche Schneehöhe erreicht?

   Quelle: Übungsheft zu den Bildungsstandards Mahtematik Klasse 9-10, Froum Verlag Herkert GmbH, Merching, 2006

Lösung: (a) nach vier Stunden: 5cm, nach zehn Stunden: 12,5cm
(b) $t \to t \cdot 1,25cm$
(c) 16 Stunden

6. Herr Sparsam wohnt in Altötting, 20 km von der Grenze zu Österreich entfernt. Er fährt zum Tanken nach Österreich. Dort kostet der Liter Benzin nur 1,21 EUR, im Gegensatz zu 1,30 EUR in Altötting. Lohnt sich die Fahrt?

Lösung: Z. B.: Annahme: Bezinverbrauch 8l pro 100km
Kosten für Fahrt zur Tankstelle: $1,21\frac{\text{EUR}}{\text{l}} \cdot 40\text{km} \cdot 0,08\frac{\text{l}}{\text{km}} = 3,88\,\text{EUR}$
Ersparnis bei ganzer Tankfüllung (50l):
$50 \cdot (1,30\,\text{EUR} - 1,21\,\text{EUR}) = 5,5\,\text{EUR}$
Die Fahrt lohnt sich, wenn die dazu benötigte Zeit und Umweltgesichtspunkte keine Rolle spielen.

7. **Mathe im Sport**

(a) Beim Biathlon beträgt der Durchmesser der Scheiben beim Schießen mit liegenden Anschlag 4,5cm und beim stehenden Anschlag 11,5cm.
Um wie viel Mal ist die Fläche beim stehendem Anschlag größer als beim liegenden Anschlag?

(b) Nach dem Sieg wird mit einem Glas Sekt gefeiert. Das Glas hat eine Gesamthöhe von 21 cm , eine Fußhöhe von 11 cm und einen oberen Durchmesser von 6cm.
i. Welches Gesamtvolumen hat das Sektglas?
ii. Wie viele Gläser Sekt kann man aus einer 1,5-Liter-Flasche aussschenken?

(c) Ein zylindrischer Puck hat eine Oberfläche von $152cm^2$ und eine Höhe von 2,54 cm. Welches Volumen hat der Eishockey-Puck?

Lösung: (a) $6,53$
(b) $0,094$l; 16
(c) $2r^2\pi + 2r\pi h = A \Rightarrow r = -h \pm \sqrt{h^2 + \frac{2A}{\pi}} \Rightarrow r \approx 7,62cm$
$\Rightarrow V = r^2\pi h = 463cm^3$

8. Betrachte die beiden linearen Funktionen $f(x) = x + 2$ und $g(x) = x - 3$ und die quadratische Funktion $p(x) = f(x) \cdot g(x)$

(a) Zeichne die Graphen der Funktionen in ein Koordinatensystem.

(b) Welche Zusammenhänge zwischen den Graphen gibt es?

Lösung: Z. B.:
Die Geraden G_f und G_g sind parallel.
Nullstellen der Parabel G_p sind die Nullstellen der Geraden G_f und G_g.
y-Wert zu einem x-Wert von h erhält mann, indem man die y-Werte von f und g multipliziert.

9. Betrachte die Gerade $g(x) = 4x - 1$ und die Parabel $p(x)y = x^2 - 2x + 5$.

   (a) Für welche Werte von x ist die Differenz der Funktionswerte von $g(x)$ und $p(x)$ am kleinsten?

   (b) Wie verändert sich das Ergebnis, wenn man den Graphen von $g(x)$ um a in y-Richtung verschiebt?

   (c) Wie verändert sich das Ergebnis, wenn man den Graphen von $g(x)$ um b in x-Richtung verschiebt?

Lösung:
(a) Z. B.: $g(x) - p(x) = (x - 3)^2 - 3 \Rightarrow$ Differenz am kleinsten für $x = 3$
(b) Verschiebung um $a \Rightarrow g(x) - p(x) = (x - 3)^2 - 3 + a \Rightarrow$ Differenz am kleinsten für $x = 3$; Differenz der Funktionswerte verändert sich: g(3)-p(3)=-3+a
(c) Differenz am kleinsten für $x = 3$; Differenz der Funktionswerte verändert sich: g(3)-p(3)=-3+4b

10. **Lagebeziehungen von Parabeln**

    Betrachtet die Parabel $p(x) = 0,5x^2 - 3$ und die Gerade $g(x) = 0,5x + 2$.

    (a) Zeichne die Parabel $p(x)$ und die Gerade $g(x)$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

    (b) Gib die Gleichung einer anderen Gerade an, die die Parabel p ebenfalls in zwei Punkten schneidet und parallel zu g ist. Gib jeweils die Gleichung einer Geraden an, die die Parabel p in keinem bzw. in genau einem Punkt schneidet und parallel zu p ist.

    (c) Gib den Funktionsterm einer Parabel an, die vollständig oberhalb der Parabel p verläuft.

    (d) Entscheide in jedem Fall, ob die Aussage wahr oder falsch ist:

    - Eine Parabel, die nach unten geöffnet ist und deren Scheitel unterhalb des Scheitels von p liegt, hat sicher keinen Schnittpunkt mit p.
    - Eine Parabel, die nach oben geöffnet ist und eine größere Öffnungsweite als p hat, hat sicher einen Schnittpunkt mit p.

- Eine Parabel, die die gleiche Öffnungsweite hat wie p und nach unten geöffnet ist, kann Schnittpunkte mit p besitzen, muss aber nicht.

Lösung: (a) .
(b) Z. B.: zwei Punkten $g(x) = 0,5x + 3$, kein Punkt $g(x) = 0,5x - 5$, genau ein Punkt $g(x) = 0,5x - 3$
(c) Z. B.: $y = 0,5x^2$ oder $y = x^2 + 7$
(d) wahr, falsch, wahr

11. Da Bäume wichtige Sauerstofflieferanten sind, sollen gefällte alte Bäume durch junge Bäume ersetzt werden.

    Laubbäume geben pro Quadratzentimeter Blattfläche ca. 1,8 ml Sauerstoff je Tag ab. Die gesamte Sauerstoffproduktion eines Baumes hängt von der Zahl der Blätter ab. Für eine grobe Abschätzung nimmt man an, dass ein Baum überall in der Baumkrone dieselbe Blattdichte besitzt.

    Schätze ab, wie viele junge Bäume mit einem Kronendurchmesser von je 1,5m gepflanzt werden müssen, wenn ein alter Baum mit einem Kronendurchmesser von 12m gefällt wird.

Lösung: Annahmen: Blattoberfläche proportional zum Volumen der Krone, Baumkrone kugelförmig
$\Rightarrow V_{alt} = \frac{4}{3}(6\text{m})^3\pi \approx 905\text{m}^3$; $V_{neu} = \frac{4}{3}(0,75\text{m})^3\pi \approx 1,8\text{m}^3$
Also müssten ca. 500 neue Bäume geplanzt werden

12. Neun von zehn Ungeborenen bevorzugen im Mutterleib den rechten Daumen zum Lutschen. Forscher fanden heraus, dass alle Kinder, die rechts genuckelt hatten, im Alter von 10 bis 12 Jahren Rechtshänder waren. Zwei Drittel der Kinder, die im Mutterleib am linken Daumen lutschten, waren Linkshänder.

    (a) Wie viel Prozent der Kinder sind Linkshänder geworden, wie viel Prozent Rechtshänder?
    (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Rechtshänder vor der Geburt am linken Daumen genuckelt?

Lösung: (a) $p(l) = 0,1 \cdot \frac{2}{3} = 7\%$, $p(r) = 0,9 \cdot 1 + 0,1 \cdot \frac{1}{3} = 93\%$
(b) $p_r(l_v) = \frac{p(r \cap l_v)}{p(r)} = 4\%$

13. Taucht man einen Strohhalm (Durchmesser 3 mm) in Seifenlauge und zieht ihn wieder heraus, bleibt in ihm auf einer Länge von 7 mm Seifenlauge zurück. Daraus bläst man eine Seifenblase mit einem Durchmesser von 8 cm. Wie dich ist die Haut der Seifenblase?

Lösung: $V_{Zylinder} = 1,5^2 \cdot \pi \cdot 7\text{mm}^3 \approx 50\text{mm}^3$
$O_{Seifenblase} = 4 \cdot \pi \cdot 40^2\text{mm}^2 \approx 20000\text{mm}^2$
$d_{Seifenblasenhaut} = V_{Zylinder} : O_{Seifenblase} = 0,0025\text{mm}$

9 Neue Aufgaben, Oktober 2006 2

1. Auf wie viele Nullen endet 10! und 20! ?

Lösung: Die Nullen ergeben sich durch Faktorenpaare, die jeweils 10 ergeben.
In 10! kommt der Faktor 5 zweimal vor, der Faktor 2 mehr als zweimal $\Rightarrow$ zwei Nullen am Ende.
In 20! kommt der Faktor 5 viermal vor, der Faktor 2 mehr als zweimal $\Rightarrow$ vier Nullen am Ende.

2. (a) $33\frac{1}{3}\%$ von 468 EUR sind ...
   (b) $2^{10} : 2^9$
   (c) Zwei Fünftel von 95 EUR sind ...
   (d) Wenn Tom von seinen 936 EUR mindestens $33\frac{1}{3}\%$ ausgibt, hat er nöchstens noch ...
   (e) 5% von ... EUR sind 42,75 EUR
   (f) 10% von 40% von ... sind 21 km.

   Quelle: Kreuzzahlrätsel von Ulrike Schätz

Lösung: (a) 156 EUR (b) 2 (c) 38 EUR (d)624 EUR
(e) 855 EUR (f) 525 km

3. (a) $\frac{36\cdot 78\cdot 121}{108\cdot 22}$
   (b) $10^2 + 10^1 + 10^0$
   (c) $\frac{645}{516} = \frac{\Delta}{100}$
   (d) Der Oberflächeninhalt eines Würfels mit dem Volumen $343m^3$ beträgt $\ldots m^2$.
   (e) $\frac{1}{2} + \frac{3}{19} = \frac{50}{\Delta}$

   Quelle: Kreuzzahlrätsel von Ulrike Schätz

Lösung: (a) $13 \cdot 11 = 143$ (b) 111 (c) $\Delta = \frac{645\cdot 100}{516} = 125$
(d) Kantenlänge des Würfels: $7m \Rightarrow$ Oberfläche $= 6 \cdot 7^2 m^2 = 294m^2$
(e)$\frac{1}{2} + \frac{3}{19} = \frac{25}{38} = \frac{50}{\Delta} \Rightarrow \Delta = 76$

4. Wie viele Diagonalen hat ein 16-Eck?

Lösung: Anzahl der Diagonalen in Abhängigkeit der Eckenzahl:

Ecken	3	4	5	6
Diagonalen	0	2	5	9

Anzahl der zusätzlichen Diagonalen bei der n-ten Ecke: $n-2$ für $n \geq 4$

Anzahl Diagonalten bei 16-Eck: $14+13+12+\cdots 3+2=104$

5. (a) $P(p|8) \in g : y = 4x - 40;\ p = \ldots$
   (b) $2 \cdot 17^0 = \ldots$
   (c) Flächeninhalt des Rechtecks RON mit $R(0|16)$, $O(0|0)$ und $N(14|0)$.
   (d) $6 \cdot x = 30^2;\ x = \ldots$
   (e) $120 : x = 600;\ x = \ldots$

   Quelle: Kreuzzahlrätsel von Ulrike Schätz

Lösung: (a) 12 (b) 2 (c) 112 (d) 150 (e) $\frac{1}{5}$

6. (a) Steigung der Geraden $4x - 2y = 0$
   (b) $37 \cdot (\Delta - 24) \cdot 15 = 0$
   (c) Die Gerade $h : x + y = 0$ bildet mit der positiven x-Achse einen Winkel von $\ldots°$.
   (d) Der Stundenzeiger überstreicht in 1 Stunde einen Winkel der Größe $\ldots°$.
   (e) y-Abschnitt der Geraden $g : y - 21 = 0$

   Quelle: Kreuzzahlrätsel von Ulrike Schätz

Lösung: (a) 2 (b) $\Delta = 24$ (c) $45°$
(d) $30°$ (e) 21

7. (a) y-Achsenabschnitt der Geraden $g : x - 5y + 30 = 0$
   (b) $6 \cdot x = 30^2 : 10;\ x = \ldots$
   (c) Steigung der Geraden $k : y + 5 = 0$
   (d) $6! - 2! \cdot (3! - 1!) \cdot (4! - 4) = \ldots$

(e) Größe des Winkels, den die Gerade $h : 3x-3y-6=0$ mit der positiven x-Achse bildet.

Quelle: Kreuzzahlrätsel von Ulrike Schätz

Lösung: (a)6 (b) 15 (c) 0 (d) 520 (e) 45°

8. (a) y-Abschnitt der Geraden $k : 2x - 0,5y + 12 = 0$
   (b) Flächeninhalt des Rechtecks $WIEN$ mit $W(-13|-11)$, $I(21|-11)$, $E(21|7)$ und $N(-13|7)$.
   (c) Steigung jedes Lotes zur Geraden $g : 0,05x + y = 0$
   (d) Flächeninhalt des Dreiecks LEA mit $L(0|6)$, $E(0|-8)$ und $A(18|0)$.

   Quelle: Kreuzzahlrätsel von Ulrike Schätz

Lösung: (a) 24 (b) $(7+11)\cdot(13+21)=612$ (c) 20 (d) $\frac{1}{2}(6+8)\cdot 18 = 126$

9. Gegeben ist die lineare Funktion $f(x) = -x-1$

   (a) Zeichnen Sie den Graphen von f in ein Koordinatensystem. Zeigen Sie, dass der Punkt $P(-93|92)$ auf dem gegebenen Graphen liegt.
   (b) Beschreiben Sie einen Weg, wie Sie die Gleichung einer weiteren linearen Funktion finden, deren Graph ebenfalls durch den Punkt $P(-93|92)$ geht.
   (c) Gegeben sind lineare Funktionen g_m mit $g_m(x) = mx + 2$. Unter welchen Bedingungen für m schneiden sich die Fraphen von f und g_m im II. Quadranten.

   Quelle: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss

Lösung: (a) $f(-93) = -(-93) - 1 = 92$

(b) 1. Möglichkeit: beliebigen Punkt Q wählen und Geradengleichung durch P und Q aufstellen.
2. Möglichkeit: Beliebigen Steigung $m \neq -1$ wählen und Geradengleichung durch P mit Steigung m aufstellen.

(c) $f(x) = g_m(x) \Rightarrow$ Schnittpunkt $S(\frac{-3}{m+1}|\frac{2-m}{m+1})$ für $m \neq -1$.
II. Quadrant für $\frac{-3}{m+1} < 0$ und $\frac{2-m}{m+1} > 0 \Rightarrow -1 < m < 2$.

10. Fünf Seiten eines Würfels vom 3 cm Kantenlänge werden rot angestrichen, die sechste Fläche bleibt ohne Anstrich.

    (a) Wie viel Prozent der Würfelfläche sind rot?

(b) Der Würfel wird in Teilwürfel von 1 cm Kantenlänge zerlegt. Diese Teilwürfel werden in ein Gefäß gelegt, aus dem anschließend einer mit geschlossenen Aufgen entnommen wird.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat der entnommene Würfel keine, genaue eine (zwei, drei, vier) rot angestrichene Flächen(n)?

Quelle: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss

Lösung: (a) Ca. 83% der Würfelfläche sind rot.

(b) X: Anzahl der rot angestrichene Flächen(n)
$P(0) = \frac{2}{27}$, $P(1) = \frac{9}{27}$, $P(2) = \frac{12}{27}$, $P(3) = \frac{4}{27}$, $P(4) = \frac{0}{27}$

11. (a) Lösung der Gleichung $\sqrt[4]{x} = \sqrt{14}$ über $G = \mathbb{R}_0^+$

(b) Diskriminante der Gleichung $x^2 - 5x + 0,5 = 0$

(c) $\sqrt[3]{79507}$

(d) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} + \sqrt{\sqrt[3]{10^{12}}} - \sqrt{1600} =$

(e) $6! + 1!$

Quelle: Kreuzzahlrätsel von Ulrike Schätz

Lösung: (a) 196 (b) 23 (c) 43
(d) 62 (e) 721

12. Die Punkte $A(0|0)$, $B(8|0)$, $C(8|3)$ und $D(0|15)$ sind Ecken eines Trapezes.

Jeder Punkt der Trapezseite $\overline{CD}$ ist Eckpunkt eines Rechtecks, das dem Trapez einbeschrieben ist. Die Seiten der einbeschriebenen Rechtecke sind parallel zu den Koordinatenachen. Der Punkt A ist Eckpunkt eines jeden einbeschriebenen Rechtecks.

(a) Zeichnen Sie das Trapez und berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$.

(b) Der Punkt $P(2|y)$ liegt auf der Seite $\overline{CD}$ und ist somit Eckpunkt eines einbeschriebenen Rechtecks. Tragen Sie das zugehörige Rechteck in die Figur ein und bestimmen Sie den Flächeninhalt.

(c) Bewegt sich der Punkt $P(x|y)$ auf der Strecke $\overline{CD}$, so ändert sich der Flächeninhalt F des zugehörigen Rechtecks. Durch welche Gleichung $F(x)$ lässt sich der Flächeninhalt F berechnen?

(d) Bestimmen Sie das einbeschriebene Rechteck so, dass es den größtmöglichen Flächeninhalt hat.

Quelle: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss

Lösung: (a) $\frac{1}{2}(15+3)\cdot 8 = 72$
(b) $P(2|12)$, $A = 2\cdot 12 = 24$
(c) $F(x) = x\cdot(-1,5x+15)$
(d) Maximum am Scheitel der nach unten geöffneten Parabel $F(x)$, der in der Mitte der Nullstellen $N_1(0|0)$ und $N_2(10|0)$ liegt $\Rightarrow x = 5$, $F(5) = 37,5$

13. **Skipiste**

Im italienische Bornio findet jährlich ein Abfahrtsrennen im Rahmen des Skiweltcups statt. Die Abfahrtsstrecke ist insgesamt 3270 m lang. Der Start begindet sich in 2255 m Höhe, das Ziel in einer Höhe von 1245 m. Die maximale Steigung beträgt 63%.

(a) Berechne die durchschnittliche Geschwindigkeit eines Rennläufers im $\frac{km}{h}$, der die Strecke in 1 Minute und 54,23 Sekunden bewältigte.
(b) Erläutere, was ,,Steigung 63%” bedeutet. Bestimme den Winkel, den eine Strecke der Steigung 63% mit der Horizontale Bildet.
(c) Berechne die Steigung des Abfahrtstrecke von Bormio, wenn sie mit gleicher Länge geradlinig vom Start zum Zielpunkt verliefe.

Quelle: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss

Lösung: (a) $103\frac{km}{h}$
(b) $\tan\alpha = 0,63$ ergibt $\alpha \approx 32^\circ$
(c) 32%

14. (a) $\log_{10} 10^{111}$
(b) Produktwert der Lösungen der Gleichung $x^2 - 7x + 6$ über $G = \mathbb{N}_0$
(c) $3(\log_{10} 10^6 + \log_{10} 10^8 + \log_{10} 1000) =$
(d) $\sqrt{55^2 + 15^2 - 1^4}$
(e) $(\log_2 1024 + \log_2 512)^2$

Quelle: Kreuzzahlrätsel von Ulrike Schätz

Lösung: (a) 111 (b) 6 (c) 51 (d) 57 (e) 361

15. (a) $\sqrt[7]{2187} + 4\log_3 59\,049$

(b) $72^{0{,}5} \cdot 162^{0{,}5}$

(c) $(1+2)^{\log_{10} 10\,000}$

(d) Lösung der Gleichung $x^2(x+1)(x-12)$ über $G = \mathbb{R}^+$

Quelle: Kreuzzahlrätsel von Ulrike Schätz

Lösung: (a) 43 (b) 108 (c) 81 (d) 12

16. (a) $\log_5 3\,125$

(b) Lösung der Gleichung $\log(2x-21) = 0$ über $]10,5;\infty[$

(c) $(\log_{10} 10^{10} + \log_5 125)^2$

(d) $10,5 \cdot \sqrt[4]{38\,416}$

(e) $\log_2[(2^{10} : 512)^2]$

Quelle: Kreuzzahlrätsel von Ulrike Schätz

Lösung: (a) 5 (b) 11 (c) 169 (d) 147 (e) 2

17. (a) $4 \log_{100} 10^{20}$

(b) Diskriminante der Gleichung $2x^2 - 25x - 9 = 0$

(c) $100 \log_5 15\,625 + 4 \log_5 125 + 3 \log_5 125$

(d) $2 \log_7 343 + 4 \log_5 625$

(e) $\log_{10} 1^{20} + \log_{10} 10$

Quelle: Kreuzzahlrätsel von Ulrike Schätz

Lösung: (a) 40 (b) 697 (c) 621 (d) 22 (e) 1

10 Neue Aufgaben, Oktober 2006 1

1. Gegeben ist die Gleichung

$$\frac{2}{5}(x-7)-\frac{3}{5}(2-3x)=x+2\frac{1}{5},\quad G=\mathbb{Q}$$

   (a) Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung.

   (b) Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung für die Grundmengen $G_1=\mathbb{Q}^+$, $G_2=\mathbb{Z}$, $G_3=\mathbb{N}$ und $G_4=\{5;5\frac{1}{2};5\frac{1}{3};5\frac{1}{4};5\frac{1}{5};5\frac{1}{6}\}$.

   (c) Verändere die rechte Seite der Gleichung so, dass $L_1=\{11\}$, $L_2=\{0\}$, $L_3=\{\}$ und $L_4=G$.

   (d) Lässt sich die Gleichung so abändern, dass $L_5=\{1;2\}$?

   (e) Betrachte nun die Gleichung

$$\frac{2}{5}(x-7)-\frac{3}{5}(2-3x)=ax+2\frac{1}{5},\quad G=\mathbb{Q},\quad a\in\mathbb{Q}.$$

   Für welche a gibt es genau eine Lösung? Wie lautet dann die Lösungsmenge? Wie sieht die Lösungsmenge in den übrigen Fällen aus?

   (f) Betrachte nun die Gleichung

$$\frac{2}{5}(x-7)-\frac{3}{5}(2-3x)=x+b\cdot 2\frac{1}{5},\quad G=\mathbb{Q},\quad b\in\mathbb{Q}.$$

   Welche Einfluss auf die Anzahl der Lösungen hat b?

Lösung: (a) $L=\{5\frac{1}{6}\}$

(b) $L_1=\{5\frac{1}{6}\}$, $L_2=\{\}$, $L_3=\{\}$, $L_4=\{5\frac{1}{6}\}$.

(c) z. B. $\frac{2}{5}(x-7)-\frac{3}{5}(2-3x)=x+9\frac{1}{5}$
$\frac{2}{5}(x-7)-\frac{3}{5}(2-3x)=x-4$
$\frac{2}{5}(x-7)-\frac{3}{5}(2-3x)=2\frac{1}{5}x$
$\frac{2}{5}(x-7)-\frac{3}{5}(2-3x)=2\frac{1}{5}x-4$

(d) Nein

(e) Genau eine Lösung für $a\neq\frac{11}{5}\Longrightarrow L=\left\{\frac{31}{11-5a}\right\}$
Für $a=\frac{11}{5}$ folgt $L=\{\}$

(f) b hat keinen Einfluss auf die Anzahl der Lösungen.

2. (a) Die monatlichen Telefongebüren berechnen sich beim Anbieter FONO aus der Grundgebühr und der Anzahl der Gespräche, wobei 12 Gespräche frei sind:

Grundgebühr:	13,60 €
1 Gespräch kostet:	0,11 €

   i. Stelle einen Term für die Berechnung der monatlichen Telefongebühren auf.
   ii. Bestimme die Definitionsmenge und berechne einige Werte des Terms.

   (b) Die monatlichen Telefongebüren berechnen sich beim Konkurrenten von FONO aus der Grundgebühr und der Anzahl der Nah- und Ferngespräche, wobei 8 Nahgespräche frei sind:

Grundgebühr:	13,60 €
1 Nahgespräch kostet:	0,05 €
1 Ferngespräch kostet:	0,15 €

   i. Stelle einen Term für die Berechnung der monatlichen Telefongebüren auf. Berechne einige Werte des Terms.
   ii. Wann ist es besser beim Anbieter Fono bzw. dem Konkurrenten zu telefonieren?

   (c) i. Finde die Telefongebühren verschiedener Anbieter heraus und stelle jeweils einen Term zur Berechnung der monatlichen Gebühren auf.
   ii. Untersuche wie man am günstigsten telefoniert.

Lösung: (a) i. $T(x) = 13{,}60 + (x - 12) \cdot 0{,}11$
   ii. Für die sinnvolle Grundmenge $G = \mathbb{N}_0$ ist $D = \{12; 13; 14; \cdots\}$
   Z. B. $T(15) = 13{,}93$, $T(62) = 19{,}10$, ...

(b) i. $T(x; y) = 13{,}60 + (x - 8) \cdot 0{,}05 + y \cdot 0{,}15$
   Z. B. $T(0; 50) = 21{,}10$, $T(50; 0) = 15{,}70$, $T(25{,}25) = 18{,}20$
   ii. Z. B.: Es ist besser beim Anbieter FONO zu telefonieren, wenn für mindestens 12 Nahgespräche die Anzahl der Ferngespräche mehr als $\frac{6x-92}{15}$ (x: Anzahl der Ortsgespräche) ist.

3. Vor langer Zeit lebten einmal drei Kobolde mit Namen Asam, Bela und Calvin in den Wäldern um den Feuerbach. Die Höhlen der drei Kobolde waren durch gerade Wege miteinander verbunden. Eines Tages fanden die Kobolde die verschlüsselte Botschaft eines Druiden, die sie zu einer verhexten Feuerstelle am Feuerbach führen sollte. Sie waren sich über den genauen Verlauf des Flusses nicht einig, deshalb nahmen sie ein Fell daher, das ihnen als Karte dienen sollte. Auf diesem Fell wollten sie die Wege nach der Botschaft des Druiden einzeichnen.

   Sofort machten sich die drei Kobolde an die Arbeit die Botschaft zu entschlüsseln.

- *Ein jeder gehe von seiner Höhle senkrecht auf den gegenüberliegenden Weg. Der gemeinsame Treffpunkt am Fluss werde durch Hölzer mit einem H gekennzeichnet.*
- *Nun gehe jeder Kobold von H zu seiner Höhle zurück und markiere dabei die Hälfte des Weges ebenfalls mit einem Stöckchen.*
- *Weiter finde jeder die Senkrechte auf die Mitte des Weges, der zu seinem Nachbar führt. Auch hier werde der gemeinsame Treffpunkt, wieder am Fluss, durch Hölzer markiert, diesmal durch ein M.*
- *Sucht die Mitte von M und H. Dort findet Ihr die verhexte Feuerstelle.*

Sofort machten Asam, Bela und Calvin sich auf und waren schließlich überglücklich, die verschlüsselte Botschaft des Druiden enträtselt zu haben, denn von dieser Feuerstellt am Fluss ging wahrhaftig ein Zauber aus.

Spür auch du dem Zauber nach, dem Asam, Bela und Calvin erlegen sind, indem Du die Fellzeichnung der Kobolde nachzeichnest.

Literatur: PM 4/43, Jg. 2001

Lösung: Die Feuerstelle ist Mittelpunkt des Feuerbachschen Neunpunktekreises und liegt zusammen mit M und H auf der Eulerschen Geraden.

4. (a) 30% von 40% von 150 EUR sind ...

   (b) Wenn Tom von seinen 918 EUR mindestens $33\frac{1}{3}\%$ ausgibt, hat er höchstens noch ...

Lösung: (a) 18 EUR (b) 612 EUR

5. **Kids im WWW**

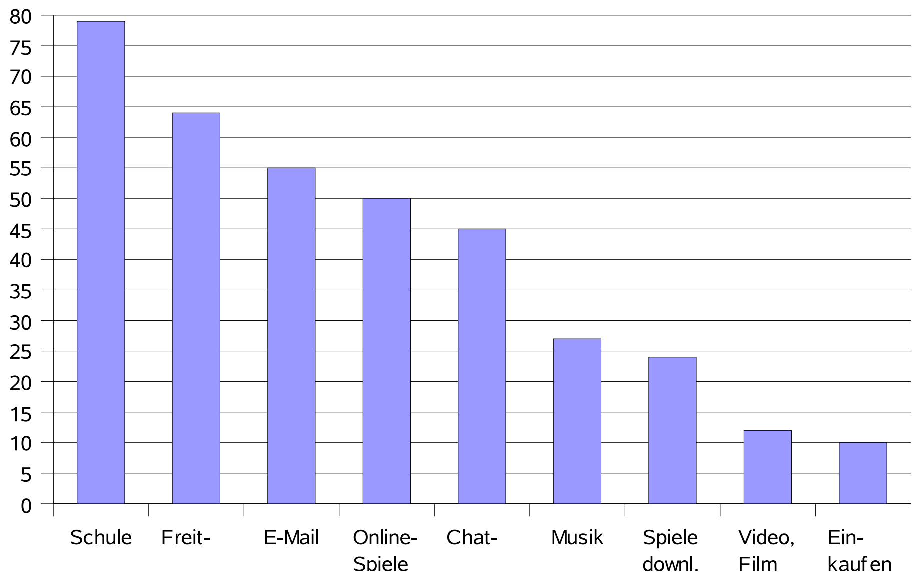
   Stelle die folgenden Informationen in einem Diagramm dar.

   46% der Kinder im Alter zwischen 6 und 13 Jahren nutzen das Internet. Die wichtigsten Nutzungsarten sind

Infos für Schule sammeln	79%
Infos für Freizeit sammeln	64%
E-Mails austauschen	55%
Online-Spiele	50%
Chatten	45%
Musik downloaden	27%
Spiele/Programme downloaden	24%
Videos, Filme downloaden	12%
Im Internet einkaufen	10%

Quelle: Globus Infografik, Hamburg

Lösung: in %



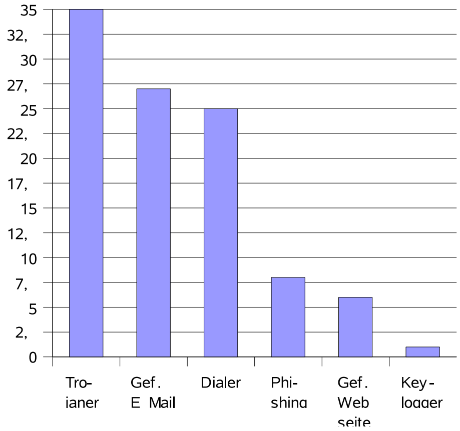
6. **Gefahren aus dem Internet**
   Stelle die folgenden Informationen in einer Tabelle und einem Diagramm dar.

   (a) Von je 100 Internetnutzern sind schon einmal 35 Opfer geworden von Trojanern, 27 von gefälschten E-Mails, 25 von Dialern, 8 von Phishing, 6 von gefälschten Webseiten und 1 von Keyloggern

   (b) Von je 100 Befragten sichern 87 ihre Computer durch Anti-Viren-Software, 78 durch Firewall, 59 durch Spam-Blocker, 48 durch Anti-Spyware-Software, 15 durch Verschlüsselungssoftware 15 durch Webfilter und 10 durch digitale Signaturen.

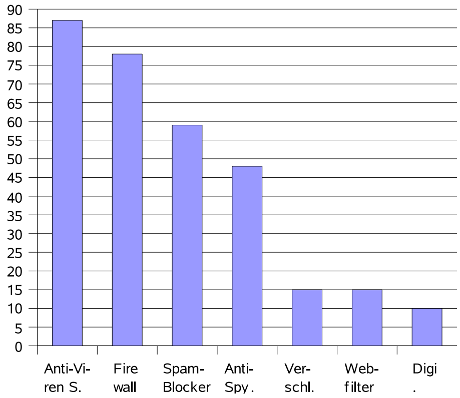
   Quelle: Globus Infografik, Hamburg

Lösung: (a) in %



Opfer von ...	
Trojanern	35%
gefälschte E-Mails	27%
Dialer	25%
Phishing	8%
gefälschte Webseite	6%
Keylogger	1%

(b) in %



Schutz durch ...	
Anti-Viren-Software	87%
Firewall	78%
Spam-Blocker	59%
Anti-Spyware-Software	48%
Verschlüsselungssoftware	15%
digitale Signaturen	10%

7. Eine Müslimischung enthält 3 Teile Haferflocken, 2 Teile Cornflakes, 2 Teile Rosinen, einen Teil Nüsse, einen Teil Bananenchips und einen Teil getrocknete Aprikosen. Wieviel Gramm von jeder Zutat müssen in einer Tüte von 1 kg Müsli enthalten sein?

Lösung: 10 Teile $= 1000g$; 1 Teil $= 100g$.

Es werden 300g Haferflocken, 200g Cornflakes, 200g Rosinen, 100g Nüsse, 100g Bananenchips und 100g getrocknete Aprikosen benötigt.

8. In einem Mehrfamilienhaus befinden sich vier Mietwohnungen mit Wohnflächen von $45m^2$, $68m^2$, $72m^2$ und $95m^2$. Die Kosten für die Müllabfuhr werden nach der Wohnungsgröße auf die Mietparteien umgelegt. Insgesamt wurden der Hausverwaltung durch das Entsorgungsunternehmen für die Hausmüllentsorgung in einem Jahr 610,05 EUR in Rechnung gestellt. Welche Kosten ergeben sich aufgeschlüsselt auf die einzelnen Haushalte?

Lösung: $280m^2 \hat{=} 610,05$ EUR $\Rightarrow 1m^2 \hat{=} \frac{610,05}{280}$ EUR

Wohnungsfläche in m^2	45	68	72	95
Umgelegte Kosten in EUR	98,04	148,16	156,87	206,98

9. In einem Mehrfamilienhaus befinden sich vier Mietwohnungen mit den Wohnflächen von $45m^2$, $68m^2$, $72m^2$ und $95m^2$. Die jährlichen Kosten für die Heizung werden nach folgendem System auf die Mietparteien umgelegt:

   Die Gesamtkosten werden zuerst zu gleichen Teilen in Grundkosten und Verbrauchskosten aufgeteilt. Die Grundkosten werden wie die Kosten für die Hausmüllentsorgung entsprechend der Wohnungsgröße auf die Mietparteien umgelegt. Die Verbrauchskosten werden anteilig entsprechend der verbrauchten Einheiten auf die Mietparteien umgelegt. Insgesamt wurden der Hausverwaltung durch das Energieversorgungsunternehmen für Heizung 1675,88 EUR in Rechnung gestellt. Bei der Heizkostenablesung in den Wohnungen wurde für das gesamte Haus ein Verbrauch von 65 Einheiten ermittelt. Auf die größte der vier Wohnungen entfielen davon 22 Einheiten.

   Die Hausverwaltung hat den Mietern der größten Wohnung Heizkosten in einer Höhe von 567,63 EUR berechnet. Prüfe, ob dieser Betrag korrekt ist und berechne gegebenenfalls den korrekten Betrag!

Lösung: Grundkosten gesamt: $1675,88$ EUR $: 2 = 837,94$ EUR $\hat{=} 280m^2$

Die Grundkosten betragen für die $95m^2$ große Wohnung also 284,30 EUR.

Verbrauchskosten gesamt: $1675,88$ EUR $: 2 = 837,94$ EUR $\hat{=}$65 Einheiten

Die Verbrauchskosten betragen für die $95m^2$ große Wohnung also 283,61 EUR.

Die gesamten Heizkosten belaufen sich auf $284,30 EUR + 283,61 EUR = 567,91$ EUR.

Die Hausverwaltung hat sich also geringfügig zugunsten des Mieters verrechnet.

10. Ein Rechtsanwalt hat einige Räume seiner Mietwohnung zu seinem Anwaltsbüro umgewidmet. Mit dem Vermieter hat er die teilgewerbliche Nutzung der Räumlichkeiten

vertraglich wie folgt geregelt: Drei Fünftel der von ihm genutzten Räumlichkeiten gelten als privat, der Rest gilt als gewerblich genutzte Fläche. Die Gesamtfläche beträgt $145m^2$. Insgesamt ist eine monatliche Nettokaltmiete von 918,41 EUR zu zahlen. Für die privat genutzten Räume wird eine Nettokaltmiete von 4,83 EUR pro Quadratmeter berechnet.

(a) Wieviel Quadratmeter umfasst der als Anwaltsbüro genutzte Teil der Wohnung, wieviel Quadratmeter werden privat genutzt?

(b) Welche Nettokaltmiete zahlt er für den gewerblich genutzten Teil der Wohnung pro Quadratmeter?

Lösung: (a) Privatbereich: $\frac{3}{5} \cdot 145m^2 = 87m^2$; Anwaltsbüro: $58m^2$

(b) Mietanteil für den Privatbereich: $4,83\frac{EUR}{m^2} \cdot 87m^2 = 420,21EUR$ Mietanteil für den Anwaltsbereich: $498,20EUR$

11. Ein Grundstück hat eine Gesamtfläche von 800 m^2. Davon enfällt ein Viertel auf ein Wohnhaus mit Garage, ein Drittel auf versiegelte Freiflächen (Terrasse, Garagenzufahrt, Müllecke und betonierte Wege) sowie der Rest auf unversiegelte Freiflächen (Buddelkasten, Rasen, Beete, Komposthaufen und geschotterte Wege).

(a) Geben Sie die Fläche des Wohnhauses mit Garage, die Größe der versiegelten Freiflächen und die Größe der unversiegelten Freiflächen in Quadratmetern an!

(b) Durch Entsiegelungsarbeiten im Bereich der Garagenzufahrt wird die versiegelte Freifläche um ein Viertel verringert. Geben Sie die Größe der versiegelten Freiflächen und die Größe der unversiegelten Freiflächen nach der Entsiegelung in Quadratmetern an!

Lösung: (a) Wohnhaus mit Garage: 200 m^2; versiegelte Freifläche: 266,67 m^2; unversiegelte Fläche: 333,33 m^2

(b) versiegelte Freifläche: 200 m^2; unversiegelte Freifläche: 400 m^2

12. Von 56 Kindern eines Kindergartens wird jedes vierte Kind regelmäßig mit dem Auto gebracht, von den restlichen Kindern jedes dritte ab und zu mit dem Auto und 24 Kinder zu Fuß. Die restlichen Kinder werden mit dem Fahrrad gebracht. Wie viele Kinder werden regelmäßig mit dem Auto gebracht, wie viele ab und zu mit dem Auto und wie viele mit dem Fahrrad?

Lösung: Regelmäßig mit dem Auto: 14 Kinder
Ab und zu mit dem Auto: 14 Kinder
Mit dem Fahrrad: 4 Kinder

13. Für die Nasendusche benötigt man eine Salzlösung, in der der Anteil des Salzes 1% beträgt. Da das Abwiegen der kleinen Salzmengen mit einer Küchenwaage sehr ungenau wird, gibt es das Salz in kleinen Tütchen in der Apotheke zu kaufen. In einem Tütchen sind 2,5 g Salz. Wie viel Wasser benötigt man zur Herstellen der Salzlösung?

Lösung: Es werden 250 g Salzlösung hergestellt. Dafür benötigt man 247,5 g Wasser. Das entspricht einem Volumen von 247,5 ml.

14. Bei alkoholischen Getränken ist es üblich, den Anteil reinen Ethanols am Gesamtvolumen des Weines in Prozenten anzugeben. Ein Hobbywinzer stellt mit einer Präzisionswaage fest, dass 1 Liter seines trockenen Kirschweins eine Masse von 973,125 g hat. Wie viel Prozent Alkohol enthält dieser Wein?

    Man kann davon ausgehen, dass es sich bei Wein um eine Mischung aus Wasser und Ethanol handelt. Ein Liter Wasser wiegt 1,0 Kilogramm, ein Liter reines Ethanol wiegt 785 g. Die Anteile an Säure und Restzucker können vernachlässigt werden.

Lösung: Es sei p% der prozentuale Volumenanteil des Alkohols im Kirschwein.
Volumen des Alkohols: $1l \cdot \frac{p}{100}$
Masse des Alkohols: $0,785\frac{kg}{l} \cdot 1l \cdot \frac{p}{100} = 0,785kg \cdot \frac{p}{100}$
Volumen des Wassers: $1l \cdot \frac{100-p}{100}$
Masse des Wassers: $1\frac{kg}{l} \cdot 1l \cdot \frac{100-p}{100} = 1kg \cdot \frac{100-p}{100}$
Masse des Kirschweins: $0,785kg \cdot \frac{p}{100} + 1kg\frac{100-p}{100} = 0,973125kg$
Durch Auflösen nach p ergibt sich ein Prozentsatz von $12,5\%$.

15. Butter hat einen Fettgehalt von 82%, Crème Fraiche enthält 30% Fett. Wie viel Gramm Butter enthalten die gleiche Menge Fett wie ein Becher mit 125 g Crème Fraiche?

Lösung: 125 g Crème Fraiche enthalten 37,5 g Fett. 45,73 g Butter enthalten die gleiche Menge Fett wie ein Becher mit 125 g Crème Fraiche.

16. Wenn alle Mitgleider in einer Gruppe einander vertrauen können, dann fühlt man sich wohl und kann auch wirtschaftlich profitieren. Frau Krause bestellt nun für die Mitglieder ihrer Gymnastikgruppe beim Versandhaus XYZ als Sammelbesteller. Dafür gibt es 5 % Rabatt auf jede Bestellung.

    (a) Für die letzte Lieferung muss Frau Krause 567,48 EUR überweisen. Wie hoch war die Rechnungssumme vor Abzug des Rabattes?

(b) Wenn Frau Krause dem Versandhaus eine Einzugsermächtigung erteilt, gäbe es noch einmal 3% Rabatt zusätzlich. Welche Summe würde das Versandhaus dann für die letzte Lieferung vom Konto abbuchen?

(c) Die Damen der Gymnastikgruppe sind hoch erfreut über dieses Schnäppchen. Elfriede rechnet aus, dass sie nun mit der Einzugsermächtigung auf insgesamt 8 % Rabatt kommen. Entscheiden Sie, ob Elfriede recht hat, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Lösung: (a) 597,35 EUR

(b) 550,46 EUR

(c) Elfriede hat nicht recht. Ein Rabatt von 8 % auf den in a) berechneten Grundwert ergibt 549,56 EUR. Der Rabatt ist also kleiner als 8 %.

17. Ein innen würfelförmiger Pflanzkübel, dessen Boden und Seitenwände aus 5 cm dickem Betonwerkstein gefertigt sind, fasst 1 hl Erde. Wie lang, wie breit und wie hoch ist der Kübel?

Lösung: Fassungsvermögen: $1hl = 100l = 100dm^3$
Kantenlänge des Innenraumes: $\sqrt[3]{100dm^3} = 4,64dm = 46,4cm$
Länge und Breite des Kübels: $46,4cm + 2 \cdot 5cm = 56,4cm$
Höhe des Kübels: $46,4cm + 5cm = 51,4cm$

18. (a) Gradzahl des stumpfen Winkels β mit $\sin\beta = 0,927$

(b) Gradzahl des stumpfen Winkels β mit $\tan\beta = -1,150$

(c) $40 \cdot \cos 60°$

(d) $\tan 256°$ auf Ganze gerundet

Quelle: Kreuzzahlrätsel von U. Schätz

Lösung: (a) 112°, (b) 131°, (c) 20, (d) 4

19. (a) Gradzahl des spitzen Winkels β mit $\cos(90° - \beta) = 0,819$

(b) $10 \cos \frac{\pi}{2}$

(c) Gradzahl des stumpen Winkels β mit $\cos\beta = -0,4848$

(d) $-10 \cdot \sin \frac{3\pi}{2}$

Quelle: Kreuzzahlrätsel von U. Schätz

Lösung: (a) 55° (b) 0 (c) 119° (d)10

20. (a) Gradzahl des Winkels β ($45° < \beta < 90°$) mit $\cos(4\beta) = 0,5$
    (b) $16\cos(-60°)$
    (c) Gradzahl des Winkels β ($720° < \beta < 900°$) mit $\cos\beta = -0,1045$
    (d) $\sin 810°$

    Quelle: Kreuzzahlrätsel von U. Schätz

Lösung: (a) 75° (b) 8 (c) 816° (d) 1

21. (a) Gradzahl des spitzen Winkels β mit $\sin(180° - \beta) = 0,2924$
    (b) $2\cos 2\pi$
    (c) $6,4\pi$ auf Ganze gerundet
    (d) Gradzahl des Winkels β ($360° < \beta < 540°$) mit $\tan\beta = 0466$
    (e) Gradzahl des Winkels β ($270° < \beta < 360°$) mit $\tan\beta = -0,1583$

    Quelle: Kreuzzahlrätsel von U. Schätz

Lösung: (a) 17° (b) 2 (c) 20 (d) 385° (e) 351°

22. (a) Gradzahl des stumpfen Winkels β mit $\tan\beta = -\sqrt{3}$
    (b) $10\tan 225°$
    (c) $2\tan 405°$
    (d) $\tan 765°$

    Quelle: Kreuzzahlrätsel von U. Schätz

Lösung: (a) 120° (b) 10 (c) 2 (d) 1

23. (a) Gradzahl des spitzen Winkels β mit $\cos(90° - \beta) = 0,5736$
    (b) $300\cos 300°$
    (c) Gradzahl des spitzen Winkels β mit $\tan(90° - \beta) = 1,150$
    (d) Gradzahl des stumpfen Winkels β mit $\cos\beta = -0,3090$

    Quelle: Kreuzzahlrätsel von U. Schätz

Lösung: (a) 35° (b) 150 (c) 41° (d) 108

24. (a) $\cos 720°$
    (b) $10 \sin 30°$
    (c) Gradzahl des Winkels β $(810° < \beta < 1080°)$ mit $\sin \beta = 0,99863$
    (d) $12 \tan 585°$

    Quelle: Kreuzzahlrätsel von U. Schätz

Lösung: (a) 1 (b) 5 (c) 813° (d) 12

25. (a) Gradzahl des stumpfen Winkels β mit $\cos \beta = -0,1908$
    (b) $20 \tan 45° - 5 \tan 135°$
    (c) $3 \cos 4\pi$

    Quelle: Kreuzzahlrätsel von U. Schätz

Lösung: (a) 101° (b) 25 (c) 3

11 Neue Aufgaben, September 2006

11.1 Jahrgangsstufe 7

1. (a) Die Schneehöhe, die am Abend 88 cm beträgt, wächst in der Nacht um 12,5%. Wie hoch liegt der Schnee am nächsten Morgen?

   (b) Im Laufe des Tages sinkt der Pegel eines Hochwasser führenden Flusses von 480 cm auf 408 cm. Um wieviel Prozent ist der Pegelstand gesunken?

   (c) Nach einer Erhöhung um 10 Prozent beträgt das Gehalt von Max 2706 €. Wieviel verdiente Max vor der Gehaltserhöhung?

Lösung: (a) $88\,\text{cm} \cdot 1{,}125 = 99\,\text{cm}$

(b) $x\% \cdot 480 = 480 - 408 = 72, \qquad x\% = \frac{72}{480} \cdot 100\% = 15\%$

(c) $x \cdot 1{,}1 = 2706\,€, \qquad x = \frac{2706\,€}{1{,}1} = 2460\,€$

2. Hans geht mit 200 € und Eva mit 50 € in die Spielbank. Nach einer Stunde Spiel besitzen die beiden gleich viel Geld. Dabei hat Eva $x\%$ von ihrem Anfangsbetrag gewonnen und Hans hat genauso viele Prozent von seinem Startkapital verloren. Wieviel Prozent ihres mitgebrachten Geldes hat Eva gewonnen und welchen Betrag besitzen die beiden nach dem Spiel?

Lösung: $50 \cdot (1 + x\%) = 200 \cdot (1 - x\%), \quad x\% = 60\%$

Beide besitzen nach dem Spiel $50\,€ \cdot 1{,}6 = 200\,€ \cdot 0{,}4 = 80\,€$

3. Zeichne die Punkte A $(-2\,|\,0{,}5)$, B $(-1\,|\,-1)$, C $(4\,|\,1)$ und D $(1\,|\,3)$ in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm).

   (a) Konstruiere die Differenz $\overline{\text{BC}} - \overline{\text{AB}}$.

   (b) Miss die Winkel $\alpha = \sphericalangle\text{BAD}$, $\beta = \sphericalangle\text{CBA}$, $\gamma = \sphericalangle\text{DCB}$ und $\delta = \sphericalangle\text{ADC}$ und berechne $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.

   (c) Berechne die Summe $\sphericalangle\text{ABC} + \sphericalangle\text{BCD} + \sphericalangle\text{CDA} + \sphericalangle\text{DAB}$.

Lösung: (a) $\mathrm{k}(\mathrm{B}; r = \overline{\mathrm{BA}}) \cap [\mathrm{BC}] = \{\mathrm{E}\}$

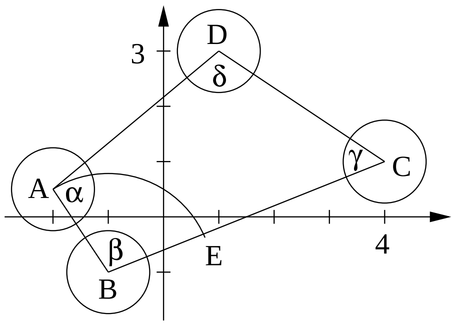
$\overline{\mathrm{BC}} - \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{EC}} = 3{,}6\,\mathrm{cm}$

(b) $\alpha = 96°$, $\beta = 102°$

$\gamma = 55{,}5°$, $\delta = 106{,}5°$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

(c) $(360° - \beta) + (360° - \gamma) + (360° - \delta) + (360° - \alpha) = 3 \cdot 360° = 1080°$



4. (a) Berechne im Gradmaß folgende Bruchteile des Vollwinkels:

$$\frac{1}{3}, \quad 40\%, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{11}{16}, \quad \frac{13}{25}.$$

(b) Berechne im Gradmaß folgende Bruchteile des rechten Winkels:

$$\frac{1}{6}, \quad 25\%, \quad \frac{5}{18}, \quad \frac{3}{8}, \quad \frac{3}{7}.$$

Lösung: (a) $120°$, $144°$, $150°$, $247{,}5°$, $187{,}2°$

(b) $15°$, $22{,}5°$, $37{,}5°$, $33{,}75°$, $\left(38\frac{4}{7}\right)°$

5. (a) Rechne in die Grad-Minuten-Sekunden-Schreibweise um:

$$30{,}7°; \quad 55{,}66°; \quad 240{,}085°; \quad 0{,}37°; \quad 0{,}001°; \quad 0{,}0025°; \quad 4{,}0502°; \quad 0{,}08\overline{3}°$$

(b) Rechne in die dezimale Schreibweise um:

$$35°18'; \quad 200°24'; \quad \left(\frac{11}{25}\right)'; \quad 1''; \quad 18°18'18''; \quad 1'12''; \quad 12°54''; \quad 1°1'1''$$

Lösung: (a) $30°42''$; $55°39'36''$; $240°5'6''$; $22'12''$; $3{,}6''$; $9''$; $4°3'0{,}72''$; $5'$

(b) $35{,}3°$; $200{,}4°$; $0{,}007\overline{3}°$; $0{,}0002\overline{7}°$; $18{,}305°$; $0{,}02°$; $12{,}015°$; $1{,}0169\overline{4}°$

6. Das Hubble-Weltraumteleskop hat zwei Sterne fotografiert, deren Winkelabstand nur $\alpha = 0{,}0072''$ beträgt. Welcher Bruchteil eines Grades ist das?

Lösung: $0{,}0072'' = \dfrac{0{,}0072°}{3600} = \dfrac{1°}{500\,000} = 0{,}000\,002°$

7. (a) Berechne $\sphericalangle$BSA, wenn $\sphericalangle$ASB $= 57°$ ($265°39'$, $157°47''$, $13°38'14{,}3''$) ist.
   (b) $47°49'39'' + 98°54'53''$, $174°47'35'' - 93°18'40''$, $218° - 23°14'37''$

Lösung: (a) $303°$, $94{,}35° = 94°21'$, $202°59'13'' = 202{,}9869\overline{4}°$

$346°21'45{,}7'' = 346{,}36269\overline{4}°$

(b) $146°44'32''$, $81°28'55''$, $194°45'23''$

8. (a) Stelle in einer Tabelle die Winkel zusammen, die der große bzw. der kleine Zeiger einer Uhr in 1 h, in 1 min bzw. in 1 s überstreicht.
   (b) Berechne den kleineren der beiden Winkel, den der große und der kleine Uhrzeiger zu folgenden Zeiten einschließen:

   13:00, 04:00, 16:15, 08:45, 01:42, 00:00:09, 07:42:51, 03:47:05

Lösung: (a)

	1 h	1 min	1 s
großer Zeiger	$360°$	$6°$	$0{,}1° = 6'$
kleier Zeiger	$30°$	$0{,}5° = 30'$	$0{,}5' = 30''$

(b)

13:00 : $30°$, 04:00 : $120°$

16:15 : $120° + 15 \cdot 0{,}5° - 90° = 37{,}5°$

08:45 : $270° - (8 \cdot 30° + 45 \cdot 0{,}5°) = 7{,}5°$

01:42 : $\underbrace{42 \cdot 6°}_{252°} - \underbrace{(30° + 42 \cdot 0{,}5°)}_{51°} = 201°$, $360° - 201° = 159°$

00:00:09 : $9 \cdot 6' - 9 \cdot 0{,}5' = 49{,}5' = 0{,}825°$

07:42:51 : $\underbrace{42 \cdot 6° + 51 \cdot 0{,}1°}_{257{,}1°} - \underbrace{(7 \cdot 30° + 42 \cdot 0{,}5° + 51 \cdot 0{,}5')}_{231{,}425°} = \underbrace{25°40'30''}_{25{,}675°}$

03:47:05 : $\underbrace{47 \cdot 6° + 5 \cdot 0{,}1°}_{282°30'} - \underbrace{(3 \cdot 30° + 47 \cdot 0{,}5° + 5 \cdot 0{,}5')}_{113°32'30''} = \underbrace{168°57'30''}_{168{,}958\overline{3}°}$

9. Zeichne die Zeigerstellungen zu den gefundenen Zeiten:
   (a) Zu welcher Zeit zwischen 06:00 und 07:00 stehen die beiden Zeiger einer Uhr genau übereinander?
   (b) Zu welcher Zeit zwischen 21:00 und 22:00 bilden die beiden Zeiger einer Uhr einen gestreckten Winkel?
   (c) Zu welchen Zeiten zwischen 14:00 und 15:00 schließen die beiden Zeiger einer Uhr einen 50°-Winkel ein?
   (d) Zu welchen Zeiten zwischen 08:00 und 09:00 schließen die beiden Zeiger einer Uhr einen 20°-Winkel ein?

Lösung: t bezeichnet im Folgenden die Zahl der Minuten nach der vollen Stunde.

(a) $180^\circ + t\cdot 0{,}5^\circ = t\cdot 6^\circ,\quad t=\frac{180^\circ}{5{,}5^\circ}=32{,}\overline{72}\quad\Longrightarrow\quad 6\,\mathrm{h}\,32\,\mathrm{min}\,43{,}\overline{63}\,\mathrm{s}$

(b) $270^\circ + t\cdot 0{,}5^\circ - t\cdot 6^\circ = 180^\circ,\quad t=\frac{90^\circ}{5{,}5^\circ}=16{,}\overline{36}\quad\Longrightarrow\quad 21\,\mathrm{h}\,16\,\mathrm{min}\,21{,}\overline{81}\,\mathrm{s}$

(c) $60^\circ + t\cdot 0{,}5^\circ - t\cdot 6^\circ = 50^\circ,\quad t=\frac{10^\circ}{5{,}5^\circ}=1{,}\overline{81}\quad\Longrightarrow\quad 2\,\mathrm{h}\,1\,\mathrm{min}\,49{,}\overline{09}\,\mathrm{s}$

$t\cdot 6^\circ - 60^\circ - t\cdot 0{,}5^\circ = 50^\circ,\quad t=\frac{110^\circ}{5{,}5^\circ}=20\quad\Longrightarrow\quad 2\,\mathrm{h}\,20\,\mathrm{min}$

(d) $240^\circ + t\cdot 0{,}5^\circ - t\cdot 6^\circ = 20^\circ,\quad t=\frac{220^\circ}{5{,}5^\circ}=40\quad\Longrightarrow\quad 8\,\mathrm{h}\,40\,\mathrm{min}$

$t\cdot 6^\circ - 240^\circ - t\cdot 0{,}5^\circ = 20^\circ,\quad t=\frac{260^\circ}{5{,}5^\circ}=47{,}\overline{27}\quad\Longrightarrow\quad 8\,\mathrm{h}\,47\,\mathrm{min}\,16{,}\overline{36}\,\mathrm{s}$

10. (a) Rechne um auf die dezimale Schreibweise: $17^\circ 23' 15''$

(b) Rechne um auf die Grad-Minuten-Sekunden-Schreibweise: $50{,}101^\circ$

Lösung: (a) $17^\circ 23' 15'' = \left(17+\frac{23}{60}+\frac{15}{3600}\right)^\circ = \left(17\frac{31}{80}\right)^\circ = 17{,}3875^\circ$

(b) $50{,}101^\circ = 50^\circ + 0{,}101\cdot 60' = 50^\circ + 6{,}06' = 50^\circ 6' + 0{,}06\cdot 60'' = 50^\circ 6' 3{,}6''$

11. (a) Berechne die Winkel, die der Sekundenzeiger, der große Zeiger (Minutenzeiger) bzw. der kleine Zeiger (Stundenzeiger) einer Uhr in einer Minute bzw. in einer Sekunde überstreichen. Stelle die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen. Wenn ein Ergebnis Bruchteile eines Grades enthält, ist es auch in der Grad-Minuten-Sekunden-Schreibweise anzugeben.

(b) Auf einer Zeigeruhr ist es $t_1 = 21{:}08{:}00$. Zu welcher Zeit t_2 bildet der Sekundenzeiger mit dem großen Zeiger zum ersten Mal nach t_1 einen 70°-Winkel? Wähle als Variable die Zahl x der Sekunden nach t_1.

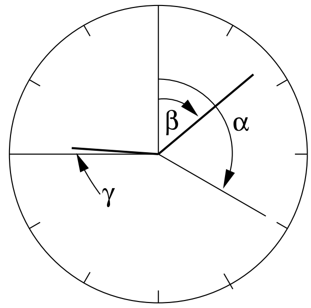
(c) Wenn du die Teilaufgabe (b) *nicht* lösen konntest, verwende $t_2 = 21:08:25$.

Berechne alle nötigen Winkel und zeichne die drei Uhrzeiger zur Zeit t_2 so genau wie möglich. Wähle für das Ziffernblatt einen Kreis mit dem Radius 4 cm und beschrifte deine Zeichnung mit den berechneten Winkeln.

Lösung: (a)

	1 min	1 s
Sekundenzeiger	360°	6°
großer Zeiger	6°	$0{,}1^\circ = 6'$
kleiner Zeiger	$0{,}5^\circ = 30'$	$\left(\frac{1}{120}\right)^\circ = 0{,}5' = 30''$

(b) $\underbrace{x \cdot 6^\circ}_{\alpha} - \underbrace{(8 \cdot 6^\circ + x \cdot 0{,}1^\circ)}_{\beta} = 70^\circ$



$x \cdot 5{,}9^\circ = 118^\circ$

$x = \dfrac{118^\circ}{5{,}9^\circ} = 20 \quad \Longrightarrow t_2 = 21 : 08 : 20$

(c) $\alpha = 20 \cdot 6^\circ = 120^\circ$

$\beta = 8 \cdot 6^\circ + 20 \cdot 0{,}1^\circ = 50^\circ$

$\gamma = 8 \cdot 0{,}5^\circ + 20 \cdot 0{,}5' = 4^\circ\, 10'$

12. Nachfolgende Tabelle zeigt die Durchschnittsnoten der drei Unterstufenjahrgänge eines Gymnasiums im Fach Mathematik. N_{U} ist der Mittelwert der Mathematiknoten aller Unterstufenschüler. Berechne den Durchschnitt N_5 der Mathematiknoten in der fünften Jahrgangsstufe. Stelle zuerst eine Gleichung für N_5 auf!

Jahrgangsstufe	Zahl der Schüler	Durchschnittsnote in Mathematik
5	110	$N_5 =?$
6	100	$N_6 = 3{,}50$
7	90	$N_7 = 3{,}80$
Unterstufe		$N_{\text{U}} = 3{,}59$

Lösung: $\dfrac{N_5 \cdot 110 + 3{,}5 \cdot 100 + 3{,}8 \cdot 90}{110 + 100 + 90} = 3{,}59, \quad 110 \cdot N_5 + 692 = 3{,}59 \cdot 300$

$N_5 = \dfrac{1077 - 692}{110} = 3{,}5$

13. Ein MP3-Player kostet mit 16% Mehrwertsteuer 58,00 € (alter Preis). Was kostet das gleiche Gerät mit 18% Mehrwertsteuer (neuer Preis)? Um wieviel Prozent ist der neue Preis größer als der alte Preis? Runde das Ergebnis auf zehntel Prozent.

Lösung: Ohne MWSt.: $x \cdot (1 + 16\%) = x \cdot 1{,}16 = 58\,€ \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{58\,€}{1{,}16} = 50\,€$

Mit 18% MWSt.: $50\,€ \cdot (1 + 18\%) = 50\,€ \cdot 1{,}18 = 59\,€$

$58 \cdot (1 + p\%) = 59 \quad \Longrightarrow \quad p\% = \dfrac{59}{58} - 1 = \dfrac{1}{58} = \dfrac{100\%}{58} \approx 1{,}7\%$

14. Ein Metzger, der schnell reich werden wollte, erhöhte den Preis seiner Weißwürste um 20%. Da das Geschäft aber drastisch zurückging, beauftragte er seine Verkäuferin, den teuren Wurstpreis wieder um 20% zu senken. Entscheide zunächst ohne Rechnung, ob der neue Wurstpreis kleiner oder größer als der ursprüngliche Preis vor der Erhöhung ist und begründe deine Antwort. Berechne, um wieviel Prozent der neue Wurstpreis vom ursprünglichen Preis abweicht.

Lösung: Die 20% bei der Preissenkung beziehen sich auf den höheren Preis, d.h. die Senkung ist größer als die Erhöhung $\Longrightarrow$ der neue Preis ist kleiner als der ursprüngliche Preis.

$n = (1 + 20\%)(1 - 20\%)u = 1{,}2 \cdot 0{,}8u = 0{,}96u = (1 - 4\%) \cdot u$

Der neue Preis ist um 4% kleiner als der ursprüngliche Preis.

15. Nachfolgende Tabelle zeigt die Durchschnittsgehälter der beiden Abteilungen einer Softwarefirma. G ist der Mittelwert der Gehälter aller Firmenangestellten.

Abteilung	Zahl der Angestellten	Durchschnittsgehalt in €
A	50	$G_{\mathrm{A}} = ?$
B	30	$G_{\mathrm{B}} = 3200$
gesamte Firma		$G = 2500$

(a) Berechne das Durchschnittsgehalt G_{A} in der Abteilung A unter der Annahme, dass alle Zahlen in der Tabelle exakt (nicht gerundet) sind. Stelle zuerst eine Gleichung für G_{A} auf.

(b) Tatsächlich sind die Durchschnittsgehälter in der Tabelle auf ganze hundert Euro gerundet. Zwischen welchen kleinsten und größten Beträgen liegen die tatsächlichen Werte von G und G_{B}? Berechne den größten und kleinsten Betrag, der für G_{A} möglich ist. Welche, auf ganze hunderter gerundete Zahlen könnten also in der Tabelle für G_{A} stehen?

Lösung: (a) $\dfrac{50 \cdot G_{\mathrm{A}} + 30 \cdot 3200}{50 + 30} = 2500, \qquad 50 \cdot G_{\mathrm{A}} + 96\,000 = 80 \cdot 2500 = 200\,000$

$50 \cdot G_{\mathrm{A}} = 104\,000, \qquad G_{\mathrm{A}} = \dfrac{104\,000}{50} = 2080$

(b) $3150 \leqq G_{\mathrm{B}} < 3250, \quad 2450 \leqq G < 2550 \quad \Longrightarrow$

$$G_{\mathrm{Amin}} = \frac{80 \cdot 2450 - 30 \cdot 3250}{50} = \frac{196\,000 - 97\,500}{50} = \frac{98\,500}{50} = 1970$$

$$G_{\mathrm{Amax}} = \frac{80 \cdot 2550 - 30 \cdot 3150}{50} = \frac{204\,000 - 94\,500}{50} = \frac{109\,500}{50} = 2190$$

Mögliche Werte für G_{A}: 2000, 2100, 2200

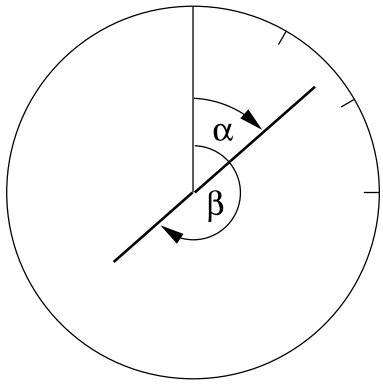
16. (a) Berechne die Winkel, die der große Zeiger (Minutenzeiger) bzw. der kleine Zeiger (Stundenzeiger) einer Uhr in einer Minute bzw. in einer Sekunde überstreichen. Stelle die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen. Wenn ein Ergebnis Bruchteile eines Grades enthält, ist es auch in der Grad-Minuten-Sekunden-Schreibweise anzugeben.

    (b) Zu welcher Zeit t_0 zwischen 13:00 und 14:00 bilden der große und der kleine Zeiger einer Uhr einen gestreckten Winkel? Zeichne eine Überlegungsfigur und wähle als Variable die Zahl x der Minuten nach 13:00. Welchen Winkel α schließt der kleine Zeiger zu dieser Zeit t_0 mit der „Null-Uhr-Linie“ ein?

Lösung: (a)

	1 h	1 min	1 s
großer Zeiger	360°	6°	$0{,}1^\circ = 6'$
kleier Zeiger	30°	$0{,}5^\circ = 30'$	$0{,}5' = 30''$

(b) $\underbrace{x \cdot 6^\circ}_{\beta} - \underbrace{(30^\circ + x \cdot 0{,}5^\circ)}_{\alpha} = 180^\circ$



$x \cdot 5{,}5^\circ = 210^\circ$

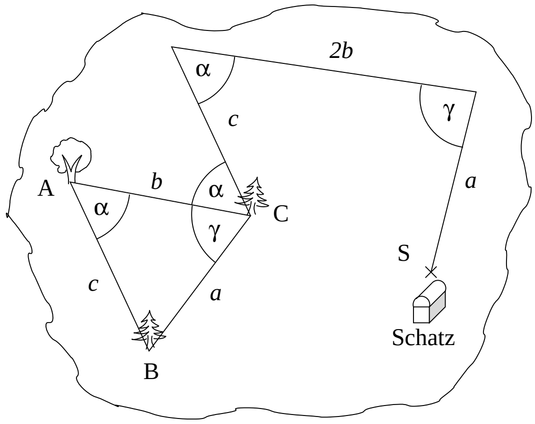
$x = \frac{210^\circ}{5{,}5^\circ} = \frac{420}{11} = 38\frac{2}{11} = 38{,}\overline{18} \quad \Longrightarrow$

$\frac{2}{11}\,\text{min} = \frac{120}{11}\,\text{s} = 10\frac{10}{11}\,\text{s} = 10{,}\overline{90}\,\text{s}$

$t_0 = 13 : 38 : 10{,}\overline{90}$

$\alpha = 30^\circ + 38\frac{2}{11} \cdot 0{,}5^\circ = \left(49\frac{1}{11}\right)^\circ = 49{,}\overline{09}^\circ$

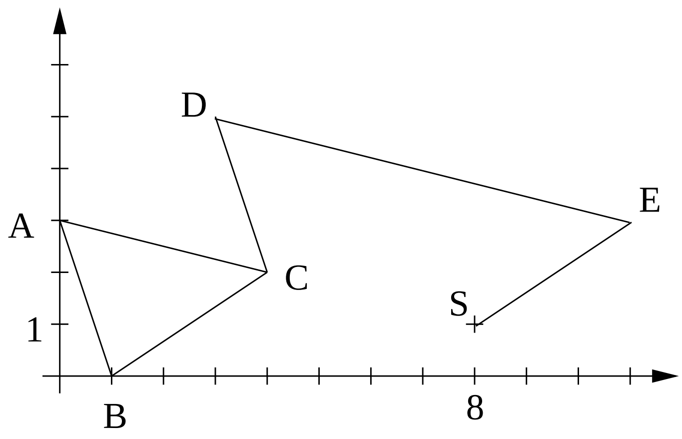
17. Die nebenstehend abgebildete Schatzkarte ist *nicht* maßstabsgetreu. Konstruiere die Lage des Schatzes nach den Angaben der Karte, wenn die Lage der drei Bäume durch A(0|3), B(1|0) und C(4|2) gegeben ist. Welche Koordinaten hat S? Wie weit ist der Schatz vom Baum A entfernt, wenn unsere konstruierte Karte im Maßstab 1 : 1500 gezeichnet ist?



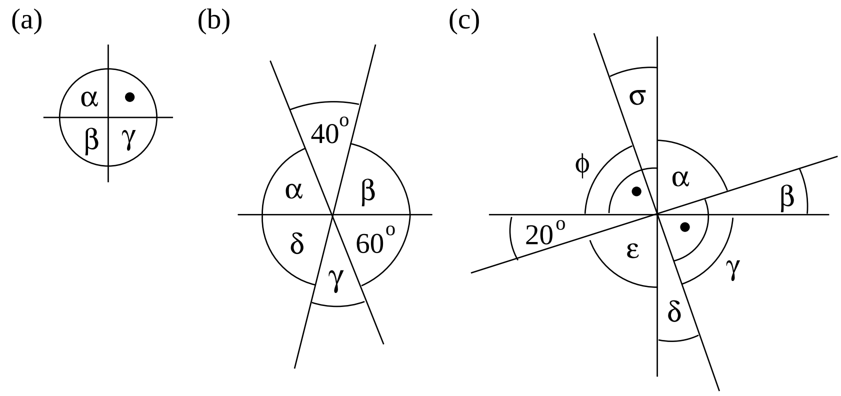
Lösung: S(8|1)

$\overline{\mathrm{AS}} = 8{,}2\,\mathrm{cm}$

$8{,}2\,\mathrm{cm} \cdot 1500 = 123\,\mathrm{m}$



18. Berechne alle eingezeichneten Winkel.



Lösung: (a) $\alpha = \beta = \gamma = 90°$

(b) $\alpha = 60°$, $\gamma = 40°$, $\beta = \delta = 80°$

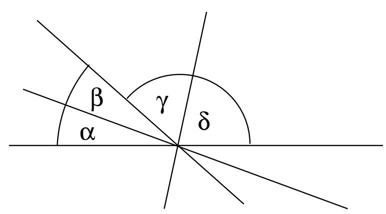
(c) $\beta = 20°$, $\varepsilon = \alpha = \varphi = \gamma = 90° - 20° = 70°$

$\sigma = \delta = 90° - \varphi = 20°$

19. Berechne α, β, γ und δ, wenn

(a) $\beta = 2\alpha$, $\gamma = 2\beta$ und $\delta = 2\gamma$

(b) $\beta = 3\alpha$, $\gamma = \frac{3}{2}\beta$ und $\delta = \frac{4}{3}\gamma$



Lösung: (a) $\alpha + 2\alpha + 4\alpha + 8\alpha = 15\alpha = 180° \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 12°$

$\beta = 24°$, $\gamma = 48°$ und $\delta = 96°$

(b) $\alpha + 3\alpha + \dfrac{9}{2}\alpha + 6\alpha = \dfrac{29}{2}\alpha = 180^\circ \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \left(\dfrac{360}{29}\right)^\circ = \left(12\dfrac{12}{29}\right)^\circ$

$\beta = \left(37\dfrac{7}{29}\right)^\circ$, $\gamma = \left(55\dfrac{25}{29}\right)^\circ$ und $\delta = \left(74\dfrac{14}{29}\right)^\circ$

20. Zeichne die Punkte A(1|1), B(6|1), C(3,5|6) und D(6|5) in ein Koordinatensystem. Welche der Bezeichnungen *spitzwinklig*, *rechtwinklig*, *stumpfwinklig* und *gleichschenklig* trifft jeweils auf eines der *vier* Dreiecke zu, die durch A, B, C und D gegeben sind?

Lösung:

$\triangle$ABC	:	spitzwinklig und gleichschenklig
$\triangle$ABD	:	rechtwinklig
$\triangle$ADC	:	stumpfwinklig
$\triangle$BDC	:	stumpfwinklig

21. Gegeben sind die kongruenten Dreiecke $\triangle$HUB und $\triangle$ERT, genauer gilt

$$\triangle \mathrm{HUB} \cong \triangle \mathrm{ERT}.$$

(a) Zeichne eine Überlegungsfigur der beiden Dreiecke, wobei entsprechende Seiten und Winkel in gleichen Farben zu zeichnen sind. Suche zu jeder der folgenden Größen die entsprechende Größe im anderen Dreieck:

$$\overline{\mathrm{HU}},\ \overline{\mathrm{UB}},\ \overline{ET},\ \sphericalangle\mathrm{BUH},\ \sphericalangle\mathrm{RET},\ \sphericalangle\mathrm{ETR},\ \sphericalangle\mathrm{HUB}$$

(b) Welche der folgenden Schreibweisen ist richtig:

$$\triangle\mathrm{BUH} \cong \triangle\mathrm{RET}, \quad \triangle\mathrm{UHB} \cong \triangle\mathrm{RET}, \quad \triangle\mathrm{TER} \cong \triangle\mathrm{BUH}$$

Lösung: (a) $\overline{\mathrm{HU}} = \overline{\mathrm{ER}}$, $\quad \overline{\mathrm{UB}} = \overline{\mathrm{RT}}$

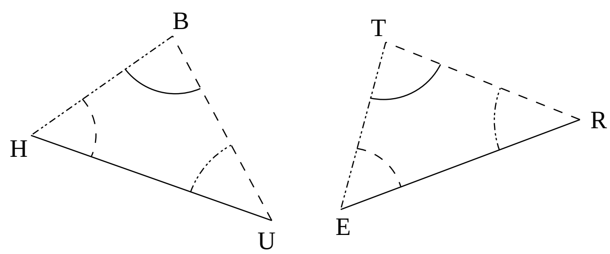
$\overline{\mathrm{ET}} = \overline{\mathrm{HB}}$

$\sphericalangle\mathrm{BUH} = \sphericalangle\mathrm{TRE}$

$\sphericalangle\mathrm{RET} = \sphericalangle\mathrm{UHB}$

$\sphericalangle\mathrm{ETR} = \sphericalangle\mathrm{HBU}$

$\sphericalangle\mathrm{HUB} = \sphericalangle\mathrm{ERT}$



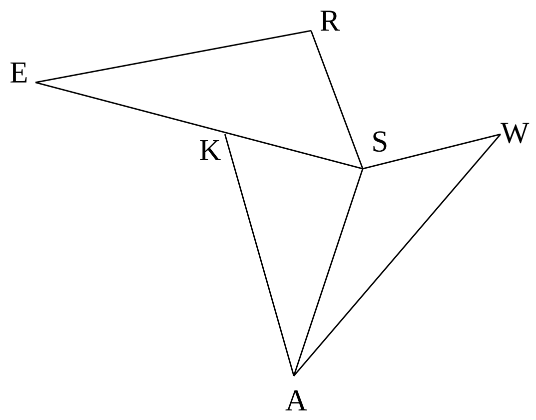
(b) $\triangle\mathrm{BUH} \cong \triangle\mathrm{RET}$ (falsch), $\quad \triangle\mathrm{UHB} \cong \triangle\mathrm{RET}$ (richtig)

$\triangle\mathrm{TER} \cong \triangle\mathrm{BUH}$ (falsch)

22. Nebenstehende Figur ist *nicht* maßstabsgetreu. Es gilt:

$$\triangle \text{KAS} \cong \triangle \text{WAS} \cong \triangle \text{SER}$$

sowie $\overline{\text{KA}} = 5\,\text{cm}$, $\overline{\text{ER}} = 4\,\text{cm}$ und $\overline{\text{SW}} = 3\,\text{cm}$.
Wie lang sind die anderen gezeichneten Strecken? Zeichnung mit farblicher Kennzeichnung entsprechender Größen!



Lösung: $\overline{\text{KA}} = \overline{\text{WA}} = \overline{\text{SE}} = 5\,\text{cm}$

$\overline{\text{SK}} = \overline{\text{SW}} = \overline{\text{SR}} = 3\,\text{cm}$

$\overline{\text{SA}} = \overline{\text{ER}} = 4\,\text{cm}$

23. Von zwei kongruenten Dreiecken $\triangle$MPD und $\triangle$IER kennt man die Beziehungen $\overline{\text{MP}} = \overline{\text{RE}}$ und $\overline{\text{PD}} = \overline{\text{EI}}$. Fertige eine Skizze der beiden Dreiecke mit farbiger Kennzeichnung entsprechender Strecken und ergänze:

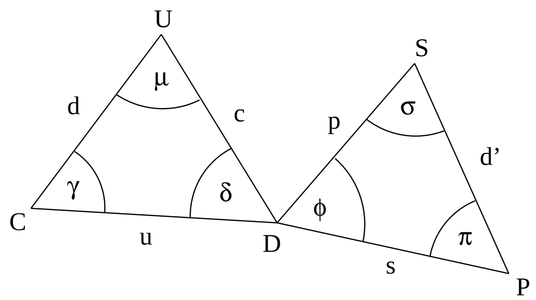
$$\triangle \text{MPD} \cong \triangle \square\square\square$$

Lösung: $\triangle$MPD $\cong$ $\triangle$REI

24. Für die Dreiecke $\triangle$CDU und $\triangle$DSP gilt:

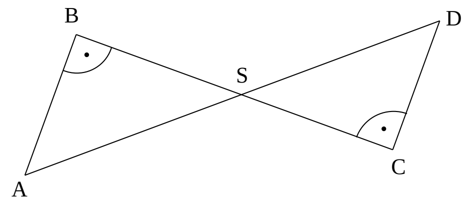
$$c = s, \quad d = p, \quad \text{und} \quad u = d'$$

Welche Winkel sind gleich? Schreibe die Kongruenz der Dreiecke richtig hin (richtige Reihenfolge der Punkte).



Lösung: $\gamma = \sigma$, $\delta = \pi$, $\mu = \varphi$, $\triangle$CDU $\cong$ $\triangle$SPD

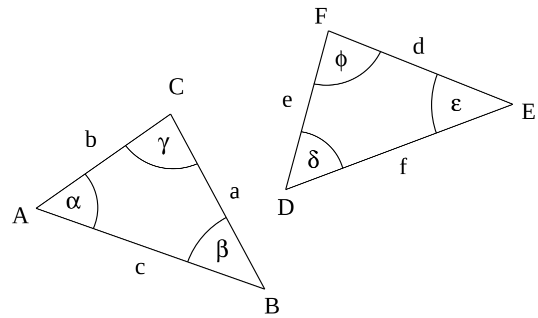
25. Welche Strecken und Winkel sind gleich, wenn die beiden Dreiecke kongruent sind? Schreibe die Kongruenz der Dreiecke richtig hin (richtige Reihenfolge der Punkte).



Lösung: $\sphericalangle$BSA $=\sphericalangle$CSD (Scheitelwinkel) $\Longrightarrow$ $\overline{\mathrm{BA}} = \overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{BS}} = \overline{\mathrm{SC}}$, $\overline{\mathrm{AS}} = \overline{\mathrm{SD}}$

$\triangle$ASB $\cong$ $\triangle$DSC

26. Die beiden Dreiecke sind kongruent. Skizziere für jede Teilaufgabe die beiden Dreiecke und markiere entsprechende Größen mit gleicher Farbe. Gib alle einander entsprechenden Seiten, Winkel und Punkte an und schreibe die Kongruenz der Dreiecke richtig hin (richtige Reihenfolge der Punkte).

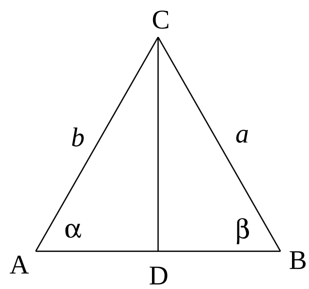


(a) $a = d$ und $b = f$ (b) $\alpha = \delta$ und $\gamma = \varepsilon$
(c) C $\widehat{=}$ E und $b = d$ (d) A $\widehat{=}$ E und B $\widehat{=}$ F
(e) $c = e$ und $\beta = \varphi$

Lösung:

(a)	$a = d$	$b = f$	$c = e$	$\alpha = \delta$	$\beta = \varphi$	$\gamma = \varepsilon$	A $\widehat{=}$ D	B $\widehat{=}$ F	C $\widehat{=}$ E
(b)	$a = d$	$b = f$	$c = e$	$\alpha = \delta$	$\beta = \varphi$	$\gamma = \varepsilon$	A $\widehat{=}$ D	B $\widehat{=}$ F	C $\widehat{=}$ E
(c)	$a = f$	$b = d$	$c = e$	$\alpha = \varphi$	$\beta = \delta$	$\gamma = \varepsilon$	A $\widehat{=}$ F	B $\widehat{=}$ D	C $\widehat{=}$ E
(d)	$a = e$	$b = f$	$c = d$	$\alpha = \varepsilon$	$\beta = \varphi$	$\gamma = \delta$	A $\widehat{=}$ E	B $\widehat{=}$ F	C $\widehat{=}$ D
(e)	$a = d$	$b = f$	$c = e$	$\alpha = \delta$	$\beta = \varphi$	$\gamma = \varepsilon$	A $\widehat{=}$ D	B $\widehat{=}$ F	C $\widehat{=}$ E

27. Im nebenstehend gezeichneten Dreieck gilt $a = b$ und $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{DB}}$. Die Figur enthält zwei kongruente Dreiecke. Schreibe die Kongruenz dieser Dreiecke richtig hin und begründe genau, warum diese Kongruenz gilt. Welche Beziehung besteht zwischen α und β? Wie groß sind die Winkel $\sphericalangle$CDA und $\sphericalangle$BDC?
Fasse die Ergebnisse in einem präzisen mathematischen Satz zusammen.

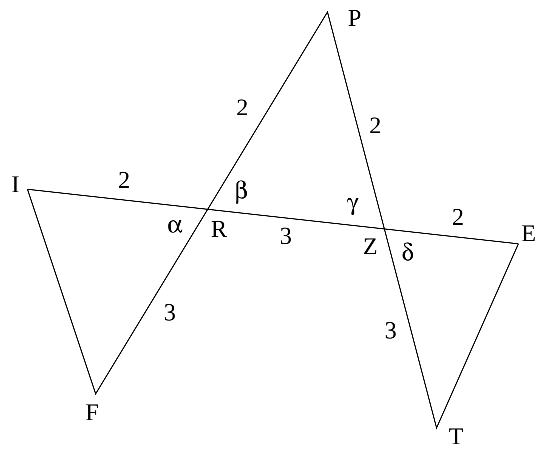


Lösung: $\left.\begin{array}{r} a=b \\ \overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{CD}} \\ \overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{DB}} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \Longrightarrow \quad \triangle\mathrm{ADC}\cong\triangle\mathrm{BDC} \quad (\mathrm{sss}) \\ \Longrightarrow \quad \alpha=\beta, \quad \underbrace{\sphericalangle\mathrm{CDA}}_{\varphi}=\underbrace{\sphericalangle\mathrm{BDC}}_{\delta} \end{array}$

$$\delta+\varphi=2\varphi=180^\circ \quad \Longrightarrow \quad \varphi=\delta=90^\circ$$

In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich und die Seitenhalbierende der Basis ist zugleich Höhe.

28. Welche Dreiecke der nebenstehenden, nicht maßstabsgetreu gezeichneten Figur sind kongruent? Begründe die Kongruenz(en) mit Angabe des verwendeten Kongruenzsatzes.

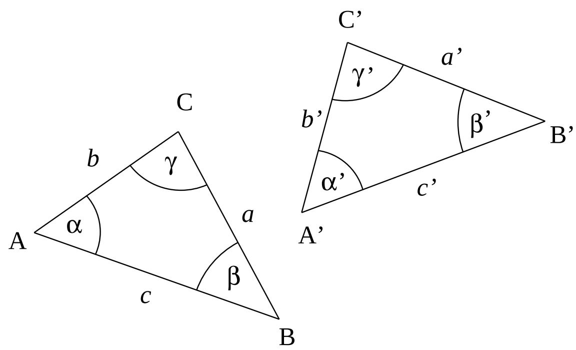


Lösung: $\triangle$RZP ist gleichschenklig $\Longrightarrow$ $\beta=\gamma$ $\Longrightarrow$ $\alpha=\beta=\gamma=\delta$ (Scheitelwinkel).

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} \alpha=\delta \\ \overline{\mathrm{IR}}=\overline{\mathrm{ZE}} \\ \overline{\mathrm{FR}}=\overline{\mathrm{TZ}} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \triangle\mathrm{FRI}\cong\triangle\mathrm{TZE} \quad (\mathrm{sws}) \\ \left.\begin{array}{r} \alpha=\beta \\ \overline{\mathrm{FR}}=\overline{\mathrm{RZ}} \\ \overline{\mathrm{IR}}=\overline{\mathrm{RP}} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \triangle\mathrm{TZE}\cong\triangle\mathrm{ZRP} \quad (\mathrm{sws}) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow$$

$$\triangle\mathrm{FRI}\cong\triangle\mathrm{TZE}\cong\triangle\mathrm{ZRP}$$

29. Zeichne für jede Teilaufgabe eine Überlegungsfigur mit farbiger Kennzeichnung entsprechender Größen. Entscheide, ob die beiden Dreiecke kongruent sind und schreibe gegebenenfalls die Kongruenz richtig hin (richtige Reihenfolge der Punkte). Gib im Fall der Kongruenz auch den verwendeten Satz an.

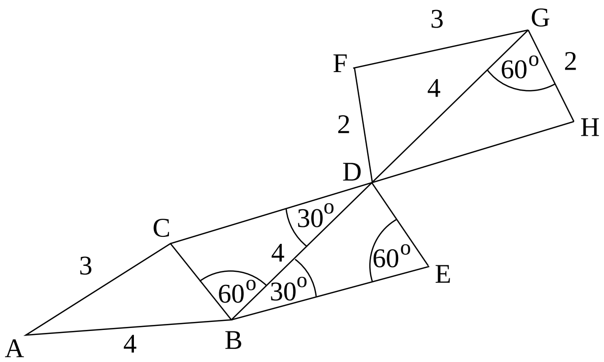


(a)	$a = a'$;	$b = b'$;	$\gamma = \gamma'$	(b)	$a = a' = 6\,\text{cm}$;	$b = b' = 7\,\text{cm}$;	$\alpha = \alpha'$
(c)	$a = b'$;	$b = a'$;	$\beta = \beta'$	(d)	$a = b'$;	$b = a'$;	$\gamma = \gamma'$
(e)	$b = a'$;	$\alpha = \gamma'$;	$\gamma = \beta'$	(f)	$a = a'$;	$\beta = \beta'$;	$\gamma = \gamma'$
(g)	$b = a'$;	$c = b'$;	$\alpha = \gamma'$	(h)	$a = c' = 4\,\text{cm}$;	$c = a' = 7\,\text{cm}$;	$\gamma = \alpha'$
(i)	$b = b'$;	$\alpha = \gamma'$;	$\gamma = \alpha'$	(k)	$c = b'$;	$\alpha = \beta'$;	$\beta = \gamma'$
(l)	$b = c'$;	$a = b'$;	$\gamma = \alpha'$	(m)	$c = c'$;	$b = a'$;	$\alpha = \beta'$
(n)	$a = a'$;	$\beta = \beta'$;	$\gamma = \alpha'$	(o)	$a = c'$;	$\gamma = \alpha'$;	$\beta = \beta'$

Lösung:

(a)	$\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$A'B'C' (sws)	(b)	muss nicht kongruent sein (ssw)
(c)	nicht kongruent	(d)	$\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$B'A'C' (sws)
(e)	$\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$C'A'B' (wsw)	(f)	$\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$A'B'C' (wsw)
(g)	$\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$C'A'B' (sws)	(h)	$\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$C'B'A' (ssW)
(i)	$\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$C'B'A' (wsw)	(k)	nicht kongruent
(l)	$\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$B'C'A' (sws)	(m)	$\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$B'A'C' (sws)
(n)	nicht kongruent	(o)	$\triangle$ABC $\cong$ $\triangle$C'B'A' (wsw)

30. Die nebenstehend gezeichnete Figur ist nicht maßstabsgetreu. Die Punkte C, D und H sowie B, D und G liegen jeweils auf einer Geraden. Welche Dreiecke sind kongruent? Gib eine genaue Begründung deiner Antwort unter Berufung auf die Kongruenzsätze.



Lösung:

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle \text{HDG} = \sphericalangle \text{CDB} \quad \text{(Scheitelw.)} \\ \overline{\text{DG}} = \overline{\text{BD}} = 4 \\ \sphericalangle \text{DGH} = \sphericalangle \text{DBC} = 60^\circ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow \triangle\text{BDC} \cong \triangle\text{GDH} \quad \text{(wsw)} \\ \Longrightarrow \overline{\text{BC}} = \overline{\text{GH}} = 2 \\ \Longrightarrow \triangle\text{ABC} \cong \triangle\text{GDF} \quad \text{(sss)} \end{array}$$

Keines der Dreiecke ist zu $\triangle$BED kongruent.

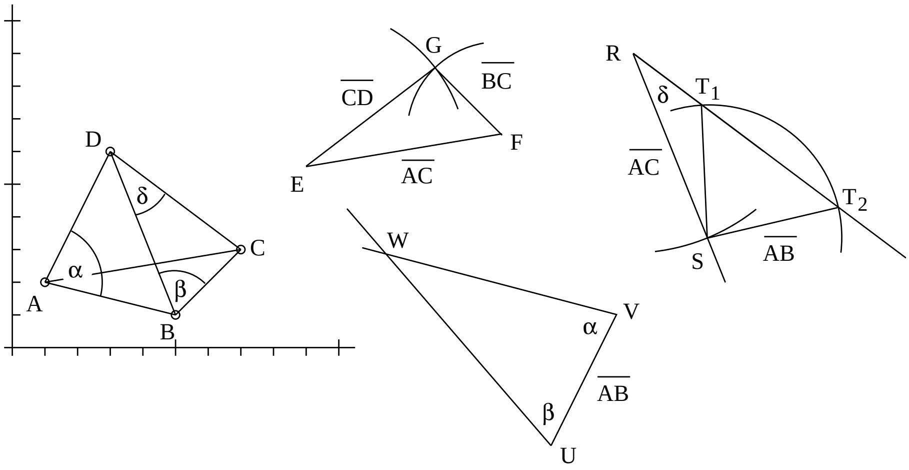
31. Zeichne die Punkte A(1|2), B(5|1), C(7|3) und D(3|6) in ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm.

    (a) Konstruiere das Dreieck $\triangle$EFG mit $e = \overline{\text{BC}}$, $f = \overline{\text{CD}}$ und $g = \overline{\text{AC}}$.

    (b) Konstruiere das Dreieck $\triangle$RST mit $r = \overline{\text{AB}}$, $t = \overline{\text{AC}}$ und $\varrho = \sphericalangle\text{SRT} = \sphericalangle\text{BDC}$.

    (c) Konstruiere das Dreieck $\triangle$UVW mit $w = \overline{\text{AB}}$, $\alpha = \sphericalangle\text{WVU} = \sphericalangle\text{BAD}$ und $\beta = \sphericalangle\text{VUW} = \sphericalangle\text{CBD}$.

Lösung:

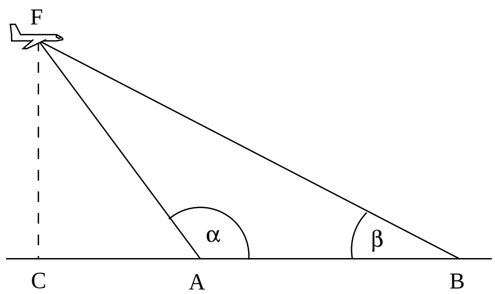


32. Mittenwald (M), Wallgau (W) und Partenkirchen (P) bilden ein Dreieck mit den Seitenlängen $\overline{MP} = 13\,\text{km}$ und $\overline{MW} = 9\,\text{km}$ und dem Winkel $\sphericalangle WMP = 75°$. Bestimme durch eine Konstruktion im Maßstab 1 : 200 000 die Entfernung $\overline{WP}$.

Lösung: Konstruktion: $\overline{MP} \mathrel{\widehat{=}} 6{,}5\,\text{cm}$, $\overline{MW} \mathrel{\widehat{=}} 4{,}5\,\text{cm} \quad\Longrightarrow\quad \overline{WP} \mathrel{\widehat{=}} 6{,}9\,\text{cm}$

$\overline{WP} = 6{,}9\,\text{cm} \cdot 200\,000 = 13{,}8\,\text{km}$

33. Das Flugzeug F wird von zwei Radarstationen A und B aus angepeilt. Dabei werden die Winkel $\alpha = 131°$ und $\beta = 25°$ gemesen. Die Entfernung der beiden Stationen ist $\overline{AB} = 12{,}5\,\text{km}$. Das Flugzeug bewegt sich in gleich bleibender Höhe mit der Geschwindigkeit $v = 1700\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.



(a) Konstruiere die Lage des Flugzeugs in einem Koordinatensystem (Einheit 1 cm), in dem die Radarstationen durch A(5|0) und B(10|0) gegeben sind. Welcher Maßstab wird verwendet?

(b) In welcher Höhe h fliegt die Maschine?

(c) Wie lange dauert es, bis sich F genau senkrecht über der Station A befindet?

Lösung: (a) Maßstab 1:250 000, d.h. $1\,\text{cm} \mathrel{\widehat{=}} 2{,}5\,\text{km}$

(b) $h = \overline{CF} = 3{,}9\,\text{cm} \mathrel{\widehat{=}} 9{,}8\,\text{km}$

(c) $\overline{AC} = 3{,}4\,\text{cm} \mathrel{\widehat{=}} 8{,}5\,\text{km} \quad\Longrightarrow\quad t = \dfrac{8{,}5\,\text{km}}{1700\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}005\,\text{h} = 18\,\text{s}$

34. Drei Städte A, B und C haben auf einer Landkarte die Koordinaten A(1|1), B(7|1) und C(6|6) (Einheit 1 cm).

    (a) Konstruiere die Mittelsenkrechten m_a, m_b und m_c auf die Seiten des Städtedreiecks. Was stellst du fest? Überprüfe deine Vermutung noch an anderen Dreiecken!

    (b) Ein Ingenieur behauptet, der Schnittpunkt M von m_a und m_b wäre der günstigste Ort für einen gemeinsamen Radiosender der drei Städte. Zeichne zur Überprüfung dieser Behauptung den Kreis $k(M; r = \overline{MA})$.

Lösung: (a) Die drei Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt M.

(b) Alle drei Städte liegen auf dem Kreis, d.h. alle drei Städte sind gleich weit vom Sender entfernt.

35. (a) Zeichne in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm) die Punkte A(1|1), B(7|1) und C(3|6). Konstruiere die drei Höhen des Dreiecks $\triangle ABC$. Was stellst du fest? Welche Fläche hat das Dreieck?

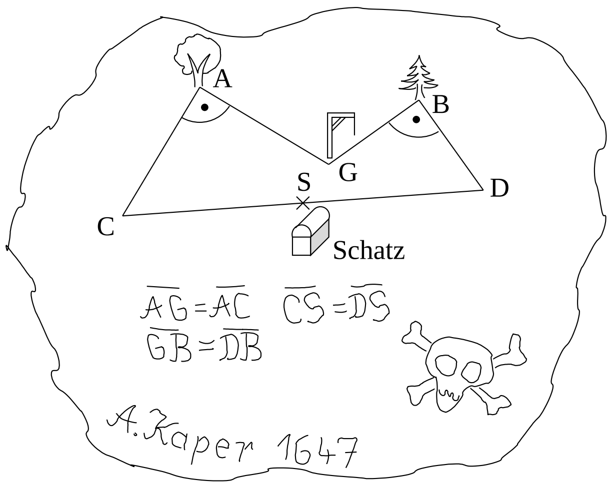
    (b) Löse die Teilaufgabe (a) noch einmal für A(1|1), B(6|1) und C(3|2,5). Kannst du die gleiche Feststellung machen wie in Teilaufgabe (a)?

Lösung: (a) Die drei Höhen schneiden sich in einem Punkt.

$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 15\,\text{cm}^2$

(b) Die drei Höhen schneiden sich wieder in einem Punkt, allerdings außerhalb des Dreiecks.

36. Ein Seemann sucht nach nebenstehender Karte den Schatz des berüchtigten Piraten Adalbert Kaper auf der Totenkopfinsel, doch zu seinem Leidwesen ist vom Galgen keine Spur mehr zu finden. In seiner Verzweiflung nimmt er einfach den Ort an dem er gerade steht, als Punkt C an und sucht nach den Angaben der Karte den Punkt S, an dem der Schatz vergraben ist. Nach-



dem er zwei Stunden gegraben hat, hört man ein Freudengeheul - er hat den Schatz gefunden.

So, jetzt bist du der Seemann, die Heftseite ist die Totenkopfinsel un die Bäume wachsen an den Orten A(5|5) und B(9|8). Nimm drei verschiedene Orte für die Lage des Galgens an und konstruiere jeweils den Punkt S. Viel Glück bei der Schatzsuche!

Lösung: Für jeden beliebigen Ort G erhält man den gleichen Punkt S (8,5 | 4,5).
S liegt auf der Mittelsenkrechten von [AB] und hat von AB den Abstand $\frac{1}{2} \cdot \overline{\text{AB}}$.

37. Zeichne die Punkte A(1|3), B(7|1) und C(8|8) in ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm.

    (a) Konstruiere die Winkelhalbierenden w_α, w_β und w_γ im Dreieck $\triangle$ABC. Welche Eigenschaft haben die drei Winkelhalbierenden?

    (b) S sei der Schnittpunkt von w_α und w_β. Konstruiere das Lot von S auf BC und nenne den Fußpunkt dieses Lotes F. Zeichne den Kreis k(S; $r = \overline{\text{SF}}$). Welche Eigenschaft hat k?

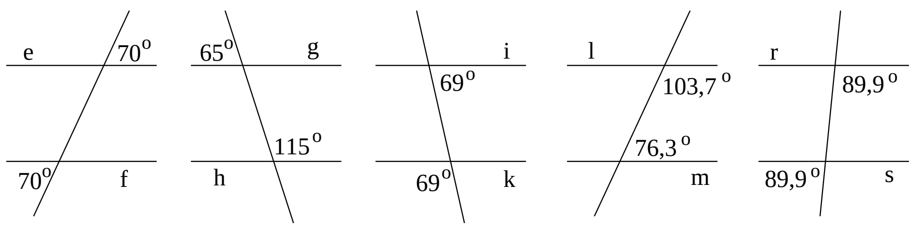
    (c) Welcher Punkt hat von allen Dreiecksseiten den gleichen Abstand? Überprüfe diese Eigenschaft an einem anderen Dreieck.

Lösung: (a) Die drei Winkelhalbierenden schneiden sich in einem Punkt S.
(b) k berührt alle Dreiecksseiten.
(c) S hat von allen Dreiecksseiten den gleichen Abstand.

38. Konstruiere folgende Winkel: $\alpha = 112{,}5°$, $\beta = 225°$, $\gamma = 78{,}75°$ und $\delta = 292{,}5°$.

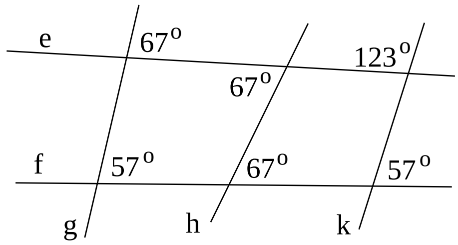
Lösung: $\alpha = 112{,}5° = 90° + \dfrac{90°}{4}$, $\beta = 225° = 180° + \dfrac{90°}{2}$
$\gamma = 78{,}75° = 90° - \dfrac{90°}{8}$, $\delta = 292{,}5° = 270° + \dfrac{90°}{4}$

39. Welche Geradenpaare sind parallel?



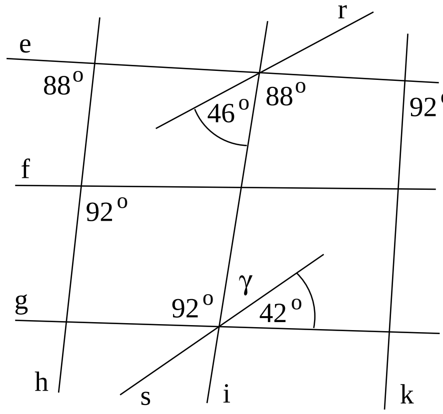
Lösung: e und f, g und h, l und m

40. Ein Winkel in nebenstehender Abbildung ist falsch, welcher könnte es sein? Genaue Begründung deiner Antwort!



Lösung: Die beiden Winkel an der Geraden g müssen gleich sei.

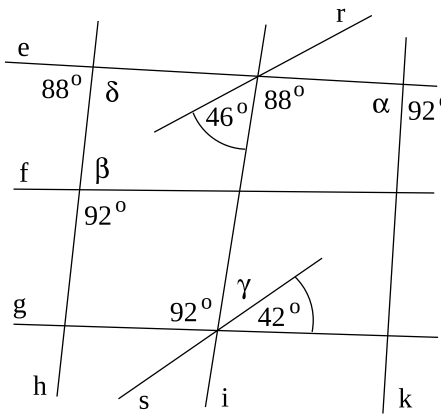
41. Welche Geradenpaare sind parallel? Genaue Begründung deiner Antworten!



Lösung: $\alpha = 180° - 92° = 88°$
$\Longrightarrow \quad h \| k$ (Stufenwinkel)

$\beta = 180° - 92° = 88°$
$\Longrightarrow \quad e \| f$ (Wechselwinkel)

$\gamma = 180° - 92° - 42° = 46°$
$\Longrightarrow \quad r \| s$ (Wechselwinkel)



42. Berechne die Lösungsmenge zur Grundmenge $\mathbb{Q}$:

(a) $2x - 4 = -3 + 6x$

(b) $(x-1)(x+1) = -1 + \frac{x}{3} \cdot 3x$

(c) $x + 2 - \frac{4}{7} = (6x+2) : 7$

Lösung: (a) $-4x = 1 \quad \Longrightarrow \quad L = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

(b) $x^2 - 1 = -1 + x^2 \quad \Longrightarrow \quad L = \mathbb{Q}$

(c) $x + \frac{10}{7} = \frac{6}{7}x + \frac{2}{7} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{7}x = -\frac{8}{7} \quad \Longrightarrow \quad L = \{-8\}$

43. Im Jahre 2006 beträgt die Mehrwertsteuer noch 16%, ab 01.01.2007 wird sie auf 19% angehoben. Um wieviel Prozent (auf Zehntel Prozent gerundet) steigt der Endpreis einer Ware durch diese Steuererhöhung?

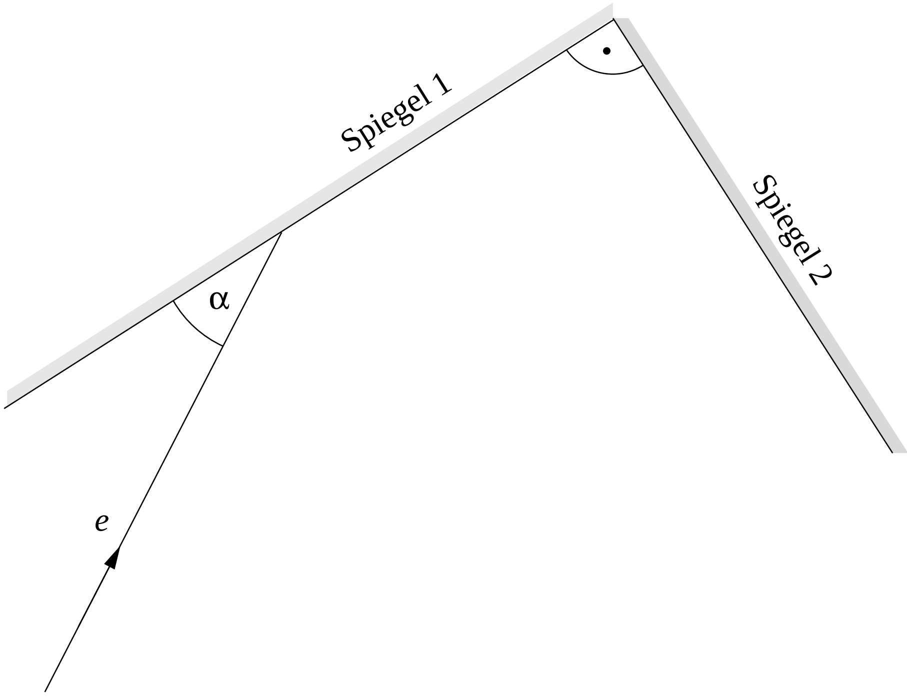
Lösung: Preis ohne MWSt.: p_0, alter Preis: $p_a = 1{,}16p_0$

neuer Preis: $p_n = 1{,}19p_0 = \frac{1{,}19}{1{,}16}p_a = 1{,}0258p_a \quad \Longrightarrow$ Erhöhung um 2,6%.

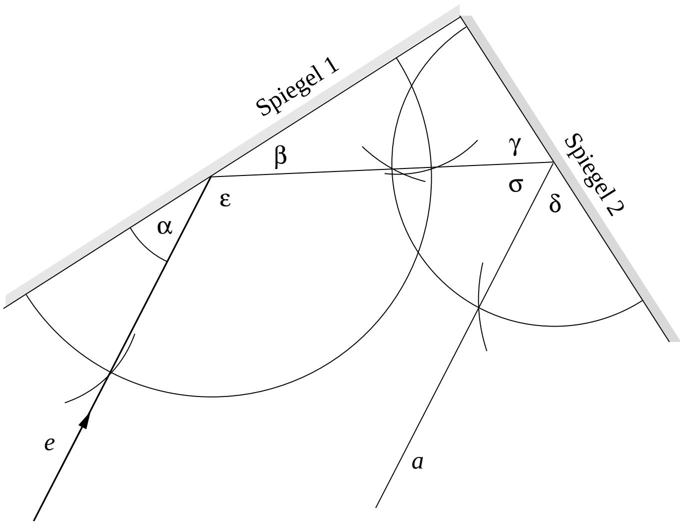
44. Die Abbildung zeigt einen Winkelspiegel, bei dem zwei Spiegel senkrecht zueinander angeordnet sind. Ein Lichtstrahl e fällt unter dem Winkel $\alpha = 30°$ auf den Spiegel 1 und wird nacheinander an den beiden Spiegeln reflektiert.

(a) Konstruiere den weiteren Verlauf des Lichtstrahls.

(b) Beweise durch eine ausführliche Rechnung und unter Angabe der jeweils verwendeten Winkelsätze, dass der aus dem Winkelspiegel auslaufende Strahl a zum einfallenden Strahl e parallel ist.



Lösung: (a)



(b) $\beta = \alpha = 30°$ (Reflexion)
$\gamma = 180° - 90° - 30° = 60°$ (Winkelsumme im Dreieck)
$\delta = \gamma = 60°$ (Reflexion)
$\varepsilon = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$ (gestreckter Winkel)
$\sigma = 180° - 2 \cdot 60° = 60°$ (gestreckter Winkel)
$\varepsilon + \sigma = 120° + 60° = 180° \quad \Longrightarrow \quad a \| e$ (Nachbarwinkel)

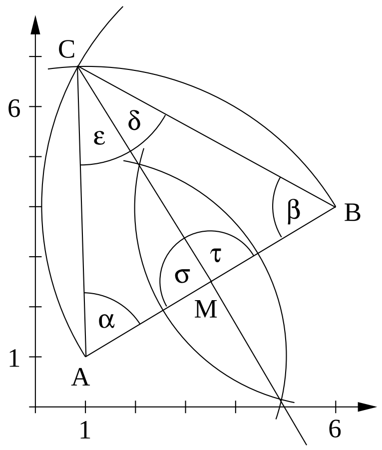
45. (a) Zeichne die Punkte A (1 | 1) und B (6 | 4) in ein Koordinatensystem (Platzbe-

darf nach oben 8 cm). Konstruiere $\triangle ABC$ mit $a = b = \overline{AB}$. Konstruiere auch den Mittelpunkt M der Strecke [AB] und zeichne die Seitenhalbierende $s_c = [CM]$ ein.

(b) Beweise, dass die so entstandenen Teildreiecke kongruent sind und schreibe die Kongruenz richtig hin.

(c) Benenne alle Winkel in den Teildreiecken und schreibe alle Folgerungen hin, die man aus der Kongruenz der Teildreiecke ziehen kann. Welche Namen könnte man also der Seitenhalbierenden s_c noch geben?

Lösung: (a)



(b) $$\left.\begin{array}{r}\overline{AM} = \overline{MB}\\ \overline{AC} = \overline{BC}\\ \overline{CM} = \overline{CM}\end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle AMC \cong \triangle BMC\,(\text{sss})$$

(c) $\alpha = \beta$, $\varepsilon = \delta$, $\sigma = \tau$

$\sigma + \tau = 2\sigma = 180° \quad \Longrightarrow \quad \sigma = \tau = 90°$

$\varepsilon = \delta \quad \Longrightarrow \quad [MC] = w_\gamma$ mit $\gamma = \sphericalangle ACB$

$\sigma = \tau = 90° \quad \Longrightarrow \quad [MC] = h_c$

46. Vom Dreieck $\triangle ABC$ ist bekannt:

- $a = b = 8\,\text{cm}$
- Der Mittelpunkt M der Seite [AB] hat von BC den Abstand $d = 3\,\text{cm}$

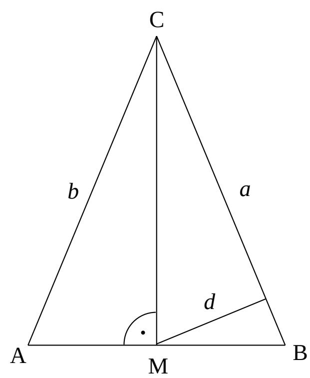
(a) Erstelle eine Überlegungsfigur! Erkläre und begründe die wesentlichen Schritte zur Konstruktion des Dreiecks $\triangle ABC$.

(b) Konstruiere das Dreieck $\triangle ABC$.

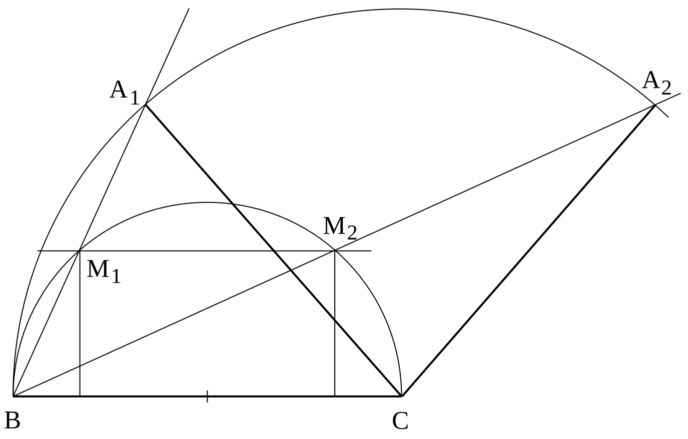
(c) Untersuche die Lösbarkeit der Aufgabe in Abhängigkeit von d.

Lösung: (a) Im gleichschenkligen Dreieck ist die Seitenhalbierende der Basis zugleich Höhe auf die Basis. M liegt also auf dem Thaleskreis über [BC] und auf der Parallelen zu BC im Abstand d.

A liegt auf BM und auf $k(C; r = a)$



(b)



(c) $0 < d < 4\,\text{cm}$: 2 Lösungen
$d = 4\,\text{cm}$: 1 Lösung
$d > 4\,\text{cm}$: keine Lösung

47. Eva verdient monatlich 360 €, Fritz dagegen 640 €. Hans verdient um einen gewissen Prozentsatz mehr als Eva und um den gleichen Prozentsatz weniger als Fritz. Berechne diesen Prozentsatz und das monatliche Einkommen von Hans.

Lösung: x ist der gesuchte Prozentsatz:

$$\begin{aligned}(1+x)\cdot 360 &= (1-x)\cdot 640\\ 360+360x &= 640-640x\\ 1000x &= 280\\ x &= \frac{28}{100} = 28\%\end{aligned}$$

Hans verdient $1{,}28 \cdot 360$ € $= 460{,}80$ € (oder $0{,}72 \cdot 640$ € $= 460{,}80$ €)

48. (a) Vereinfache den Term so weit wie möglich und klammere im Ergebnis eine Zahl so aus, dass in der Klammer kein Bruch mehr steht:

$$T(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

(b) Berechne den Wert des Terms $T(x)$ für $x = \frac{1}{2}$, $x = 0$ und für $x = -\frac{1}{2}$.

Lösung: (a) $T(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + x - \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{8} = \frac{5}{4}x - \frac{5}{8} = \frac{5}{8}(2x-1)$

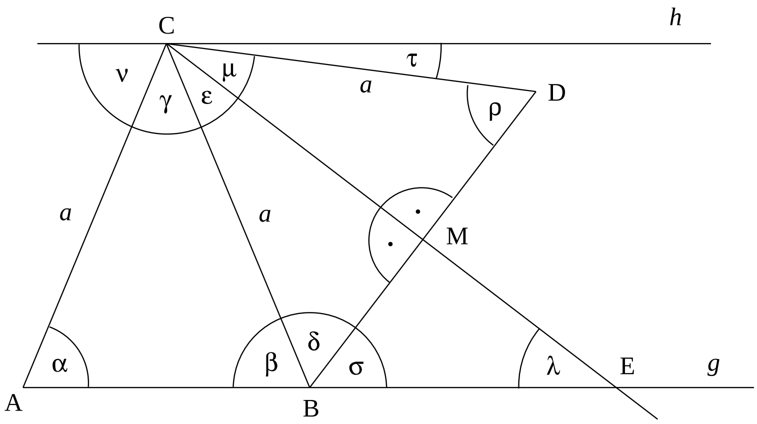
(b) $T\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $T(0) = -\frac{5}{8}$, $T\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$

49. Suche die Lösungsmenge zur Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:

    (a) $(x-3)(x+3)+9 = x^2$ (b) $\dfrac{x^2}{x} = 0$ (c) $\dfrac{x-1}{x-1} = 1$

Lösung: (a) $L = \mathbb{Q}$ (b) $L = \{\}$ (c) $L = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$

50. In folgender Abbildung gilt $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{DC}} = a$, $g \| h$, $\sphericalangle \mathrm{CMB} = \sphericalangle \mathrm{DMC} = 90°$ und $\alpha = 70°$.



(a) Berechne in nachvollziehbarer Weise (mit Begründungen) die Winkel τ und λ.

(b) Warum gilt $\overline{\mathrm{BM}} = \overline{\mathrm{MD}}$?

Lösung: (a)

$\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$	$\Longrightarrow$	$\beta = \alpha = 70°$ (Basiswinkel)
$\triangle$BDC gleichseitig	$\Longrightarrow$	$\delta = \rho = \varepsilon + \mu = 60°$
gestreckter Winkel	$\Longrightarrow$	$\sigma = 180° - \beta - \delta = 50°$
Außenwinkel	$\Longrightarrow$	$\lambda = 90° - \sigma = 40°$
Z-Winkel	$\Longrightarrow$	$\varepsilon + \mu + \tau = \beta \Longrightarrow \tau = \beta - 60° = 10°$

(b)

$$\left.\begin{array}{c} \overline{\mathrm{CM}} = \overline{\mathrm{CM}} \\ \delta = \rho \\ \sphericalangle \mathrm{CMB} = \sphericalangle \mathrm{DMC} = 90° \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow \triangle \mathrm{BMC} \cong \triangle \mathrm{DMC}\,(\mathrm{wws}) \\ \Longrightarrow \overline{\mathrm{BM}} = \overline{\mathrm{MD}} \end{array}$$

11.2 Jahrgangsstufe 11

1. Diskutieren Sie die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{12}\,x^4 - \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x^2$$

nach allen Regeln der Kunst und zeichnen Sie ihren Graphen.

Lösung: NS: $x_{01} = 2 - \sqrt{22} \approx -2{,}69, \quad x_{02} = 0, \quad x_{03} = 2 + \sqrt{22} \approx 6{,}69$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \frac{1}{3}\,x^3 - x^2 - 3x$

$f''(x) = x^2 - 2x - 3$

rel. Minimum bei $\left(\frac{3}{2}(1-\sqrt{5})\middle|\frac{9}{8}\left(-13+5\sqrt{5}\right)\right) \approx (-1{,}85\,|\,-2{,}05)$

rel. Maximum bei $(0\,|0\,)$

rel. Minimum bei $\left(\frac{3}{2}(1+\sqrt{5})\middle|\frac{9}{8}\left(-13-5\sqrt{5}\right)\right) \approx (4{,}85\,|\,-27{,}2)$

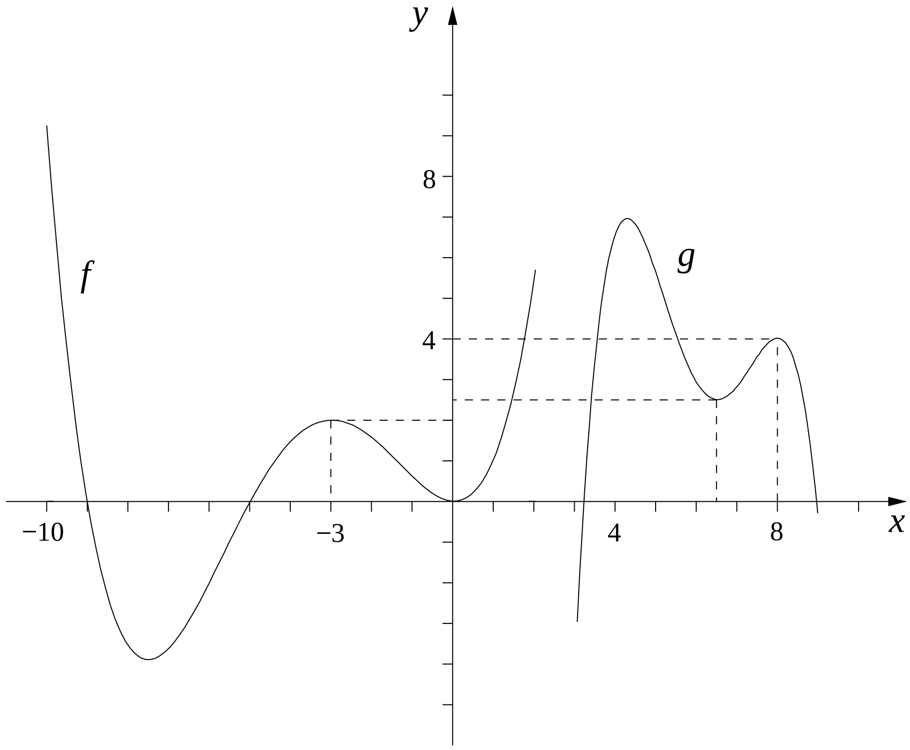
Wendepunkt bei $\left(-1\middle|-\frac{13}{12}\right) = (-1\,|\,-1{,}08\overline{3})$

Wendepunkt bei $\left(3\middle|-\frac{63}{4}\right) = (3\,|\,-15{,}75)$

2. Die Abbildung zeigt den Grafen der Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{54}x^2(x+5)(x+9)$$

Beschreiben Sie, wie der ebenfalls dargestellte Graf der Funktion g aus dem Grafen von f hervorgeht und entwickeln Sie schrittweise die Gleichung von g. Zeichnen Sie beschriftete Hilfsfunktionen in die gegebene Abbildung. Überprüfen Sie die gefundene Gleichung durch die Berechnung der Werte $g(3{,}5)$, $g(6{,}5)$ und $g(8)$.



Lösung: f spiegeln an der x-Achse $\rightarrow$ $f_1(x) = -f(x)$

f_1 strecken mit Zentrum (0|0) in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{2}$ und in y-Richtung mit Faktor $\frac{3}{4}$ $\rightarrow$

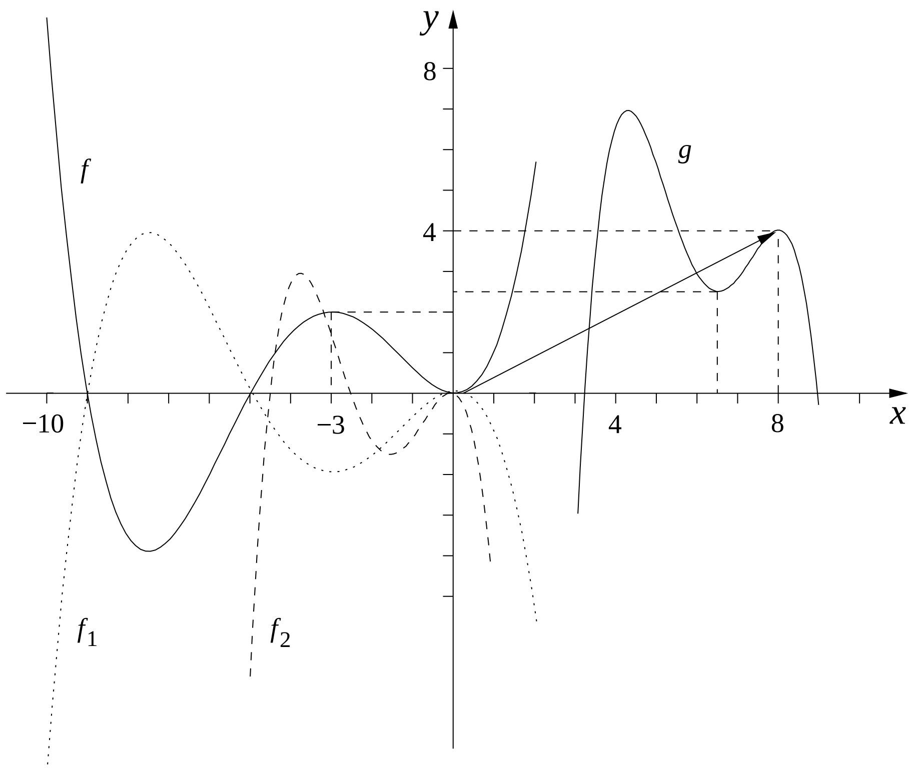
$$f_2(x) = -\frac{3}{4}f\,(2x) = -\frac{1}{18}x^2(2x+5)(2x+9)$$

f_2 verschieben um 8 nach rechts und um 4 nach oben $\rightarrow$

$$g(x) = f_2(x-8) + 4 = -\frac{1}{18}(x-8)^2(2(x-8)+5)(2(x-8)+9)$$

$$g(x) = -\frac{1}{18}(x-8)^2(2x-11)(2x-7) + 4$$

$g(3{,}5) = 4, \quad g(6{,}5) = 2{,}5, \quad g(8) = 4$



3. Beschreiben Sie, wie der Graf der Funktion

$$f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{3}{4}\,x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$$

aus dem Grafen der Funktion $g(x) = \sin x$ hervorgeht und zeichnen Sie beide Grafen.

Lösung: $f(x) = 2 \cdot \sin\left[\frac{3}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] + 3$

Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{4}{3}$ – Verschiebung um $\frac{\pi}{3}$ nach rechts – Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2 – Verschiebung um 3 nach oben.

Oder:

Verschiebung um $\frac{\pi}{4}$ nach rechts – Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{4}{3}$ – Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2 – Verschiebung um 3 nach oben.

4. Streckt man den Grafen der Funktion $f(x) = \sin x$ zuerst in x-Richtung mit dem Faktor $k = \frac{2}{3}$ und verschiebt ihn dann nach links um $a = \frac{\pi}{4}$, dann erhält man den Grafen von g. Verschiebt man den Grafen von f zuerst um a nach links und streckt ihn dann in x-Richtung mit dem Faktor k, dann erhält man den Grafen von h. Schreiben Sie die Gleichungen von g und h hin. Wie weit und in welche Richtung muss man den Grafen von g verschieben, um den Grafen von h zu erhalten?

Lösung: $g(x) = \sin\left[\frac{1}{k}(x + a)\right] = \sin\left[\frac{3}{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \sin\left[\frac{3}{2}x + \frac{3\pi}{8}\right]$

$h(x) = \sin\left[\frac{1}{k}x + a\right] = \sin\left[\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4}\right] = \sin\left[\frac{3}{2}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]$

$h(x) = \sin\left[\frac{3}{2}\left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right)\right] = g\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \quad \Longrightarrow$ Verschiebung um $\frac{\pi}{12}$ nach rechts.

5. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \dfrac{3x}{1 + x^2}$ und $D_f = \mathbb{R}$.

   (a) Untersuchen Sie f auf Symmetrie und Monotonie und zeichnen Sie den Grafen von f im Intervall $[-3; 3]$ in der Einheit 2 cm.

   (b) In welchem maximalen Intervall, das den Ursprung enthält, besitzt f eine Umkehrfunktion $g = f^{-1}$? Zeichnen Sie den Grafen von g in das schon vorhandene Diagramm. Beweisen Sie, dass die Gleichung von g für $x \neq 0$ durch

   $$g(x) = \frac{3 - \sqrt{9 - 4x^2}}{2x}$$

   gegeben ist.

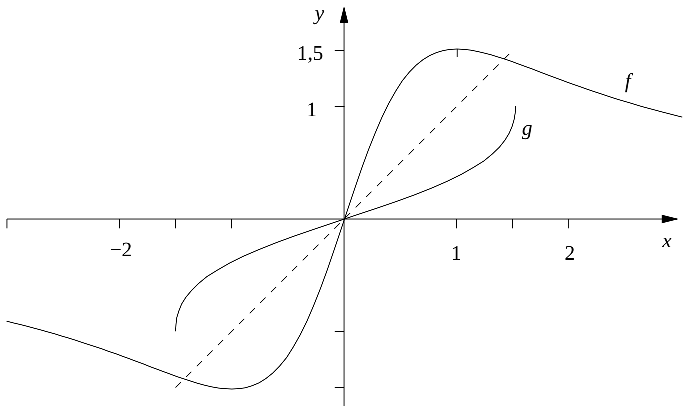
Lösung: (a) $f(-x) = -\dfrac{3x}{1 + x^2} = -f(x) \quad \Longrightarrow \quad$ Punktsymmetrie zum Ursprung.

$$f'(x) = \frac{3(1 + x^2) - 3x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{3(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} = \underbrace{\frac{3}{(1 + x^2)^2}}_{>0} \cdot (1 - x^2)$$

$$f'(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - x^2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |x| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < x < 1$$

f streng steigend in $[-1;1]$, und streng fallend in $]-\infty;-1]$ und in $[1;+\infty[$.

x	$f(x)$
0	0
0,5	1,2
1,0	1,5
1,5	1,38
2,0	1,2
2,5	1,03
3,0	0,9



(b) g existiert in $[-1;1]$.

$$f(g(x)) = \frac{3\cdot\dfrac{3-\sqrt{9-4x^2}}{2x}}{1+\left(\dfrac{3-\sqrt{9-4x^2}}{2x}\right)^2} = \frac{3\cdot\dfrac{3-\sqrt{9-4x^2}}{2x}}{1+\dfrac{18-6\sqrt{9-4x^2}-4x^2}{4x^2}} =$$

$$= \frac{6x\left(3-\sqrt{9-4x^2}\right)}{6\left(3-\sqrt{9-4x^2}\right)} = x$$

6. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \sqrt{\cos(x^2)+\sin^2(3x)}$$

ohne Berücksichtigung der Definitionsmenge.

Lösung: $f'(x) = \dfrac{-\sin(x^2)\cdot 2x + 2\sin(3x)\cos(3x)\cdot 3}{2\sqrt{\cos(x^2)+\sin^2(3x)}} = \dfrac{-2x\sin(x^2)+3\sin(6x)}{2\sqrt{\cos(x^2)+\sin^2(3x)}}$

7. Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $z^{100} = i$, deren Realteil zwischen 0,60 und 0,65 liegt. Lösungen in Polar- und in Normalform.

Lösung: $z = \mathrm{E}(\varphi) \quad\Longrightarrow\quad z^{100} = \mathrm{E}(100\varphi) = \mathrm{E}(90^\circ)) \quad\Longrightarrow\quad 100\varphi = 90^\circ + k\cdot 360^\circ, \quad k\in\mathbb{Z}$

$\varphi_k = 0{,}9^\circ + k\cdot 3{,}6^\circ, \quad \mathrm{Re}(z_k) = \cos\varphi_k, \quad 0{,}60 < \cos\varphi_k < 0{,}65 \quad\Longrightarrow$

$53{,}13^\circ > \varphi_k > 49{,}46^\circ \quad\Longrightarrow\quad 14{,}5 > k > 13{,}5 \quad\Longrightarrow\quad k = 14, \quad \varphi_{14} = 51{,}3^\circ$

$306{,}87^\circ < \varphi_k < 310{,}54^\circ \quad\Longrightarrow\quad 84{,}99 < k < 86{,}01 \quad\Longrightarrow\quad \varphi_{85} = 306{,}9^\circ,\ \varphi_{86} = 310{,}5^\circ$

$z_{14} = \mathrm{E}(51{,}3^\circ) = 0{,}6252 + 0{,}7804\,i$

$z_{85} = \mathrm{E}(306{,}9^\circ) = 0{,}6004 - 0{,}7997\,i$

$z_{86} = \mathrm{E}(310{,}5^\circ) = 0{,}6494 - 0{,}7604\,i$

8. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{8}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{9}{2}\,x$$

im maximalen Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie die Nullstellen von f.

(b) Untersuchen Sie f auf Monotonie und auf Extremwerte.

(c) Ermittlen Sie das Krümmugsverhalten von f und die Wendepunte.

(d) Zeichnen Sie den Grafen von f im x-Intervall $[-0{,}5; 8]$ in der Einheit 1 cm.

Lösung: (a) $f(x) = \frac{x}{8}\left(x^2 - 12x + 36\right) = \frac{x}{8}(x-6)^2 \qquad f(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_{01} = 0,\ x_{02} = 6$

(b) $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2} = \frac{3}{8}\left(x^2 - 8x + 12\right) \qquad f'(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x^2 - 8x + 4^2 = -12 + 16$

$x_{11} = 2$, $x_{12} = 6$, $\qquad f'$ ist eine nach oben geöffnete Parabel $\Longrightarrow$

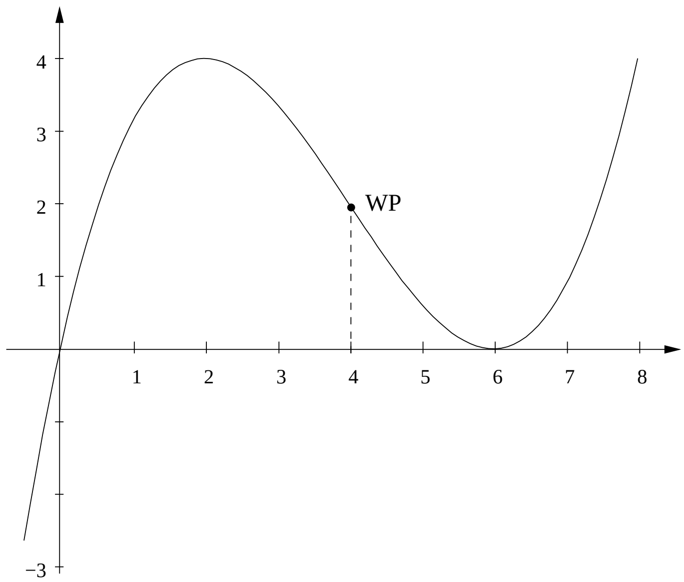
$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ und } f \text{ streng steigend in }]-\infty; 2[\text{ und in }]6; \infty[\\ f'(x) < 0 \text{ und } f \text{ streng fallend in }]2; 6[\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{rel. Max. bei } (2|4) \\ \text{rel. Min. bei } (6|0) \end{array}\right.$$

(c) $f''(x) = \frac{3}{4}x - 3 \qquad f''(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_2 = 4 \quad\Longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) < 0 \text{ und } f \text{ rechtsgekrümmt in }]-\infty; 4[\\ f'(x) > 0 \text{ und } f \text{ linksgekrümmt in }]4; \infty[\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Wendepunkt bei } (4|2)$$

(d)

x	$f(x)$
$-0{,}5$	$-2{,}64$
0	0
1	3,125
3	3,375
5	0,625
7	0,875
8	4
x	$f''(x)$
2	-1,5
6	+1,5
8	4
x	$f'''(x)$
4	0,75



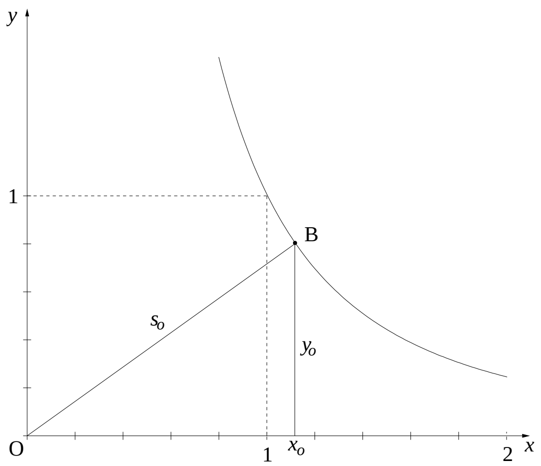
9. Der letzte Weg des Bären Bruno wird durch die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{x^2}$ und $D_f = \mathbb{R}^+$ beschrieben.

(a) Zeichnen Sie den Grafen von f mit der Einheit 5 cm im x-Intervall $[0{,}8; 2]$.

(b) Der Bär wandert gemächlich von links nach rechts auf dem Grafen von f. Im Ursprung O des Koordinatensystems sitzt ein feiger Jaga, der Bruno genau dann erlegt, wenn er von ihm die kleinste Entfernung hat. Drücken Sie die Entfernung s zwischen dem Bären und dem Schützen durch die x-Koordinate des Bären aus und berechnen Sie die Koordinaten von Brunos Schicksalsort $\mathrm{B}\,(\,x_0\,|\,y_0\,)$. Nachweis nicht vergessen, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt!

(c) Wie lang ist die tatsächliche Schussweite $s_0 = \overline{\mathrm{OB}}$, wenn der in (a) gezeichnete Weg einer Karte im Maßstab 1:2000 entspricht?

Lösung: (a)



(b) $s(x) = \sqrt{x^2 + f(x)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^4}}$

$$s'(x) = \frac{2x - \frac{4}{x^5}}{2\sqrt{x^2 + f(x)^2}}$$

$s'(x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = 2^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}122$

$y_0 = f(x_0) = 2^{-\frac{1}{3}} \approx 0{,}7937$

$\lim\limits_{x\to 0^+} s(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} s(x) = +\infty$ und nur eine Nullstelle von s' $\Longrightarrow$ relatives Minimum bei $\mathrm{B}\,(\,x_0\,|\,y_0\,)$

(c) $s_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2} \approx 1{,}375$

In der Zeichnung hat s_0 die Länge $5 \cdot 1{,}375\,\mathrm{cm} = 6{,}875\,\mathrm{cm}$, in der Wirklichkeit also $2000 \cdot 6{,}875\,\mathrm{cm} = 137{,}5\,\mathrm{m}$.

10. Berechnen Sie in nachvollziehbarer Weise die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2x}-2x}$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2x}-2x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin 3x}{x^2+\sin 2x}$

Lösung: (a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2x}-2x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{2}-2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2x}-2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}-2} = \dfrac{1}{2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin 3x}{x^2+\sin 2x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-3\cos 3x}{2x+2\cos 2x} = \dfrac{1-3}{2} = -1$

12 Neue Aufgaben, Juni 2006

1. **Für Modebewusste/Wechselwähler**

   In einer Schublade liegen 25 rote und 25 schwarze Socken. Wie viele Socken muss man ,,blind" mindestens entnehmern, um sicher zu sein, mindestens zwei gleichfarbige Socken in der Hand zu haben? Wie viele muss man nehmen, wenn man unbedingt zwei rote Socken haben will?

   Quelle: G. M. Ziegler, FOCUS 23/2006

Lösung: 26, 27

2. Welche Summe haben die ungeraden Zahlen zwischen 0 und 100? Wie viele gibt es?

   Quelle: G. M. Ziegler, FOCUS 23/2006

Lösung: Es gibt 50 ungerade Zahlen, d.h. 25 Paare ungerader Zahlen.
$1 + 3 + 5 + \cdots + 99 = (1 + 99) + (3 + 97) + \cdots + (49 + 51) = 100 \cdot 25 = 2500$

3. Wenn die Bundesliega auf 20 Mannschaften vergrößert werden soll, wie viele Spiele finden dann in jeder Saison statt?

   Quelle: G. M. Ziegler, FOCUS 23/2006

Lösung: Mannschaften spielen pro Saison zweimal gegeneinander, also $20 \cdot 19 = 380$ Spiele

4. **Schere-Stein-Papier-Spiel**

   Bei diesem Spiel zählen beide Personen bis drei. Auf ,,drei" zeigt jede der beiden Personen mit ihrer rechten oder linken Hand ein beliebiges der drei Symbole ,,Schere", ,,Stein" bzw. ,,Papier". Das Spielergebnis kann man der folgenden Tabelle entnehmen:

	Schere	Stein	Papier
Schere	unentschieden	Stein gewinnt, denn der Stein macht die Schere stumpf	Schere gewinnt, denn die Schere schneidet das Papier
Stein	Stein gewinnt, denn der Stein macht die Schere stumpf	unentschieden	Papier gewinnt, denn das Papier umwickelt den Stein
Papier	Schere gewinnt, denn die Schere schneidet das Papier	Papier gewinnt, denn das Papier umwickelt den Stein	unentschieden

Spiele das ,,Schere-Stein-Papier-Spiel" mit deinem Nachbarn oder deiner Nachbarin zwanzigmal. Tragt eure Namen und die zwanzig Spielergebnisse in eine Strichliste ein.

(a) Wie oft war insgesamt das Ergebnis ,,Schere gewinnt"?
(b) Wie groß ist die relative Häufigkeit von ,,Schere gewinnt"?
(c) Wie oft war insgesamt das Ergebnis ,,Stein gewinnt"?
(d) Wie groß ist die relative Häufigkeit von ,,Stein gewinnt"?
(e) Wie oft war insgesamt das Ergebnis ,,Papier gewinnt"?
(f) Wie groß ist die relative Häufigkeit von ,,Papier gewinnt"?
(g) Wie oft war insgesamt das Ergebnis ,,Unentschieden"?
(h) Wie groß ist die relative Häufigkeit von ,,Unentschieden"?
(i) Stelle die vier relativen Häufigkeiten in einem Säulendiagramm dar.

Quelle: Ulrike Schätz

Lösung:

5. Wenn die Mehrwertsteuer von 16% auf 19% erhöht wird, um wie viel Prozent steigt dann die Mehrwertsteuer?

   Quelle: G. M. Ziegler, FOCUS 23/2006

Lösung: 19%

6. Eine Hälfte, ein Drittel und ein Siebtel ergeben zusammen kein Ganzes. Wie viel fehlt?

   Quelle: G. M. Ziegler, FOCUS 23/2006

Lösung: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}$, also fehlt $\frac{1}{42}$

7. Finde jeweils das passende Diagramm. Es veranschaulicht

   (a) die Notenübersicht bei der vorletzten Mathematikschulaufgabe; der Notendurchschnitt war 3,0. Wie viel Prozent der Arbeiten waren mindestens ausreichend?

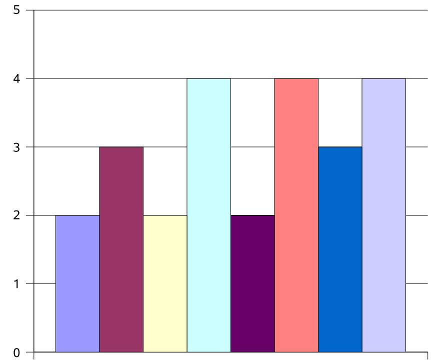
   (b) die Notenübersicht bei der vorletzten Mathematikschulaufgabe; der Notendurchschnitt war besser als 3,0. Berechne die Durchschnittsnote.

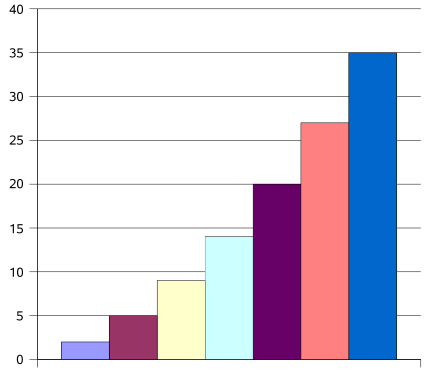
   (c) die Anzahl der Diagonalen eines n-Ecks. Stelle die Anzahl in einer Tabelle dar und ermittle für zwei weitere Vielecke die Anzahl der Diagonalen.

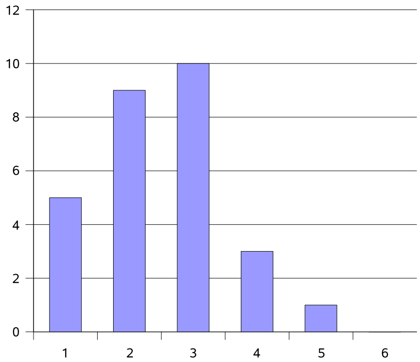
   (d) Die Anzahl der Teiler natürlicher Zahlen. Gib den Bruchteil der verwendeten Primzahlen an.

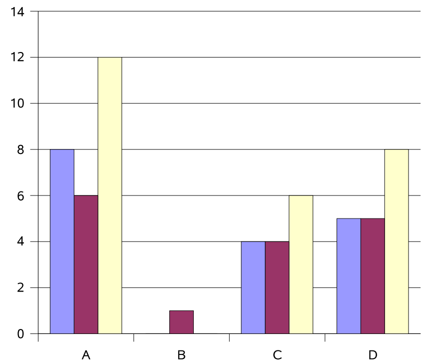
   (e) die Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten von geometrischen Grundkörpern. Finde heraus, um welche Grundkörper es sich handeln könnte.

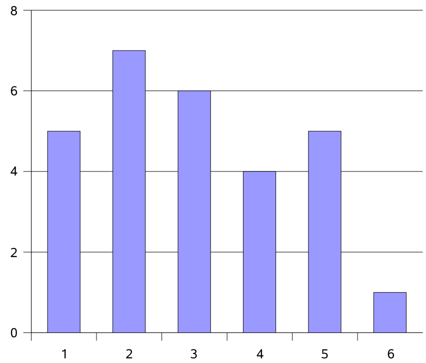
   (f) die Klassenstärken in vier fünften Klassen. Berechne die durchschnittliche Klassenstärke in der fünften Jahrgangsstufe.

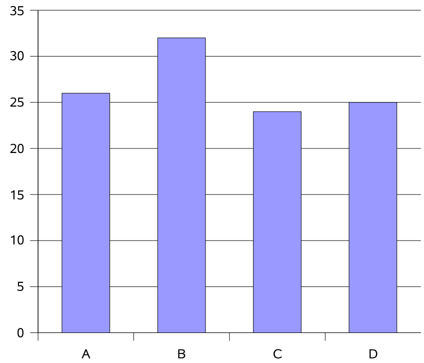












Quelle: Ulrike Schätz

Lösung: (a) letzte Reihe, linkes Diagramm;
$(5+7+6+4) : (5+7+6+4+5+1) = 22 : 28 = 78,6\%$

(b) zweite Reihe, linkes Diagramm;
$(5+18+30+12+5) : (5+9+10+3+1) = 70 : 28 = 2,5$

(c) erste Reihe, rechtes Diagramm;

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Diog.	2	5	9	14	20	27	35	44	54

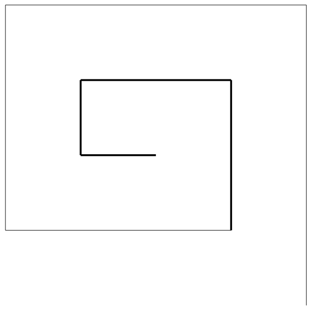
(d) erste Reihe, linkes Diagramm; $2 : 8 = 0,25 = \frac{1}{4}$

(e) zweite Reihe, rechtes Diagramm;

A	B	C	D
Würfel	Kreis	Tetraeder	vierseitige Pyramide

(f) dritte Reihe, rechtes Diagramm;

8. Die Skizze zeigt die erste Windung einer ,,Quadrat-Spirale", die innen am Punkt ,,Start" mit einer Strecke der Länge 1 beginnt.



(a) Zeichne eine weitere Windung ein und gib an, um wie viele Längeneinheiten diese dritte Windung länger ist als die zweite Windung.

(b) Ermittle eine Term T(n), der die Länge der n-ten Windung in Abhängigkeit von n angibt.

Quelle: Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur, ISB 2001

Lösung: (a) Dir dritte Windung ist um acht Längeneinheiten länger als die zweite Windung.

(b) $T(n) = 6 + (n-1) \cdot 8 = 8n - 2$

9. **Für Spieler:**

(a) Ein Würfel wird fünfmal geworfen und zeigt jedes Mal eine Drei. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er beim nächsten Mal wieder die Drei zeigt?

(b) Ein Würfel wird fünfmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man fünf verschiedene Ergebnisse bekommt?

Quelle: G. M. Ziegler, FOCUS 23/2006

Lösung: Nimmt man einen Laplace-Würfel an, lassen sich die Fragen wie folgt beantworten. Ansonsten kann man keine Aussagen machen.

(a) $\frac{1}{6}$

(b) $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6^5} = 9,3\%$

10. Das Auffüllen einer Badewanne mit Heißwasser dauert drei Minuten, aus dem getrennten Kaltwasserhahn nur zwei Minuten. Wie schnell ist die Wanne voll, wenn man beide Hähne aufdreht?

    Quelle: G. M. Ziegler, FOCUS 23/2006

Lösung: pro Minute: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, also dauert es $\frac{6}{5} = 1,2$ min

11. Das Geburtstagsproblem

    (a) Schätze, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass unter 30 (unter 40, unter 50, ...)Personen mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben.

    (b) Berechne die Wahrscheinlichkeit p_2, dass 2 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben.

    (c) Berechne die Wahrscheinlichkeit p_3, dass 3 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben.

    (d) Berechne die Wahrscheinlichkeit p_4, dass 4 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben.

    (e) Setzte die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 25, 30, 40, 50, 60 und 80 Personen fort und veranschauliche die Wahrscheinlichkeiten in der Tabelle und graphisch.

    Quelle: Ulrike Schätz, delta 9, Mathematik für Gymnasien, C. C. Buchner Verlag, Bamberg

Lösung:

Anzahl der Personen	Wahrscheinlichkeit p_n
2	$p_2 \approx 0,27\%$
3	$p_3 \approx 0,82\%$
4	$p_4 \approx 1,6\%$
6	$p_6 \approx 4,0\%$
8	$p_8 \approx 7,4\%$
10	$p_{10} \approx 12\%$
12	$p_{12} \approx 17\%$
14	$p_{14} \approx 22\%$
16	$p_{16} \approx 18\%$
18	$p_{18} \approx 35\%$
20	$p_{20} \approx 41\%$
25	$p_{25} \approx 57\%$
30	$p_{30} \approx 71\%$
40	$p_{40} \approx 89\%$
50	$p_{50} \approx 97\%$
60	$p_{60} \approx 99\%$
80	$p_{80} \approx 100\%$

12. (a) Schätze, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, bei 4 Würfen mit **einem** Würfel mindestens einmal eine Sechs zu werfen.
    (b) Schätze, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, bei 4 Würfen mit **zwei** Würfeln ein Sechserpasch zu werfen.
    (c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, bei 4 Würfen mit **einem** Würfel mindestens einmal eine Sechs zu werfen.
    (d) Berechne die Wahrscheinlichkeit, bei 4 Würfen mit **zwei** Würfeln ein Sechserpasch zu werfen.

    Quelle: Ulrike Schätz, delta 9, Mathematik für Gymnasien, C. C. Buchner Verlag, Bamberg

Lösung: (a)
(b)
(c) $p_1 = 1 - (\frac{5}{6})^4 \approx 52\%$
(d) $p_2 = 1 - (1 - (\frac{1}{6})^2)^{24} \approx 49\%$

13. Wenn der ,,1. FC Hacke" nur ein kleines bisschen besser ist als die ..Borussia Grätsch 1860", sodass für ,,Hacke" bei jedem Spiel eine Chance von 51 Prozent besteht, das Spiel zu gewinnen - wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Serie von acht Spiele der ,,1. FC Hacke" alle Spiele gewinnt?

    Quelle: G. M. Ziegler, FOCUS 23/2006

Lösung: $0,51^8 = 0,005 = 0,5\%$

13 Neue Aufgaben, Mai 2006

1. Lucas würfelt dreimal und schreibt die Augenzahlen nebeneinander. Wie viele verschiedene

   (a) dreistellige Zahlen sind dabei möglich?

   (b) gerade dreistellige Zahlen sind dabei möglich?

   (c) dreistellige Quadratzahlen sind dabei möglich?

   Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

Lösung: (a) $6^3 = 216$ (b) $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$,
(c) 8, nämlich 121, 144, 225, 256, 324, 361, 441, 625

2. (a) Wie viel Prozent aller zweistelligen Vielfachen von 13 sind gerade?

   (b) Wie viel Prozent aller dreistelligen Quadratzahlen sind ungerade?

   (c) Wie viele verschiedene dreistellige ganze Zahlen mit lauter verschiedenen Ziffern gibt es?

   Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

Lösung: (a) $\frac{3}{7} \approx 43\%$ (b) $(\frac{11}{22}) = 50\%$ (c) $2 \cdot (9 \cdot 9 \cdot 8) = 1296$

3. Welche Zahl kann man für $\triangle$ einsetzen?

   (a) 18% von 950 EUR sind $\triangle$ EUR

   (b) 17% von $\triangle$ EUR sind 62,05 EUR

   (c) $\triangle$% von 72 EUR sind 3,60 EUR

   (d) $\frac{1}{4} = \triangle\%$

   (e) $\frac{2}{3}$ sind auf Prozent gerundet $\triangle$%

   Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

Lösung: (a) 171 (b) 365 (c) 5 (d) 25 (e) 67

4. Berechne zu den angegebenen Termen die zugehörigen Termwerte.

   (a) $T(x) = 2 \cdot x^3 - 52;\quad T(8)$

   (b) $T(x) = 10^2 + x^2;\quad T(24)$

   (c) $T(x) = 2x^2 - 535;\quad T(23)$

   (d) $T(x) = (x+1)^2 - 34;\quad T(5)$

   (e) $T(x) = x(x-1);\quad T(31)$

   (f) $T(x) = \frac{36(x^2+x)}{x-1};\quad T(2)$

   (g) $T(x) = x(6x-1) - x(x-1);\quad T(5)$

   Quelle: Kreuzzahlrätsel, Ulrike Schätz

Lösung: (a) 972 (b) 676 (c) 523 (d) 2
(e) 930 (f) 216 (g) 125

5. Welche Zahl kann man für $\triangle$ einsetzen?

   (a) $\frac{1}{11} + \frac{2}{3} = \frac{75}{\triangle}$

   (b) $\frac{11}{12} + \frac{1}{10} = \frac{\triangle}{60}$

   (c) $\frac{387}{516} = \frac{\triangle}{100}$

   (d) $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{20}{\triangle}$

   (e) $\frac{1}{37} + \frac{2}{3} = \frac{154}{\triangle}$

   (f) $\frac{7}{10} + \frac{1}{4} = \frac{\triangle}{20}$

   (g) $\frac{1}{2} + \frac{3}{19} = \frac{50}{\triangle}$

   Quelle: Kreuzzahlrätsel, Ulrike Schätz

Lösung: (a) 99 (b) 61 (c) 75 (d) 42
(e) 222 (f) 19 (g) 76

6. Schätze jeweils den Grad der Wahrscheinlichkeit:

   (a) Du würfelst einmal und wirfst eine 1.

   (b) Deine nächste Mathematiknote ist eine 1.

   (c) Du springst beim nächsten Sportfest 5m weit.

(d) Deine Eltern schenken dir ein Handy.

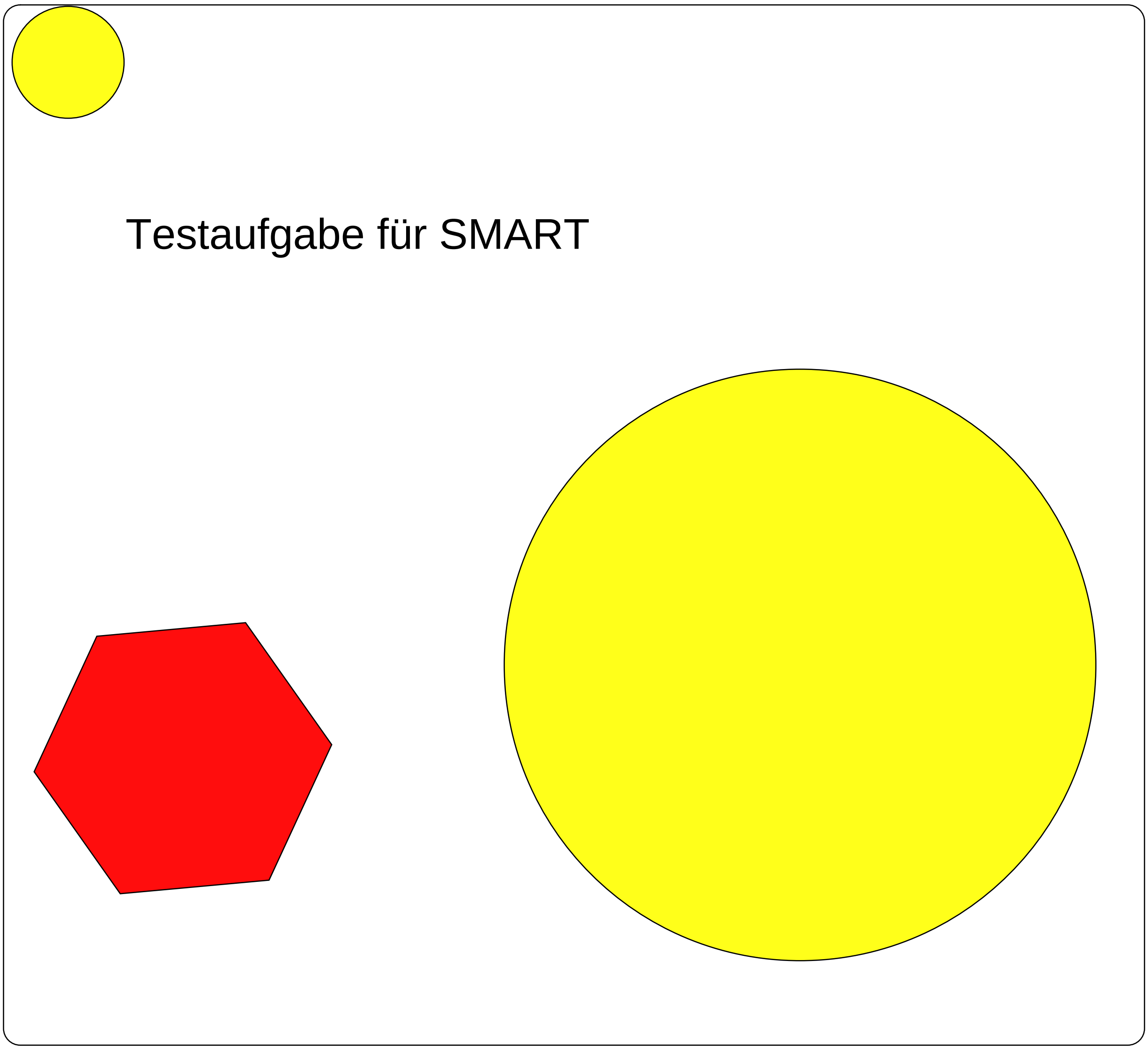
(e) Du würfelst einmal und wirfst eine 6.

(f) Deine Mutter bäckt dir eine Geburtstagstorte.

Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

Lösung: (a) $\frac{1}{6} \approx 17\%$, (b) individuelle Schätzung, (c) individuelle Schätzung
(d) individuelle Schätzung, (e)$\frac{1}{6} \approx 17\%$, (f)100%

7.



Lösung: nicht vorhanden.

14 Neue Aufgaben, Mï¿$\frac{1}{2}$rz 2006

1. Welche Mengen werden durch folgende Terme mit den jeweiligen Grundmengen beschrieben?

   (a) $T(x) = x^2, \quad G_T = \mathbb{N}$

   (b) $g(n) = 2n, \quad G_g = \mathbb{N}$

   (c) $u(n) = 2n - 1, \quad G_u = \mathbb{N}$

   (d) $B(a, b) = \dfrac{a}{b}, \quad a \in G_a = \mathbb{Z}, \quad b \in G_b = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

   (e) $n(y) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}, \quad G_n = \mathbb{N}$

Lösung: (a) Quadratzahlen (b) gerade Zahlen (c) ungerade Zahlen (d) $\mathbb{Q}$
(e) $\mathbb{N}_0$

2. Berechne die Werte folgender Terme für alle Elemente der jeweiligen Grundmenge:

   (a) $T(x) = x - x^2, \quad G_T = \left\{-3\,;\,-1\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,\frac{2}{3}\,;\,1\,;\,1{,}5\right\}$

   (b) $p(x) = \dfrac{x + |x|}{2}, \quad G_p = \left\{-5\,;\,-2\,;\,-\frac{1}{3}\,;\,0\,;\,\frac{2}{7}\,;\,1\,;\,2{,}5\,;\,7\right\}$

Lösung: (a)

x	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{2}{3}$	1	$1{,}5$
$T(x)$	-12	-2	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{2}{9}$	0	$-0{,}75$

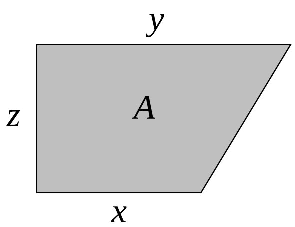
(b)

x	-5	-2	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{7}$	1	$2{,}5$	7
$p(x)$	0	0	0	0	$\frac{2}{7}$	1	$2{,}5$	7

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geqq 0 \end{cases}$$

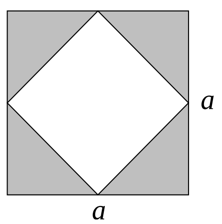
3. Stelle einen Term zur Berechnung der getönten Fläche A auf, der die aus der Zeichnung ersichtlichen Variablen enthält. Setze dann die angegebenen Werte für die Variablen ein.

(a)



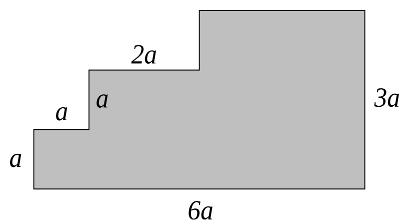
$z = x$, $y = 2x$

(b)



$a = 3\,\mathrm{cm}$

(c)



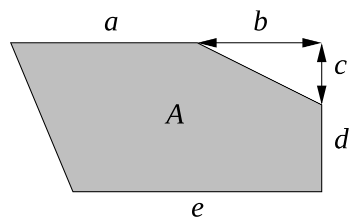
$a = 2{,}5\,\mathrm{cm}$

Lösung: (a) $A = xz + \frac{1}{2}(y-x)z = \frac{x+y}{2} \cdot z, \quad A = \frac{3}{2}x^2$

(b) $A = 4 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}a^2, \quad A = 4{,}5\,\mathrm{cm}^2$

(c) $A = a^2 + (2a)^2 + (3a)^2 = 14a^2, \quad A = 87{,}5\,\mathrm{cm}^2$

4. (a) Stelle einen Term zur Berechnung der getönten Fläche A auf, der die aus der Zeichnung ersichtlichen Variablen enthält.



(b) Berechne A dann für $a = 5\,\mathrm{cm}$, $b = 4\,\mathrm{cm}$, $c = 2\,\mathrm{cm}$, $d = 3\,\mathrm{cm}$ und $e = 7\,\mathrm{cm}$.

(c) Welche Bedingungen müssen zwischen den Variablen a, b, c, d und e bestehen, damit die Figur ein Parallelogramm, ein Rechteck oder gar ein Quadrat ist?

(d) Suche mindestens zwei verschiedene Ersetzungen für die Variablen a, b, c, d und e, für die $A = 100\,\mathrm{cm}^2$ ist und zeichne die Figuren im Maßstab 1 : 2.

(e) Suche mindestens zwei verschiedene Ersetzungen für die Variablen a, b, c und d, für die $A = e^2$ ist und skizziere die entsprechenden Figuren.

Lösung: (a) $A = (a+b)(c+d) - \frac{1}{2}bc - \frac{1}{2}(a+b-e)(c+d) = \frac{(a+e)(c+d)+bd}{2}$

(b) $A = 36\,\mathrm{cm}^2$

(c) Parallelogramm: $a = e,\ d = 0$ oder wie beim Rechteck
Rechteck: $a = e,\ b = 0$ oder $a + b = e,\ c = 0$
Quadrat: $a = e,\ b = 0,\ c + d = e$ oder $a + b = e,\ c = 0,\ d = e$

(d) Zwei Beispiele, alle Maße in cm: $a = d = e = 10,\ b = c = 0$ oder
$a = 7,\ b = 5,\ c = 4,\ d = 6$ und $e = 10$

(e) Zwei Beispiele: $a = e,\ b = 0,\ c = 0$ und $d = e$ oder $a = e,\ b = e,\ c = e$ und $d = 0$

5. Berechne die Definitionsmengen folgender Terme:

(a) $T_1(x) = \frac{x^2}{3-x} + \frac{2x-7}{3x-5}, \quad G_1 = \mathbb{N}$

(b) $T_2(x) = \frac{x^2}{3-x} + \frac{2x-7}{3x-5}, \quad G_2 = \mathbb{Q}$

(c) $T_3(x) = \frac{2x-7}{(2x+3)(5x-5)(8x+2)}, \quad G_3 = \mathbb{Q}$

Lösung: (a) $D_1 = \mathbb{N}\backslash\{3\}$

(b) $D_2 = \mathbb{Q}\backslash\left\{3, \frac{5}{3}\right\}$

(c) $D_3 = \mathbb{Q}\backslash\left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, 1\right\}$

6. Die Berechnung der Jahresendnote in Mathematik könnte durch folgenden Term geschehen, wobei S_1 bis S_4 die Schulaufgabennoten, E_1 bis E_4 die Exnoten und m_1 und m_2 die reinen mündlichen Noten sind:

$$N(S_1, S_2, ..., m_2) = \frac{1}{3}\left(2 \cdot \underbrace{\frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{4}}_{S_{\text{gesamt}}} + \underbrace{\frac{2E_1 + 2E_2 + 2E_3 + 2E_4 + m_1 + m_2}{10}}_{M_{\text{gesamt}}}\right)$$

(a) Welche Grundmenge ist für die Variablen S_1 bis m_1 sinnvoll?

(b) Folgende Tabelle zeigt einen Ausschnitt aus dem Notenbuch des Lehrers. Berechne jeweils die gesamte schriftliche Note S_{ges}, die gesamte mündliche Note M_{ges} und die Endnote N, alle Werte auf zwei Dezimalen gerundet.

Name	S_1	S_2	S_3	S_4	E_1	E_2	E_3	E_4	m_1	m_2	S_{ges}	M_{ges}	N
Huber	3	4	3	5	6	3	4	4	3	4			
Maier	5	5	4	5	6	6	5	4	4	4			
Müller	1	2	1	2	2	1	1	2	1	1			

(c) Maier hat vor der vierten Ex und der zweiten rein mündlichen Note noch Nachhilfe genommen. Hätte er seine Endnote noch verbessern können?

Lösung: (a) $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(b)

Name	S_{ges}	M_{ges}	N
Huber	3,75	4,10	3,87
Maier	4,75	5,00	4,83
Müller	1,50	1,40	1,47

(c) Nein, mit $E_4 = 1$ und $m_2 = 1$ wäre $M = 4,10$ und $N = 4,53$.

7. Berechne die Definitionsmengen folgender Terme:

(a) $T_1(x) = \dfrac{7}{x + |x|}, \quad G_1 = \mathbb{Q}$ (b) $T_2(x) = \dfrac{x}{x + |x|}, \quad G_2 = \mathbb{Z}$

(c) $T_3(x) = \dfrac{-2}{x - |x|}, \quad G_3 = \mathbb{Q}$ (d) $T_4(x) = \dfrac{-x^2}{x - |x|}, \quad G_4 = \mathbb{N}$

Lösung: (a) $x + |x| = \begin{cases} 2x & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leqq 0 \end{cases} \qquad D_1 = \mathbb{Q}^+ = \{x|x > 0\}$

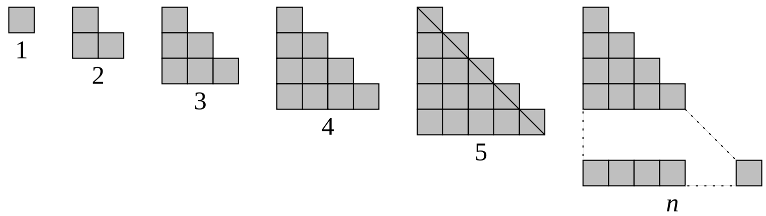
(b) $D_2 = \mathbb{N}$

(c) $x - |x| = \begin{cases} 0 & \text{für } x \geqq 0 \\ 2x & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad D_3 = \mathbb{Q}^- = \{x|x < 0\}$

(d) $D_4 = \{\,\}$

8. Die Flächen der folgenden Figuren sind

$$A(1) = 1, \quad A(2) = 1 + 2 = 3, \quad A(3) = 1 + 2 + 3 = 6 \quad \text{usw.}$$



(a) Suche mit Hilfe geometrischer Überlegungen einen Term zur Berechnung von $A(n)$.

(b) Berechne $A(10)$, $A(100)$ und $A(5000)$.

(c) Berechne die Sume $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 9999$.

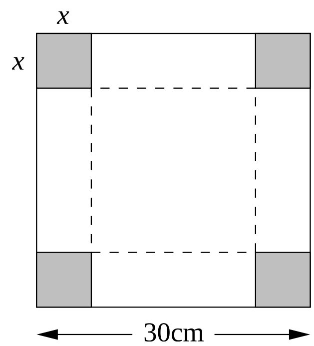
Lösung: (a) Ein halbes Quadrat mit der Seitenlänge n plus n halbe Quadrate mit der Seitenlänge 1:

$$A(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

(b) $A(10) = 55, \quad A(100) = 5050, \quad A(5000) = 12\,502\,500$

(c) $A(9999) = \dfrac{9999 \cdot 10000}{2} = 49\,995\,000$

9. Von einem quadratischen Stück Pappe mit der Seitenlänge 30 cm werden an den Ecken vier Quadrate mit der Seitenlänge x abgeschnitten. Die entstehenden Rechtecke werden entlang der gestrichelten Linien gefaltet, so dass eine quaderförmige Schachtel entsteht.



(a) Stelle einen Term $V(x)$ für das Volumen der Schachtel auf.

(b) Welche Definitionsmenge D_V ist für diesen Term sinnvoll? Begründe deine Wahl!

(c) Berechne den Wert des Terms $V(x)$ für $x = 0$, $x = 3\,\text{cm}$, $x = 6\,\text{cm}$, $x = 9\,\text{cm}$, $x = 12\,\text{cm}$ und $x = 15\,\text{cm}$. Veranschauliche diese Werte in einem Koordinatensystem mit einer waagrechten x-Achse ($x = 1\,\text{cm}$ entspricht einem Kästchen und $V = 100\,\text{cm}^3$ entspricht einem Käschen).

(d) Suche den x-Wert, für den $V(x)$ maximal wird. Wie groß ist das maximale Volumen der Schachtel? Ergänze das gezeichnete Diagramm mit diesem Wert.

Lösung:

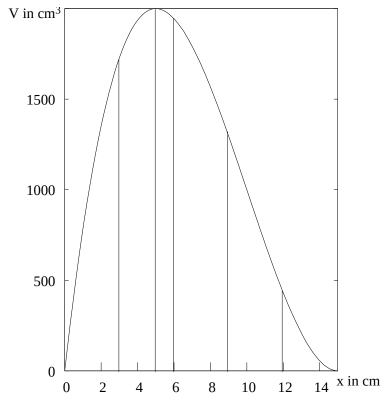
(a) $V(x) = (30\,\text{cm} - x)^2 \cdot x$

(b) $D_V = \{\, x \,|\, 0 \leqq x \leqq 15\,\text{cm}\}$

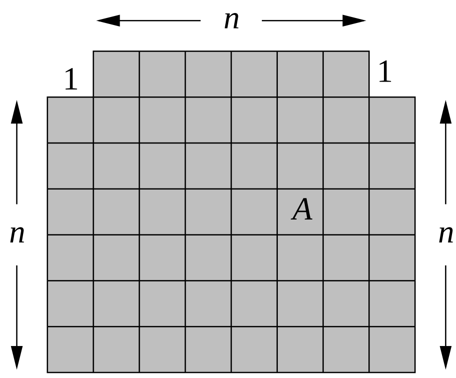
(c)

$\frac{x}{\text{cm}}$	0	3	6	9	12	15
$\frac{V(x)}{\text{cm}^3}$	0	1728	1944	1296	432	0

(d) maximaler Wert: $V(5\,\text{cm}) = 2000\,\text{cm}^3$



10. Nebenstehende Abbildung zeigt die zu untersuchende Figur für $n = 6$. Stelle einen Term $A(n)$ für die Fläche der Figur auf. Erläutere in einem Satz und durch eine ausführlich beschriftete Zeichnung, wie dieser Term zustande kommt.
Berechne $A(7)$, $A(20)$ und $A(99)$.



Lösung: „Rechteck mit den Seitenlängen $n+1$ und $n+2$ minus zwei kleine Quadrate mit der Fläche 1“

oder

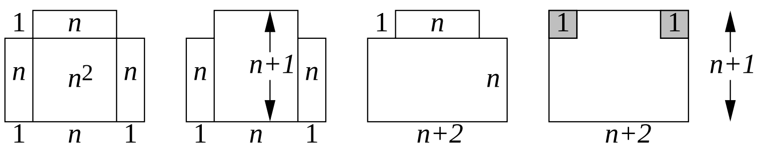
„Rechteck mit den Seitenlängen n und $n+2$ plus Rechteck mit den Seitenlängen n und 1“

oder

„Rechteck mit den Seitenlängen n und $n+1$ plus zwei Rechtecke mit den Seitenlängen n und 1“

oder

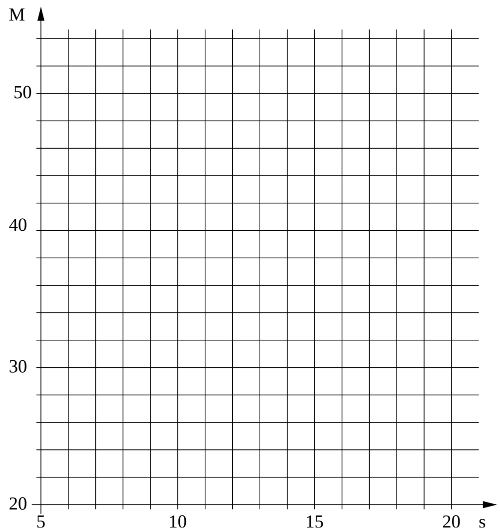
„Quadrat mit der Seitenlänge n plus drei Rechtecke mit den Seitenlängen n und 1“



$$A(n) = (n+1)(n+2) - 2 = n(n+2) + n = n(n+1) + 2n = n^2 + 3n$$

$$A(7) = 70, \qquad A(20) = 460, \qquad A(99) = 100 \cdot 101 - 2 = 10098$$

11. Mutter und Sohn haben heute Geburtstag. Die Mutter sagt zu ihrem Sprössling: „Ich bin heute genau dreimal so alt, wie du es vor zwei Jahren warst.“



   (a) Stelle einen Term $M(s)$ auf, der das jetzige Alter der Mutter in Abhängigkeit vom jetzigen Alter s des Sohnes angibt. Berechne den Wert des Terms dann für $s = 10$, $s = 15$ und $s = 20$ (alle Angaben in Jahren). Zeichne die Werte in nebenstehendes Diagramm und überprüfe, ob die drei Punkte auf einer Geraden liegen.

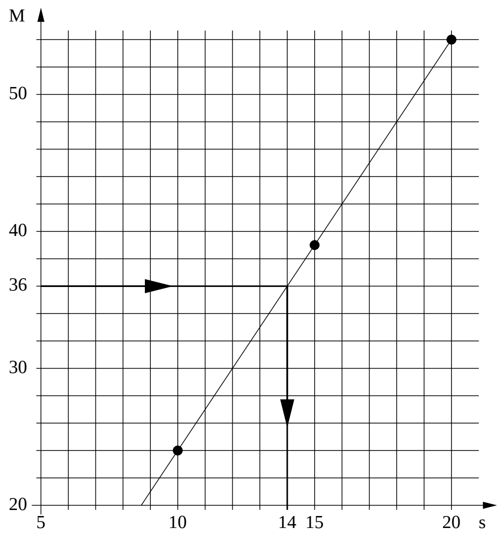
   (b) Die Mutter verrät, dass sie heute 36 Jahre alt ist. Ermittle in nachvollziehbarer Weise (zusätzliche Beschriftung, farbige Linien, aber nicht rot!) mit Hilfe des Diagramms das Alter des Sohnes und überprüfe diesen Wert durch Rechnung.

Lösung:

(a) $M(s) = 3(s-2) = 3s-6$

$M(10) = 24$, $M(15) = 39$, $M(20) = 54$

(b) $M(14) = 36$



12. Forme in möglichst einfache Terme um:

   (a) $2x \cdot (-6x) + 12x - 5x^2 - (-2) \cdot (-7x)$

   (b) $(2a)^3 + (-2a)^2 \cdot 3a + (-3a)^3$

   (c) $\left(\frac{z}{4}\right)^2 - \frac{z^2}{4} + \frac{z^2}{-8} + 3z : \left(-\frac{16}{z}\right)$

Lösung: (a) $-12x^2 - 5x^2 + 12x - 14x = -17x^2 - 2x$

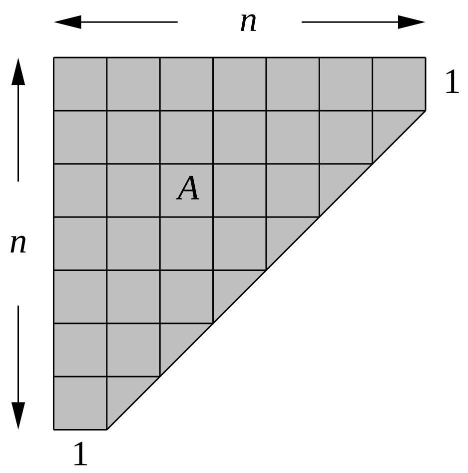
(b) $8a^3 + 12a^3 - 27a^3 = -7a^3$

(c) $\frac{z^2}{16} - \frac{z^2}{4} - \frac{z^2}{8} - \frac{3z^2}{16} = \frac{z^2 - 4z^2 - 2z^2 - 3z^2}{16} = \frac{-8z^2}{16} = -\frac{z^2}{2}$

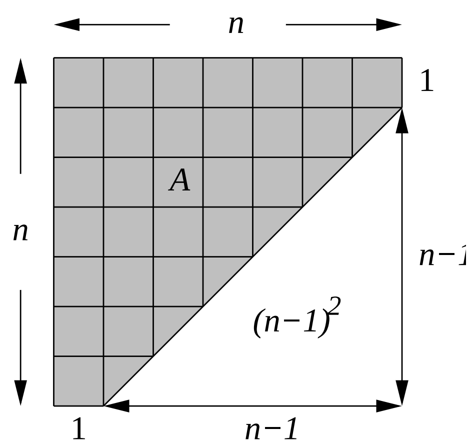
13. Berechne die Definitionsmenge D des Terms $T(x) = \frac{3x+4}{2x-7}$ und die Termwerte $T(0)$, $T(-1)$ und $T\left(\frac{11}{3}\right)$.

Lösung: $D = \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$, $\quad T(0) = -\frac{4}{7}$, $\quad T(-1) = -\frac{1}{9}$, $\quad T\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{11+4}{\frac{22}{3} - \frac{21}{3}} = 3 \cdot 15 = 45$

14. Nebenstehende Abbildung zeigt die zu untersuchende Figur für $n = 7$. Stelle einen Term $A(n)$ für die Fläche der Figur auf. Erläutere in einem Satz und durch eine ausführlich beschriftete Zeichnung, wie dieser Term zustande kommt.
Berechne $A(7)$, $A(30)$ und $A(101)$.



Lösung: „Quadrat mit der Seitenlänge n minus halbes Quadrat mit der Seitenlänge $n-1$.“



$$A(n) = n^2 - \frac{1}{2} \cdot (n-1)^2$$

$A(7) = 49 - \frac{36}{2} = 31$

$A(30) = 900 - \frac{841}{2} = 479{,}5$

$A(101) = 10201 - \frac{10000}{2} = 5201$

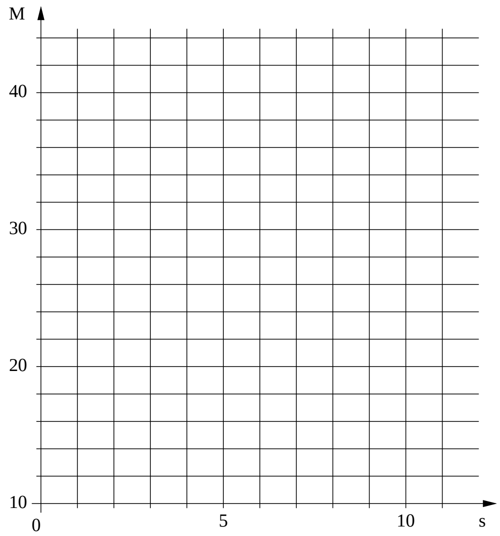
15. (a) $3x \cdot \left(-6x^2\right) + 18x^2 - 7x^3 - (-2x^2)^2 : \frac{-x}{3}$

(b) $\left(\frac{a}{6}\right)^2 - \frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{-12} + 9a : \left(-\frac{27}{a}\right)$

Lösung: (a) $-18x^3 + 18x^2 - 7x^3 + 12x^3 = 18x^2 - 13x^3$

(b) $\frac{a^2}{36} - \frac{a^2}{9} - \frac{a^2}{12} - \frac{3a^2}{9} = \frac{a^2 - 4a^2 - 3a^2 - 12a^2}{36} = -\frac{18a^2}{36} = -\frac{a^2}{2}$

16. Mutter und Sohn haben heute Geburtstag. Die Mutter sagt zu ihrem Sprössling: „Ich war heute vor drei Jahren genau fünfmal so alt, wie du es vor drei Jahren warst.“



(a) Stelle einen Term $M(s)$ auf, der das jetzige Alter der Mutter in Abhängigkeit vom jetzigen Alter s des Sohnes angibt. Berechne den Wert des Terms dann für $s = 5$, $s = 7$ und $s = 10$ (alle Angaben in Jahren). Zeichne die Werte in nebenstehendes Diagramm und überprüfe, ob die drei Punkte auf einer Geraden liegen.

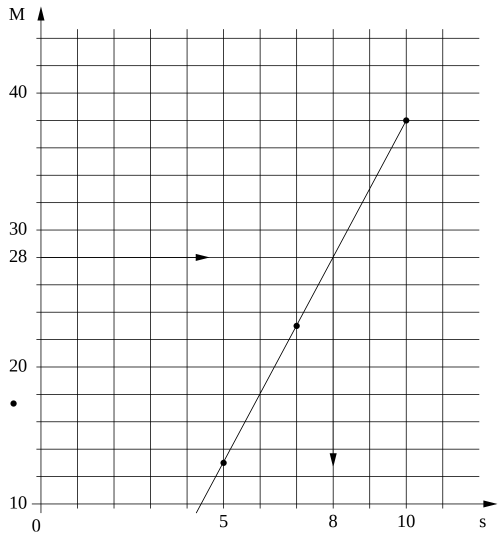
(b) Die Mutter verrät, dass sie heute 28 Jahre alt ist. Ermittle in nachvollziehbarer Weise (zusätzliche Beschriftung, farbige Linien, aber nicht rot!) mit Hilfe des Diagramms das Alter des Sohnes und überprüfe diesen Wert durch Rechnung.

Lösung:

(a) $M(s) = 5(s - 3) + 3 = 5s - 12$

$M(5) = 13$, $M(7) = 23$, $M(10) = 38$

(b) $M(8) = 5 \cdot 8 - 12 = 28$



17. Berechne die Definitionsmenge D des Terms $T(x) = \frac{5 - x}{|x| - 2}$ und die Termwerte $T(0)$, $T(-1)$ und $T\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Lösung: $D = \mathbb{Q}\setminus\{-2;2\}$, $\quad T(0) = -\dfrac{5}{2}$, $\quad T(-1) = -6$, $\quad T\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{5+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-2} = -\dfrac{16}{5} = -3{,}2$

18. Vereinfache so weit wie möglich:

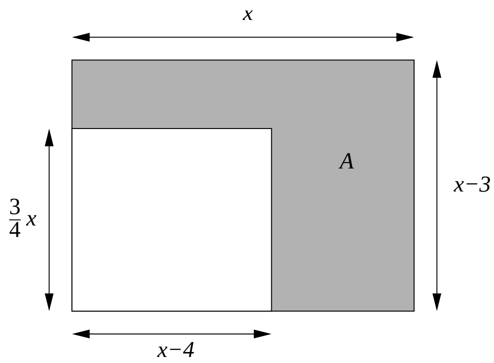
    (a) $x(x-1) - x(x+1)$

    (b) $x^2\left(a - \dfrac{x}{2}\right) - x\left(ax - \dfrac{x^2}{3}\right)$

Lösung: (a) $x^2 - x - x^2 - x = -2x$

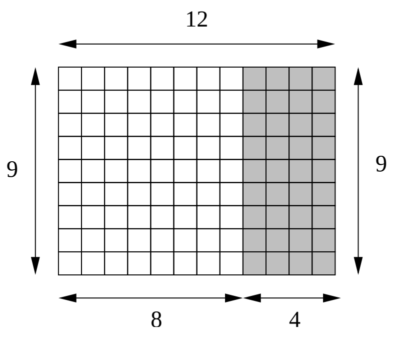
(b) $ax^2 - \dfrac{x^3}{2} - ax^2 + \dfrac{x^3}{3} = \dfrac{-3x^3 + 2x^3}{6} = \dfrac{-x^3}{6} = -\dfrac{x^3}{6}$

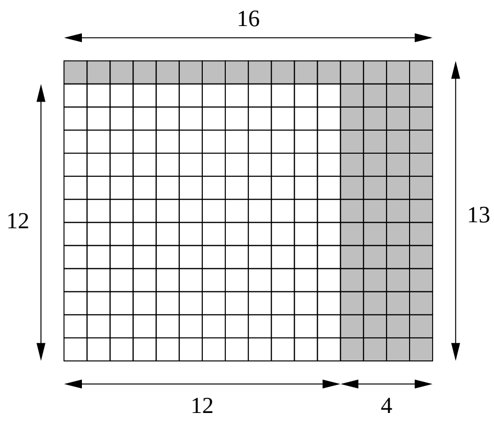
19. Stelle den Term $A(x)$ für die schraffierte Fläche in nebenstehender Figur auf und vereinfache ihn so weit wie möglich.
    Berechne $A(12)$ und $A(16)$.
    Zeichne die Figur einmal für $x = 12$ und einmal für $x = 16$ (Einheit: ein Kästchen). Für welche $x \in \mathbb{Q}$ kann die Figur in der angegebenen Weise gezeichnet werden? Begründe deine Antwort.



Lösung: $A(x) = x(x-3) - \dfrac{3}{4}x(x-4) = x^2 - 3x - \dfrac{3}{4}x^2 + 3x = \dfrac{1}{4}x^2$

$A(12) = \dfrac{12^2}{4} = \dfrac{144}{4} = 36$, $\quad A(16) = \dfrac{16^2}{4} = \dfrac{256}{4} = 64$





Die Figur ist nur für $x \geqq 12$ zeichenbar, da sonst $\frac{3}{4}x > x - 3$ wäre.

20. Vereinfache: (a) $(-1)^7$ (b) $(-1)^{1234}$ (c) $(-x)^2$ (d) $(-x)^9$
(e) $(-2b)^5$ (f) $(-3z)^4$ (g) $-(-5c)^3$ (h) $-(-5e)^4$

Lösung: (a) -1 (b) 1 (c) x^2 (d) $-x^9$
(e) $-32b^5$ (f) $81z^4$ (g) $125c^3$ (h) $-625e^4$

21. Vereinfache: (a) $(-a)^3 - a^3 - (-a)^2 - a^2$ (b) $(-a)^3 \cdot a^3 \cdot (-a)^2 \cdot (-a^2)$
(c) $x^2(-x)^2 \cdot 2(-x)^4 x(-x)^3$ (d) $x^2(-x)^2 - 2(-x)^4 - x(-x)^3$
(e) $a(-a)^n(-a)^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$ (f) $a(-a)^n + (-a)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$

Lösung: (a) $-a^3 - a^3 - a^2 - a^2 = -2a^3 - 2a^2$
(b) $\left(-a^3\right) \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot (-a^2) = a^{10}$
(c) $x^2x^2 \cdot 2x^4x\left(-x^3\right) = -2x^{12}$
(d) $x^4 - 2x^4 - x\left(-x^3\right) = x^4 - 2x^4 + x^4 = 0$
(e) Wenn n gerade ist, ist $n-1$ ungerade, wenn n ungerade ist, ist $n-1$ gerade, d.h. eine der beiden Potenzen $(-1)^n$ oder $(-1)^{n-1}$ ist -1, die andere ist 1:
$a(-a)^n(-a)^{n-1} = a(-1)^n a^n (-1)^{n-1} a^{n-1} = -a^{2n}$
(f) $a(-a)^n + (-a)^{n+1} = a(-1)^n a^n + (-1)^{n+1} a^{n+1} = (-1)^n a^{n+1} - (-1)^n a^{n+1} = 0$

22. Fasse zusammen:

(a) $5am^2 - 5am - 5a^2m - 2m \cdot 3a + (-5a) \cdot (-3am) - 2a \cdot 2m \cdot 2m$

(b) $\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2} - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}$

(c) $\dfrac{1}{5}x \cdot 3y - \dfrac{x}{3} \cdot 0{,}3x - \dfrac{y}{7} \cdot 1{,}1y - 0{,}6xy + x^2 : 10 - y^2 : 7$

Lösung: (a) $5am^2 - 5am - 5a^2m - 6am + 15a^2m - 8am^2 = -3am^2 - 11am + 10a^2m$
(b) $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right)x^2 + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\right)x - \dfrac{3}{2} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{1}{6}x - \dfrac{13}{6}$
(c) $0{,}6xy - 0{,}1x^2 - \dfrac{1{,}1y^2}{7} - 0{,}6xy + 0{,}1x^2 - \dfrac{y^2}{7} = -\dfrac{2{,}1y^2}{7} = -0{,}3y^2$

23. Multipliziere aus und fasse zusammen:

(a) $x(x-1) - x(x+1) - x(-x-1)$

(b) $(-2u)(u-2y) - 2y(u+y)$

(c) $\dfrac{e}{4}\left(-2e - \dfrac{5}{2}f\right) - \dfrac{f}{4}\left(\dfrac{3}{2}e - 8\right) - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{e^2}{2} - 4f\right)$

Lösung: (a) $x^2 - x - x^2 - x + x^2 + x = x^2 - x$
(b) $-2u^2 + 4uy - 2uy - 2y^2 = -2u^2 + 2uy - 2y^2$
(c) $-\frac{e^2}{2} - \frac{5ef}{8} - \frac{3ef}{8} + 2f + \frac{e^2}{4} - 2f = -\frac{e^2}{4} - ef$

24. Klammere den in eckigen Klammern stehenden Term aus:
(a) $12x^3 - 9x^2y + 18xy^2, \quad [3x]$ (b) $u^5 - u^4 + u^3, \quad [u^3]$
(c) $12x^3 - 9x^2y + 18xy^2, \quad [12x^3]$ (d) $u^5 - u^4 + u^3, \quad [u^5]$
(e) $\frac{x^2}{8} - \frac{xy}{12} - \frac{x}{4}, \quad \left[\frac{x}{4}\right]$ (f) $8z^3 - 4z^2 + 2z, \quad [2z]$
(g) $\frac{x^2}{8} - \frac{xy}{12} - \frac{x}{4}, \quad \left[-\frac{x}{24}\right]$ (h) $8z^3 - 4z^2 + 2z, \quad [8z^3]$

Lösung: (a) $3x(4x^2 - 3xy + 6y^2)$ (b) $u^3(u^2 - u + 1)$
(c) $12x^3\left(1 - \frac{3y}{4x} + \frac{3y^2}{2x^2}\right)$ (d) $u^5\left(1 - \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}\right)$
(e) $\frac{x}{4}\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3} - 1\right)$ (f) $2z(4z^2 - 2z + 1)$
(g) $-\frac{x}{24}(-3x + 2y + 6)$ (h) $8z^3\left(1 - \frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^2}\right)$

25. Klammere so viel wie möglich aus, ohne dass ein Bruch entsteht:
(a) $36x^3y^2 - 54x^4y + 72x^3y^3$ (b) $32u^5 - 64u^6 - 16u^3$
(c) $-a^2b^2c^4 + a^3b^2c^5 - a^3b^3c^3$ (d) $84axy - 126ayz + 210bay$

Lösung: (a) $18x^3y(2y - 3x + 4y^2)$ (b) $16u^3(2u^2 - 4u^3 - 1)$
(c) $a^2b^2c^3(-c + ac^2 - ab)$ (d) $42ay(2x - 3z + 5b)$

26. Klammere so aus, dass in der Klammer kein Bruch mehr steht:
(a) $\frac{x}{4} - \frac{y}{2} - \frac{z}{8}$ (b) $\frac{ab^2}{3} + \frac{a^2b}{2} - \frac{ab}{6}$
(c) $\frac{rs}{7} + \frac{rt}{3} + \frac{st}{11}$ (d) $\frac{3a^3}{70} - \frac{4a^2}{63} + \frac{3a^4}{35}$

Lösung: (a) $\frac{1}{8}(2x - 4y - z)$ (b) $\frac{ab}{6}(2b + 3a - 1)$
(c) $\frac{1}{231}(33rs + 77rt + 21st)$ (d) $\frac{a^2}{630}(27a - 40 + 54a^2)$

27. Multipliziere aus:

(a)	$(2a-3b)(3a-2b)$	(b)	$(1-a)(1-b)(1-c)$
(c)	$(x-ay)(ax-y)$	(d)	$(1-x)^2(1+x)$
(e)	$(u-w)^2(u+w)^2$	(f)	$(1-x)(2-x)(3-x)$
(g)	$\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)(2x-3y)$	(h)	$\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}\right)$

Lösung:

(a)	$6a^2-13ab+6b^2$	(b)	$1-a-b-c+ab+ac+bc-abc$
(c)	$ax^2-a^2xy-xy+ay^2$	(d)	$1-x-x^2+x^3$
(e)	$u^4-2u^2w^2+w^4$	(f)	$6-11x+6x^2-x^3$
(g)	$x^2-\frac{13}{6}xy+y^2$	(h)	$1-\frac{x^4}{16}$

28. **Das Steuermodell von Kirchhoff (2005)**

Vom gesamten Jahreseinkommen einer Familie werden pro Person 8000 € Freibetrag abgezogen, vom Rest sind 25% Steuern zu zahlen.

Der effektive Steuersatz gibt an, wieviel Prozent des Einkommens die Steuern ausmachen. Gesucht ist ein Term $e(x,n)$, der den effektiven Steuersatz aus dem Monatseinkommen x und der Zahl n der Personen in der Familie berechnet.

Berechne den effektiven Steuersatz für die Monatseinkommen 1000 €, 2000 €, 4000 €, 6000 €, 8000 € und 10 000 €jeweils für eine, zwei, drei und vier Personen in der Familie. Stelle die Ergebnisse übersichtlich in einer Tabelle dar und veranschauliche sie in einer Grafik.

Lösung: Das Jahreseinkommen ist $12x$, die zu zahlenden Steuern pro Jahr sind

$$s = 25\% \cdot (12x - n \cdot 8000)$$

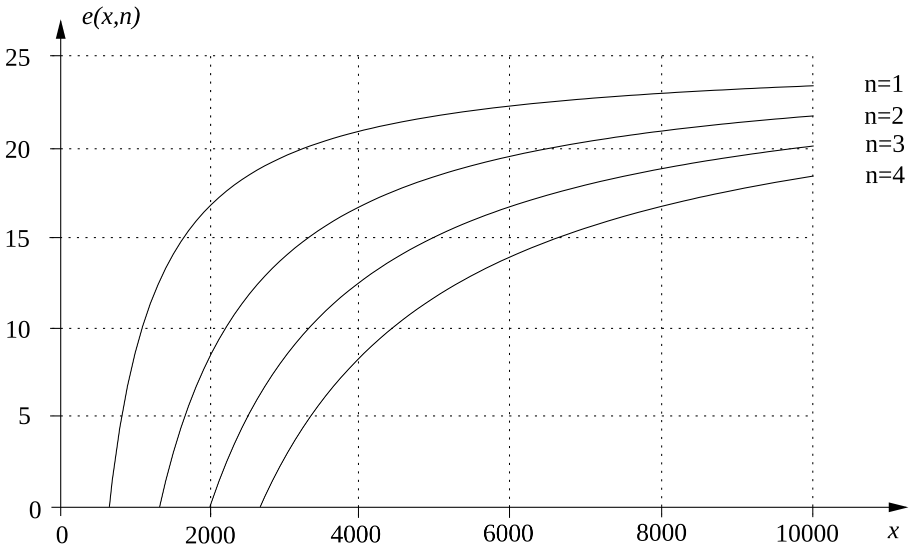
$$e = \frac{s}{12x} = 25\% \cdot \frac{12x - 8000n}{12x} = 25\% \cdot \left(1 - \frac{2000n}{3x}\right)$$

Diese Formel gilt nur, wenn $12x > 8000n$ ist, für $12x \leqq 8000n$ zahlt man keine Steuern:

$$\boxed{e(x,n) = \begin{cases} 25\% \cdot \left(1 - \frac{2000n}{3x}\right) & \text{für } x > \frac{2000n}{3} \\ 0 & \text{für } x \leqq \frac{2000n}{3} \end{cases}}$$

Die folgende Wertetabelle gibt den effektiven Steuersatz in Prozent an:

x	1000	2000	4000	6000	8000	10000
$n=1$	8,3	16,7	20,8	22,2	22,9	23,3
$n=2$	0	8,3	16,7	19,4	20,8	21,7
$n=3$	0	0	12,5	16,7	18,8	20,0
$n=4$	0	0	8,3	13,9	16,7	18,3



29. Multipliziere aus und fasse zusammen: $\left(\frac{a}{2}-1\right)\left(\frac{a}{2}+1\right)+\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{a}{2}\right)$

Lösung: $\frac{a^2}{4}-1+\frac{1}{8}-\frac{a^2}{2}=-\frac{a^2}{4}-\frac{7}{8}$

30. Multipliziere aus und fasse zusammen: $\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}+b\right)+\left(1+\frac{b}{2}\right)\left(\frac{b}{4}-\frac{1}{2}\right)$

Lösung: $\frac{1}{4}-b^2+\frac{b^2}{8}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}-\frac{7}{8}b^2$

31. Klammere soviel wie möglich aus und zwar so, dass in der Klammer kein Bruch mehr steht:

$$\frac{1}{3}u^3w^4-\frac{1}{8}u^3w^3+u^2w^3$$

Lösung: $\frac{u^2w^3}{24}(8uw-3u+24)$

32. Klammere soviel wie möglich aus und zwar so, dass in der Klammer kein Bruch mehr steht:

$$\frac{1}{4}a^4b^5-\frac{1}{14}a^4b^3-a^3b^4$$

Lösung: $\dfrac{a^3b^3}{28}(7ab^2 - 2a - 28b)$

33. Berechne die Lösungsmengen folgender Gleichungen zur jeweils angegebenen Grundmenge:

    (a) $17x - 13 = 22x + 7, \quad G = \mathbb{Q}$

    (b) $x - \dfrac{1}{4} = \dfrac{x}{7} + \dfrac{5}{4}, \quad G = \mathbb{Q}^+$

    (c) $13(x - x) = \dfrac{1}{x}, \quad G = \mathbb{N}$

    (d) $7(x - x) = 3 - \dfrac{21}{7}, \quad G = \mathbb{Z}$

    (e) $(x - 3)(x + 5) = 0, \quad G = \mathbb{Z}$

Lösung: (a) $-5x = 20, \quad x = -4 \in G \quad \Longrightarrow \quad L = \{-4\}$

(b) $\dfrac{6}{7}x = \dfrac{6}{4}, \quad x = \dfrac{6}{4} : \dfrac{6}{7} = \dfrac{7}{4} = 1{,}75 \in G \quad \Longrightarrow \quad L = \{1{,}75\}$

(c) $0 = \dfrac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad L = \{\}$

(d) $0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad L = G = \mathbb{Z}$

(e) $x - 3 = 0$ oder $x + 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad L = \{-5; 3\}$

34. Berechne die Lösungsmengen folgender Gleichungen zur jeweils angegebenen Grundmenge:

    (a) $27x - 35 = 34x - 18, \quad G = \mathbb{Z}$

    (b) $x - \dfrac{1}{7} = \dfrac{8}{7} - \dfrac{x}{8}, \quad G = \mathbb{Q}^+$

    (c) $4x - 3 - 7x = 11 - 3x - 14, \quad G = \mathbb{N}$

    (d) $x^2 = -9, \quad G = \mathbb{Q}$

    (e) $(x + 4)(x - 1)(x - 2) = 0, \quad G = \mathbb{N}$

Lösung: (a) $-7x = 17, \quad x = -\dfrac{17}{7} \notin G \quad \Longrightarrow \quad L = \{\,\}$

(b) $\dfrac{9}{8}x = \dfrac{9}{7}, \quad x = \dfrac{9}{7} : \dfrac{9}{8} = \dfrac{8}{7} \in G \quad \Longrightarrow \quad L = \left\{\dfrac{8}{7}\right\}$

(c) $-3 - 3x = -3 - 3x \quad \Longrightarrow \quad L = G = \mathbb{N}$

(d) $x^2 \geqq 0$ für alle $x \quad \Longrightarrow \quad L = \{\,\}$

(e) $x = -4$ oder $x = 1$ oder $x = 2 \quad \Longrightarrow \quad L = \{1; 2\}$

35. Eine Seite eines Rechtecks hat die fünffache Länge der anderen Seite, der Umfang des Rechtecks ist 30 cm. Stelle den Sachverhalt in Form einer Gleichung dar und berechne die Seitenlängen des Rechtecks.

Lösung: 1. Seite: x, 2. Seite: $5x$

$$\begin{aligned} 2\cdot(x+5x) &= 30 \\ 12x &= 30 \\ x &= \frac{30}{12} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \end{aligned} \tag{14.1}$$

Die Seitenlängen sind 2,5 cm und 12,5 cm.

36. Die Mutter ist fünfmal so alt wie ihre Tochter. Der Opa ist zehnmal so alt wie die Tochter und lebt schon um 28 Jahre mehr als Mutter und Tochter zusammen. Stelle eine Gleichung auf und berechne das Alter der drei Personen.

Lösung: x ist das Alter der Tochter.

$$\begin{aligned} x+5x+28 &= 10x \\ 28 &= 10x - x - 5x \\ 28 &= 4x \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Tochter: 7 a Mutter: 35 a Opa: 70 a

37. (a) Schreiben Sie die Formel für die Definition der Ableitung einer Funktion f an der Stelle x hin. Erläutern Sie die in der Formel vorkommenden Begriffe an Hand einer beschrifteten Skizze.
    (b) Verwenden Sie die Definition der Ableitung, um die Ableitung von $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ zu berechnen.

Lösung: (a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

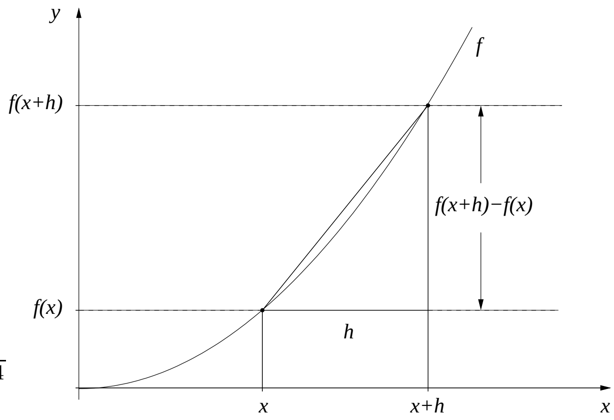
(b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-2xh-h^2}{h\,x^2\,(x+h)^2} == \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-(2x-h)}{x^2\,(x+h)^2} = -\dfrac{2}{x^3}$

38. (a) Schreiben Sie die Formel für die Definition der Ableitung einer Funktion f an der Stelle x hin. Erläutern Sie die in der Formel vorkommenden Begriffe an Hand einer beschrifteten Skizze.
    (b) Verwenden Sie die Definition der Ableitung, um die Ableitung von $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ zu berechnen.

Lösung:

(a) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

(b)
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^3} - \frac{1}{x^3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-3x^2h - 3xh^2 - h^3}{h\,x^3\,(x+h)^3} = \lim_{h\to 0} \frac{-(3x^2+3xh+h^2)}{x^3\,(x+h)^3} = -\frac{3}{x^4}$$



39. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

mit Hilfe der Definition der Ableitung und weisen Sie nach, dass die Formel für die Ableitung von x^n somit auch für $n = -\frac{1}{2}$ gilt.

Lösung:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+h})(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})} = \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})} = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{1\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})} =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x})} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

Mit $(x^n)' = nx^{n-1}$ und $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ folgt

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

40. Berechnen Sie für die Funktion

$$g\ :\ x \to g(x) \quad \text{mit} \quad g(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$$

die Ableitung und den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} g(x)$.

Tipp für den Grenzwert: Substitution!

Lösung: $g'(x) = \sin\frac{1}{x} + x\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$

$x = \frac{1}{u} \quad\Longrightarrow\quad \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$

41. Wir betrachten die Funktion $f\,:\,x\,\to\,f(x)$ mit

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

(a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge D_f und untersuchen Sie f auf Nullstellen.

(b) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs.

(c) Berechnen Sie die Ableitung von f und vereinfachen Sie so weit wie möglich. Berechnen Sie auch den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$.

(d) Skizzieren Sie den Graphen von f in geeignet gewählten Einheiten im Intervall $x\in[0\,;\,9]$.

Lösung: (a) $D_f = \mathbb{R}_0^+\setminus\{4\}$; die Nullstelle des Zählers ist $4\notin D_f$, d.h. keine NS.

(b) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim\limits_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+2} = 0^+$; $f(0) = \frac{1}{2}$

(c) Zuerst $f(x)$ umformen: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$

$f'(x) = -\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+2)^2} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2}$

oder direkt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-4)\frac{1}{2\sqrt{x}} - (\sqrt{x}-2)}{(x-4)^2} = -\frac{x-4\sqrt{x}+4}{2\sqrt{x}(x-4)^2} = \\ &= -\frac{(\sqrt{x}-2)^2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^2(\sqrt{x}+2)^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2} \end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\infty$

42. Wir betrachten die Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = \frac{1}{x}$.

(a) Berechnen Sie den Funktionsterm $t(x)$ der Tangente an G_f im Punkt $P\left(a\,|\,f(a)\right)$. Wo schneidet die Tangente die Koordinatenachsen?

(b) $s(x)$ ist der Funktionsterm der Tangente an G_f im Punkt $Q\left(\frac{1}{a}\,\middle|\,f\left(\frac{1}{a}\right)\right)$. Berechnen Sie $s(x)$ mit Hilfe des Ergebnisses von Teilaufgabe (a). Wie lauten die Koordinaten des Schnittpunktes $S(x_s|y_s)$ von t und s?

(c) Zeichnen Sie den Grafen von f im x-Intervall $]0;4]$ mit der Einheit 2 cm und zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse die Tangenten t und s für $a = 2$ ein. Unter welchem Winkel φ schneiden sich die beiden Tangenten für $a = 2$?

Lösung: (a) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$

$$t(x) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}(x-a) = \frac{2}{a} - \frac{x}{a^2}$$

Schnittpunkte mit den Achsen: $\left(0 \,\middle|\, \frac{2}{a}\right)$ und $(2a\,|\,0)$

(b) a durch $\frac{1}{a}$ in $t(x)$ ersetzen:

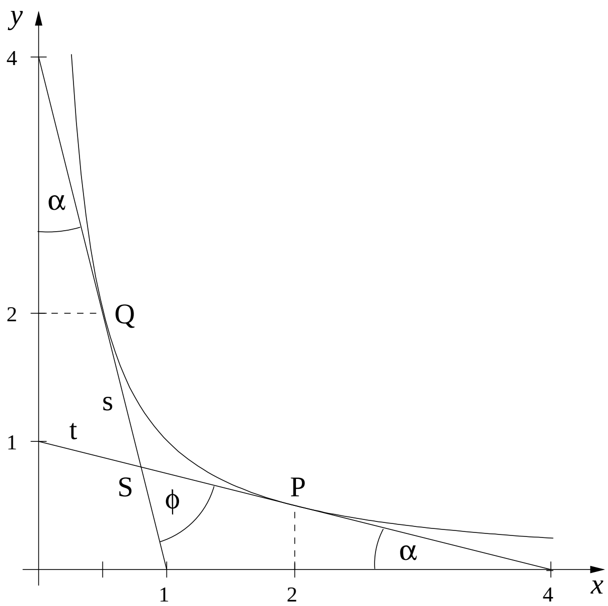
$$s(x) = 2a - a^2x$$

Schnittpunkte mit den Achsen: $(0\,|\,2a)$ und $\left(\frac{2}{a} \,\middle|\, 0\right)$

$$t(x_\mathrm{s}) = s(x_\mathrm{s}) \quad \Longrightarrow \quad x_\mathrm{s} = 2\,\frac{a - \frac{1}{a}}{a^2 - \frac{1}{a^2}} = \frac{2a}{1+a^2}$$

$$y_\mathrm{s} = 2a - a^2x_\mathrm{s} = \frac{2a}{1+a^2} = x_\mathrm{s}$$

(c) $\tan\alpha = \dfrac{\frac{2}{a}}{2a} = \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \approx 14^\circ \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 90^\circ - 2\alpha \approx 62^\circ$



43. Wir betrachten die Funktionen f und g mit den Termen

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{5}{x}$$

(a) Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$.

(b) Berechnen Sie die Scheitelkoordinaten von G_f und schreiben Sie $f(x)$ in der Scheitelform hin.

(c) Erstellen Sie eine Wertetabelle für f und g für alle ganzzahligen x-Werte im Intervall $[-1; 4]$. In welchem Punkt S schneiden sich also f und g? Zeichnen Sie die Grafen von f und g im Intervall $[-1; 4]$ in ein Koordinatensystem. Ergänzen Sie die Wertetabelle in geeigneter Weise.

(d) Stellen Sie die Gleichung $t(x)$ der Tangente an G_g im Punkt S auf. Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunte dieser Tangente mit den Koordinatenachsen an.

(e) Zeichnen Sie die Tangenten an die beiden Funktionsgrafen in S ein und berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Grafen.

Lösung: (a) $f'(x) = x + 1, \quad g'(x) = -\dfrac{5}{x^2}$.

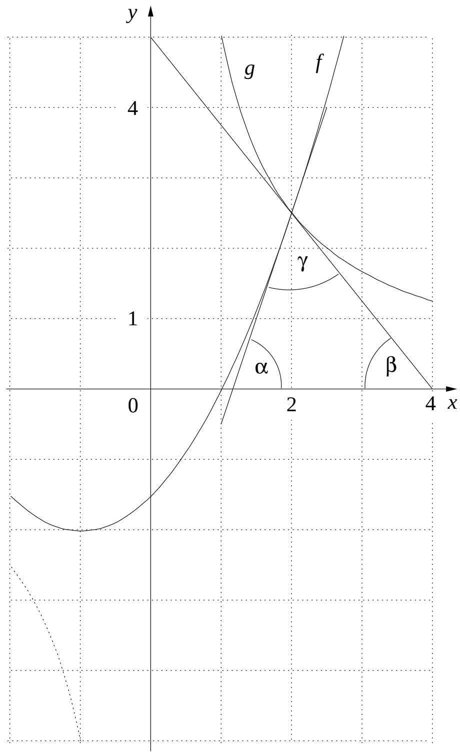
(b) $f'(x_s) = x_s + 1 = 0, \quad x_s = -1, \quad y_s = f(x_s) = -2, \quad f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$

(c)

x	-1	0	1	2	3	4
f	-2	$-1{,}5$	0	$2{,}5$	6	$10{,}5$
g	-5	–	5	$2{,}5$	$1{,}67$	$1{,}25$

x	$-0{,}5$	$0{,}5$	$1{,}5$	$2{,}5$
f	$-1{,}875$	$-0{,}875$	$1{,}125$	$4{,}125$
g	-10	10	$3{,}33$	2

Schnittpunkt: S (2 | 2,5)



(d) $g'(2) = -\frac{5}{4}, \quad t(x) = -\frac{5}{4}x + b$

$S \in t: \quad t(2) = g(2) = \frac{5}{2} = -\frac{5}{4} \cdot 2 + b$

$\Longrightarrow \quad b = 5, \quad t(x) = -\frac{5}{4}x + 5$

Schnittp. mit Achsen: (0|5) und (4|0)

(e) $\tan\beta = |g'(2)| = 1{,}25, \quad \beta = 51{,}34°$

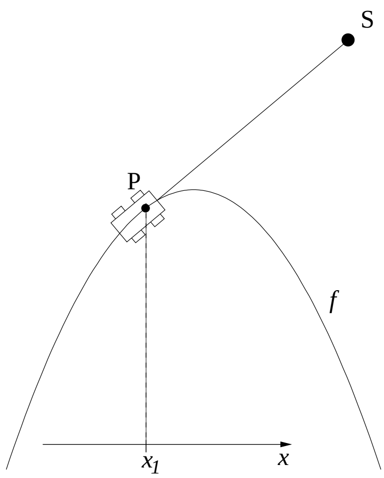
$\tan\alpha = f'(2) = 3, \quad \alpha = 71{,}57°$

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 57{,}1°$

44. Ein Auto fährt (in Richtung größer werdender x-Werte) entlang einer Straße, deren Verlauf durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$$

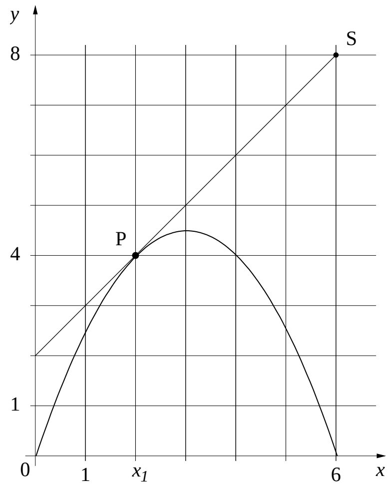
gegeben ist. Wo befindet sich der Wagen (Punkt $\mathrm{P}\,(\,x_1\,|\,f(x_1)\,)$), wenn seine Scheinwerfer, deren Strahl immer tangential zur Straße verläuft, gerade das alte Schloss am Ort $\mathrm{S}\,(\,6\,|\,8\,)$ erhellen? Zeichnung und Rechnung!



Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{8-f(x_1)}{6-x_1} &= f'(x_1) = -x_1 + 3\\
8 - f(x_1) &= (6-x_1)(-x_1+3)\\
8 + \frac{x_1^2}{2} - 3x_1 &= 18 - 9x_1 + x_1^2\\
\frac{x_1^2}{2} - 6x_1 &= -10\\
x_1^2 - 2\cdot 6x_1 + 6^2 &= 36 - 20 = 16\\
x_1 &= 6 \pm 4
\end{aligned}$$

$x_1 = 2$ (bei $x_1 = 10$ zeigen die Rückstrahler zum Schloss), also $\mathrm{P}\,(\,2\,|\,4\,)$.



45. (a) Zeichnen Sie die Grafen der Funktionen f und g mit den Gleichungen

$$f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g(x) = 10\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

im x-Intervall [0,45; 0,65] (Einheit: $0{,}1 \mathrel{\widehat{=}} 2\,\mathrm{cm}$, y-Achse von 0,4 bis 0,7). Zeichnen Sie den Scheitel von g ein.

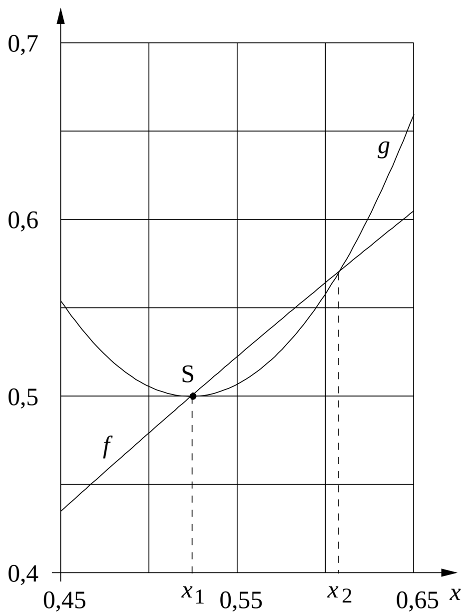
(b) Stellen Sie die Gleichung $t(x)$ der Tangente an f im Punkt $\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{6}\,\middle|\,f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ auf.

(c) Neben $x_1 = \frac{\pi}{6}$ gibt es noch einen zweiten Schnittpunkt von f und g bei $x = x_2$. Berechnen Sie einen Näherungswert x_2^* für x_2, indem Sie nicht g mit f, sondern g mit t schneiden. Wie groß ist der prozentuale Fehler dieser Näherung, wenn auf fünf geltende Ziffern $x_2 = 0{,}60799$ gilt.

Lösung: (a)

x	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65
f	0,435	0,479	0,525	0,565	0,605
g	0,554	0,506	0,507	0,558	0,660

Scheitel von g: S $\left(\frac{\pi}{6}\,\middle|\,\frac{1}{2}\right)$



(b) Mit $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$ und $f'(x) = \cos x$ folgt

$$f(x_1) = \frac{1}{2} \text{ und } f'(x_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\begin{aligned} t(x) &= f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

(c) Aus $g(x) = t(x)$ folgt

$$10\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \quad \Longrightarrow \quad 10\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$10\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = x_2^* = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{20} = 0{,}61020$$

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{x_2^* - x_2}{x_2} = 0{,}364\%$$

46. Für einen Körper, der sich entlang der x-Achse bewegt, gilt

$$x(t) = A \sin \omega t.$$

Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v(t) = \dot{x}(t)$ und die Beschleunigung $a(t) = \ddot{x}(t)$. Drücken Sie $a(t)$ durch $x(t)$ aus.

Lösung: $v(t) = A\omega \cos \omega t, \qquad a(t) = -A\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 \cdot x(t)$

47. (a) Wie lautet die Formel für die lineare Näherung von $f(x+h)$? Erläutern Sie das Zustandekommen dieser Formel an Hand einer vollständig beschrifteten Skizze.

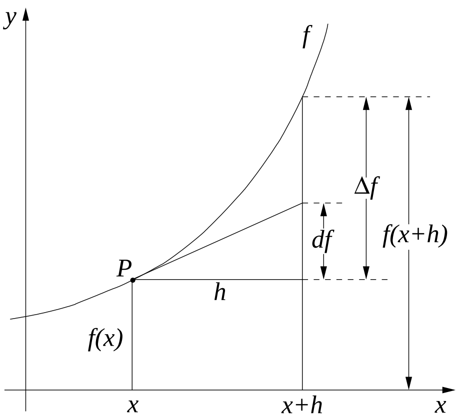
(b) Eine Lichtquelle, die Licht der Frequenz f aussendet, bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ (c ist die Lichtgeschwindigkeit) auf einen Beobachter zu. Der Beobachter registriert dabei Licht der Frequenz

$$f^* = f \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

Weisen Sie unter Verwendung schon bekannter Näherungsformeln nach, dass unter der Voraussetzung $|\beta| \ll 1$ die Näherung $f^* \approx (1+\beta)f$ gilt.

Lösung: (a) Die Tangente an f in $\mathrm{P}\,(\,x\,|\,f(x)\,)$ hat die Steigung $\dfrac{\mathrm{d}f}{h} = f'(x)$. Das Differential $\mathrm{d}f = f'(x)h$ ist für kleine $|h|$ eine gute Näherung für $\Delta f = f(x+h) - f(x)$, d.h.

$$f(x+h) = f(x) + \Delta f \approx f(x) + f'(x)h$$



(b) Mit $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$, $(1+h)^2 \approx 1 + 2h$ und $\dfrac{1}{1+h} \approx 1 - h$ für $|h| \ll 1$ folgt

$$f^* \approx f\frac{1+\frac{\beta}{2}}{1-\frac{\beta}{2}} \approx f\left(1+\frac{\beta}{2}\right)^2 \approx f(1+\beta)$$

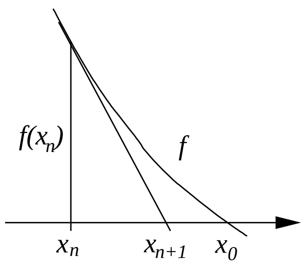
48. (a) Leiten Sie an Hand einer vollständig beschrifteten Skizze her, wie man aus einem Näherungswert x_n für die Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ einen besseren Näherungswert x_{n+1} erhält (Newton-Verfahren).

(b) Gesucht ist die Lösung der Gleichung $\sin x = x^2$ mit zehn geltenden Ziffern. Zeichnen Sie dazu den Grafen der Funktion $f(x) = \sin x - x^2$ (Einheit: $1 \mathrel{\widehat{=}} 5\,\mathrm{cm}$) im x-Intervall $[0; 1{,}2]$ und entnehmen Sie dem Grafen einen geeigneten Startwert x_1 für das Newton-Verfahren.

Lösung: (a) x_n sei ein Näherungswert für die Nullstelle x_0 von f. Die Tangente an f in $\mathrm{P}\,(\,x_n\,|\,f(x_n)\,)$ hat die Steigung

$$f'(x_n) = \frac{0 - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \quad \Longrightarrow$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



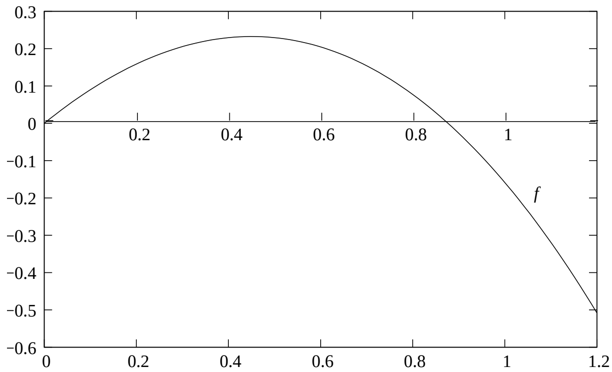
(b) Erste Nullstelle: $x_{01} = 0$

Geeignete Startwerte für die zweite Nullstelle x_{02}:

$x_1 = 1$ oder $x_1 = 0,8$

$f'(x) = \cos x - 2x$

$$x_{x+1} = x_n - \frac{\sin x_n - x_n^2}{\cos x_n - 2x_n}$$



x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$f(x)$	0	0,159	0,229	0,205	0,077	−0,159	−0,508

$x_1 = 1{,}0$	$x_1 = 0{,}8$
$x_2 = 0{,}8913959953$	$x_2 = 0{,}8856378451$
$x_3 = 0{,}8769848448$	$x_3 = 0{,}8768229140$
$x_4 = 0{,}8767262985$	$x_4 = 0{,}8767262271$
$x_5 = 0{,}8767262154$	$x_5 = 0{,}8767262153$
$x_6 = 0{,}8767262154$	$x_6 = 0{,}8767262154$
	$x_7 = 0{,}8767262154$

49. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{x}{2 + \sin x}$$

(a) Beweisen Sie, dass f für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist.

(b) Erstellen Sie eine Wertetabelle in ganzzahligen Schritten und zeichnen Sie den Grafen von f im x-Intervall $[0\,;\,10]$. Entnehmen Sie der Zeichnung, wie viele Nullstellen die Ableitungsfunktion f' in diesem Intervall hat.

(c) Berechnen Sie die Ableitung f' von f.

(d) Berechnen Sie die Nullstelle von f' in der Nähe von $x_0 = 5$ mit dem Newton-Verfahren auf Taschenrechnergenauigkeit.
Unbedingt beachten: „Ein Bruch ist null, wenn ...“.

Lösung: (a) $-1 \leqq \sin x \leqq 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 \leqq 2 + \sin x \leqq 3$, d.h. der Nenner von $f(x)$ kann nie null werden.

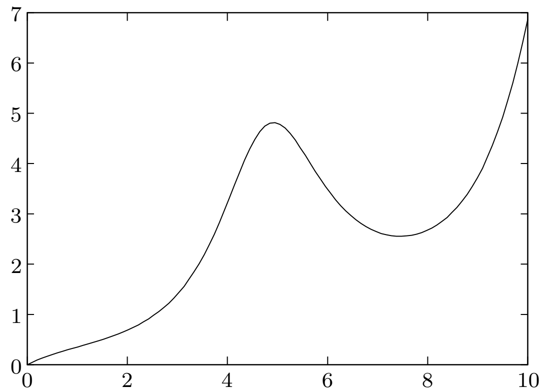
(b)

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	0,352	0,687	1,40

x	4	5	6	7
$f(x)$	3,22	4,80	3,49	2,63

x	8	9	10
$f(x)$	2,67	3,73	6,87

Zwei waagrechte Tangenten, d.h. zwei Nullstellen von f'.



(c) $f'(x) = \dfrac{2 + \sin x - x\cos x}{(2 + \sin x)^2}$

(d) $f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad g(x) = 2 + \sin x - x\cos x = 0$
$g'(x) = \cos x - (\cos x + x(-\sin x)) = x \sin x$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)} = x_k - \frac{2 + \sin x_k - x_k \cos x_k}{x_k \sin x_k}$$

$x_0 = 5,\ x_1 = 4{,}921321169,\ x_2 = 4{,}921526621,\ x_3 = 4{,}921526621$

50. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

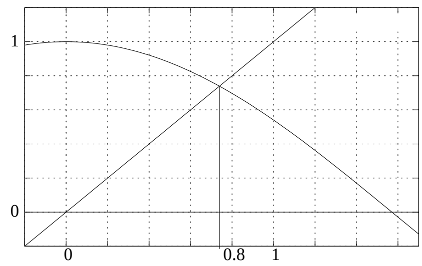
$$f(x) = \frac{\sin x}{x - \cos x}$$

(a) Berechnen Sie mit einem geeigneten Verfahren den Wert x_0, an dem f nicht definiert ist.

(b) Berechnen Sie die Nullstellen von f im x-Intervall $[-4\,;\,4]$, erstellen Sie eine Wertetabelle mit geeigneten Werten und zeichnen Sie den Grafen von f im angegebenen Intervall.

(c) Berechnen Sie die Ableitung f' von f.

Lösung: (a) $n(x) = x - \cos x = 0$ löst man mit dem Newton-Verfahren. Einen geeigneten Startwert findet man z.B., wenn man die Grafen von x und $\cos x$ schneidet: $x_0 = 0{,}8$. $n'(x) = 1 + \sin x \quad \Longrightarrow$



$$x_{k+1} = x_k - \frac{n(x_k)}{n'(x_k)} = x_k - \frac{x_k - \cos x_k}{1 + \sin x_k}$$

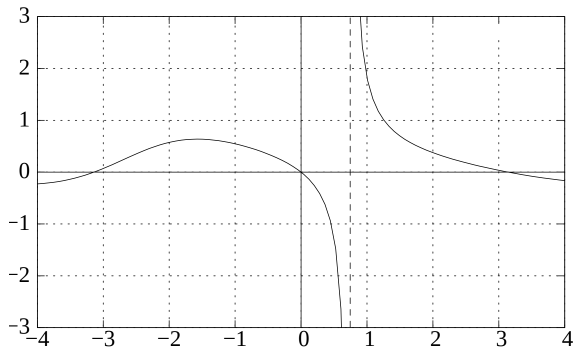
$x_0 = 0{,}8,\ x_1 = 0{,}7398533064,\ x_2 = 0{,}7390852634,\ x_3 = 0{,}7390851332$

(b)

x	-4	-3	-2	-1
$f(x)$	$-0{,}22$	$0{,}07$	$0{,}57$	$0{,}54$

x	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$
$f(x)$	0	$-1{,}27$	$1{,}83$	$0{,}70$

x	2	3	4
$f(x)$	$0{,}38$	$0{,}035$	$-0{,}16$



Nullstellen:

$$x_{01} = -\pi, \quad x_{02} = 0, \quad x_3 = \pi$$

(c) $$f'(x) = \frac{\cos x \cdot (x - \cos x) - \sin x \cdot (1 + \sin x)}{(x - \cos x)^2} = \frac{x \cos x - \sin x - 1}{(x - \cos x)^2}$$

51. Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{3}\,|x| \cdot \left(\frac{1}{3}\,x^2 - x\right) - x$$

(a) Wie lautet die maximale Definitionsmenge von f? Geben Sie eine betragsfreie Darstellung von f an und berechnen Sie die Nullstellen von f. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion an den Rändern von D_f.

(b) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

(c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion und berechnen Sie die Koordinaten der Extrema.

(d) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Funktion und berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.

(e) Berechnen Sie noch ein paar geeignete Funktionswerte und zeichnen Sie den Graphen von f im x-Intervall $[-2;6]$ in der Einheit 2 cm auf beiden Achsen.

(f) Wie lauten die Gleichungen der Wendetangenten und wo schneiden sie sich?

Lösung: (a) $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x \cdot \left(\frac{1}{3}x^2 - x\right) - x = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - x & \text{für } x \leqq 0 \\ \frac{1}{3}x \cdot \left(\frac{1}{3}x^2 - x\right) - x = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$$x \leqq 0: \quad -x\left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{3}x + 1\right) = -x\left[\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] = 0$$

$$x > 0: \quad x\left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{3}x - 1\right) = x\left[\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right] = 0$$

Nullstellen bei $x_{01} = 0$ und $x_{02} = \frac{3}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 4{,}85$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

(b) f ist in ganz $\mathbb{R}$ stetig.

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 1 = -\frac{1}{3}\left[(x-1)^2 + 2\right] & \text{für } x \leqq 0 \\ \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 = \frac{1}{3}\left[(x-1)^2 - 4\right] & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = -1$, d.h. f ist in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

(c) $f'(x) < 0$ für $x < 3$, $f'(3) = 0$, $f'(x) > 0$ für $x > 3 \quad \Longrightarrow$

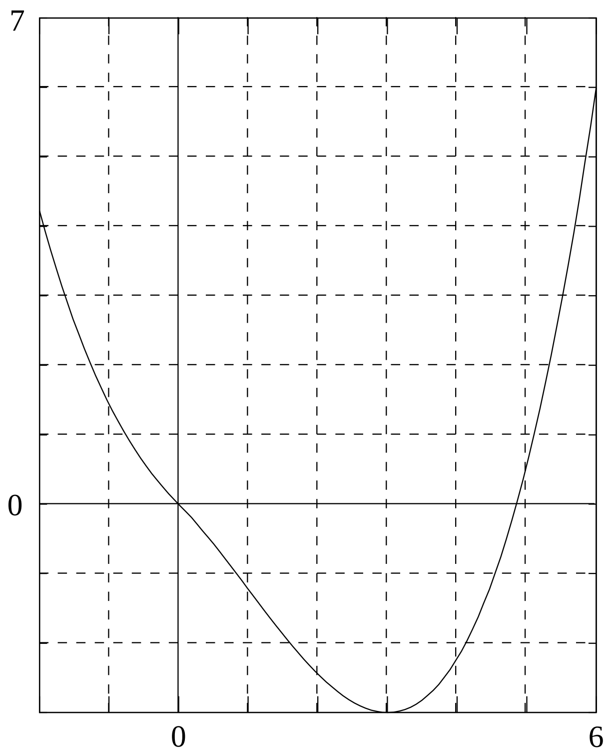
relatives Minimum bei $(3|-3)$

(d) $$f''(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}(x-1) & \text{für } x \leqq 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(x-1) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$f''(x) > 0$ für $x < 0$ und für $x > 1$, $f''(x) < 0$ für $0 < x < 1 \quad \Longrightarrow$ Wendepunkte bei $(0|0)$ und $\left(1\,\middle|\,-\frac{11}{9}\right)$

(e)

x	-2	-1	2	4	5	6
$f(x)$	4,22	1,44	−2,44	−2,22	0,55	6



(f) $f'(0) = -1 \quad \Longrightarrow \quad t_1(x) = -x$

$f'(1) = -\frac{4}{3} \quad \Longrightarrow \quad t_2(x) = -\frac{11}{9} - \frac{4}{3}(x-1) = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{9}$

Schnittpunkt von t_1 und t_2 bei $\left(\frac{1}{3}\,\middle|\, -\frac{1}{3}\right)$

52. Vereinfachen Sie: (a) $\dfrac{1+i}{i}$, (b) $\dfrac{i}{1+i}$, (c) i^{73}, (d) $\dfrac{5+12i}{-3+4i}$

Lösung: (a) $\dfrac{1+i}{i} = \dfrac{(1+i)i}{i^2} = \dfrac{-1+i}{-1} = 1 - i$

(b) $\dfrac{i}{1+i} = \dfrac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1+i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

(c) $i^{73} = i^{72} \cdot i = 1 \cdot i = i$

(d) $\dfrac{(5+12i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)} = \dfrac{-15+48+(-36-20)i}{9+16} = \dfrac{33}{25} - \dfrac{56}{25}\,i = 1{,}32 - 2{,}24\,i$

53. Vereinfachen Sie: (a) $\dfrac{1-i}{-i}$, (b) $\dfrac{i}{1-i}$, (c) $(-i)^{1003}$, (d) $\dfrac{3-4i}{12-5i}$

Lösung: (a) $\dfrac{1-i}{-i} = \dfrac{(1-i)i}{-i^2} = \dfrac{1+i}{1} = 1 + i$

(b) $\dfrac{i}{1-i} = \dfrac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{-1+i}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

(c) $(-i)^{1003} = -i^{1000} \cdot i^3 = -1 \cdot (-i) = i$

(d) $\dfrac{(3-4i)(12+5i)}{(12-5i)(12+5i)} = \dfrac{36+20+(-48+15)i}{144+25} = \dfrac{56}{169} - \dfrac{33}{169}\,i$

54. Gegeben sind die Zahlen $z_1 = 6\,\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ und $z_2 = 1 - \sqrt{3} \cdot i$. Berechnen Sie

$$z = \frac{z_1^2 - z_2^2}{(z_1 + z_2)^2}.$$

Versuchen Sie exakt (mit Wurzeln und Brüchen) zu rechnen und geben Sie das Ergebnis in der Polar- und der Normalform an.

Lösung: $z_1 = 6\cos\dfrac{\pi}{3} + i \cdot 6\sin\dfrac{\pi}{3} = 3 + 3\sqrt{3}\,i$

$$z = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} = \frac{(2+4\sqrt{3}\,i)(4-2\sqrt{3}\,i)}{(4+2\sqrt{3}\,i)(4-2\sqrt{3}\,i)} = \frac{32+12\sqrt{3}\,i}{28} = \frac{8}{7} + \frac{3\sqrt{3}}{7}\,i$$

$$z = r\mathrm{E}(\varphi) \text{ mit } r = \sqrt{\left(\frac{8}{7}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{91}}{7}, \quad \tan\varphi = \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 33{,}0^\circ$$

55. Wir rechnen mit den Zahlen $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ und $z_2 = 3\,\mathrm{E}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

(a) Beweisen Sie: $z_1 = 2\,\mathrm{E}(60^\circ)$. Zeichnen Sie z_1 und z_2 in die gaußsche Ebene ein (Einheit 2 cm). Der Gebrauch des Zirkels ist nicht verboten! Ermittlen Sie zeichnerisch in nachvollziehbarer Weise (geeignete Hilfslinien!) z_2+z_1 und z_2-z_1.

(b) Berechnen Sie $z_1 \cdot z_2$ und $\dfrac{z_1}{z_2}$ in der Polarform und schreiben Sie die Ergebnisse auch in der Normalform hin.

(c) Berechnen Sie $(z_1)^8$. Geben Sie das Ergebnis in der Polar- und in der Normalform an.

(d) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $(z_2)^n \in \mathbb{R}$?

Lösung: (a) $|z_1| = \sqrt{1+3} = 2$

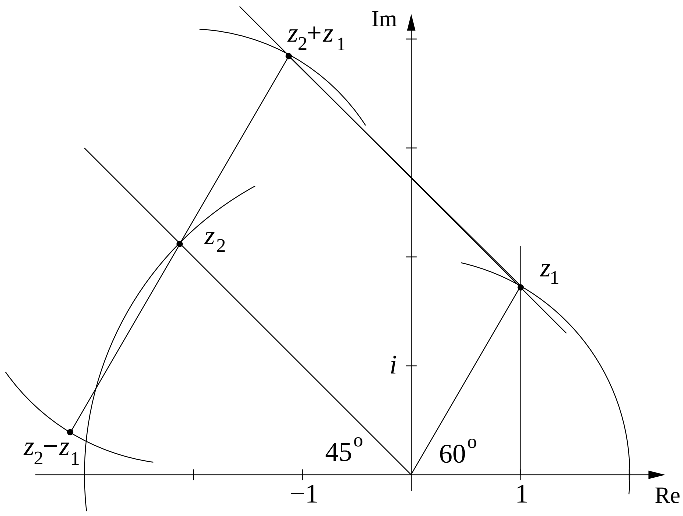
$\tan\varphi_1 = \sqrt{3}$

$\varphi_1 = 60°$

$z_1 = 2\,\mathrm{E}(60°) = 2\,\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\varphi_2 = 135°$

$z_2 = 3\,\mathrm{E}(135°)$



(b) $z_1 z_2 = 2\cdot 3\,\mathrm{E}(60° + 135°) = 6\,\mathrm{E}(195°) = \underbrace{6\cos 195°}_{-5{,}795555} + i\cdot\underbrace{6\sin 195°}_{-1{,}5529}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\,\mathrm{E}(60° - 135°) = \frac{2}{3}\,\mathrm{E}(-75°) = \frac{2}{3}\,\mathrm{E}(285°) = \underbrace{\frac{2}{3}\cos 285°}_{0{,}17255} + i\cdot\underbrace{\frac{2}{3}\sin 285°}_{-0{,}64395}$$

(c) $(z_1)^8 = 2^8\,\mathrm{E}(8\cdot 60°) = 256\,\mathrm{E}(480°) = 256\,\mathrm{E}(120°) = -128 + 128\sqrt{3}\,i = -128 + 221{,}7\,i$

(d) $(z_2)^n = 3^n\,\mathrm{E}(n\cdot 135°) \in \mathbb{R} \iff n\cdot 135° = m\cdot 180°$ mit $m\in\mathbb{N}$

$3n = 4m$ ist erfüllt, wenn $n = 4k$ mit $k\in\mathbb{N}$

56. Es ist $a = 2\,\mathrm{E}(35°)$. Für welche $n\in\mathbb{N}$ ist a^n rein imaginär, d.h. der Realteil von a^n gleich null?

Lösung:

$$a^n = 3^n\,\mathrm{E}(n\cdot 35°) \text{ rein imaginär} \iff n\cdot 35° = 90° + m\cdot 180° \text{ mit } m\in\mathbb{N}$$
$$\iff n\cdot 7 = 18 + m\cdot 36 = 18(1+2m)$$

Da $1+2m$ ungerade ist, muss n ein ungerades Vielfaches von 18 sein:

n	18	$3\cdot 18$	$5\cdot 18$	$7\cdot 18$
m	3	10	17	24
$\varphi = n\cdot 35°$	630°	1890°	3150°	4410°
$\mathrm{E}(\varphi)$	E(270°)	E(90°)	E(270°)	E(90°)
a^n	$-3^{18}\,i$	$3^{54}\,i$	$-3^{90}\,i$	$3^{126}\,i$

15 Neue Aufgaben, Februar 2006

1. **Handy-PINs**

   (a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für eine vierstellige Handy-PIN?

   (b) Wie viele verschiedene PINs lassen sich aus den Ziffern 2, 3, 4 und 5 bilden, wenn jede der Ziffern auch mehr als einmal vorkommen darf?

   (c) Manuelas Handy-PIN ist gerade und hat die Ziffern 1, 3, 4, und 5. Wie könnte ihre PIN lauten? Gib alle Möglichkeiten an.

   (d) Der Produktwert der Ziffern von Stefans Handy-PIN ist 21. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für Stefans PIN? Gib sie alle an.

   (e) Beas und Kais Handy-PINs sind verschieden, bestehen aber aus den gleichen Ziffern 5, 7, 3 und 9. Um mindestens wie viel unterscheiden sie sich?

   (f) Die Tausenderziffer von Leos Handy-PIN ist 8, die Zehnerziffer 7; die Einerziffer ist dreimal so groß wie die Hunderterziffer. Wie könnte Leos PIN lauten? Gib alle Möglichkeiten an.

   Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

Lösung: (a) $10^4 = 10000$

(b) $4^4 = 256$

(c) 6 Möglichkeiten: 1354, 1534, 3154, 3514, 5134, 5314

(d) 12 Möglichkeiten:1173, 1137, 1371, 1731, 1713, 1317, 7113, 3117, 7131, 3171, 3711, 7311

(e) Sie unterscheiden sich um mindestens 18, z. B. $3597 - 3579$.

(f) 4 Möglichkeiten: 8070, 8173, 8276, 8379

2. Wie viele verschiedene Blumentöpfe sind nötig, damit du sie an jedem Tag eines Jahres in einer anderen Reihenfolge nebeneinander aufstellen kannst?

   Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

Lösung: 6 Blumentöpfe, da $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 > 365$ und $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 < 365$

3. (a) Wie groß ist die relative Häufigkeit der Linkshänder in deiner Klasse?
   (b) Ungefähr 92% der 82 Mio. Bürger kennen den Namen des Bundespräsidenten. Etwa wie viele Bürger kennen den Namen des Bundespräsidenten nicht?
   (c) 5% der Cola-Flaschen sind schlecht gefüllt. In einem Kasten sind 20 Flaschen. Wie viele von ihnen sind im Mittel schlecht gefüllt?

   Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

Lösung: (a)
(b) 8% von 82 Millionen, also etwa 6,6 Millionen
(c) 1 Flasche ist im Mittel schlecht gefüllt.

4. **Führerscheinprüfung**

   (a) Drei Prüflinge legen die Führerscheinprüfung ab. Beschreibe das Ereignis E: „Genau zwei Prüflinge bestehen“ als Menge.
   (b) Drei Prüflinge legen die Führerscheinprüfung ab. Beschreibe das Ereignis E: „Mindestens zwei Prüflinge bestehen“ als Menge.
   (c) Drei Prüflinge legen die Führerscheinprüfung ab. Beschreibe das Ereignis E: „Genau ein Prüflinge besteht nicht“ als Menge.

   Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

Lösung: (a) E={110, 101, 011}; 1: „Prüfling besteht“, 0: „Prüfling besteht nicht“
(b) E={111, 110, 101, 011}; 1: „Prüfling besteht“, 0: „Prüfling besteht nicht“
(c) E={110, 101, 011}; 1: „Prüfling besteht“, 0: „Prüfling besteht nicht“

5. **Urnenmodell**

   (a) Die Wahrscheinlichkeit 0,3 soll durch eine Urne simuliert werden. Gib einen passenden Urneninhalt an und beschreibe die Art des Ziehens.
   (b) Die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Mädchens liegt bei etwa 49%. Eine Familie hat drei Töchter. Gib eine passende Simulation an.

   Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

Lösung: (a) drei schwarze und sieben weiße Kugeln; Treffer, wenn scharze Kugel gezogen wird; es wird „mit Zurücklegen“ gezogen

(b) Urne mit 49 roten (Mädchen) und 51 blauen Kugeln (Jungen). Man zieht „mit Zurücklegen“ und erhält drei rote Kugeln.

6. **Fussballverpackung**

Zur Fußballweltmeisterschaft hat sich eine Firma für Kleinbildfilme eine besondere Verpackung ausgedacht: jeweils 4 Filme werden in einer Schachtel verpackt, die an einen Fußball erinnern soll.

Bild 1

Bild 2

(Die beiden Bilder sind aus unterschiedlichen Perspektiven fotographiert, damit du die Form besser erkennen kannst.)

Wenn du die Verpackung betrachtest, erkennst du Quadrate und Dreiecke. Die Dreiecke sind rechtwinklig und gleichschenklig. Die Seitenlänge eines Quadrats beträgt 4 cm. Jeweils drei Dreiecke bilden eine kleine Pyramide, die nach innen zeigt. Die Verpackung bekommt dadurch mehr Stabilität und sieht auch interessanter aus, als wenn man nur ein einfaches Dreieck genommen hätte.

(a) Aus wie vielen Quadraten und Dreiecken besteht die Verpackung?

(b) Berechne die Größe der Oberfläche der Verpackung.

(c) Wichtig ist auch, wie viel Platz überhaupt in der Verpackung ist. Die Designer geben an, dass das Volumen (gerundet) 528 cm^3 beträgt. Bekommst du das auch heraus?

(d) Jeder der vier Filme steckt in einem Zylinderförmigen Döschen (Durchmesser: 3,1 cm; Höhe: 5,2 cm). Wie viel Prozent der Fußballschachtel bleiben leer, wenn die vier Filme eingepackt sind? Schätze zuerst die Prozentzahl und berechne erst danach das Ergebnis.

(e) Ein Fotogeschäft hat die Preise für die Filme in der Fußballschachtel reduziert von 6,99 € auf 5,99 € (vgl. Abb.). Wie viel Prozent Preisermäßigung sind das?

(f) Zur gleichen Zeit kann man in demselben Fotogeschäft die gleichen Filme in einer normalen Schachtel als Zweierpack kaufen. Ein Zweierpack kostet 1,99 €. Wie viel Prozent könnte man gegenüberder Fussballverpackung zun 5,99 € sparen, wenn man 2 Zweierpacks kauft?

Lösung: (a) $5+5+8=18$ Quadrate, $8 \cdot 3 = 24$ Dreiecke

(b) $18 \cdot (4\,\mathrm{cm})^2 + 24 \cdot \left(\dfrac{4\,\mathrm{cm}}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{2} = 288\,\mathrm{cm}^2 + 96\,\mathrm{cm}^2 = 384\,\mathrm{cm}^2$

(c) Volumen der Verpackung:

$$V_{\text{Verpack}} = \left[4^3 + 6 \cdot 4^2 \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} + 12 \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\right] \mathrm{cm}^3 = 527{,}53\,\mathrm{cm}^3$$

(d) Volumen der 4 Dosen: $V_{\text{Dosen}} = 4 \cdot \left[\left(\dfrac{1}{2} \cdot 3{,}1\,\mathrm{cm}\right)^2 \pi\right] \cdot 5{,}2\,\mathrm{cm} \approx 157\,\mathrm{cm}^3$

Also werden 30% der Verpackung ausgefüllt.

(e) $14,3\%$

(f) $33,6\%$

16 Neue Aufgaben, Januar 2006

1. **,,Nur einmal zweimal" - Ein Würfelspiel für 2 oder mehr Spieler**

   Jeder Spieler würfelt so lange, bis eine Zahl zum zweiten Mal erscheint, z. B. 1 - 3 - 4 - 3. Er erhält dann soviele Punkte, wie er zusammen gewürfelt hat, in diesem Beispiel 11 Punkte.

   Spielt das Spiel so oft, bis jeder Mitspieler zehnmal an der Reihe war und schreibt euch alle Spielverläufe auf.

   (a) Welche Punktzahl ist am häufigsten vorgekommen?

   (b) Was war die größte und was die kleinste Punktzahl, die vorgekommen ist?

   (c) Wie viele Punkte habt ihr im Durchschnitt pro Spiel bekommen?

   (d) Warum kann ein Spieler nie 3 Punkte bekommen?

   (e) Was ist die größte Punktzahl, die man in einem Spiel bekommen kann?

   (f) Wie viele verschiedene Spielverläufe gibt es, bei denen ein Spieler 5 Punkte bekommt?

   aus: Stochastik in der Realschule - Fortbildungsmaterialien, Prof. Dr. Timo Leuders, Pädagogische Hochschule Freiburg

Lösung: (a)

(b)

(c)

(d) Spielende nach dem zweiten Wurf liefert eine gerade Punktzahl;
Spielende nach dem dritten Wurf heißt, eine Zahl zweimal und eine weitere Zahl, also z. B. 1 - 2 - 1. 3 kann mit drei Würfen nur mit 1 - 1 - 1 erzeugt werden, was nicht möglich ist und auch nicht mit mehr als drei Würfen.

(e) $27 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 6$

(f) vier verschiedene Spielverläufe: 2 - 1 - 2, 1 - 2 - 2, 1 - 3 - 1, 3 - 1 - 1

2. Führe in deiner Klasse eine Umfrage durch und stelle das Ergebnis in einem Diagramm dar. Frage nach

   (a) der Lieblingssportart.

   (b) dem Lieblingsfach in der Schule.

(c) der Anzahl der Haustiere.

(d) der Art der Haustiere.

3. (a) Bei wie vielen zweistelligen Quadratzahlen ist die Einerziffer ungerade?

   (b) Wie viele Diagonalen hat jedes regelmäßige Sechseck?

   Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

Lösung: (a) bei 3, nämlich 25, 49, 81

(b) 9

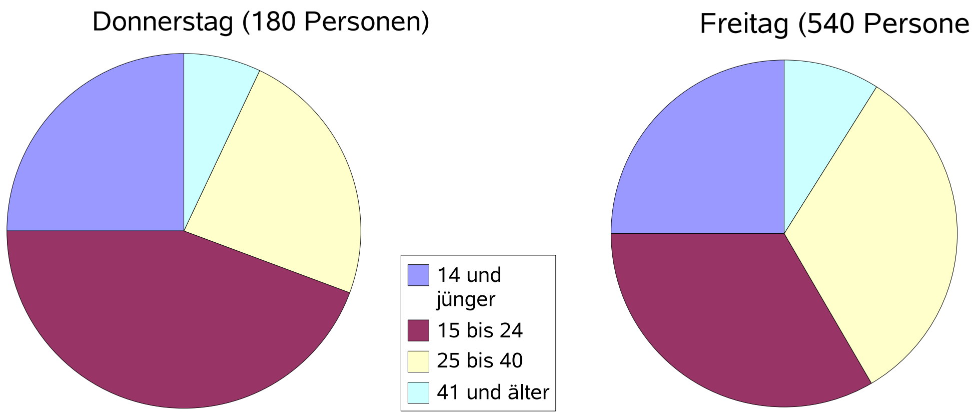
4. Führe in deiner Klasse eine Umfrage durch. Frage z. B. nach

   - der Lieblingssportart.
   - dem Lieblingsfach in der Schule.
   - der Anzahl der Haustiere.
   - der Art der Haustiere.

   (a) Berechne jeweils die relativen Häufigkeiten der Antworten in Prozent.

   (b) Stelle die Antworten in einem Kreisdiagramm dar. Berechne dazu zunächst die Winkel der jeweiligen Sektoren.

5. Im Kino Maxi werden am Donnerstag und am Freitag die Besucher nach ihrem Alter gefragt. Das Ergebnis der Befragung ist in den folgenden Kreisdiagrammen dargestellt.



(a) Wie viel Prozent der Besucher am Donnerstag waren 14 Jahre und jünger bzw. 15 bis 24 Jahre.

(b) Wie viele Besucher am Donnerstag waren 14 Jahre und jünger bzw. 15 bis 24 Jahre.

(c) Um wie viele Prozent waren am Freitag mehr Besucher im Kino als als Donnerstag.

(d) Um wie viele Prozent waren am Freitag mehr 15 bis 24-jährige Besucher im Kino als als Donnerstag.

aus: Stochastik in der Realschule - Fortbildungsmaterialien, Prof. Dr. Timo Leuders, Pädagogische Hochschule Freiburg

Lösung: (a) 25%, 44%

(b) 45, 80

(c) 200%

(d) Am Donnerstag 80 und am Freitag 180 15 bis 24-jährige, also um 125% mehr.

6. In der Klasse 6a wird eine Umfrage gemacht, in der nach der Anzahl der Kinder in den Familien der Schüler gefragt wird. Das Ergebnis ist in der folgenden Tabelle dargestellt:

	Einzelkinder	2 Kinder	3 Kinder	4 Kinder
Anzahl der Schüler	3	13	6	3

Der Durchschnitt der Kinderzahl pro Familie beträgt 2,4 Kinder. Der Durchschnitt in Deutschland ist allerdings 1,3 Kinder, also liegt die Klasse 6a über dem Durchschnitt.

(a) Prüfe die Berechnung des Durchschnitts in der Klasse nach.

(b) Untersucht diese Frage auch in euerer Klasse.

(c) Es gibt sehr viele Klassen, in denen die durchschnittliche Kinderzahl weit über dem deutschen Durchschnitt liegt. Woran könnte das liegen?

nach: Stochastik in der Realschule - Fortbildungsmaterialien, Prof. Dr. Timo Leuders, Pädagogische Hochschule Freiburg

Lösung: (a) $(1 \cdot 3 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 3) : 25 \approx 2{,}4$

(b)

(c) Frauen, die keine Kinder haben bzw. keine Kinder im entsprechenden Alter haben, werden nicht berücksichtigt.

7. (a) **„Das Spiel ist die Schönste Art, eine Sache zu beginnen"** (Leibniz) Bestimme die relative Häufigkeit des Buchstabens **e** in diesem Satz.

   (b) **„We cannot command the winds but we can set the sails"** Bestimme die relative Häufigkeit des Buchstabens **e** in diesem Satz.

   (c) Alex wurde mit 18 Stimmen von 24 Stimmen zum Klassensprecher gewählt. Wurde er mit absoluter Mehrheit gewählt und wie viel Prozent aller Stimmen erhielt er nicht?

   (d) Bei der Klassensprecherwahl erhielt Sophie 13 Stimmen und Gregor 12 Stimmen. Wie viel Prozent der Stimmen erhielt Sophie, wie viel Gregor?

   (e) Bei wie viel Prozent aller zweistelligen Quadratzahlen ist die Zehnerziffer ungerade?

   (f) Wie viel Prozent der zehn Zahlen 0,5; 0,8; $0,\overline{3}$; 0,04; 0,05; 0,01; 0,53; $0,\overline{1}$; 0,3 und 0,101 lassen sich als Stammbrüche darstellen?

   Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

Lösung: (a) $\frac{8}{44} = \frac{2}{11} \approx 18\%$
(b) $\frac{5}{42} \approx 12\%$
(c) ja, $\frac{6}{24} = 25\%$
(d) Sophie: $\frac{13}{25} = 52\%$, Gregor: $\frac{12}{25} = 48\%$
(e) $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 33\%$
(f) $\frac{6}{10} = 60\%$

8. (a) Lucas „verwandelt" 8 von 12 Elfmeterschüssen. Bei wie viel Prozent dieser Elfmeterschüsse war er nicht erfolgreich?

   (b) Beim Wettkampf konnten sich vier von fünf Schülern verbessern. Gib die relative Häufigkeit in Prozent an.

   Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

Lösung: (a) 33%
(b) 80%

9. (a) Eine Fernsehshow wurde mit Punkten von -3 bis 3 beurteilt: 2,4; 3,0; $-1{,}5$; 1,1; $-2{,}4$; $-2{,}9$; 0,5; 1,4 und 2,0. Gib das arithmetische Mittel an.

   (b) Lucas' Fußballmannschaft erzielte bei den letzten Spielen 2, 3, 0, 1, 4, 2, 0, 0, 3 bzw. 5 Tore. Gib das arithmetische Mittel an.

(c) Ändere zwei der Zahlen 30, 15, 43, 28 und 54 so ab, dass das arithmetische Mittel unverändert bleibt.

Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

Lösung: (a) $3{,}6 : 9 = 0{,}4$

(b) $20 : 10 = 2$

(c) Mittelwert: $170 : 5 = 34$, z. B. $15 \rightarrow 20$ und $54 \rightarrow 49$

10. Bestimme die Lösung der folgenden Gleichung ($D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$): $\quad 13 = 2 - \frac{4}{x}$

Lösung: $x = -\frac{4}{11}$

11. Ansgar und Bernd spielen mit zwei Würfeln: Ansgar gewinnt, wenn die Augensumme 5, 6, 7 oder 8 ist. Bernd bei jedem anderen Ergebnis.

Begründe, ob du eine der beiden Gewinnmöglichkeiten bevorzugen würdest.

aus: Stochastik in der Realschule - Fortbildungsmaterialien, Prof. Dr. Timo Leuders, Pädagogische Hochschule Freiburg

Lösung: Insgesamt gibt es bei zwei Würfen 36 Möglichkeiten.

Augensumme	5	6	7	8
Anzahl Möglichkeiten	4	5	6	5

Ansgar hat 20 Gewinnmöglchkeiten und gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{20}{36} = 56\%$. Also ist seine Gewinnmöglichkeit besser.

12. Welche der Zufallsexperimente sind Laplace-Experimente?

- Werfen einer 50-ct-Münze
- Werfen eines Knopfs
- Werfen eines Reißnagels

Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

Lösung: Werfen einer 50-ct-Münze ist Laplace-Experiment

13. Finde ein passendes Zufallsexperiment, wenn $\Omega = \{11; 10; 01; 00\}$ ist. Dabei bedeutet 1: Treffer und 0: Niete.

    Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

Lösung: Z. B. zweimaliges Ziehen eines Loses

14. Aus Karten auf denen jeweils ein Buchstabe steht, ist das Wort F E R I E N gelegt. Du ziehst aus den Karten „blind“ genau eine Karte. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ziehst du ein E bzw. einen Vokal?

    Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

Lösung: $\frac{2}{6} \approx 33\%$, $\frac{3}{6} = 50\%$

15. Aus Karten auf denen jeweils ein Buchstabe steht ist das Wort M I S S I S S I P P I gelegt. Du ziehst aus den Karten „blind“ genau eine Karte. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ziehst du kein S, ein I, ein M oder ein I bzw. einen Konsonanten?

    Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

Lösung: $\frac{7}{11} \approx 64\%$, $\frac{4}{11} \approx 36\%$, $\frac{5}{11} \approx 45\%$, $\frac{7}{11} \approx 64\%$

16. Ein Spielwürfel wird zweimal geworfen. Stelle das Ereignis E:

    (a) „Zuerst wird ein Primzahl, dann eine ungerade Zahl geworfen“

    (b) „Zuerst wird eine gerade Zahl, dann eine ungerade Zahl geworfen“

    (c) „Die geworfenen Augenzahlen sind gleich“

    (d) „Die Summe der Augenzahlen ist 10“

    als Menge dar.

    Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

Lösung: (a) $E = \{(2;1);(2;3);(2;5);(3;1);(3;3);(3;5);(5;1);(5;3);(5;5)\}$

(b) $E = \{(2;1);(2;3);(2;5);(4;1);(4;3);(4;5);(6;1);(6;3);(6;5)\}$

(c) $E = \{(1;1);(2;2);(3;3);(4;4);(5;5);(6;6)\}$

(d) $E = \{(5;5);(4;6);(6;4)\}$

17. Ordne nach der geschätzten Wahrscheinlichkeit:

(a) (1) Morgen regnet es.
(2) Morgen werde ich mich waschen.
(3) Morgen schlafe ich aus.

(b) (1) Am 1.1 schneit es.
(2) Beim einmaligen Würfeln mit einem Laplace-Würfel fällt die Augenzahl 6.
(3) Am Montag sehe ich fern.

(c) (1) Die Sonne geht morgen auf
(2) Dein Vater bügelt (auf Bitten) deine Blazer.

Quelle: Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Das Mathe-Spiel für Schule und Zuhause, Ulrike Schätz, C. C. Buchners Verlag, Bamberg 2005

Lösung: (a) (2) 100%, (3) individuelle Schätzung, (1) individuelle Schätzung

(b) (3) individuelle Schätzung, (1) individuelle Schätzung, (2) $\frac{1}{6} \approx 17\%$

(c) (1) 100%, (2) individuelle Schätzung,