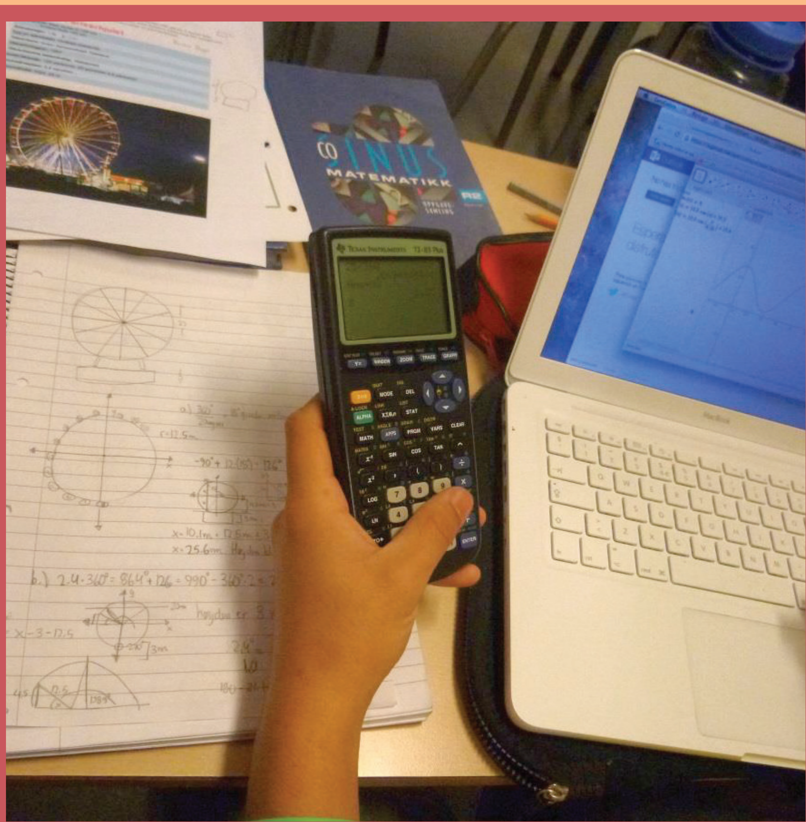
Lifelong
Learning
Programme

Matematisk kreativitet i problemløsning

Presentasjon av forskningsprosjektet “Elevstrategier”



Av Mette Andresen og Trine Brun

Matematisk kreativitet i problemløsning

Presentasjon av forskningsprosjektet “Elevstrategier”

Av Mette Andresen og Trine Brun

Lifelong
Learning
Programme

Developing by Key Competences Mathematics Education

Lifelong Learning Programme

This publication has been funded with the support of the Lifelong Learning Programme of the European Union. This communication reflects only the author's view. The European Commission and the EACEA cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Innhold

1 Innledning

Mange elever i videregående skole er gode til at løse matematikkoppgaver som likner på dem, der allerede er løst i boken eller på tavlen, mens de ikke er vant til at kaste seg ut i nye problemstillinger. Ofte er elevene ikke trent i at mobilisere hele deres egen matematiske viten, men bruker bare enkeltdeler i forskjellige situasjoner. Selv flinke elever med evner for matematikk opplever ofte faget som kun regler og rutiner. Og den brede elevgruppen vil sjeldent eller aldri ta matematikken til seg som et redskap, de kan anvende utenfor matematikktimenes oppgaveløsning.

Forskningsprosjektet ”Elevstrategier”

Erfaringer og inntrykk som de ovenstående lå bak opprettelsen av et forskningsprosjekt, ”Elevstrategier”, som kom til at dreie seg om at utvikle aktiv, undersøkende og autonom undervisning i matematikk, med tilhørende målstyret læring. Prosjektgruppen startet vår 2013 og bestod av åtte matematikklærere (heriblant Trine Brun) fra fem videregående skoler i Bergen samt en matematikkdidaktisk forsker (Mette Andresen) fra Universitetet i Bergen. Målet med forskningsprosjektet var at undersøke, om vi kunne oppmuntre elevene til mere selvstendig matematisk tenkning i undervisningen ved at la dem arbeide med problemløsning. Kort etter at vi startet, kom prosjektet ”Elevstrategier” med i EU-prosjektet KeyCoMath.

Denne boken er blitt til som en del av KeyCoMath. Boken er tenkt som en kombinert bruks- og inspirasjonsbok, og den er skrevet på bakgrunn av forskningsprosjektet. Den inneholder opplegg til undervisningsforløp, som kan brukes direkte eller etter litt tilpasning på et gitt nivå og i en gitt sammenheng. Dessuten inneholder den en kort beskrivelse av forskningsprosjektet, teoretiske matematikkdidaktiske overveielser samt analyse og diskusjon av utvalgte utklipp fra forskningsprosjektets data.

KeyCoMath prosjektet

EU-prosjektet KeyCoMath (navnet står for Developing Key Competencies by Mathematics Education) har en bevilling fra Lifelong Learning Programme of the European Union. Målet med KeyCoMath er at medvirke til at styrke en rekke nøkkelkompetanser hos elevene i hele skolesystemet. Nøkkelkompetansene er: Matematisk kompetanse, skriftlig og muntlig kommunikasjon på morsmålet, digital kompetanse, selvregulert og autonom læring, samarbeid og kommunikasjon og initiativ hos elevene til at undersøke, være kreative, proaktive, planlegge, organisere og føre egne ideer ut i livet. Man kan lese mye mere om KeyCoMath-prosjektet på hjemmesiden: http://www.keycomath.eu/

Det Norske bidrag til KeyCoMath bestod hovedsakelig i gjennomførelsen av det nevnte forskningsprosjekt. Det skjedde ved, at de otte lærere hver især utviklede og utprøvde undervisningsforløp av omkring 10 timers varighet med fokus på selvstendig problemløsning i deres egne klasser. Undervisningen i problemløsning var i større eller mindre grad tilrettelagt scenariebasert, altså som en form for undersøkelseslandskap. Scenariebasert undervisning betød her et forløp, hvor elevene blev presentert for et emne eller tema, hvor det på den ene side var avgrenset visse innholdsmessige rammer og given sammenheng og på den anden side stadig var mulighet for, at elevene på egen hånd kunne oppstille modeller og løse åpne problemer og oppgaver.

Data fra prosjektet

Underveis i forskningsprosjektet blev der innsamlet data i form av notater og undervisningsmateriale, samt lyd-, filmopptakelser og bilder av undervisning og interviews. Data blev analysert for at se nærmere på, hvilke redskaper og strategier elevene tog i bruk ved problemløsningen. Vi var spesielt interessert i at fremprovosere og studere eksempler på matematisk kreativitet hos elevene, som den er beskrevet nedenfor. Felles for forløpene var, at elevene først blev introdusert for emnet matematisk problemløsning og etterpå kastet ut i at løse et problem, som var nyt for dem, uten at læreren 'tog gassen av' problemet ved at stille delspørsmål å forklare. I en del tilfelle viste det seg, at der oppstod gode løsninger som i et plutselig glimt, hvor analysen av data ikke gav noen fingerpek om hvordan. Ofte skjede dette ved andre elevers mellomkomst, men uten at man kunne observere noen forutgående stegvise løsninger. Nå ved forskningsprosjektets avslutning inngår utvalgte episoder, som inneholder eksempler på sådanne glimt, i det videre arbeid. Målet blir å undersøke, hvordan man kan legge til rette undervisning, der fremprovoserer lignende situasjoner, og hvilke potensialer de rommer for læring og utvikling av selvstendig matematisk elevarbeid.

Teoretisk grunnlag

Arbeidet i forskningsprosjektet var basert på Polya's (1985) problemløsningsheuristikk, Schoenfeld's (2011) teori for, hvordan man angriper problemløsning, og Lithner's (2008) analyser av studentenes strategier for løsning av matematiske oppgaver. Den valgte forskningsmetode for prosjektet var i overensstemmelse med et sosiokulturelt perspektiv. Metoden innebær et samarbeid med lærerne sentrert omkring undervisningseksperimenter som i (Cobb, 1999), mens tolkningen og analysen av data blant annet var basert på Yackel og Rasmussens (2002) arbeid med normer og forestillinger (beliefs) i klasseværelset. Arbeidsformen kombinerte lærernes utarbeidelse og utprøvning av undervisningsforløpene med felles diskusjoner og materialeutveksling på en rekke planleggings- og evalueringsmøter. Innsamlingen av data i form av notater og filmopptagelser foregikk i skoleåret 2013-2014, under avviklingen av de enkelte forløp.

2 Matematikkdidaktisk teori

2.1 Matematisk problemløsning (Schoenfeld 2011)

I planleggingen av forløpene tok gruppen utgangspunkt i elevenes forutsetninger på fire områder. Ifølge Schoenfeld (2011) er det nødvendig og tilstrekkelig at vite følgende om elevene for at forutsi, om deres problemløsning vil lykkes eller ikke:

- Vitensbase: Hvilken matematikk kjenner de til?
- Problemløsningsstrategier (heuristikker): Hvilke redskaper eller teknikker har de til rådighet til at angripe problemer, de ikke ved, hvordan de skal løse?
- Overblikk og selvregulering: Aspekter av metakognisjon som har at gjøre med, hvor godt den enkelte har styr på de problemløsningsressurser, herunder tid, som er til rådighet.
- Beliefs: Den enkeltes bilde av seg selv og oppfattelsen av, hva matematikk er, hvordan deres egen rolle, konteksten etc. er.

Oppstillingen av elevenes forutsetninger i de fire punkter ble brukt til at finne frem til, hvordan elevene kunne utrustes til at arbeide kreativt. Det resulterte i planlegning av introforløpet, som skulle legge opp til selve problemløsningen, med følgende mål:

a) at elevenes matematiske forutsetninger for at kunne gjennomføre problemløsningsforløpet skulle være i orden,

b) at elevene skulle kjenne til de viktigste av spørsmålene og forslagene i Polyas skjema,

c) at der i klassen skulle etableres en passende fagforståelse og arbeidsmoral i overensstemmelse med den måte, vi gjerne ville ha elevene til at gjennomføre problemløsningsforløpet på.

Ad a). Det matematiske innhold i problemløsningsforløpene og deres introforløp lå hovedsakelig innenfor områdene trigonometri, rekker og statistikk. Når elevene skulle arbeid mere fritt med åpne oppgaver, var det slet ikke entydig, hva de nødvendige forutsetninger kunne omfatte, likesom det ville blive vanskeligere at styre det matematiske innhold i læringsutbyttet.

Ad b). Der var tale om, at elevene skulle blive kjent med de fire trin i Polyas skjema under introforløpet.

Ad c). Fagforståelse, arbeidsmoral og rammer, som kunne passe til problemløsningsforløpet, adskilte seg fra den daglige undervisning på flere viktige punkter. For eksempel var det meningen, at elevene skulle ta al deres matematiske viden og erfaringer med i betraktning, i motsetning til den sedvanlige oppgaveløsning, hvor de alltid, eller som oftest, skulle bruke de foregående sider i boken. Lærerne måtte på forhånd gøre det klart for elevene, at de ikke ville blive bedt om at løse ferdigformulerte oppgaver med nettopp et riktig svar, og at de kanskje ville komme til at bruke lang tid til at overveie, om deres svar overhodet var riktige.

2.2 ”How to solve it” (Polya 1985)

Spesielt valgte vi at la alle forløpene starte med en introduksjon av konkrete, metodiske grep fra fagområdet matematisk problemløsning for at sikre, at elevene hadde innsikt i passende problemløsningsheuristikker. Introduktionsforløpene byggede på ‘*How to solve it. New aspects of mathematical method*’ av G. Polya fra 1945. (Polya 1985)

Bokens omdreiningspunkt er en liste eller et skjema inndelt i fire trin over spørsmål og forslag, som man kan bruke i forbindelse med problemløsning, enten for seg selv eller som hjelp til elever. I resten av boken refereres til dette som «skjemaet».

Trin 1 er at forstå problemet. Dette er ikke banalt, men kan tvert imot utgjøre en ny utfordring for eleven. I mange tradisjonelle oppgaver kan eleven umiddelbart forstå eller gjenkjenne problemet, fordi den ubekjente alltid hedder x og skal bestemmes ut fra alle de øvrige opplysninger; fordi forutsetningene er enkle eller enda underforstod; eller i det hele tatt fordi der er tale om typeoppgaver, som følger samme skjema som de viste eksempler i boken, der står umiddelbart før. Hvis eleven selv helt eller delvis formulerer problemet, der skal arbeids med, kan man oppfatte dette trin som den del av en modelleringsprosess, hvor matematiseringen foregår.

Trin 2 er at finne forbindelsen mellom den ubekjente størrelse, som skal finnes, og de opplysninger, der er til rådighet. Her kommer de forskjellige forslag og teknikker i bruk: forsøke at kjenne igjen problemet fra tidligere, komme i tanke om et beslektet problem, sammenligne med et allerede løst problem, huske andre problemer med samme ubekjente, omformulere problemet etc. Dette er tett forbundet med oppstillingen av en matematisk modell, hvis eleven arbeider med sin egen problemstilling.

Trin 3 er at gjennomføre planen for løsning av problemet. Hvert trin skal overveies og kontrolleres. Dette er i motsetning til de fremgangsmåter, som er beskrevet hos Lithner, som kjennetegner de forskjellige typer av IR (imitative reasoning).

Trin 4 er at kontrollere den oppnådde løsning på forskjellige måter i stedet for at se i en fasitliste, spørre læreren eller blot stille sig tilfreds med at have funnet et svar. Utvikling av elevens intellektuelle autonomi har som forutsetning, at han eller hun selv er i stand til at gjennomføre kontrollen.

Skjemaet ser sådan ut i min oversettelse:

SÅDAN LØSER MAN DET	
Første trin	FORSTÅ PROBLEMET
Man må *forstå* problemet	*Hva er den ubekjente? Hva er data? Hva er forutsatt?* Er det mulig at oppfylle forutsetningen? Er forutsetningen tilstrekkelig til at kunne bestemme den ubekjente? Eller er den utilstrekkelig? Eller overflødig? Eller selvmotsigende?

	Tegn en skisse. Innfør passende notasjon. Adskill de forskjellige deler av forutsetningen. Kan man skrive dem ned?
Andet trin	LÆGGE EN PLAN
Finn forbindelsen mellom data og den ubekjente Man kan være nødt til at betrakte et underproblem som hjelp, hvis der ikke finnes en umiddelbar forbindelse Man skal forsøke at finne frem til en *plan* for løsning av problemet	*Har man sett problemet før?* Eller har man sett det samme problem på en litt annen måte? *Kjenner man et beslektet problem?* Kjenner man en setning, som kan være nyttig? *Se på den ubekjente!* Forsøk at komme i tanke om et beslektet problem, som har den samme eller en lignende ubekjent. *Her er et problem, som er beslektet med det aktuelle, og som allerede er løst. Kan det brukes?* Kan man bruke dets resultat? Kan man bruke dets metode? Skulle man kanskje innføre en hjelpestørrelse for at kunne benytte det beslektede problems løsning? Kan man omformulere problemet? Kan man omformulere det på ennå flere måter? Gå tilbake til definisjonene. Hvis man ikke kan løse det stilte problem, så løs først et beslektet problem. Kan man forestille sig et mere tilgengelig, beslektet problem? Et mere generelt problem? Et mere spesifikt problem? Et analogt problem? Kan man løse en del av problemet? Behold blot en del av forutsetningen og utelad resten av forutsetningen; hvor godt kan den ubekjente så bestemmes, hvordan kan den variere? Kan man utlede noe brukbart av data? Kunne man tenke sig andre data, som ville være egnet til at bestemme den ubekjente? Kunne man endre på den ubekjente eller på data, eller om nødvendig på begge, sånn at den ny ubekjente og de nye data var tettere på hinannen? Er alle data brukt? Er hele forutsetningen brukt? Er der tatt høyde for alle essensielle opplysninger i problemet?
Tredje trin	**GENNEMFØRE PLANEN**
Gjennomfør planen	Ved gjennomførelsen av planen skal *hvert trin kontrolleres*. Er det klart, at hvert trin er korrekt? Kan man bevise, at det er korrekt?
Fjerde trin	**SE TILBAGE**

Kontroller den oppnådde løsning	Kan man *kontrollere resultatet*? Kan man kontrollere argumentet? Kan resultatet fås på en annen måte? Kan man se løsningen ved første øyekast? Kan resultatet, eller metoden, brukes på et andet problem?

Resten av boken er inndelt i fire avsnitt:

I. **I klasseværelset**. Består av tjue avsnitt (**1-20**) med innholdet fordelt sådan:
   a. 1-5 diskuterer formålet med skjemaet.
   b. 6-17 forklarer grunnoppdeling og hovedspørsmål i skjemaet og gir et praktisk eksempel.
   c. 18, 19 og 20 inneholder ytterligere eksempler.

II. **Sådan løser man det.** En dialog, hvor en idealisert lærer besvarer en idealisert elevs spørsmål.

III. **Kort heuristisk ordbok**. Ordboken inneholder 67 oppslag i alfabetisk orden i form av kortere og lengere artikler, nogen av mere teknisk art og andre med historisk eller didaktisk innhold. Meningen er, at ordboken kan brukes til at slå opp i for at finne informasjon og især må forventes at være nyttig, hvis der søkes informasjon om emner, man selv er stødd på i forbindelse med problemløsning.

IV. **Problemer, hints og løsninger**. Her stilles den ambisiøse leser fem problemer. Der gis hints, som kan føre til et resultat, hvilket er forklaret i løsningen.

I boken tales det gjennomgående om læreren og eleven, disse benevnelser skal forstås bredt.

2.3 Elevers problemløsningsstrategier og tenkning (Lithner 2008)

For at gjøre målet med forskningsprosjektet mere tydelig og velfundert, forfulgte vi tankegangen hos Lithner (2008). Her benevnes en oppgave en »problemsituasjon«, hvis det ikke på forhånd er klart, hvordan man skal komme videre, og elevens løsning foregår i tre trin:

a. Der foregår et strategivalg, hvor strategi kan betyde alt fra en lokal prosedyre til en overordnet tilgang, og hvor valg ses i en bred betydning (velge, komme i tanke om, konstruere, gjette, oppdage etc.). Eventuelt fulgt av predikativ argumentasjon: Hvorfor vil denne strategi kunne brukes til at løse oppgaven?
b. Strategien implementeres, eventuelt understøttes med verifikativ argumentasjon: Hvorfor kunne strategien benyttes til at løse oppgaven?
c. Eleven når frem til en konklusjon.

Ifølge Lithner (2008) kan man identifisere visse karakteristiske fremgangsmåter for løsning av matematikkoppgaver, som er utbredte hos førsteårsstudenter på universitetet i Sverige. Blant de mye utbredte fremgangsmåter er husketenkning og algoritmisk tenkning, som er beskrevet nedenfor. Poenget er, ifølge Lithner, at fremgangsmåtene med held kan benyttes av de studerende, fordi alt, som er forståelsesmessigt vanskelig, er tatt ut av den oppgave, de skal løse, så kun det aller letteste er tilbake. Dette kan enten ligge allerede i den måten, oppgaven er oppdelt og strukturert på, eller det kan skje, når læreren stiller hjelpespørsmål og guider den studerende igjennom oppgaveløsningen. Lærerne i forskningsprosjektet gjenkjente dette, de hadde observert tilsvarende strategier i videregående skole, og de hadde opplevet, at elevene gjennomgående var best til at løse oppgavetyper, de allerede kjente.

Om kreativ matematisk tenkning

Helt overordnet skjelner Lithner (2008) mellom *imiterende tenkning* (IR, for Imitative Reasoning) og *kreativ, matematisk fundert tenkning* (CMR, for creative mathematically founded reasoning).

Kreativ matematisk fundert tenkning (CMR) oppfyller følgende kriterier:

I. Innovasjon: En ny (for den tenkende) tankerekke skapes, eller en glemt tankerekke gjenkalles

II. Plausibilitet: Der er argumenter, som begrunner, at strategivalget og/eller implementeringen er riktig eller plausibel.

III. Matematisk fundering: Argumentene er forankret i interne matematiske egenskaper ved de komponenter, som er involvert i tenkningen.

Det fremgår, at CMR er karakterisert ved at være innovativ,og ved de underliggende argumenter. Utfordringen består nå i at ikke CMR, men IR, er fremherskende i videregående skole og på universitetet. Det mål, gruppen hadde satt sig, kan beskrives ved, at elevene skulle bringes til at mestre CMR. Kreativ matematisk tenkning behøver ikke, som problemløsning, at foregå i problemsituasjoner, men omfatter også elementær tenkning. Det betyder, at man kan forestille seg en elev tenke kreativt matematisk, selv om eleven ikke er i en problemsituasjon, altså har et problem som skal løses på en måte, han eller hun ikke kjenner på forhånd. En sådan kreativ tenkning kunne for eksempel bestå i, at eleven så en ny sammenheng mellom kjente begreper eller kjedet forskjellige representasjoner av et begrep eller en størrelse sammen på en ny måte. Lithner identifiserer en rekke tenkemåter under IR, som man kan se elever gå frem efter i problemløsningssituasjoner. Tenkemåtene adskiller sig fra hverandre med hensyn til, hvordan strategivalget foregår, og/eller implementeringen av den valgte strategi.

Underinndeling av IR:

1. Husketenkning (MR, for Memorized reasoning) oppfyller:

    a. Strategivalget er basert på, at eleven kan gjenkalle seg et komplet svar.

    b. Implementeringen består utelukkende i at nedskrive svaret.

Al problemløsning bygger jo delvis på, at man gjenkaller seg noe, men som overordnet strategi er den kun velegnet til få oppgavetyper som for eksempel 'Hvor mange cm^3 er en Liter' etc. og visse beviser. MR kan også ha effekt gjennom veletablerte erfaringer fra undervisningen, også i form av ideer om, hvordan fasit vanligvis er (helt tal, positiv stigning etc.).

2. Algoritmisk tenkning (AR), hvor algoritmer inkluderer alle ferdiglaget prosedyrer (som for eksempel bestemmelse av nullpunkt ved at zoome inn på aksen med en graffregner). Det avgjørende er, at algoritmen kan bestemmes på forhånd. Betegnelsen «algoritme» benyttes her bredt. Poenget er, at alt, som er forståelsesmessigt vanskelig, er tatt ut, så kun det aller letteste er tilbake til eleven. AR oppfyller:

    a. Strategivalget består i at gjenkalle en løsningsalgoritme. Den prediktive argumentasjon kan være av forskjellig art, men der vil ikke være nogen grund til at finne på en ny løsning.

b. Resten av tenkningen under implementeringen av strategien er triviell for den tenkende, kun slurvefeil kan forhindre, at det riktige svar finnes.

Typen av argumenter, som omtales i punkene II og III ovenfor, er knyttet til de forskjellige faser i problemløsningen. Lithner tar utgangspunkt i de samme faser, som Polya også (senere Schoenfeld) arbeidet med. Analyse, undersøkelse og planlegging skal så understøttes av prediktive argumenter, mens implementering og verifikasjon skal understøttes av verifikative argumenter. Det vil sige, at analyse gir argumenter for, hvorfor egenskaper ved oppgavens komponenter har bestemte konsekvenser. Undersøkelse skal vise, hvorfor noen av resultatene kan være brukbare. Planleggingen dreier seg om, hvorfor visse angrepsvinkler vil have bedre sjanse for at føre til en løsning. Implementeringen gir mere overordnet en begrunnelse for, hvorfor det går den riktige vei, og kanskje hvorfor strategien må overveies på nytt. Verifikasjon er forklaringen på, hvorfor det faktisk er funnet en løsning. Hvis oppgaven kan forstås umiddelbart ved lesning, er det ikke bruk for argumenter, men ellers må man forsøke at oppnå forståelse ved analyse eller ved undersøkelse.

Underinndeling av AR:

Det vanskelige ved AR består i at velge algoritme. Lithner har identifisert tre undertyper av AR: Familiær AR, Utelukkelsesmetode AR og Guidet AR:

i. Familiær AR, hvor nøkkelord (større, mindre, minimum…) giver algoritmen. Argumentet, som overbeviser eleven, er, at oppgaver med bestemte kjennetegn hører til en bestemt algoritme. Validiteten av den overfladiske familiære AR er ikke basert på forankring i interne matematiske egenskaper og er derfor ikke pålitelig i problemløsningssituasjoner. Kjennetegn:

   a. Strategivalget begrunnes med, at oppgaven ligner én, der kan løses med velkjent algoritme.

   b. Algoritmen implementeres.

ii. Utelukkelsesmetode AR defineres sådan:

   a. Algoritmen er utvalgt ved utelukkelsesmetoden ut fra overfladisk likhet med oppgaven. Resultatet forutsies ikke.

   b. Den verifikative argumentasjon er basert på overfladiske overveielser, som kun vedrører den tenkende sine forventninger om at få et resultat. Hvis der ikke oppnås et (for brukeren) rimelig resultat, forkastes algoritmen umiddelbart, uten evaluering, og en annen fra det begrensede utvalg utprøves.

Utelukkelsesmetode AR er en hovedmetode innenfor AR i problemløsningssituasjoner, hvor familiær AR ikke virker, og det ikke er ekstern hjelp til rådighet. Det skjer ofte i første forsøk, når eleven kun kjenner en algoritme, som har med sagen at gjøre, eller hvis det giver et akseptabelt resultat. Dette må ses i lyset av, at det i praksis oftest er en akseptert sosiomatematisk norm at rettferdiggjøre eller begrunne en anvendt løsningsmetode ved simpelthen at beskrive den.

iii. Guidet AR med tilkalt ekstern hjelp.

I tekst-guidet AR er følgende oppfylt:

a. Strategivalget dreier seg om at identifisere overfladisk likhet mellom oppgaven og et eksempel, definisjon, setning, regel eller en annen situasjon i en tekstkilde.

b. Algoritmen implementeres uten verifikativ argumentasjon.

Personguidet AR:

a. Alle strategivalg, som er problematiske for den tenkende, foretages av en guide, som ikke giver nogen prediktiv argumentasjon.

b. Strategiimplementeringen følger guiden og gjennomfører de tilbakeværende rutineoperasjoner uten verifikativ argumentasjon.

2.4 Undervisningseksperimenter i samarbeid med lærere (Cobb 1999)

Siden slutningen av 1980'erne er det skjet en endring av den måte, de fleste matematikdidaktikere i vårs vestlige kultur forsker på. Fremfor tidligere, hvor man især interesserte seg for den enkelte elevs mentale behandling av informasjon og kognitive prosesser, er det nå et stigende fokus på, hvordan eleven oppbygger en matematisk virkelighet preget av den sosiale og kulturelle sammenheng, han eller hun inngår i. Synet på, hvordan teori og praksis henger sammen, har endret seg fra tanken om lærere som avtagere eller brukere av didaktisk teori utviklet i separate institusjoner adskilt fra skolen (i et elfenbenstårn eller lignende sted) til en alternativ oppfattelse, hvor man legger vekt på, at didaktisk teori utvikles på basis av praksis, som den også virker tilbake på og påvirker. Den alternative oppfattelse legger opp til en forskningsbasert utvikling av den konkrete undervisning, samtidig med at hele den endrede måte at drive matematikdidaktisk forskning på har gitt anledning til at utvikle en rekke nye forskningsmetoder.

De undervisningseksperimenter, vi har gjennomført i forskningsprosjektet, viser et eksempel på en sådan ny metode. Metoden benevnes 'emergent perspective' (fritt oversatt kunne man tale om 'organisk vekst), og dens kongstanke er, at læring kan anskues som en avbalansert inndragelse av både individets aktive konstruksjon og matematiske oppdragelsesprosesser. Undervisningseksperimentene i samarbeid med lærerne var dessuten karakterisert ved at

i. lærerne som deltagere i forskningsgruppen underviste i deres egne klasser,
ii. målet var teoriutvikling sammen med utvikling av undervisningen,
iii. lærerne og forskeren var løpende inndraget i analyse og diskusjon, i alle de tre faser: planlegning, gjennomførelse, og dataanalyse.

Den retrospektive analyse av data fra undervisningseksperimentene resulterte blant annet i ny viden om elevenes tidligere omtalte glimtvise innsikt, som kunne identifiseres i en rekke episoder som paradigmatiske tilfelle. Da man ifølge Cobb (1999) ikke kan forvente, at forskjellige forskere vil nå frem til nøyaktig samme resultater av dataanalysen fra et undervisningseksperiment, er reproduserbarheten et ikke-relevant vitenskapelig kriterie i denne sammenheng. Muligheten for at generalisere og troverdighet av analysen står tilbake som relevante kriterier. Episoder fra undervisningen får vekt, når de kan ses som paradigmatiske i den retrospektive analyse, og kunsten blir at lage en generaliserbar fortolkning, som respekterer den enkelte episodes spesifikke karakteristika. Det er presist denne generaliserbarhet, som gjør forskjellen på analyser, som sikter mot at evaluere konkrete undervisningsforløp, og analyser, som sikter mod teoriutvikling, der kan gi retningslinjer for nye, forbedrede undervisningseksperimenter.

2.5 Normer og forestillinger i klasseværelset (Yackel og Rasmussen 2002)

Elevenes "beliefs" og de normer og forestillinger, som er fremherskende i klassen, er avgjørende for, om det lykkes at gjennomføre undervisning, hvor elevene er aktive, selvstendige, undersøkende og kreative. I (Yackel og Rasmussen 2002) kan man finne en beskrivelse, som bygger på Paul Cobbs sammenkjeding av sosiale og psykologiske perspektiver (Figur 1).

Det sosiale perspektiv omfatter klassens matematiske praksis med vekt på utviklingen av felles forståelse (taken-as-shared meanings) og ikke bare sosialt aksepterte måter at agere på. Den normative praksis finnes i form av en lokal klasseromspraksis. Denne praksis konstitueres og videreutvikles av læreren og elevene i fellesskap i løpet av skoletiden. I det psykologiske perspektiv betraktes eleven, når han eller hun er engasjert i matematisk aktivitet. Der er ikke en motsetning mellom sosiale og psykologiske perspektiver: Læring involverer både, at eleven agerer i verden, og at eleven omorganiserer sine forestillinger og tanker efter de inntrykk, verden gjør på ham eller hende.

Sosiale perspektiver	**Psykologiske perspektiver**
Klassens sosiale normer Skal markere det fellesskap, eleven deltager i. Etableres av læreren og elevene etterhvert og omfatter for eksempel at forklare og begrunne løsninger, forsøke at forstå andres forklaringer etc.	I overensstemmelse med utviklingen av de sosiale normer får den enkelte elev et bilde av sin egen rolle og av de andres og av, hva matematisk aktivitet er.
Sosiomatematiske normer Spesifikke for matematikk, for eksempel vedrørende argumenter: Hva teller som et annerledes svar, når er en løsning smart, hva er en ordentlig matematisk begrunnelse?	Gjennom deltagelse i utviklingen av de sosiomatematiske normer utvikler den enkelte elev sideløpene sine egne ideer og forestillinger om, hva matematikk er, og om matematiske verdier og innsikt
Klassens matematiske praksis Betraktes, fordi det er umulig at følge og undersøke den enkelte elevs matematiske viden, når klassen betraktes som helhet	Klassens utvikling av matematisk praksis avspeiles for den enkelte elev i matematiske tolkninger, aktiviteter og dermed læring

Figur 1

I denne ramme er undersøkende aktiviteter i matematikk ifølge (Yackel & Rasmussen 2002) kjennetegnet ved:

Sosiale normer, hvor elevene forventes at

- utvikle løsninger, som giver mening for dem selv,
- forklare og rettferdiggjøre deres tanker,
- lytte til og forsøke at forstå andres tanker,
- spørre og utfordre, når der er noe, de ikke forstår.

Sosiomatematiske normer, hvor forklaringer skal anvise handlinger med matematiske objekter som, i en felles forståelse i klassen, oppleves som virkelige.

Beliefs oppfattes som det enkelte individs kognitive basis for fortolkninger av de situasjoner, som oppstår under sosial interaksjon. Beliefs utvikles over tid i en vekselvirkning med normene. Det betyder, at elevenes forestillinger om, hva matematikk er, og hvilken rolle de selv kan spille i forhold til matematikken, kan formes over tid, når det lykkes at oppbygge de sosiale, matematiske og sosiomatematiske normer, som stemmer overens med undersøkende undervisning.

3.1 Rekker

Kompetansemål

Mat S2 - Algebra

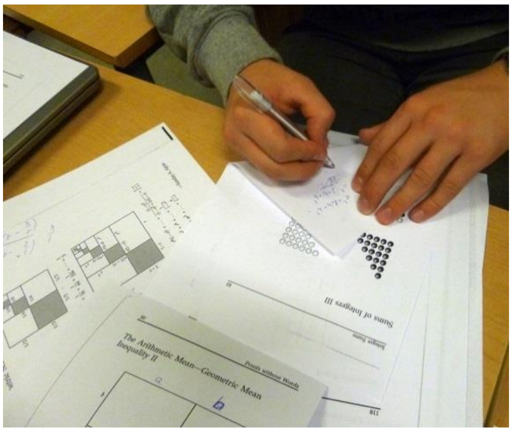
- Finne mønstre i tallfølger og bruke dem til å summere endelige aritmetiske og geometriske rekker og andre rekker, med og uten digitale hjelpemidler.

Mat R2 - Algebra

- Finne og analysere rekursive og eksplisitte fomler for tallmønstre med og uten digitale hjelpemidler, og gjennomføre og presentere enkle bevis knyttet til disse formlene.
- Summere endelige rekker med og uten digitale hjelpemidler, utlede og bruke formlene for summen av de n første leddene i aritmetiske og geometriske rekker og bruke dette til å løse praktiske problemer.

Læringsmål

- Finne formelen for en rekke
- Vise en matematisk formel ved hjelp av tegninger
- Jobbe sammen i grupper og ha ansvaret for å forklare en tenkemåte for sine medelever
- Jobbe selvstendig med en type oppgave, elevene aldri hadde sett før
- Diskutere og formulere matematikk.



Tidsforbruk og valg av tidspunkt

Selve opplegget tar 4 timer. Passende for en blokkdag.

Arbeidsform

Elevene arbeider i grupper i to omganger. Denne gruppeinndeling kan også tenkes på som en matrix, fordi elevene blir delt først i den ene retning, dernest den andre.

La oss si, at vi har 20 elever og deler dem 5 grupper med 4 personer i hver gruppe, gruppe 1, …, 5. Hver av de 5 gruppene arbeider med egen sin unike oppgave. Gruppen må sørge for, at alle gruppens medlemmer forstår oppgaven og løsningen og er i stand til å forklare løsningen for andre.

Dernest deles klassen på en annen måte, således at der dannes nye grupper med medlemmer fra hver av de 5 første gruppene. Det dannes således 4 nye grupper, gruppe A, … , D, som består av én person fra hver av gruppene 1, …,5. I den nye gruppe sitter 5 personer, som har jobbet med 5 forskjellige oppgaver, og som nå har ansvar for å forklare løsningen for de andre i gruppen.

Til første del er det en fordel at sette sammen gruppene, så elevene har samme nivå. Så vidt mulig like mange i hver gruppe.

Forutsetning

Forutsetter kjennskap til ledd, følger, rekker, sum, formel for n-te ledd, formel for neste ledd.

Dette kan gjøres på to dobbeltimer ved å la elevene arbeide med de første to avsnitt (følger, rekker) fra Aschehoug Mat S2, kapittelet om rekker. Annet materiale eller lærebøker kan selvsagt brukes, men fordelen med ovenstående materiale er, at det arbeides mer undersøkende ut fra forskjellige typer følger og rekker. Har man først introdusert aritmetiske og geometriske rekker, har elevene en tendens til kun å se etter disse mønstrene og følgelig bli mer låst i deres søken. Alternativt kan engelskspråklig materiale brukes, for eksempel fra IB Math studies.

Forløp

1) Gjennomgå felles introduksjon (Completing the Square, Algebraic Areas I). Elevene jobber med oppgave 1 (Sums of Integers I, Sums of Odd Integers I). Felles oppsamling på tavlen. Tidsforbruk omkring en time.
2) Inndeling i Matrix grupper. Arbeide med oppgave 2 (Sums of Integers II, Sums of Odd Integers II, Squares and Sums of Integers, Sums of Cubes IV, Geometric Series III). Er noen grupper tidlig ferdig, så kan de få ekstraoppgaver.
   Tidsforbruk omkring en time.
3) Ny inndeling av gruppene på tvers. Elevene får alle oppgavene. Elevene må forklare hverandre, hvordan deres gruppe løste oppgaven. Tidsforbruk omkring en time.
4) Felles gjennomgang på tavlen av elever. Tidsforbruk omkring en time.

Utfordring til elevene

Ekstra oppgaver. Differensiering av oppgavene til gruppene.
Den siste oppgaven (Geometric Series III) er vanskelig. Erfaringen viser, at de flinke elever ikke får det hele til, men en del av oppgaven. De går på med krum hals og tar imot utfordringen. Løsningen kan læreren gjennomgå felles.

Felles oppsummering og diskusjon

Underveis i arbeidet i de siste gruppene kan det være en fordel å snakke med elevene og spørre, om de er villige til å gjennomgå oppgaven på tavlen foran resten klassen. Fordelen er at eleven øver seg i å presentere matematikk på en forståelig måte. De er nok litt mere trygge på å gjøre det foran klassen, når de allerede har øvet seg i den trygge gruppe.

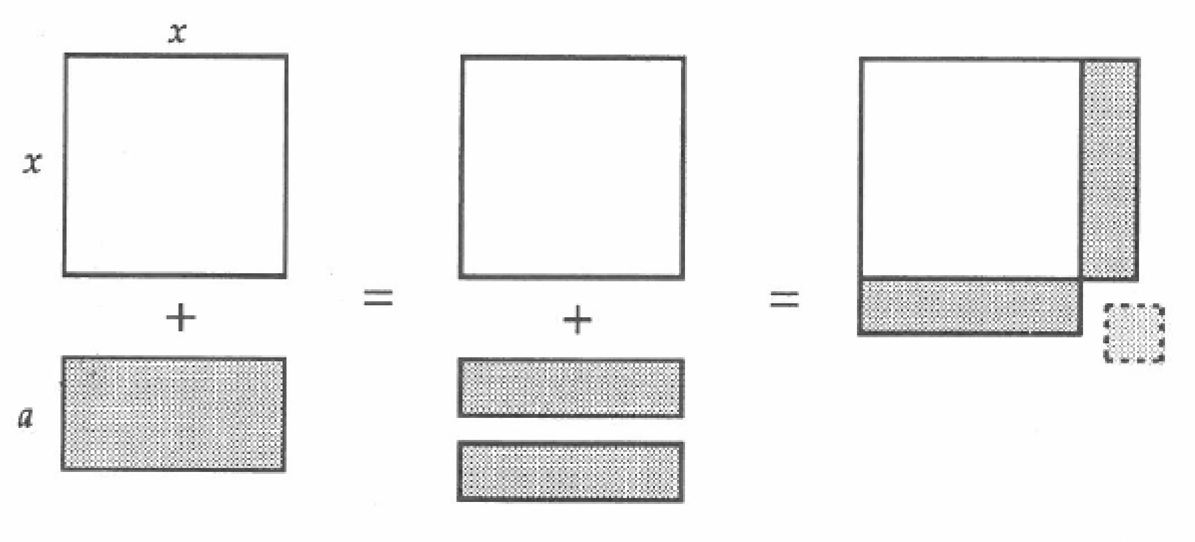
Den felles gjennomgang sikrer, at eventuelle feil, unøyaktigheter og forskjellige oppfatninger kommer frem, og kan gi utgangspunkt for ytterlige diskusjoner.

Introduksjon

Forklar, hvordan figurene tolkes og brukes til å komme frem til sammenhengen.

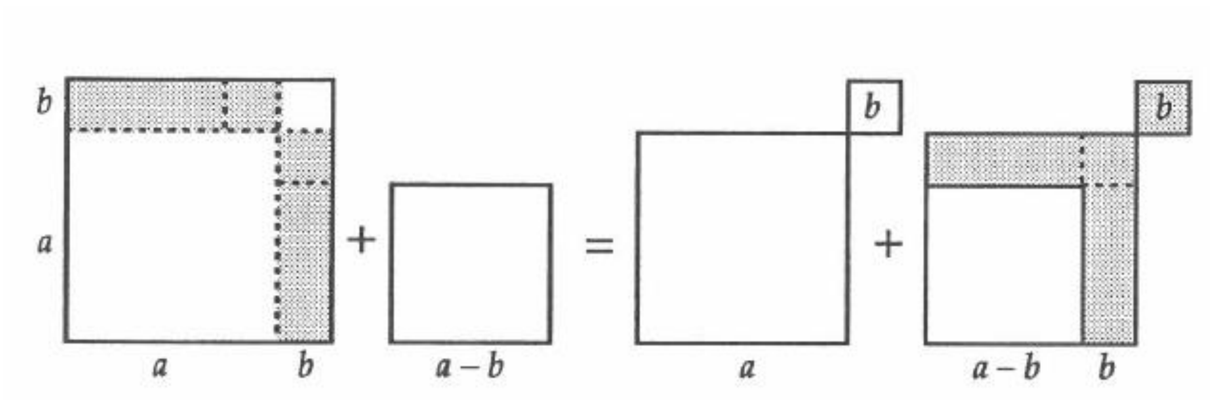
Completing the Square

$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$



Algebraic areas I

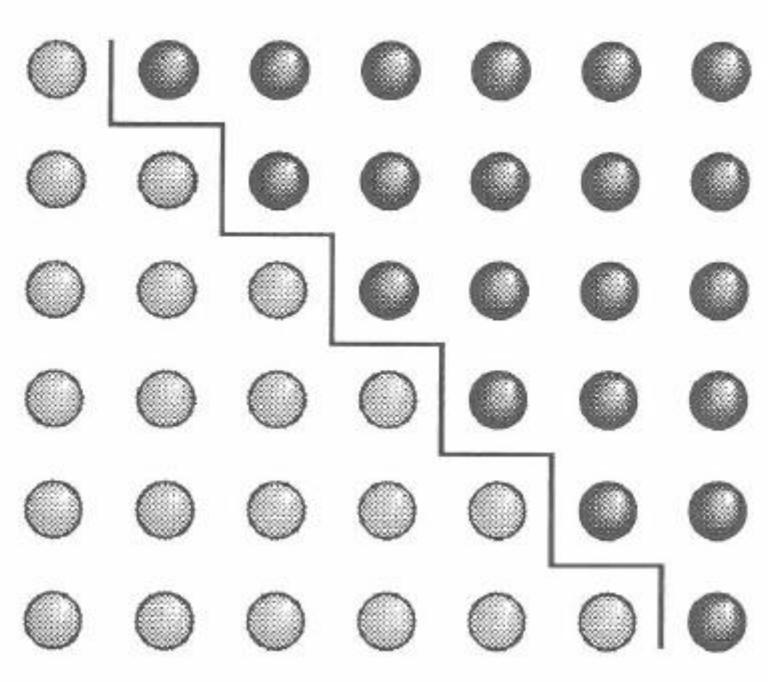
$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$



Oppgave 1

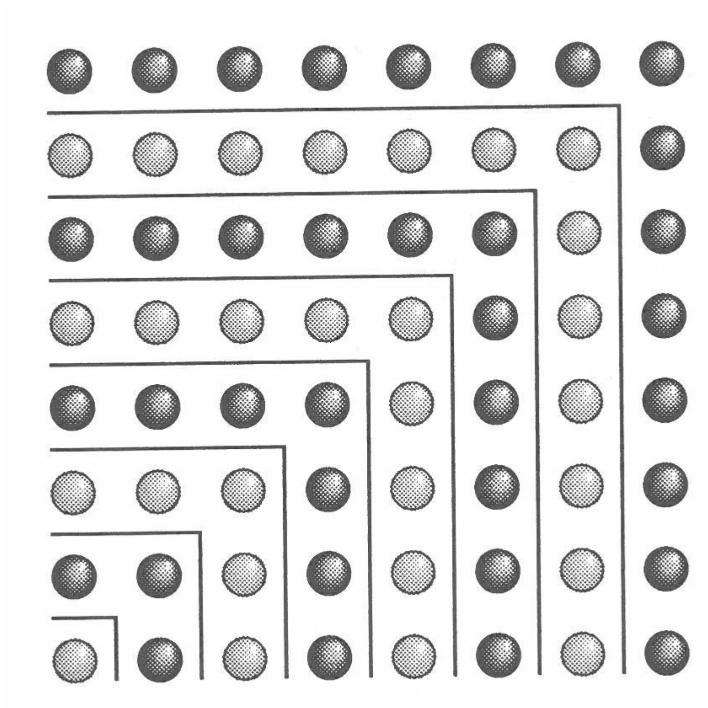
Sums of Integers I

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n\,(n + 1)$$



Sums of Odd Integers I

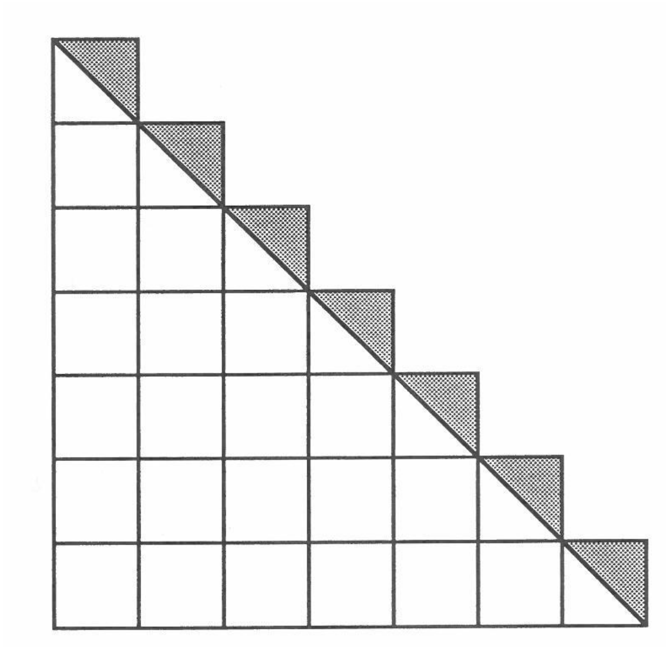
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$



Oppgave 2, Matrix-oppgaver

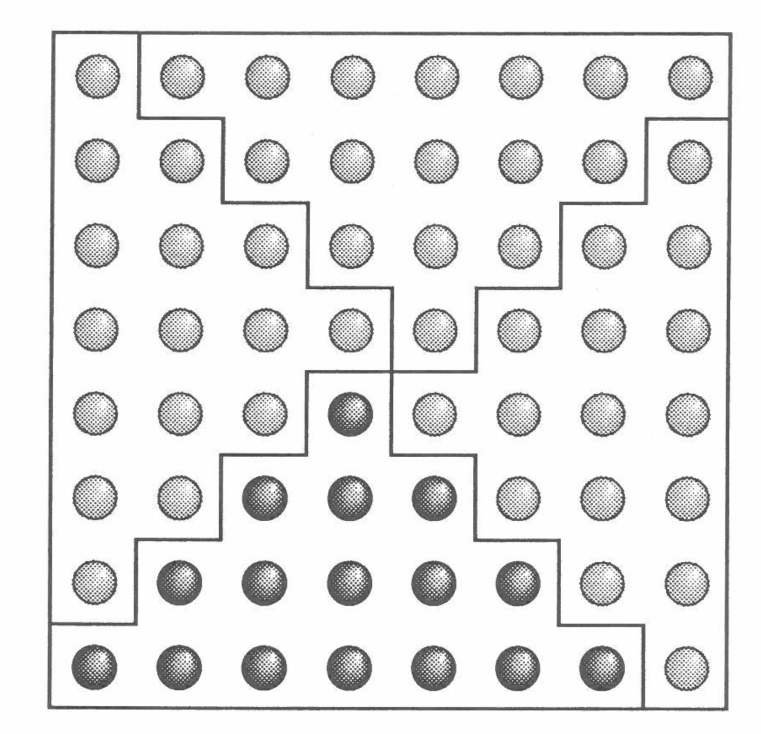
Sums of Integers II

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$



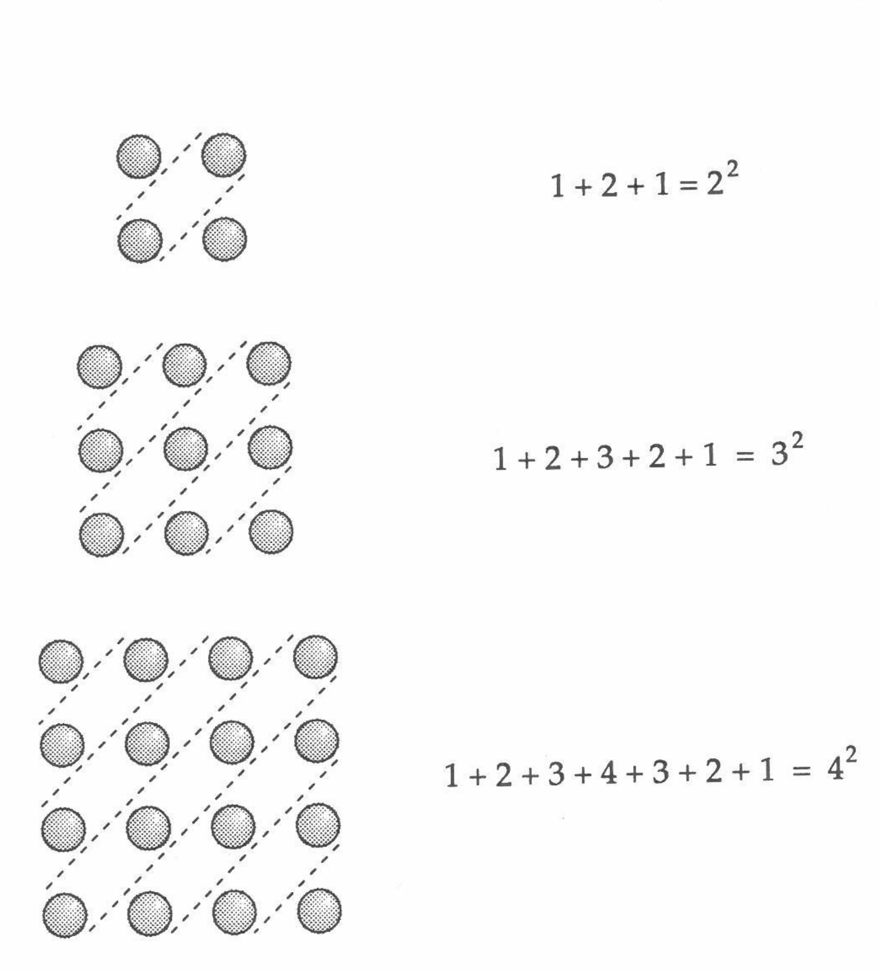
Sums of Odd Integers II

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = \frac{1}{4}(2n)^2 = n^2$$



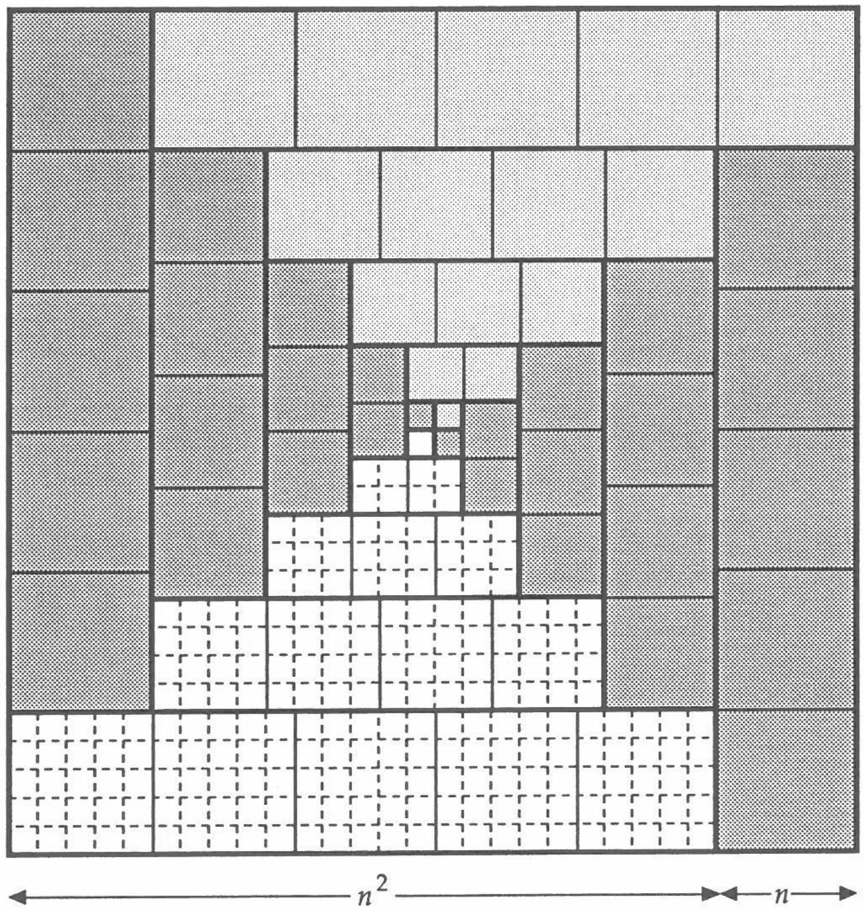
Squares and Sums of Integers

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = n^2$$

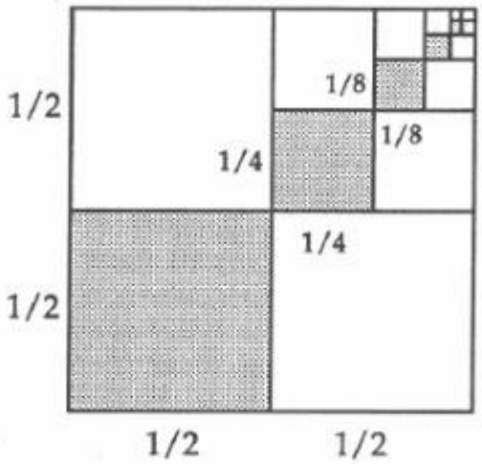


Sums of Cubes IV

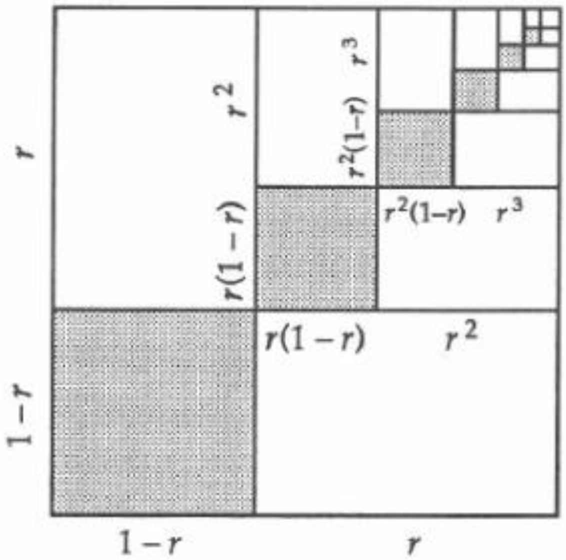
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}[n(n+1)]^2$$



Geometric Series III



$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\cdots=\frac{1}{3}$$



$$(1-r)^2+r^2(1-r)^2+r^4(1-r)^2+\cdots=\frac{(1-r)^2}{(1-r)^2+2r(1-r)}=\frac{1-r}{1+r}$$

$$1+r^2+r^4+\cdots=\frac{1}{1-r^2}$$

$$a+ar+ar^2+\cdots=\frac{a}{1-r}$$

3.2 Pariserhjul

Introforløp

Hva har vi av verktøy?

- Enhetssirkelen og de trigonometriske definisjonene
- Tabell over eksakte trigonometriske verdier
- Verktøy i GeoGebra som regner ut trigonometriske og inverse trigonometriske verdier og samtidig visualiserer dem i enhetssirkelen
- Bruk av symmetrier
- Veksle mellom ulike representasjoner (graf, geometri og algebra)
- Fra eksempler til generalisering (induktivt).

Introforløp

- Gjennomgang av Pólyas fire prinsipper
- Bruk verktøyene vi har til å lete etter trigonometriske identiteter av typen

$$sin(x) = sin(x + n \cdot 360)$$

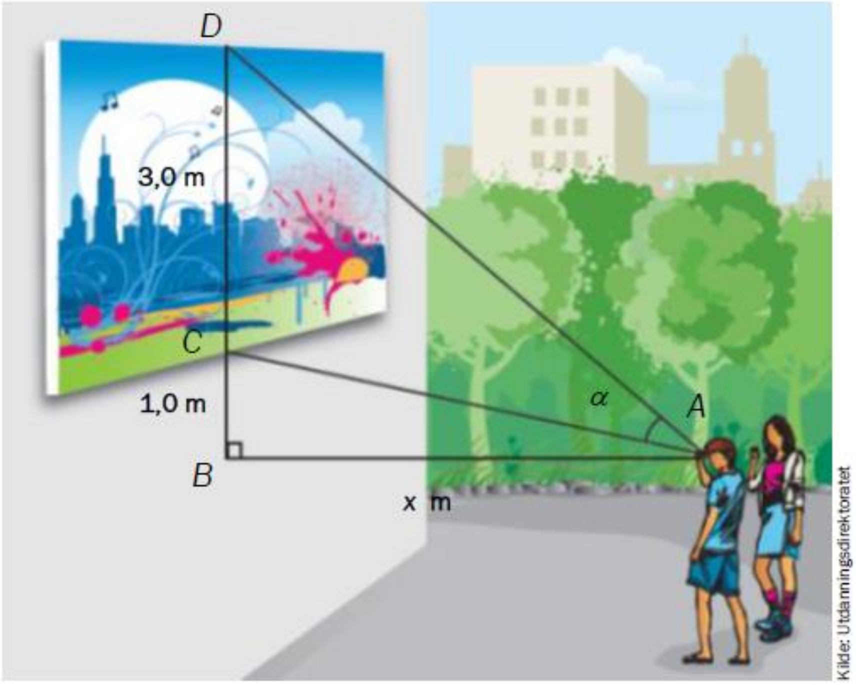
- Samle ideer og drøfter dem
- Jeg gir en intro til $cos(u - v)$, og vi bruker denne til å finne $\cos(u + v)$, $\sin(u \pm v)$.

Onsdag 11/9

- Eksamensoppgave fra mat R2 Vår 2012 oppgave 5
- Litt ligningsløsning
- Bruk GeoGebra
- Introduksjon av hovedforløp.

Oppgave 5, Mat R2 (REA3024) vår 2012 (del 2)

a) Bruk formlene for $\sin(u-v)$ og $\cos(u-v)$ til å vise at $\tan(u-v) = \dfrac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \cdot \tan v}$



Et bilde har høyde $CD = 3{,}0$ m. Bildet henger på en vegg slik at undersiden av bildet er 1,0 m over øyenivå hos personen i A (se skissen). Avstanden fra veggen til personen er $AB = x$.

På skissen er $\angle DAC = \alpha$, $\angle DAB = u$ og $\angle CAB = v$. Vi setter $f(x) = \tan(\alpha) = \tan(u-v)$

b) Bruk a) til å vise at

$$f(x) = \frac{3x}{x^2+4}$$

Vi ønsker å bestemme avstanden x slik at synsvinkelen α blir størst mulig.

c) Bestem største verdi for $f(x)$ og tilhørende verdi for x.

d) Bestem den største synsvinkelen α.

Hovedforløp

I Liseberg i Gøteborg har de et pariserhjul. Pariserhjulet står på en 4 meter høy plattform, så når du er helt nede, er du 3 meter over bakken (diktning for oppgavens skyld). Nedenfor har jeg hentet ut en beskrivelse av pariserhjulet

Fakta om Pariserhjulet

Längdgräns:	Med vuxen 0-129 cm Ensam över 130 cm
Åkkuponger:	1 st
Typ av attraktion:	Vertikalt roterande
Tillverkare:	Anton Schwarzkopf, Tyskland
Tillverkningsår:	1967
Tillverkarens beteckning:	Reisenrad
Antal åkande:	120 personer, 20 gondoler à 6 personer
Huvudrotation:	2,4 varv/min
Huvudmått:	höjd: 25 m

Du skal nå med utgangspunkt i disse opplysningene svare på spørsmålene nedenfor:

Tenk deg, at du legger et aksesystem gjennom pariserhjulet med origo i sentrum av hjulet og positiv x-akse vannrett utover (positiv y-akse oppover). Du går opp i vognen, når den er på bunnen, altså ved $-90°$

a) Du går opp i vogn nummer 8. Etter deg er det altså 12 vogner, som skal fylles. Hvilken vinkel danner du med positiv x-akse, når de fyller vogn nr. 20? Hvor høyt over bakken er du da?

Så begynner pariserhjulet å bevege seg med 2,4 runder pr minutt. Etter 3 minutter stopper det.

b) Hvor høyt er du etter 1 minutt?

c) Ved hvilke tidspunkt er du 20 meter over bakken?

d) Lag en grafskisse (med hånd), som beskriver din høyde over bakken som funksjon av tiden

e) Bruk digitale hjelpemidler og sporing til å lage en graf som viser høyden som funksjon av tiden

f) Klarer du å lage et funksjonsuttrykk, som kan være en modell for høyden som funksjon av tiden?

Nede på bakken 7 meter fra sentrum av hjulet står en bøtte. Når hjulet går rundt, vil du ved noen tidspunkt være like over bøtten?

g) Beregn, ved hvilke tidspunkt du er like over bøtten

h) Lag en graf, som viser, hvor langt til siden for sentrum du er ved de ulike tidspunktene, mens pariserhjulet går rundt.

Generaliseringsoppgave

La nå pariserhjulet være h meter over bakken, det har radiusen r og omløpsfarten v rad per sekund. Hjulet har n vogner, og du går på vogn nummer k.

a) Lag en funksjon, som viser, hvor høyt du er t sekunder etter, at hjulet starter.

b) Lag en funksjon, som viser, hvor langt til siden du er t sekunder etter, at hjulet startet.

c) Foreslå andre situasjoner, der vi kan bruke denne type funksjoner som modell.

I «Diskusjonen av utvalgte utklipp» som kommer senere i boken, vises erfaringer fra dette forløp.

3.3 Modellering

Mål for forløpet

Å få erfaringer med å modellere data uten på forhånd å kjenne til modellen. Elevene må her ikke bare modifisere og tilpasse modellen, men må også vurdere, hvilke matematiske sammenhenger man kan forestille sig ligge bak datamaterialet. Hvis elevene skal kunne få tak i den underleggende sammenheng, må de vurdere og diskutere, hvilken modell som er realistisk, og ikke kun avgjøre ved hjelp av grafer, hva som ser ut til at passe.

Læreren sagde til elevene i introduksjonen: I motsetning til, hva vi vanligvis gjør, så må vi her i oppgaven utprøve de forskjellige modellene og vurdere i hvert enkelt tilfelle, hvilke som er sannsynlige, og hvilke som ikke stemmer. Hvorfor og hvorfor ikke!

Gruppestørrelse

2-3 personer

Tidsramme

2 timer

Verktøy

GeoGebra, datamateriale

Nivå/fag

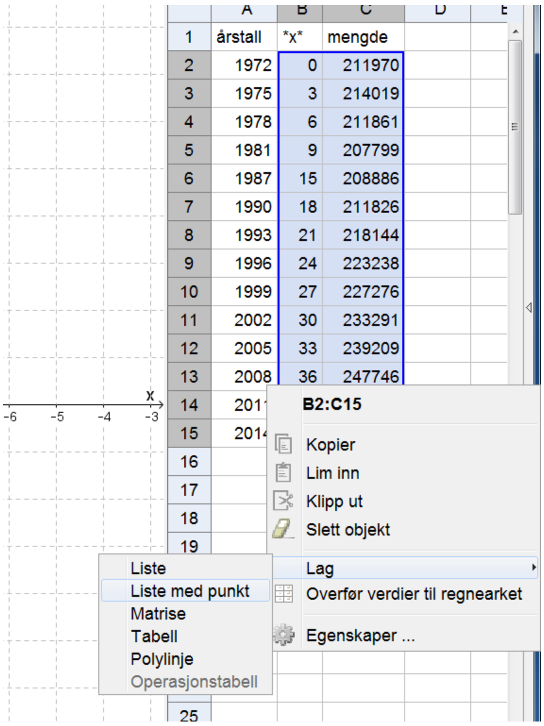
Ideen med opplegget er, at elevene selv må vurdere, hvilken modell som passer til datamaterialet, og understøtte deres valg med vurderinger for og imot de forskjellige mulige typer modeller. Opplegget forutsetter derfor, at elevene er kjent med forskjellige typer funksjoner og deres graf.
Opplegget er til mat 2P. Kan utvides til S1. Listen av regresjonstyper må tilpasses nivå.

Kompetansemål, modeller, 2P

- gjøre målinger i praktiske forsøk og formulere matematiske modeller på grunnlag av observerte data
- analysere praktiske problemstillinger knyttet til dagligliv, økonomi, statistikk og geometri, finne mønster og struktur i ulike situasjoner og beskrive sammenhenger mellom størrelser ved hjelp av matematiske modeller
- utforske matematiske modeller, sammenlikne ulike modeller som beskriver samme praktiske situasjon og vurdere, hva for informasjon modellene kan gi, og hva for gyldighetsområde og avgrensinger de har
- bruke digitale verktøy i utforsking, modellbygging og presentasjon
- bruke funksjoner til å modellere, drøfte og analysere praktiske sammenhenger.

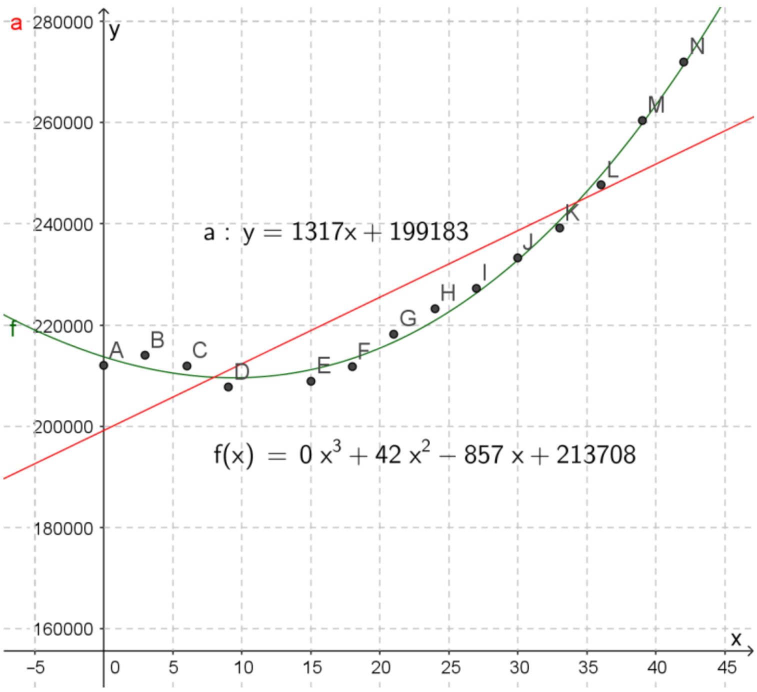
Regresjon i GeoGebra — kort

- Sett inn tallene i regnearket i GeoGebra («Vis», «regneark») - år i første kolonne, verdiene i andre.
- Marker området med tallene med venstre museknapp, bruk høyre knapp til at «Lag liste med punkt».
- Listen kommer opp i algebrafeltet, punktene vises i grafikkfeltet, og passende regresjonstype kan velges.
- Navnet på listen må angis i kommandoen, for eksempel «RegLin[Liste1]».



Regresjonstyper

RegEksp - eksponentiell regresjon $a \cdot b^x$.
RegEksp2 - eksponentiell regresjon $a \cdot e^{bx}$.
RegLin - lineær regresjon $ax + b$.
RegLog -logaritmisk regresjon $a + b \cdot \ln x$.
RegLogist - logistisk regresjon $\frac{a}{1+b \cdot e^{c \cdot x}}$.
RegPoly - polynom regresjon $a \cdot x^b, b \in \mathbb{N}$. Husk også å angi ønsket polynomgrad.
RegPot - potens regresjon $a \cdot x^b, b \in \mathbb{R}$.



Husk å angi, hvilken regresjon som du vurderer passer best med rådata. Angi også, hvorfor denne modellen passer best, og hvorfor de andre mulige modellene ikke passer til rådataene.

Opplegg for oppgaven

Vi har nå vært gjennom ulike modeller i matematikk, og vi har lært, hvordan vi skal kunne finne funksjonsuttrykket til de ulike modellene i GeoGebra. Det, som har vært litt enkelt for oss, er, at vi på forhånd har fått vite, hvilken type modell vi skal finne funksjonsuttrykket til.

I virkeligheten får man selvfølgelig ikke oppgitt, hva slags modell vi skal finne, men vi får gjerne rådata fra ulike målinger. På bakgrunn av dette datagrunnlaget vil man gjerne ønske å si noe om, hvordan en situasjon kan se ut for eksempel etter noen år. Derfor skal vi i dette lille prosjektet få ut noen dataserier.

I alle oppgavemodellene nedenfor må dere svare på disse tre trinnene. Dette er en generell fremgangsmåte, som må gjøres i hvert tilfelle:

I. Prøv å finne ut, hvilken modell dataserien representerer. Dere velger selv, hvordan dere går frem for å finne funksjonsuttrykket.

II. Argumenter i hvert tilfelle for, hvilken modell det er, men like viktig er, at argumentere for, hvorfor det ikke er hver enkelt av de andre modellene.
Kan dere finne argumenter, som taler for, at det er en lineær sammenheng, eksponentiell, potensiell etc.?
Kan dere argumentere for, hva som i virkeligheten skjer, som kan understøtte de forskjellige matematiske modellene?

III. I denne delen skal dere i hvert tilfelle bruke modellene til å forutsi en trend eller en hendelse og vise det i GeoGebra. Dere velger hendelse eller trend selv.

Oppgave

1) Finn en modell, som beskriver innbyggertallet i Bergen fra 1972-2014.
2) Finn en modell, som beskriver sildebestanden fra 1950 til 2010.
3) Finn en modell, som beskriver sildebestanden fra 1950 til 1975.
4) Finn en modell, som beskriver sildebestanden fra 1980 til 2010.

Tabell 1

Folkemengde i Bergen kommune 1972-2014

Folkemengde 1. januar og endringer i kalenderåret, etter region, tid og statistikkvariabel

	1972	1975	1978	1981	1984	1987	1990	1993	1996	1999	2002	2005	2008	2011	2014
folkemengde															
1201 Bergen	211970	214019	211861	207799	207332	208886	211826	218144	223238	227276	233291	239209	247746	260392	271949

Historiske kommuner.

Tabell 2

Sildebestanden 1950-2010

Fiskebestandar, etter fiskeslag, tid og statistikkvariabel 1950-2010

	1950	1953	1956	1959	1962	1965	1968	1971	1974	1977	1980	1983	1986	1989	1992	1995	1998	2001	2004	2007	2010
totalbestand																					
Sild (norsk vårgytande)	20013	17419	13799	8076	6765	5935	982	130	160	429	748	1121	1948	4514	6955	10488	9800	9658	12353	13022	24861

Nordaustarktisk: nord for 62° NBestandstala er basert på utrekningar, og tala i tidsserien kan bli endra frå år til år.Kjelde: ICES og Havforskningsinstituttet

Rådata hentet fra Statistisk Sentralbyrå

Erfaringer fra forløpet

Elevene får ikke automatisk det fulle utbytte av forløpet. Hvis opplegget blir for løst eller for åpent, risikerer man, at de ikke gjør overveielsene ferdig om, hvorfor noen modeller ikke virker eller passer dårlig på datasettet. Elevene må være godt forberedt, det vil si, de må ha erfaring med de forskjellige modelltyper. De må i forløpet tegne mange grafer, for eksempel ved at arbeide med mange forskjellige datasett. Men like så viktige er erfaringer med at diskutere de matematiske uttrykk som modeller av sammenhenger fra virkeligheten.

3.4 Statistikk

Faglig nivå
mat 2P, statistikk

Mål for forløpet
- Planlegge, gjennomføre og vurdere statistiske undersøkelser
- Beregne sentralmål og spredningsmål
- Bruke regneark i statistiske beregninger og presentasjoner.

Meningen med forløpet var at la elevene få erfaring med at bruke elementær statistikk som et redskap for egne undersøkelser. Introaktivitetene skulle hjelpe dem til at få bedre grep om elementære sammenhenger i statistikk fremfor ren formelkunnskap.

Forutsetninger
- Kjennskap til faglige begreper
- Elementær bruk av regneark.

Introduksjonsoppgave 1
Vi har 10 elever og bestemmer deres skostørrelse. Vi finner, at gjennomsnittet er 39,0, medianen er 40,5, typetallet er 32 og variasjonsbredden er 12.

Bestem skostørrelsen til de 10 elever.

Introduksjonsoppgave 2
Fra Lamis http://www.vestreg.no/dokumenter/2012/02/E03_Statistikkspill.pdf

- kjennskap til gjennomsnitt, median, typetall og variasjonsbredde. Mat 2P.

Varighet 1-2 skoletimer.

Statistikkspill

13	13	13	
12	12	12	12
11	11	11	11
10	10	10	10
9	9	9	9
8	8	8	8
7	7	7	7
6	6	6	6
5	5	5	5
4	4	4	4
3	3	3	3
2	2	2	2
1	1	1	1
Gjennomsnitt	**Median**	**Typetall**	**Variasjonsbredde**

Passer for 2–4 spillere

Utstyr

- en kortstokk
- fire spillebrikker til hver spiller

Regler

1. Kortene stokkes og legges i en bunke på bordet.
2. Hver spiller trekker fem kort.
3. Spillerne plasserer en brikke i hver kolonne på det tallet som passer til kortene.

   Gjennomsnitt rundes av til nærmeste hele tall

   Er alle kortene forskjellige, settes en brikke der det står *Typetall*
4. Etter tur legger spillerne ett av kortene underst i bunken og trekker det øverste kortet.
5. Vinner er den som først får alle sine brikker på grå felt.

Gjennomsnitt: summen : 5

Median: Verdien til det midterste kortet når kortene er sortert etter størrelsen.

Typetall: den verdien det er flest av.

Variasjonsbredde: Differensen mellom største og minste verdi

Oppgave

Elevene ble bedt om å fremskaffe data selv via en spørreundersøkelse og behandle materialet. De kunne selv avgjøre emne, omfang og metode for undersøkelsen. Mange elever valgte å gå på Lagunen Storsenter og spørre folk.

De spurte om så forskjellige ting som:

- Bruker du Facebook og hva til?
- Hva spiser fanabuene til jul, og om man har julekalender?
- Julegavebudsjett og antall gaver, fordelt på kjønn.
- Film, bøker og sjanger ut fra alder og kjønn.
- Trening, fordelt på alder og kjønn.

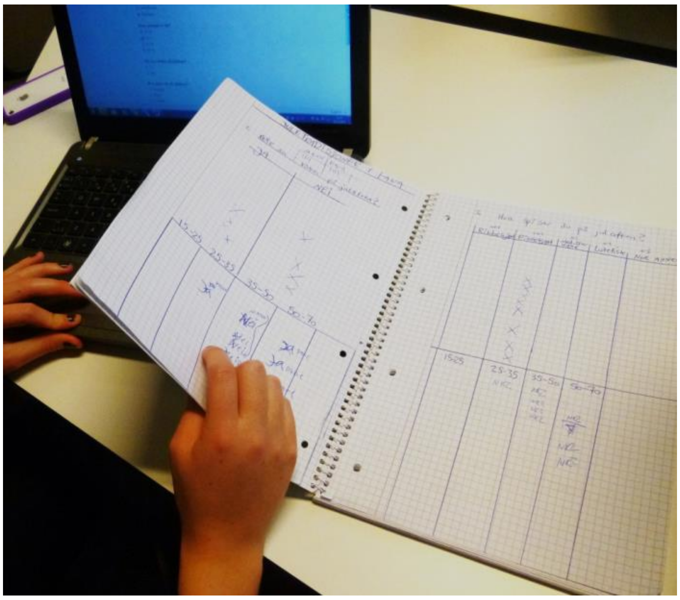
Der var stort sprik i størrelsen på undersøkelsen, bearbeidelsen, fremleggelsen og reflekteringen over resultatene.

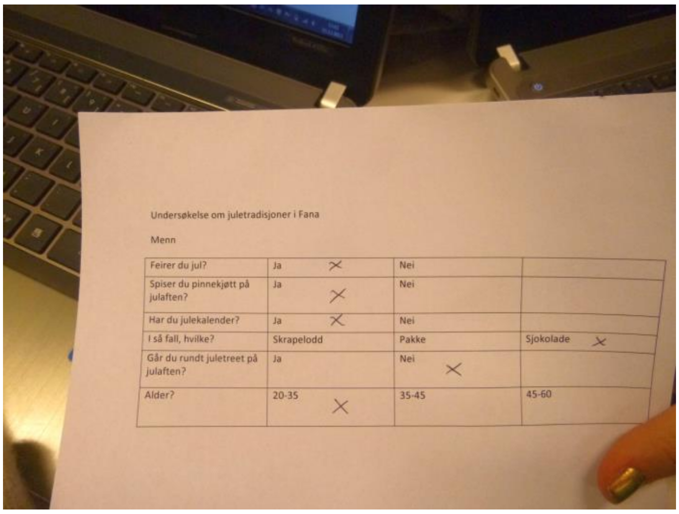
Erfaringer statistikk

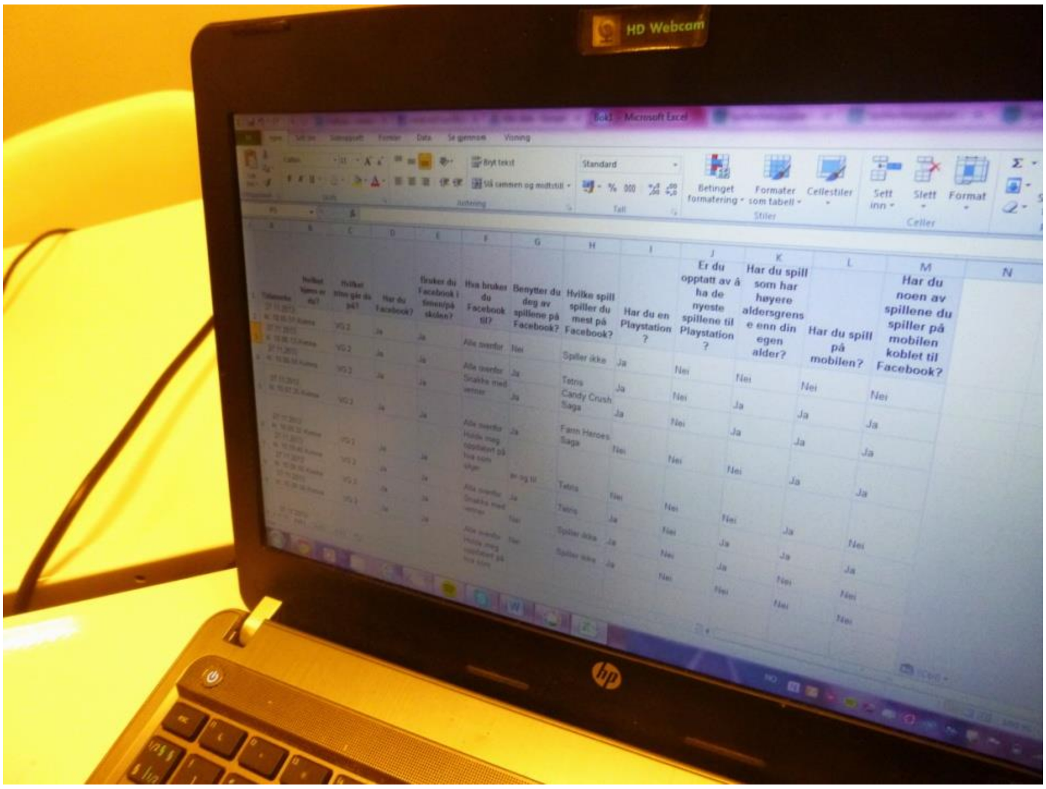
Opplegget til statistikkforløpet omfattet en introduksjon, som skulle gi elevene mulighet for at blive kjent med de elementære statistiske deskriptorer. Ved at stille elevene overfor nogen ”omvendte” problemer som konstruksjon av datasett med gitt karakteristika og som statistikkspillet (se avsnittet med undervisningsforløpet i statistikk), var det hensikten, at elevene skulle aktiveres og få en bedre forståelse for begreper og sammenhengen end en simpel, beskrivende gjennomgang ville kunne forventes at resultere i.

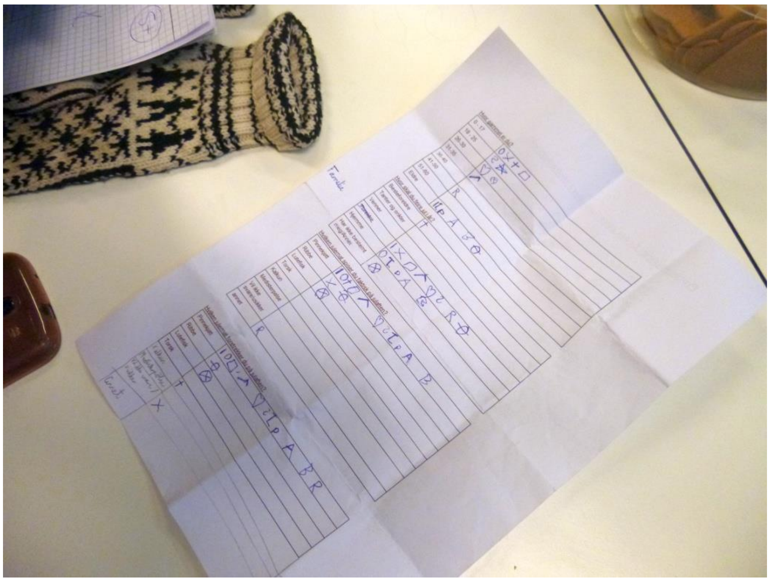
Dette så ut til at lykkes i ganske godt omfang.

Selve statistikkforløpet blev lagt meget åpent opp overfor elevene, og produktkravene var åpne. Gruppene involverte seg straks i arbeidet, og tilsynelatende var alle elevene ivrig opptatt av at planlegge og gjennomføre deres datainnsamlinger, som på følgende bildeeksempler:




Undersøkelse om juletradisjoner i Fana
Menn
Feirer du jul?
Ja
Nei
Spiser du pinnekjøtt på julaften?
Ja
Nei
Har du julekalender?
Ja
Nei
I så fall, hvilke?
Skrapelodd
Pakke
Sjokolade
Går du rundt juletreet på julaften?
Ja
Nei
Alder?
20-35
35-45
45-60

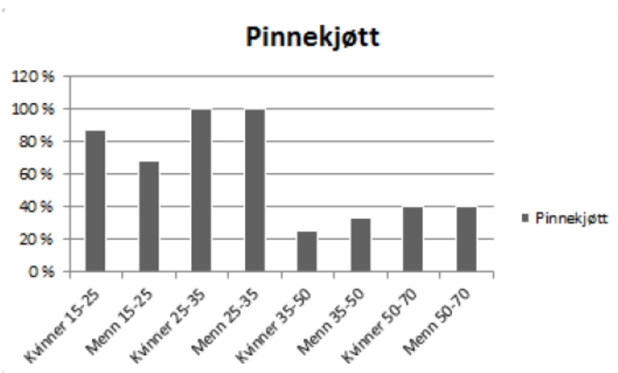

HD Webcam
Betinget formatering
Formater som tabell
Cellestiler
Sett inn
Slett
Format
Benytter du deg av spillene på Facebook?
Hvilke spill spiller du mest på Facebook?
Har du en Playstation?
Er du opptatt av å ha de nyeste spillene til Playstation?
Har du spill som har høyere aldersgrens e enn din egen alder?
Har du spill på mobilen?
Har du noen av spillene du spiller på mobilen koblet til Facebook?



Der viste seg at være stor spredning på kvaliteten i de rapportene, som gruppene leverte, både med hensyn til det rent statistiske innhold og til, hvor gjennomarbeidet de fremstod. Rapportene ble supplert med muntlige fremleggelser fra gruppene, hvor det var mulighet til å stille spørsmål. De muntlige fremleggelser og samtalene i forbindelse med dem viste gjennomgående, at de enkelte grupper satt inne med overskytende viten i forhold til rapportene. Det tyder på, at der ligger et stort potensiale hos elever i at arbeide videre med skriftlige fremleggelser i matematikk.

De følgende klipp fra elevenes rapporter illustrerer spredningen på dem. I noen tilfelle kan de kanskje inspirere til overveielser over, hvordan et videre arbeide med skriftlig fremleggelse kunne foregå:

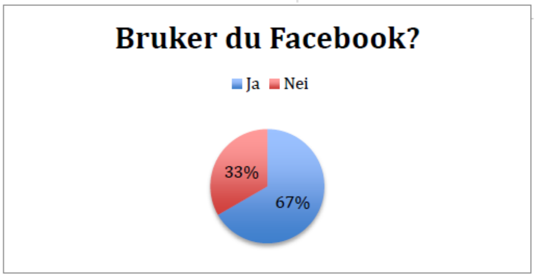
Før i tiden var dampet eller fettstekt pinnekjøtt den vanligste maten på julekvelden. Pinnekjøttet er en typisk rett for Vestlandet som senere har spredt seg til hele Norge. Tradisjonsretten har sin opprinnelse i det gamle bondesamfunnet, der saltet og tørket kjøtt var typisk for kostholdet. Hvor populært er egentlig pinnekjøttet i dag? Er det helst den eldre generasjon som har de gamle matskikkene, eller blir dette overført til de neste generasjoner?

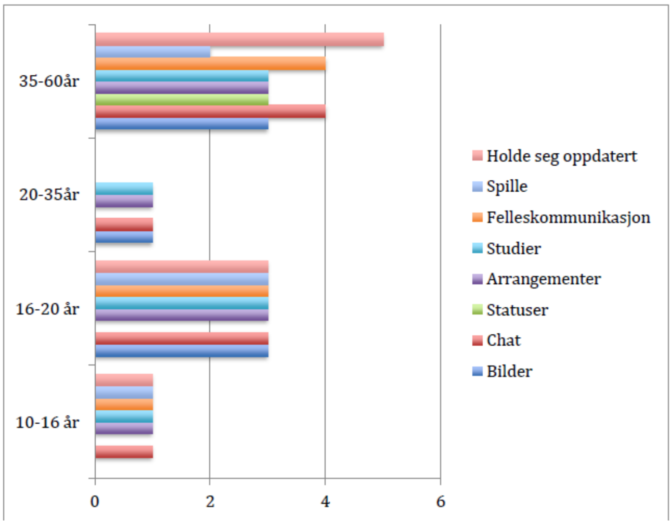


Som man ser i diagrammet på siden, viser det seg at størsteparten av dem som spiser pinnekjøtt på julaften i Fana, er den yngre generasjon. Hele 80 prosent av jentene og 62 prosent av guttene i alderen 15-25, har som tradisjon å spise pinnekjøtt på julaften Videre ser vi at den eldre generasjon ikke er dårlig representert de heller, når det er hele 40 prosent som spiser pinnekjøtt på juleaften. Det er ikke bare pinnekjøtt folk i Fana spiser, det kom også frem andre matretter under undersøkelsen som ribbe, reinsdyr, kalkun og medisterkaker. Man kan

Har dere Facebook?
Hva bruker dere den til?

Med denne undersøkelsen har vi sett på hvilke aldersgrupper som bruker Facebook og hva de bruker Facebooken deres til. Våres journalister gikk på lagunen og spurte ulike mennesker i ulike aldre og fikk ett





Facebook i Norge Gjennom SSB

Antall Norske profiler?

2 732 000 (71% av Norges befolkning)

Antall kvinner – 1 387 000

Antall menn – 1 345 000

Topp 3 grunner får å bruke Facebook.

80% følger med på venner og bekjente

50% liker bilder, statuser, kommentarer etc.

40% Chatter, sender meldinger

24 forskjellige personer ble spurt, blant dem var det 8 personer som sa de ikke hadde facebook, det gjengir 33% av alle vi spurte.

Disse 33% befant seg i aldersgruppen mellom 35-60 år.

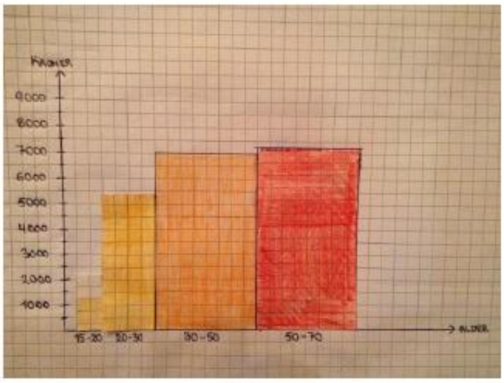
Resten av de 67% av 24 personer vi spurte lå i aldersgruppen 35 og ned. Gjennom denne undersøkelsen kan vi se at etter at Facebook ble lansert i 2004 har det sterkt påvirket unge mennesker. Det ble vist at ungdommer mellom 16-20 år var de mest aktive når det kom til ulike programmer på facebook som, chat, arrangement, spill, felles kommunikasjon og studier.

Det viste seg at de fleste eldre personene som ikke hadde facebook ikke fant hjelper i å ha det, de andre eldre personene som hadde facebook har som oftest fått hjelp av sine barn eller barnebarn til å opprette en konto får å holde seg oppdatert med familie og nære venner.

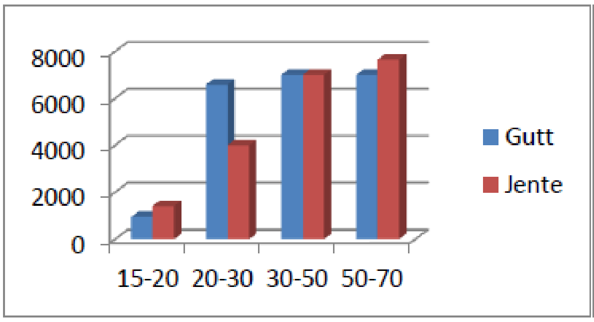
De yngre facebook brukerne vi spurte brukte det mer til å komme i kontakt med venner, dele feriebilder men også holde seg oppdatert med for eksempel klassesider fra skolen på facebook.

Alder og julegavebudsjett

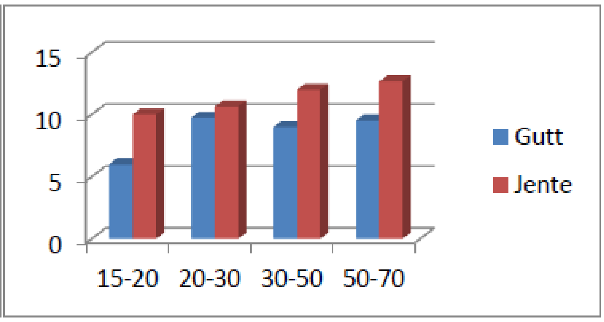
Histogrammet viser en gradvis økning i julegavebudsjett etter hvert som en blir eldre. Dette var nok ikke uventet resultat. Etter hvert som en blir eldre er studietiden over, og en kommer ut i arbeidslivet og får tilgang på mer penger som kan brukes til julegaveinnkjøpene. Mange stifter egen familie som fører til at det blir flere julegaver å kjøpe. Kanskje vil du gi noe ekstra fint til kjæresten din og denne gaven er kanskje litt dyrere en hva du ellers bruker per gave.



Søylediagram nr. 1. viser en oversikt over aldersgruppene sitt gjennomsnittlige julegavebudsjett. Søylediagram nr. 2. viser aldersgruppenes gjennomsnittlige kjøp av julegaver.



Søylediagram nr. 1.



Søylediagram nr. 2.

Menn er de som kjøper dyrest gaver. Dette kan det være flere årsaker til. Menn kjøper færre gaver enn kvinnene og har dermed mer penger å bruke til dem de skal kjøpe til. Menn er ogs "flink" til å handle i siste liten, noe som kan være en av årsakene til at gavene blir dyrere. Statistikken viser at kvinnene er de som bruker minst penger per gave, og er de som kjøper desidert flest gaver. Årsaken til dette kan blant annet være at de er flinkere enn menn til å planlegge innkjøpene. Mange av mennenes svar på undersøkelsen i hvor mye de har tenk å bruke på julegaver var "vet ikke" eller "har ikke peiling", mens alle kvinnene kunne komme med klare tall på hva de ca. hadde som julegavebudsjett.

Vi fikk til oppgave å lage en undersøkelse hvor vi skulle finne data som omhandlet julegavehandling og alder i Fana. Dette gjorde vi ved å gå ned på Lagunen Storsenter å spørre mennesker. Senere brukte vi råmaterialet til å lage en frekvenstabell, og deretter et histogram. Vi ønsket å se om det var en sammenheng mellom hvor gammel folk var og hvor mye penger de brukte på julegaver.

Vår statistikk viser at det minste beløpet folk bruker er mellom 400 og 1000 kr, dette var det 2 stykker som gjorde, det høyeste beløpet folk tenkte å bruke på gaver er mellom 16 000 kr og 20 000 kr, dette var det en person som gjorde. Vi så også på om folk var arbeidsledig, hadde deltidsjobb, fulltidjobb eller var studenter. De fleste som var på lagunen på denne tiden var enten fulltids ansatt, eller studenter og pensjonister.

Statistikken vi kom fram til viser at de fleste som kjøper julegaver er kvinner mellom 20 og 25 år gammel. De bruker 4000-6000kr på 2-4 eller 4-6 personer, dette fant vi ut av ved å gå etter typetallet. Gjennomsnitlig ble det brukt 3788kr på gjennomsnitlig 3,94 personer, som vi valgte å runne opp til 4. Det er også en del folk som kjøper julegaver til mange forskjellige folk, helt opptil 20 personer. Disse gavene trenger derimot ikke være så dyre, da spesielt for dem som kjøper til mange. En person mente den skulle kjøpe gaver til rundt 15 personer, men planlagte å bruke rundt 10 000 kr samlet på alle dem. De som kjøper til få personer bruker gjerne mer penger per person. Dette vises da gjerne hos dem som bare kjøper til barna sine eller annen nær familie. Mange av dem som kjøpte til 0-2 og 2-4, brukte hele 12 000 kr samlet på disse personene. Man er kanskje villige. Det viser seg at de eldre kjøper både billige og færre gaver, dette kan ha noe å gjøre med at det var vanligere med billigere og færre gaver før.

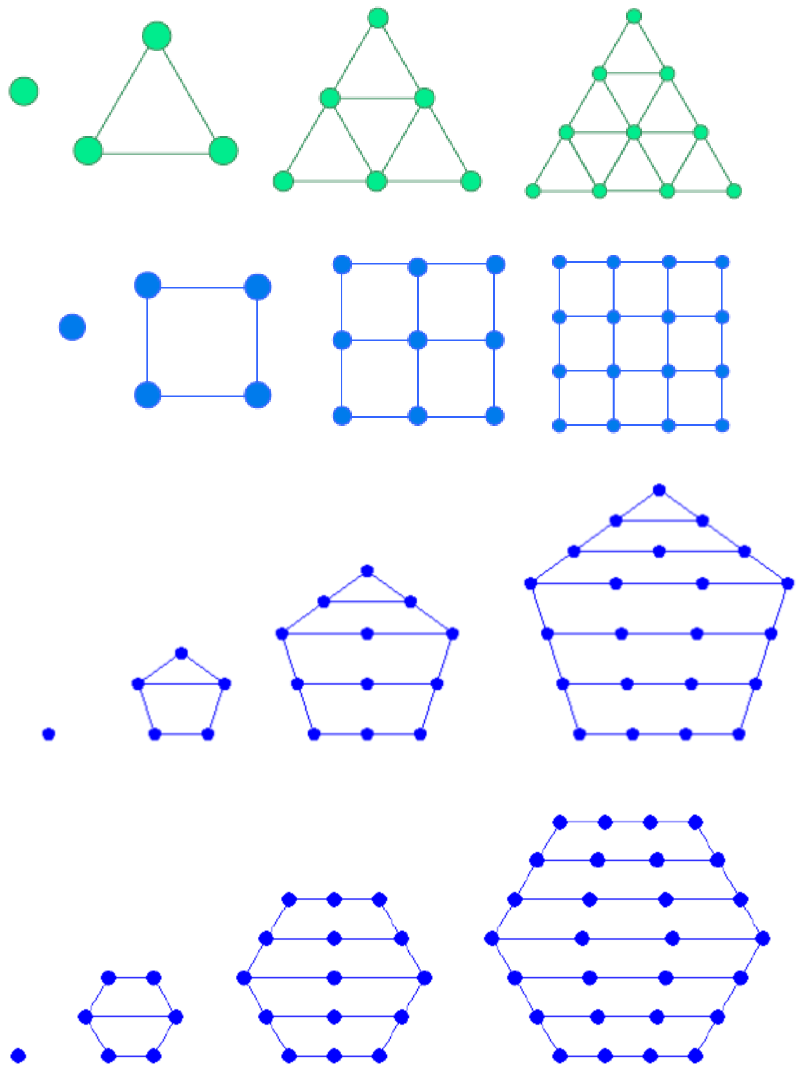
Flere politikere har snakket om strammere økonomiske tider i Norge men dette stemmer ikke overns med undersøkelsene som blir gjort.
Statistikk viser at i det siste året, 2013 har det vært en stor økning i prosent på kortbruk, det viser seg at det er en økning på 11 prosent i antall transaksjoner, og omsetingen er på ca 8 prosent. Likevel ser vi at det er flere som handler med bankkort, befolkningen bruker altså mindre kredittkort. dette har masse med lønning å gjøre, ettersom at de fleste blir lønnet den 10,11 eller 12 desember. Derfor kan vi se at lønn har en stor innvirkning på julgavehandlingen. Det er heller ikke bare før jul handelen er stor, mangen velger å kjøpe gaver på nett i romjulen og dagene rett før jualften, det viser seg at det er her mange kjøper juegaver. Ved å kjøpe gavene på nett, slepper de kø, og kulde. De gode tilbudene på nett er også en påvirkende faktor.

Alt i alt vil vi si at det er en stor sammenheng mellom hvor gammel du er og hvor mye, og hvor mange, du kjøper gaver for. De som er i 20-30 års alderen bruker mye mer penger på gaver enn dem som er i 60-80 års alderen. En av damene vi intervjuet, som var rundt 70, sa “Jeg skal kjøpe gaver til rundt 7 stykker, og jeg bruker ALT for mye, hele 5000”, mens en annen dame vi intervjuet, som var 22 år gammel, planlagte å bruke 15 000 på gaver, til bare 10 personer. Denne store forskjellen i penge bruk tror vi kommer av alderen og da også tiden man vokste opp på. En som vokste opp på 60 tallet har en annen oppfatning av hva som er mye penger, enn en som vokste opp nå i nyere tid.

3.5 Figurtall

I dette forløp på mat R2 blev figurtallene introdusert for elevene av læreren, som tegnet figurer på tavlen og forklarede, hvordan man kommer fra den ene figur til den neste i de første fem til seks tilfelle. Etterpå var det elevene sin oppgave at gi en matematisk beskrivelse. Oppgaven ble stilt til elevene i form av et skjema, som de skulle fylle ut eller ferdiggjøre. Målet med forløpet var igjen at få elevene i en situasjon, hvor de måtte bruke al deres matematiske fantasi og kreativitet uten at ha mulighet for at kontrollere deres svar i en fasitliste.

Systemet i figurtallene kan forklares på flere forskjellige måter ved hjelp av figurer. En av måtene er antydet her:



Skjemaet til elevene kan se ut slik:

Tall	1.	2.	3.	4.	5.	6	7	8.	….	n
Trekant T_n	1	3	6	10						
Kvadrat K_n	1	4								
Femkant F_n	1		12		35					
Sekskant S_n	1			28						
…										
…										
…										
Tikant Ti_n	1	10								
…										
k-kant k_n	1									

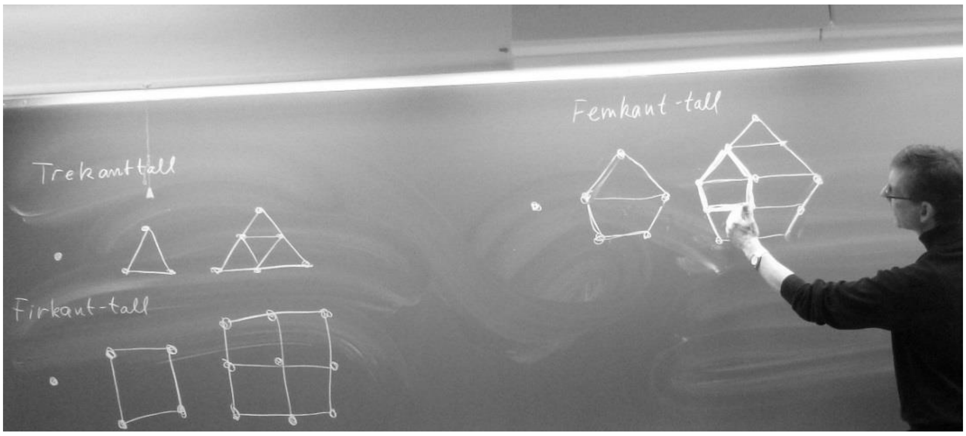
Figur 2

I nedenstående tabell er vist et eksempel på, hvordan man kan bruke skjemaet til at finne det generelle uttrykket i hvert tilfelle, men dette hint blev altså ikke gitt til elevene.

	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6		Generell
Trekantstall	**1**	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**		**½ · n(n+1)**
	Vokser med	2	3	4	5	6	n	
Firkantstall (kvadrattall)	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**		**n^2**
	Vokser med	2 · 2 - 1	2 · 3 - 1	2 · 4 - 1	2 · 5 - 1	2 · 6 - 1	2 · n - 1	
Femkantstall	**1**	**5**	**12**	**22**	**35**	**51**		**3/2 n^2 - ½n**
	Vokser med	3 · 2 - 2	3 · 3 - 2	3 · 4 - 2	3 · 5 - 2	3 · 6 - 2	3 · n - 2	
Sekskantstall	**1**	**6**	**15**	**28**	**45**	**66**		**2n^2 - n**
	Vokser med	4 · 2 - 3	4 · 3 - 3	4 · 4 - 3	4 · 5 - 3	4 · 6 - 3	4 · n - 3	
k-kantstall	**1**	**k**	**3(k - 2) - (k - 3) + k**	**...**	**...**	**...**		**½ k (n^2 - n) - n^2 + 2n**
	Vokser med		3(k - 2) - (k - 3)	4(k - 2) - (k - 3)	5(k - 2) - (k - 3)	6(k - 2) - (k - 3)	n(k - 2) - (k - 3)	

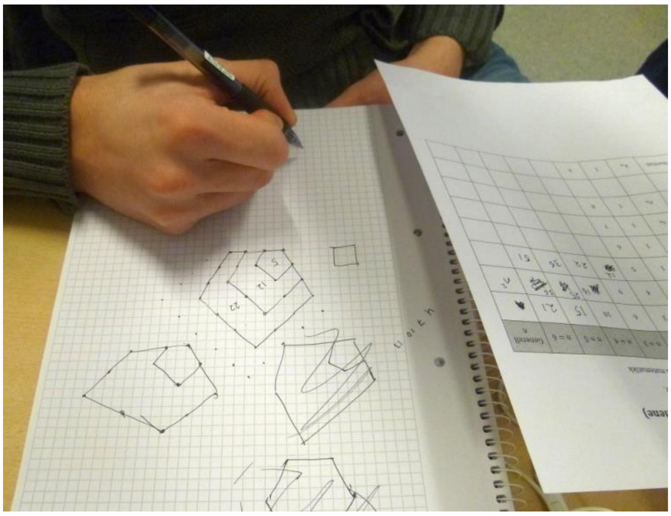
Erfaringer:

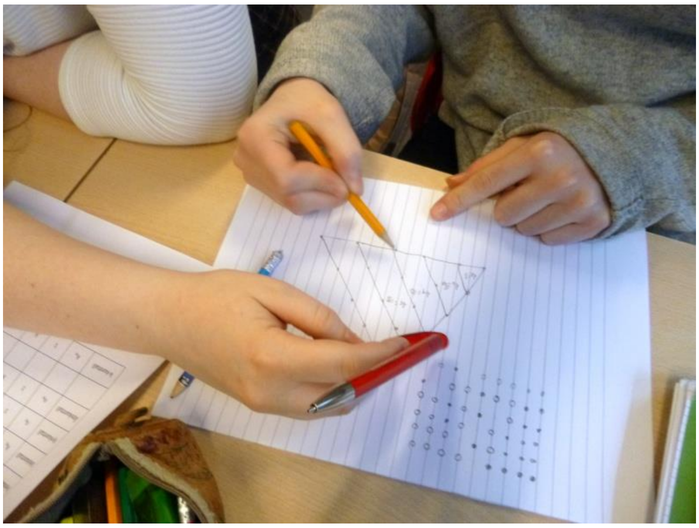
Elevene var ikke kjent med figurtall innen forløpet. Læreren hadde introdusert figurtallene for elevene på tavlen ved at forklare og tegne, hvordan man finner det neste figurtall som utvidelse av den foregående polygon (Se Figur 3)



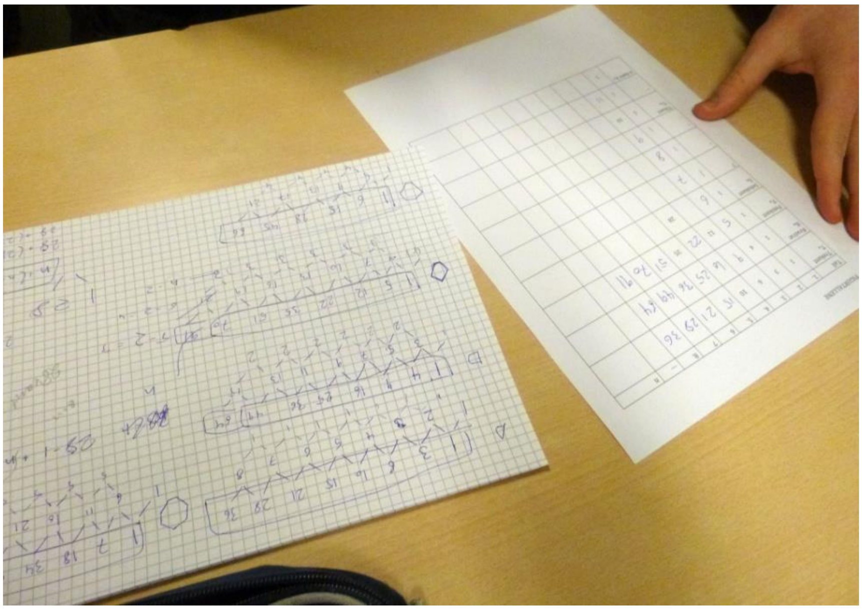
Figur 3

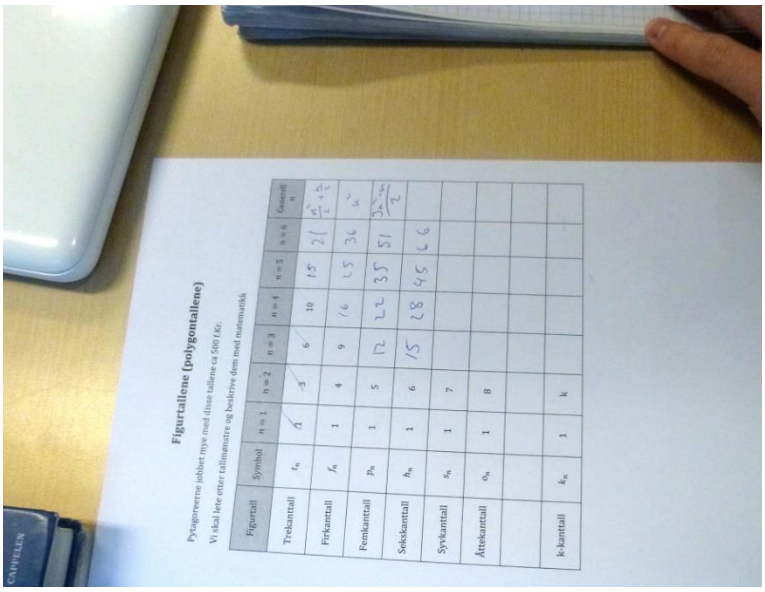
Elevene fikk til oppgave at utfylle et skjema som på Figur 2. Der blev ikke gitt noen ideer eller hints til, hvordan de skulle gå frem, det var helt opp til de topersoners grupper, elevene var blitt delt inn i. Det viste sig vanskelig for en del elever overhodet at finne ut av, hvordan de kunne tegne sig frem til det neste figurtall, når de hadde det foregående.





De fleste av elevene kombinerte tegning med at telle og se etter mønstre enten i rekkene eller i søylene i skjemaet, eller begge stedene. De var engasjerte, og det lykkedes for de fleste gruppene at fylle arket med de riktige tall. De generelle uttrykk ga en del vanskeligheter, men en del grupper kom også igjennom med dette.





En episode fra utprøvningen av forløpet med figurtall er gjengitt og diskutert i avsnittet diskusjon av utvalgte utklipp.

3.6 Undersøke sammenhenger i differensialrekning

Bakgrunn

Med utgangspunkt i materialet
http://www.teachingcollegemath.com/files/pdf/integration_techniques_wolfram_alpha.pdf

fra siden http://busynessgirl.com/wolfram-alpha-for-inquiry-based-learning-in-calculus/

har tre lærer jobbet med Inquiry Based Learning.

Anne ønsket, at elevene måtte finne ut hvilken stamfunksjon, som passet til hvilket integral, mens Håkon fikk elevene til å gjette en løsning til stadig vanskeligere differensiallikninger. Det siste opplegget gir en mulighet for å gjette, hvordan kjerneregelen virker.

Målgruppe

De to første oppleggene passer for mat R2, mens det siste passer for mat R1 og S2.

Kompetansemål

R2 - funksjoner

- Beregne integraler av de sentrale funksjonene ved antiderivasjon og ved hjelp av variabelskifte, ved delbrøkoppspalting med lineære nevnere og ved delvis integrasjon.

R2 - differensiallikninger

- Løse lineære førsteordens og separable differensiallikninger ved regning og gjøre rede for noen viktige bruksområder.

R1 - funksjoner

- Bruke formler for den deriverte til potens-, eksponential- og logaritmefunksjoner og derivere summer, differanser, produkter, kvotienter og sammensetninger av disse funksjonene.

S2 - funksjoner

- Derivere polynomfunksjoner, potensfunksjoner, eksponentialfunksjoner og logaritmefunksjoner og summer, differanser, produkter og kvotienter av disse funksjonene og bruke kjerneregelen til å derivere sammensatte funksjoner.

Integraler

Navn____

Gå til www.wolframAlpha.com eller GeoGebra og finn integralene

Nr	Integrer	Svar
1	$\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x$	
2	$\int \frac{2x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$	
3	$\int xe^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$	
4	$\int xe^{-2x}\,\mathrm{d}x$	
5	$\int x^2e^x\,\mathrm{d}x$	
6	$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$	
7	$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$	
8	$\int x\cdot e^{-x}\,dx$	
9	$\int_1^e x^2\cdot \ln x\,dx$	
10	$\int 2x\ln x^2 dx$	
11	$\int 2xe^x dx$	
12	$\int 2xe^{x^2+1}dx$	
13	Finn arealet mellom grafen til funksjonen $f(x)=\frac{1}{x}-x$ og $x-$aksen, når x ligger mellom 0,5 og 1	

Prøv å se etter mønstre i svarene og hvilke type oppgaver, som gir ulike typer svar.

Differensiallikninger

Vi skal finne en funksjon (eller flere), som passer i likningene.

Når du har et forslag til en funksjon $y(x)$, deriverer du denne og setter inn i likningen. Hvis ikke den passer helt prøver du å se, hvordan du kan justere slik, at den kan passe.

(Elevene får bare kolonnen med likninger)

	Likning	Mulig tips (hvis det kan hjelpe noen til å komme videre)	En løsning	Alle løsninger
1	$y' = 0$		$y = 2$	$y = C$
2	$y' = 2$		$y = 2x$	$y = 2x + C$
3	$y' - y = 0$ $(eller\ y' = y)$		$y = e^x$	$y = Ce^x$
4	$y' - 2y = 0$	Prøv $y = e^x$ først og se så, om du kan justere på denne for å få det til å passe	$y = e^{2x}$	$y = Ce^{2x}$
5	$y' - y = 1$	Prøv først $y = e^x + k$	$y = e^x - 1$	$y = Ce^x - 1$
6	$y' - y = 4$	Justere rad 5	$y = e^x - 4$	$y = Ce^x - 4$
7	$y' - 2y = 6$	Prøv $y = e^{px} + k$, og se, hva p og k kan være	$y = e^{2x} - 3$	$y = Ce^{2x} - 3$
8	$y' - y = x$	Prøv med et x ledd i tillegg	$y = e^x - x - 1$	$y = Ce^x - x - 1$
9	$y' - 2y = 4x$	Endre på rad 8.	$y = e^{2x} - 2x - 1$	$y = Ce^{2x} - 2x - 1$
10	$y' - 4xy = 0$	Prøv e^{x^2}	$y = e^{2x^2}$	$y = Ce^{2x^2}$

Derivasjon av sammensatte funksjoner

Sammensatt funksjon

Funksjonen $f(x) = (2x+1)^2$ er sammensatt av først $2x+1$ og dernest opphøyd i andre. Den *indre funksjonen*, eller *kjernen*, er $2x+1$, *den ytre funksjonen* er $(\ )^2$.

Derivasjon av sammensatte funksjoner

Nå skal vi prøve å derivere noen sammensatte funksjoner og se etter et mønster. Dere åpner GeoGebra og CAS-vinduet. Skriv inn den sammensatte funksjon og trykk på f' – knappen. FYLL UT tomme felter. Fortsett, til dere er sikre på systemet og kan formulere en generell regel.

Indre funksjon	Ytre funksjon	Sammensatte funksjon	Deriverte funksjon
$x+1$	x^2	$(x+1)^2$	$2(x+1)$
$x+7$	x^2		
$x+1$	x^3	$(x+1)^3$	
$x+7$	x^3		
	x^4		
x^2+1	x^2	$(x^2+1)^2$	
$3x^2+2$	x^2	$(3x^2+3)^2$	
x^3+4	x^2	$(x^3+4)^2$	
		$(3x^2+x)^2$	
		$(2x^3+9)^2$	
		$(2x^3-5x+9)^2$	
		$(2x-7)^3$	
		$(4x^2-7)^3$	
		$(4x^2+2x-7)^3$	
$u(x)$	x^n	$\left(u(x)\right)^n$	

Kan dere etter hvert formulere en generell regel for derivasjon av sammensatte funksjoner?

$f'\left(u(x)\right) =$

Erfaringer

Erfaringer fra å bruke CAS til å integrere funksjoner ved delvis integrasjon, variabelskifte og delbrøkoppspalting.

Elevene fikk utdelt et ark med forskjellige funksjonsuttrykk. De skulle bruke CAS ([www.wolframAlpha.com)](http://www.wolframAlpha.com) eller GeoGebra til å finne integralene til funksjonsuttrykkene.

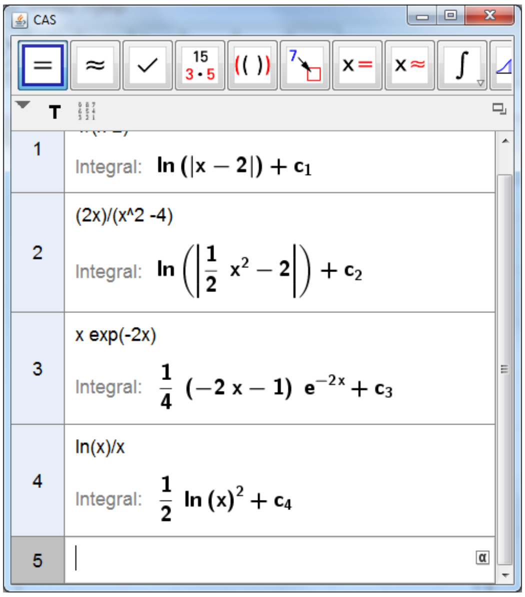
De skulle prøve å se etter mønstre i svarene og finne ut, hvordan og hvorfor integrasjon av de forskjellige uttrykkene ga ulike svar.

I starten var en del av elevene lite villig til å integrere uttrykkene ved å bruke CAS. De mente, at å bruke digitale hjelpemidler på denne måten var en form for juks, og at svarene ikke ga mening.

Etter hvert begynte elevene å se noen mønstre, der metoden med variabelskifte ble brukt. I klassediskusjonen, som fulgte, kom det frem flere forslag til løsningsmetode på integralet av $\int \frac{2x}{x^2-4}dx$, og at vi kunne sette $u = (x^2 - 4)$ og dermed omforme uttrykket til $\int \frac{2x}{u}dx = \int \frac{u'}{u}dx$.

Ved å derivere u og innføre $u' = \frac{du}{dx}$ fikk vi fram sammenhengen $u' = \frac{du}{dx} = 2x \;\Rightarrow\; du = 2x\,dx$ og dermed, at vi kunne skrive følgende: $\int \frac{2x}{u}dx = \int \frac{u'}{u}dx = \int \frac{1}{u}du$. Vi hadde funnet mønsteret til metoden med variabelskifte.

Det var vanskeligere å finne mønstrene til de to andre metodene, de måtte vi utlede ved regning.



Da elevene hadde arbeidet med integrasjonsmetodene i ca 1 uke, fikk de en test i å integrere uttrykk, der de skulle bruke alle tre metodene. Resultatet på testen viste, at de fleste elevene fikk til å integrere ved å bruke metoden med variabelskifte. Det var kun noen få elever, som også behersket de to andre metodene. De fleste blandet sammen metoden med delvis integrasjon og metoden med variabelskifte.

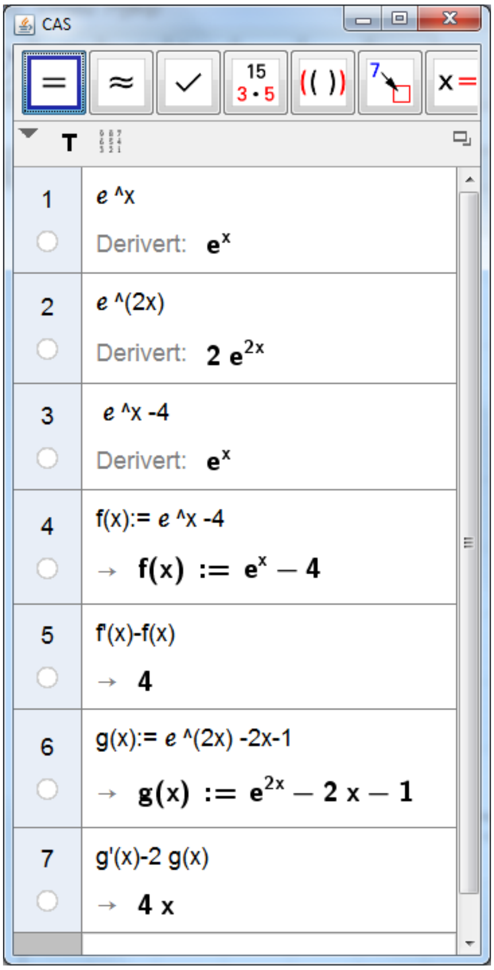
Det er naturligvis ikke mulig å trekke noen konklusjoner av denne lille testen. Etter å ha arbeidet mer med integrasjon, lærte de fleste elevene å bruke alle integrasjonsmetodene.

Jeg tror, at å ta i bruk digitale verktøy også i innlæringsfasen kan være nyttig. Når elevene finner svaret uten å regne først, og må prøve å finne et mønster selv, blir de kanskje mer aktive i innlæringsfasen. Min erfaring fra dette lille prosjektet er, at når elevene begynte å arbeide med å finne mønstre, og fant et mønster, ble de også interessert i å finne ut, om de hadde funnet det rette.

Erfaring fra differensiallikninger

Det er en utfordring å få elevene til å forstå, hva en differensiallikning egentlig er, de lærer seg bare teknikkene for, hvordan de skal løses. Når forståelsen mangler, kan det for eksempel være utfordrende for dem å forstå, at de kan sette løsningen, de har funnet, inn i likningen for å se, om den passer. (Men de kan lære det også som teknikk.)

Ved at de selv fikk mulighet til å løse helt enkle differensiallikninger ved å tenkte integrasjon, synes jeg, flere elever fikk bedre forståelse. Ved prøving og feiling, der de setter inn forslaget sitt i likningen og så prøver å korrigere for å finne en løsning, som passer bedre, var det mange aha-opplevelser. Utfordringen er at vanskelighetsgraden stiger raskt (for eksempel fra nr. 4 til nr. 5), så mange elever kommer ikke lenger enn til nr 4. uten gode tips (men en del kommer videre!)



I praksis har jeg først skrevet opp 1 og 2 på tavlen, og vi har kommet frem til løsningene sammen. Så har jeg skrevet opp tre eller fire oppgaver til og latt dem jobbe med dem, gjerne i grupper. Noen må ha hjelp på 3 også ("Vet dere om en funksjon, som ikke endres, når den blir derivert?" Det vet de selvsagt!)

Det er nyttig å la dem prøve og feile en stund og se, hvor langt de kommer. Noen gir opp fort, men noen vil aldri gi seg! Det er nyttig å gå rundt og se på, hvilke forslag de har, og gi dem litt hjelp til å se, hva som skjer.

Etter dette er det ikke så underlig for dem at e^x dukker opp i løsningsmetodene, og at vi egentlig skal finne en funksjon, som passer i likningen.

Det kan kanskje legges inn flere likninger, som er (nesten) like, slik at de får litt mer mestringsfølelse fra trinn til trinn. Men her er det jo tiden, som er en utfordring.

Derivasjon av sammensatte funksjoner

Elevene var først noe i stuss over den uvante arbeidsmetoden. De måtte ha litt tid på å bli trygge på å kaste seg ut i det ukjente og søke etter et mønster.

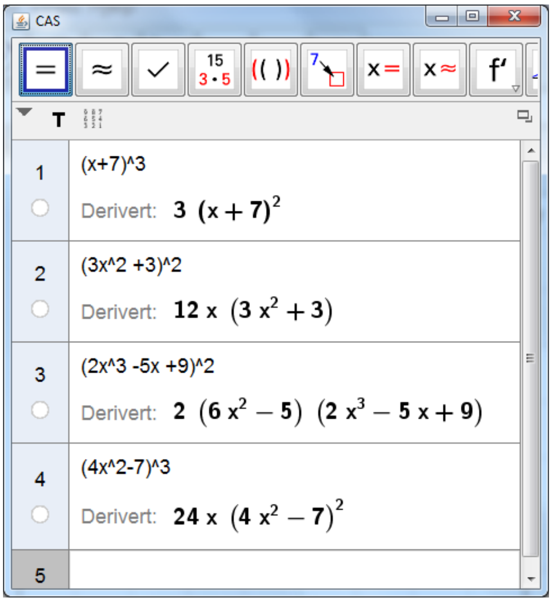
Noen elever begynte å se systemet, mens det for andre gikk helt i svart, da GeoGebra ga svarene på utvidet form, altså ikke-faktorisert. Når elevene får et svar som

$$24x^5 - 80x^3 + 108x^2 + 50x - 90$$

isteden for

$$2(6x^2 - 5)(2x^3 - 5x + 9)$$

så blir det vanskelig å se noe system. Dette ble ikke oppdaget av læreren, da det var forskjell på versjonene av GeoGebra. Problemet ser heldigvis ut til å være løst nå.


CAS
1
(x+7)^3
Derivert: 3 (x + 7)²
2
(3x^2 +3)^2
Derivert: 12 x (3 x² + 3)
3
(2x^3 -5x +9)^2
Derivert: 2 (6 x² − 5) (2 x³ − 5 x + 9)
4
(4x^2-7)^3
Derivert: 24 x (4 x² − 7)²
5

3.7 Din første leilighet

Introduksjon

Hvor mye popcorn kan der være i en beholder laget av et A4-papir?

For å starte utforskningen valgte Jørgen å begynne med noe enkelt og konkret. Hvordan lage en romslig figur av et A4-papir, som får størst volum?

Denne oppgaven kan også brukes som intro til vanlig optimeringsoppgaver i mat 1T, mat S1, etc. Mat 1P er begynt å få slike oppgaver på eksamen, mens en del av lærebøkene i 1P ikke har dette med. Ennå.

http://threeacts.mrmeyer.com/popcornpicker/

Vannstanden i en vannbeholder

http://threeacts.mrmeyer.com/coffeetraveler/

En annen oppgave er å lage en beholder, fylle den nesten med væske og legge beholderen på en annen måte. Først komme med et kvalitative gjett på høyden, dernest gjøre beregninger. Kan utvides til å lage en funksjon av fyllehøyden.

Prosjekt - din første leilighet

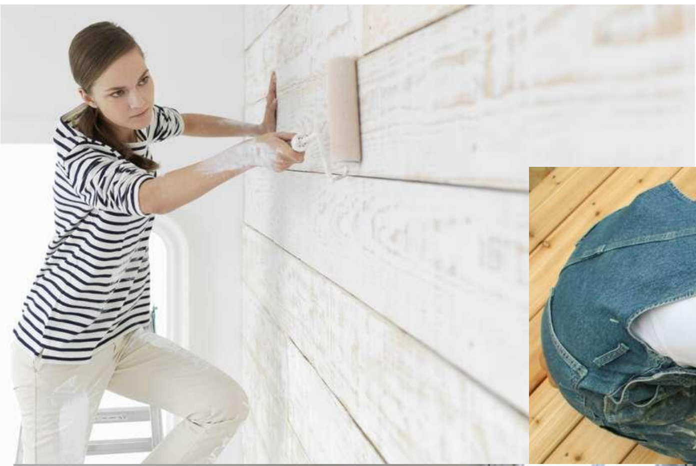
Jørgen har en 1P-klasse. De har forskjellige tema som brukes i dette prosjekt.
Målestokk, arealberegning, omkrets, omregning av enheter, overslagsregning, budsjett, bruk av regneark. Målet med prosjektet var at slippe elevene løs og la dem arbeid uten bok og fasitliste, med realistiske oppgaver. Deretter skulle de reflektere over prosessen og til slutt presentere sluttproduktet for de andre i klassen.

De blir bedt om å lage et budsjett ut fra et oppgitt beløp og lage en plantegning av leiligheten. Finne ut hvor mye maling og tapet, som må kjøpes inn, hvilke møbler de har plass og råd til, samt vurdere, hvordan leiligheten skal varmes opp.
Elevene må føre logg over progresjonen, hva de har funnet ut i timen, hva de må ordne til neste time, og hva som fremdeles gjenstår å gjøre.

Oppgaven: Din første leilighet

Du har akkurat kjøpt din første leilighet. Siden du har begrensede midler, trengs det en del oppussing. Du har bestemt deg for å begynne med stua og soverommet, siden badet og kjøkkenet er av høyere standard enn resten av leiligheten. Du vil pusse opp begge rommene fra bunnen av. Det vil si at du skal:

- legge nye gulv
- male vegger og tak, eventuelt tapetsere noen av veggene
- legge nye lister langs gulv og tak
- møblere rommene
- sørge for oppvarming og belysning.



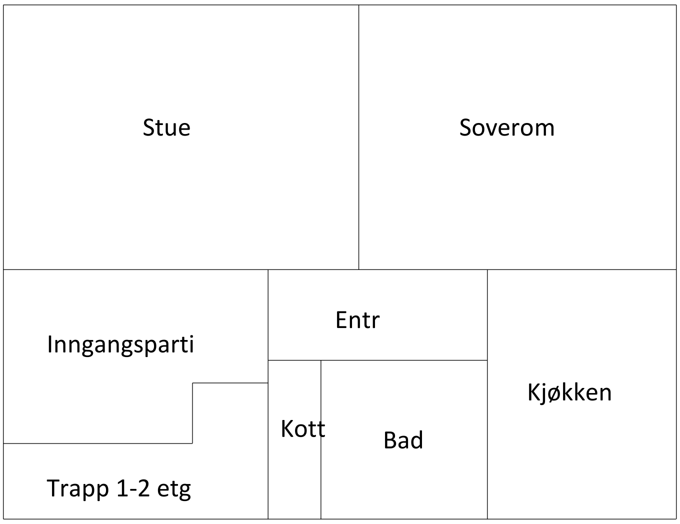
I utgangspunktet har du satt av 30.000 kr til oppussingen. Du legger også av 5.000 kr hver måned en periode fremover, som du kan bruke etter hvert.

Informasjon om leiligheten

Under finner du en plantegning over leiligheten din. Denne er i målestokken 1:100.

I tillegg har vi følgende informasjon:

- Takhøyden er 2,4 m,
- Begge rommene har en dør, som er 205 cm høy og 85 cm bred,
- Begge rommene har et vindu, som er 155 cm høyt og 155 cm bredt.



Hva skal du gjøre

Du skal planlegge gjennomføringen av oppussingen. For å holde kontroll på kostnadene må du lage deg et budsjett. I budsjettet må du legge henvisninger til, hvor du har hentet informasjon om kostnadene dine.

Du må også sette opp en tidsplan på hva, som skal gjøres når: hva skal de første 30.000 kr brukes til, hva skal gjøres måneden etter det? osv.

Dere har to uker på å fullføre arbeidet. På slutten av øktene vil dere bli bedt om å skrive en liten logg over, hva dere har gjort, og hva dere planlegger å gjøre neste gang. Om nødvendig forventes det, at noe blir gjort også utenfor undervisningen.
Etter at vi er ferdige, skal dere presentere det, dere har gjort for de andre i klassen.

Erfaringer.

Hver gruppe skulle lage en presentasjon av deres arbeid, som inneholdt de resultatene, gruppen var kommet frem til, samt overveielser over, hvilken matematikk de hadde brukt, og hvilke vanskeligheter de var støtt på.

Alle gruppene gjennomførte på egen hånd relevante beregninger for at finne ut av, hvor mange penger der skulle brukes på maling, lister etc. til istandsettelsen av leiligheten. I den forbindelse lagde de selv plantegninger i passende målestokksforhold, og det var livlig diskusjon i klassen. For eksempel fant en gruppe på et relativt sent tidspunkt ut, at begge sider av en lettvegg skulle males, og at vindusflatene kunne trekkes fra veggens areal, når malingsmengden skulle beregnes. Gruppene gikk mye opp i møbleringen av leiligheten med undersøkelse av hjemmesider fra IKEA og andre.

Alle gruppene kunne presentere rimelige eller gode resultater i form av et noenlunde realistisk budsjett. De beregninger, som elevene gjennomførte, var ganske enkle, som de følgende eksempler på slides fra de forskjellige elevpresentasjonene viser:

	A	B	C	D	E	F
1	Stue&Soverom					
2						
3	Oppussing	Areal/omkr	Materiale	pris		Plassering
4	Maling	a= 150,18	18,78L	1603kr	Hvit	stue/soverom
5	Gulv	a= 32	32m^2	1090,25kr	lysebrun	stue/soverom
6	Lister	o= 31,8	13 stk	1274kr	lysebrun	stue/soverom
7	Oppvarming	16,45	3stk	8085kr	Varmekabler	stue
8	pluss ovn		2stk	998kr		soverom
9	Lys		6stk&2stk	1188krog 158kr		
10					Til sammen	14 396,25kr
11	Innredning					
12	Møbel	pris				
13	Sofa	2990				
14	Seng/madras	3990				
15	Teppe	438				
16	Skap	1596				
17	Tv	1995				
18	sofaPuter	850				
19	Dyne&pute	56				
20	Sengetrekk	59				
21	dekorasjon	30,85				
22	stue bord	950				
23	stol	990				
24	puff	690				
25	totalt	14634,85				
26						
27	Til sammen	29 031,1				

Gulv			**2122,05**	**1896,3**
pris pr M			**129**	**129**
størrelse			**16,45**	**14,7**
vegger			**1095**	
maling Pris pr L			**146**	
hvor mye i L			**7,5**	
tak			**876**	
maling Pris pr L			**219**	
hvor myei L			**4**	
lister			**209,85**	
Tak lister pris pr			**69,95**	
hvor mange			**3**	

= 6199.2 kr

Der var lite eller intet i presentasjonene, som avspeilet diskusjon i gruppene om, hvilke vanskeligheter de var kommet bort i under arbeidet. Utover beregningseksempler blev det heller ikke fortalt mye om, hvilke matematiske emner, begreper eller anden hjelp de hadde hatt bruk for. De følgende eksempler, igjen fra forskjellige presentasjoner, viser dette:

Tak og vegger – 199kr I

- Areal av tak – samme som gulv: 31,5 m2
- Areal av vegger: Takhøyde: 2,4m

- 8,4 x 3 = 25,2 m2 = Arealet av de 3 korteste veggene
- 21,6 x 2 = 43,2 m2 = Arealet av de 4 lengste veggene
- 25,2 + 43,2 = 68,4 m2

- Så må vi trekke fra dører og vinduer:
  Areal av dør = 205 cm x 85 cm = 17 425 cm2
  Areal av vindu: 155 cm x 155 cm = 24 025 cm2
- Cm2 delt på 10 000 = m2
  17 425/10 000 = 1,7425 m2 = 1 dør.
  24 025/10 000 = 2,4025 m2 = 1 vindu

1, 7425 + 2,4025 = 4,145 x 2 = 8,29 m2 (Arealet av Begge dørene og begge vinduene)

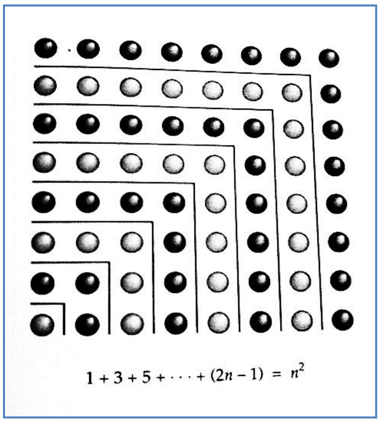
99,9 (Arealet av tak og vegger) – 8,29 (Arealet av dørene og vinduene) = 91,61 m2 som skal males
Vi kjøpte en 10 liters malingspann for 199, der 1 liter dekker 10m2. VI har altså nok maling til 100m2

Det virket ikke, som om elevene var vant til at diskutere, hvordan prosessen hadde været i forbindelse med avslutningen av et gruppearbeid i matematikk. I alminnelighet kan man si, at hvis elevene hadde lagt (mere) vekt på at få svar på disse spørsmål, ville det kunne ha gitt mulighet for et interessant innblikk i elevenes forestillinger om, hva matematikk er, og hvordan man kan forvente, at matematisk problemløsning forløper.

4 Diskusjon av utvalgte utklipp

4.1 Rekker. To episoder (fra Andresen, M. (2015a)).

Det følgende er en summarisk oversettelse av brudstykker av dialogen mellom to par elever (P1, P2 og P, S) der arbeider med oppgaven på Figur 4:



Figur 4

Felles for de to episodene er, at «løsningen» kommer fra en elev, som har innsett sammenhengen, og at denne elev fremprovoserer en glimtvis innsikt hos de andre elevene. I de to episodene er det tydelig, at det ikke oppleves noe behov for argumentasjon, men det ser ikke ut til at være tvil om, at elevene ville kunne prestere en passende argumentasjon, når først den glimtvis innsikt er oppnådd. I episode 2 kan de to elevers første forsøk på å finne selve summene S_i (1. søyle Tabel1) ses som et eksempel på AR (algoritmisk tenkning), idet de uten nærmere overveielser går ut i fra, at de skal kopiere løsningen fra forrige oppgaven. Begge deres senere forsøk på å finne system i summene, det første forsøk nedskrevet i søyle 2 Tabel1 og det andre gjentat,t da summene er korrigert, kan tolkes som tilløp til kreativ matematisk tenkning, idet elevene ser (for dem) nye sammenhenger uttrykt i oppsplitting av S_i, (2. søyle Tabel1), og selve utregningene stemmer jo.

Episode 1:

P1 har sett sammenhengen og forklarer for P2 (peker på figuren): Vi må finne ut, hvordan summen av de to første rekker, altså den og den, har sammenheng med, hvordan figuren er laget. Og når vi ser, at summen for alle rekkene,… altså summen for det n'te… S_n er lik n^2… P2: Altså 2 gange 2 er 4,… (peker på nederste venstre hjørne av figuren), 3 gange 3 er 9, … P1: Der ser du et kvadrat… Jeg hadde ikke lagt merke til fra begynnelsen, at det var kvadrattall. P2: Ja, det var egentlig bare det.	Episoden viser ikke noe om, hvordan P1 har funnet frem til sin løsning. Den ganske korte forklaring overbeviser ikke blot P2; det virker, som om P2 opplever en innsikt i et glimt, når hun bliver presentert for forklaringen. Dermed er det ikke behov for, at P1 argumenterer for løsningen på nogen måte.

Episode 2:

P: (skriver) $S_1 = 1,\ S_2 = 1 + 2$ eller $1 + 3$? D: $1 + 3$. P insisterer og skriver $1 + 2$.	Dialogen mellom P og D viser, hvordan de tar utgangspunkt i den foregående oppgave (på Figur a) og forsøker å kopiere fremgangsmåten fra den. De fortsetter. (Min rekonstruksjon Tabel1, 1. søyle). D foreslår i begynnelsen av episoden, at de skriver $1 + 3$, men overtrumfes av P uten argumentasjon.
D: (peker) Så må vi se, om den pluss noe annet kan blive det (summen)(...) De bliver enige om å omskrive til $S_2 = 2 + 1$, og bruker dette system til å omskrive opp til S_8.	Da de ikke skjelner klart imellom a_n og S_n og ikke tydelig forbinder disse med "rekkene" henholdsvis "arealet" på figuren, oppnår de ikke å finne frem til en egentlig fremgangsmåte, men skriver blot samme uttrykk som i den foregående oppgave, hvor a_i var ligg med antall elementer i diagonal nummer i. Denne strategi stemmer overens med Lithner's AR.
De to forsøker at finne et rekursivt uttrykk. (...) P: (skriver) $a_n = a_{n-1} + 2$. D: Stemmer det? Det er S_n. P: S_2 (peker på det, hun nettopp har skrevet) blir $2 - 1 + 2$, det er 3. (Skriver) $S_n = S_{2-1} + 2 = 3$.	Deretter, da de går videre og vil finne et system i uttrykkene for $S_1, S_2, \ldots$, finner de selv på en oppsplitting i to led, som avhenger av i (2. søyle Tabel1).
D: Men så S_{3-1} ? P: Og så er $S_p = S_{p-1} + 2$ – hov, der er altså noe galt! Vi har jo likesom funnet noe helt andet...	Denne oppsplittingen viser seg og ikke føre til noe, idet den ikke knytter a_n til «arealet» av figuren, og de oppgir den på eget initiativ og i enighet.
D: Det er bare pluss i stedet for minus, $p + 1, +1 + 2$, det blir 6. P: Åh ja!	Dette ligner rent gjettverk og blir ikke tatt videre opp
H (fra den gruppen, som sidder foran) vender sig om og hjelper. H: Men dette stemmer jo ikke? P: Jo. H: Hvordan stemmer det? S_7 er lig 28? P: Jo vi har lagt dem alle sammen, fasit. H: Men se her (peker på figuren) – dere må jo legge sammen $1\ +\ 3\ + \cdots$ P: Åh ja, vi har jo bare tatt $1 + 2 + 3$ (peker på søylene). H: Det er jo kjedelig å skrive alt det her opp (peker på alle summene), bare skriv S_1. P: 4. H: nei det er jo S_1	Med hjelp fra en annen elev (H) knyttes S_n her til "arealet" av firkant nummer n. H refererer til resultatene i 1. søyle Tabel1, da hun sier, at det ikke stemmer. P forsvarer deres resultat ved å sige at de har lagt sammen alle tallene og har fått en fasit(!), men lar seg hurtig overbevise, da H peker på figuren og sier, at det er de feile tallene, de har lagt sammen. H forsøker å overbevise dem om, at de må skrive det kortere S_i ved å si, at det er kjedelig å skrive den lange tallrekke. Kanskje gjentar hun en kommentar læreren vanligvis kommer med.
P: (skriver) $S_1 = 1,\ S_2 = 4,\ S_3 =$ (teller) 5,6,7,8,9, (skriver) 9, $\ S_4 =$ (teller)	P finner verdiene for S_i (3. søyle Tabel 1) ved å telle kulene på figuren.

10,11,12,13, etc. P fortsetter med å telle sig frem, skriver opp til S_8 (korrekt)...	
De vil finne »systemet» og forsøker seg igjen med summer. P: Og så må vi ta og gange – nei plusse ... D: S_2, så skal man ta for eksempel 2 ... P: Pluss 2 (skriver) $2 + 2$	D og P velger tilsynelatende lidt tilfeldig, uten å argumentere, mellom pluss og gange, da de deretter vil omskrive de nye verdiene av S_n.
D: 2 gange 4, det er der ingen vits i... P: Nei. D: Så vi begynner med $2 + 2$. $S_1 = 1$, $S_2 = 4 = 2 + 2$. D foreslår 2 gange 2 $+ 1$, men de blir enige om å gå videre med pluss $S_3 = 3 + 6$.	D overveier, om en av S_n- verdiene kan være fremkommet som 2 gange 4, men avviser straks tanken.
H (peker på tallene) P: Åh, kvadrattallene? H: Ja, (skriver) $S_n = n^2$, det har vi allerede funnet ut av.	De velger å benytte samme system som før, men bremses av H, som ved at peke på de nye verdier gjør P og D oppmerksomme på, at det er kvadrattallene – og her oppnår P og D den glimtvise erkjennelsen av sammenhengen.

Første oppskrivning	Omskrives til	Rettes med hjelp fra H til
S_1=1 S_2=1+2 eller 1+3? Skriver 1+2=3 S_3=1+2+3=6 S_4=1+2+3+4=10 S_5=1+2+3+4+5=15 S_6=1+2+3+4+5+6=21 S_7=1+2+3+4+5+6+7=28 S_8=1+2+3+4+5+6+7+8=36	 S_2=2+1 S_3=3+ 3, S_4=4+6 S_5=5+10 S_6=6+15 S_7=7+21 S_8=8+28	S_1=1 S_2=1+3=4 S_3=1+3+5=9 S_4=1+3+5+7=16 S_5=1+3+5+7+9=25 S_6=1+3+5+7+9+11=36 S_7=1+3+5+7+9+11+13=4 S_8=1+3+5+7+9+11+13+15=64

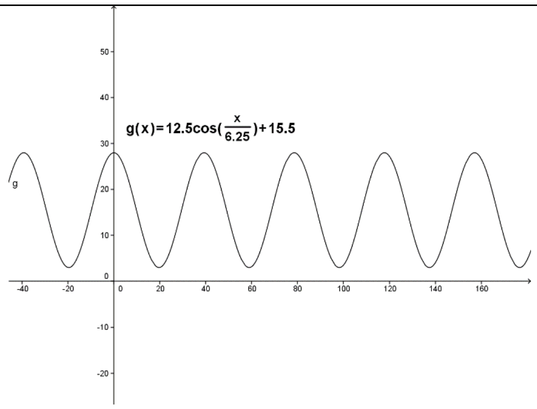
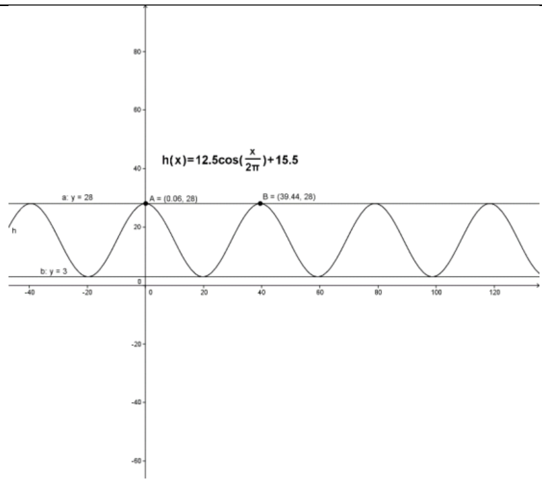
Tabell 1

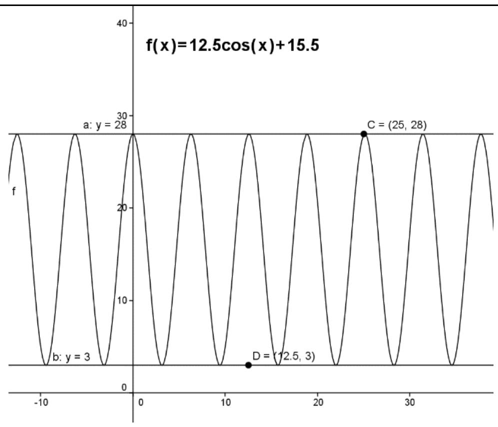
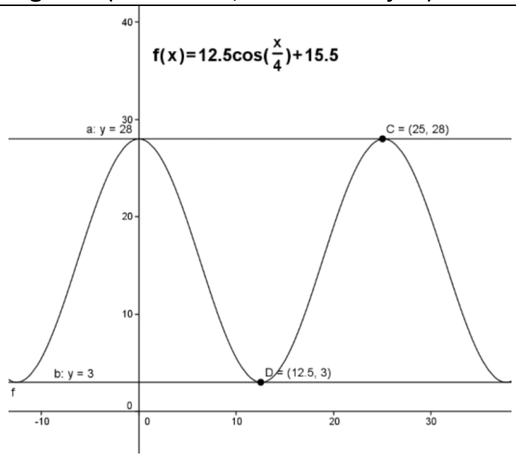
Begge episodene er eksempler på kreativ, matematisk tenkning, der vedrører elementær tenkning snarere end egentlig problemløsning, men de er oppstått i problemløsningssammenheng. Episodene illustrerer dermed, hvordan det at lade elevene arbeid med problemløsning kan gi grobunn for små glimt av kreativitet, såvel som tilløp til kreativ, matematisk tenkning.

4.2 Pariserhjul. En episode (fra Andresen, M. (2014))

I det følgende bringes en prøvebit på data fra forskningsprosjektet som forløp i tilknytning til utprøving av undervisningsmaterialet. Tallene i tabellen er de originale linjenumrene fra transskripsjonen av opptagelsen.

To gutter B1 og B2 arbeidet på oppgave e) og f). Rett før var resultatene av forrige times gruppearbeid blitt oppsummert, inklusive svar på oppgavene a) – d). Polya's skjema var introdusert ved starten av forløpet, og læreren hadde gjort en del ut av å påpeke, at det var meningen, at elevene skulle forsøke at lave deres egne undersøkelser og svare på egen hånd på oppgavens spørsmål. B1 og B2 hadde fått tegnet en skisse av grafen på papir. Læreren kom forbi og oppfordret dem til at åpne GeoGebra, som klassen var fortrolig med at bruke. B1 og B2 fulgte rådet og fik fort tegnet grafen for en cosinus-funksjon, som passet med ekstremalpunktene i loddrett retning, men ikke i vandret. Kurven skulle altså passes til i vandret retning.

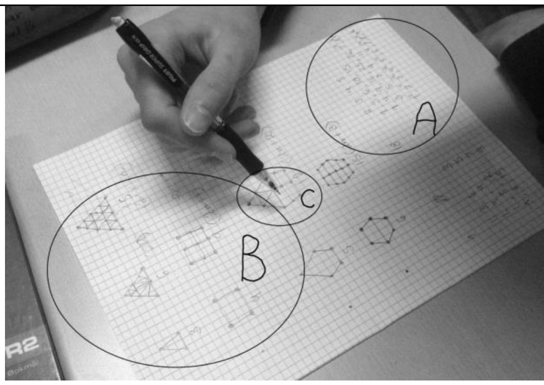
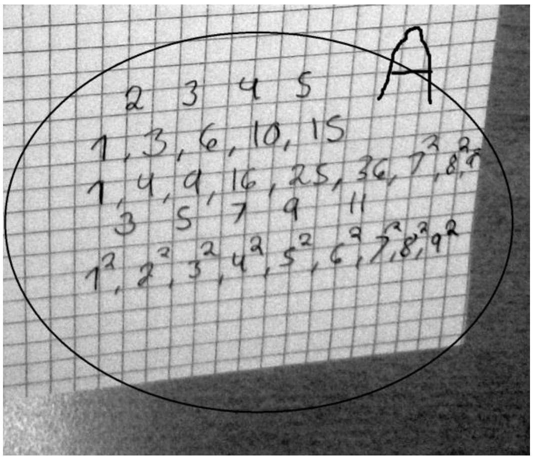
195 T: Litt for fort ... 196 B1: (Gjentar) Litt for fort (trekker i grafen i vandret retning, uten at endre på den).	Her setter læreren elevene på sporet av sammenhengen mellom tiden som parameter og grafens utseende.
198 B1: Okay, hva skjer her? (peker på grafen på papiret). Vi brukte det her (peger på midtpunktet av grafen på sitt papir), men hvilket tidspunkt er det her?	B1 refererer til svarene på oppgave a) - d). B1 og B2 fortsetter, idet de fokuserer på tiden som parameter.
231 B2: Det er, lissom hvis du starter i bunnen... Jeg mener, hvis du starter i toppen, som jeg gjorde her, hvis du starter i toppen, er tiden 0, og så bliver det 90 gange den, ikke? Fordi, så starter du på toppen (beveger hendene i en sirkel) og 90 gange så meget, så når du 0. (ser i sine notater)(…) 248 B1: (refererer til grafen på skjermen) For fort! Vi prøver igjen. 249 B1: Hva hvis vi setter inn en ... x (skriver) dividert med... 251 B1: Oi! (se Figur 2, P1020784) Kanskje, kanskje (…)	 Figur 2: (P1020784, rekonstruksjon)
326 B1: (strekker grafen vandret ved at trekke, uten at endre på den) Hva skal vi finne? 328 B2: (peker på skjermen) Kanskje må vi finne avstanden mellom de to (peker på avstanden mellom to toppunkter på grafen). 332 B2: Vi kan begynne med at skrive avstanden mellom to bølgetopper. 334 B1:Ja, så skal vi bruke... (tegner linjen $y = 28$ og bruker den til at avmerke de to punkter $A = (0, 28)$ og $B = (39.48, 28)$, (se Figur 3 P1020789).	 Figur 3: (P1020789, rekonstruksjon)
340 B2: Det skal ta 25. 341 B1: Det bør ta 25. 342 B2: Ja, fordi det er den fulle rotasjon fra toppen (peker på toppen, bunnen og den neste topp på grafen på skjermen) (...)	B1 og B2 bruker de neste 20 minutter på forsøk på at få grafen til at passe i vandret retning. Plutselig skjer det noe:

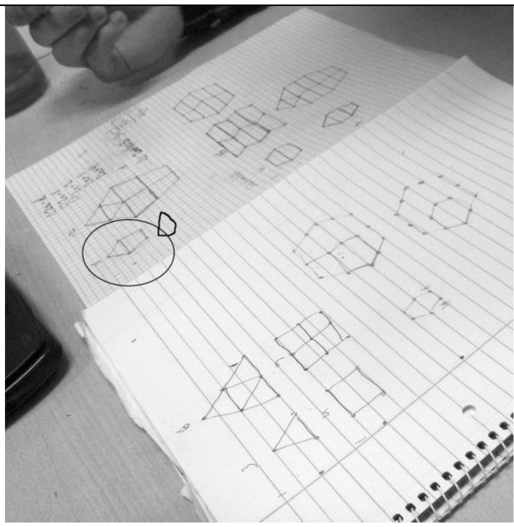
506 B2: (teller) En, to tre fire, fire. 507 B1: Vi hadde sådan 19, lissom… 508 B2: Den er 4 gange så fort som den anden... 509 B1: 4 gange så fort? 510 B2: Ja, fordi her er der en, nei, der er en, to, tre, fire (peker på skjermen og teller) (de teller sammen). 513 B1: Hva skal ganges med 4 – her, kanskje. 514 B2: Ja, prøv det (se Figur 4 P1020795).	 Figur 4: (P1020795, rekonstruksjon)
515 B1: Kanskje ... 516 B2: Bra å finne det nøyaktig. 517 B1: Ja bra! (begge) Haha haha! Ja! Juhuuu! (se Figur 5 P1020796) (slutt på episoden).	 Figur 5: (P1020796, rekonstruksjon)

Episoden, som fant sted under arbeidet med Pariserhjul-oppgaven, kan ses som en illustrasjon av, hvor viktig det er, at elevene opplever, at de har tilstrekkelig med tid til rådighet. De to elever i eksemplet følger ikke en på forhånd fastlagt strategi og utfører ikke systematiske undersøkelser. Deres styrke er, at de begynner forfra hele tiden for å forsøke å finne en løsning, fremfor å gi opp og spørre læreren eller andre. Det lykkes for dem til sist, uten at det etterpå er mulig å identifisere et sammenhengende resonnement, som førte frem til løsningen. Hvis elevene var blitt stoppet efter for eksempel et kvarter, er det ikke sannsynlig, at de ville have været motivert for, eller i stand til, selv at gjøre oppgaven ferdig på et senere tidspunkt/hjemme.

4.3 Figurtall. En episode (fra Andresen, M. (2015b)

Her følger et utdrag av data fra forskningsprosjektets utprøvning av forløpet om figurtallene. Tallene til venstre i tabellene angiver stegene i elevenes arbeid. Episoden demonstrerer, hvordan det er elevenes evne til at sammenkoble forskjellige representasjoner av samme størrelser, og forskjellige perspektiver på de størrelser, de arbeider med, som hjelper dem til plutselig at se løsningen.

1	To elever B1 og B2 sidder og jobber sammen. De har funnet og skrevet de første fem trekanttall $1, 3, 6, 10$ og 15, og firkanttallene $1, 4, 9, 16, 25, 36, 7^2, 8^2$ og 9^2. (Område A Figur a og b) ut fra deres tegninger (Område B Figur a). Deres uttalte plan var åpenbart at finne et mønster for utvidelsen fra trekantstall til det tilsvarende firkanttall, som de så ville kunne bruke til at finne det tilsvarende femkanttall og senere de etterfølgende figurtall. B1: *Så er det neste (tall) syv i andre,* (skriver 7^2*), det neste er otte i andre,* (skriver 8^2), *det neste er ni i andre* (skriver 9^2 i område A Figur a og b).	 **Figur a**  **Figur b**
2	B1: *Så kjenner vi forskjellen mellom de her* (peger på firkanttallene, peger på tallene $3, 5, 7, 9, 11$ i område A Figur a og b)	Deres første strategivalg var åpenbart at forsøke at finne et mønster i, hvordan firkanttallene vokser. Lærerens introduksjon kan have ledet dem i denne retningen uten at gi detaljerte anvisninger.
3	B1: *Så faktisk har vi* (skriver $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2$, siste linje i område A, Figur a og b).	B1 skriver firkanttallene igjen, denne gang som tallene opphøyet i andre potens, åpenbart for lettere at kunne se et mønster.
4	B2: *Men vi kan ikke...* B1: *Hvordan kan vi skrive en formel for det?* B2: *For trekanten, den er jo ikke i andre, overhodet.* B1: *Men trekanten er annerledes (...)*	Det går opp for B1 og B2, at det mønster de leder etter ikke kan være så simpelt som stigende potensopphøying.
5	B1: *Trekanten, det er noe med dens tre sider, med trekanten i midten på en måte…* (peger på område C, Figur a).	30 sekunders stillhet. B1 og B2 ser begge to på deres tegninger. Tilsynelatende igjen overveier de deres

	B1: (tegner en trekant, dekket av hånden på Figur a).	strategi, forsøker at finne på en ny strategi.
6	B1:*(...) En til. Hva er formelen for en firkant?* *B2*: *Ja men firkanten er i orden. Men...*	Dette kunne tyde på, at B1 stadig overveier den gamle strategi for utvidelse og kanskje vil gjennomgå den igjen. B2 er ferdig med firkantene og forfølger ikke den samme utvidelsesidé.
7	B2: *Men så, trekanten, du kan på en måte…* (peker på polygonen i område D på tegningen Figur c).	 Figur c
8	B2: *For eksempel, femkanten, du kan på en måte, du kan ta formelen for trekanten og formelen for firkanten og legge dem sammen.*	B2 bliver inspirert av tegningen til at uttrykke femkantstallene ved en formel, dannet ved addisjon av de allerede kjente formler.
9	B1: *Så kan man gjøre dette for dem alle sammen.* B2: *Ja man kan gjøre det for dem alle sammen.* B1: *Ja, presis. Så det her er firkanten* (peker på firkantene i område B på Figur a), *det er derfor det bliver sådan…*	B1 oppdager, at ideen kan brukes på alle femkanttallene, og B2 er enig. B1 ser firkantene som dele av femkanttallene tegnet i de første tilfelle i hans eget papir
10	B1: *For eksempel de punktene her, de har to felles...* B2: *Ja ja …*	De går i gang med at formulere formlene som summer, idet de tar hensyn til, at trekanten og firkanten har en felles linje på tegningen

Arbeidsmåten i episoden er typisk ved, at B1 og B2 ikke diskuterer eller bliver enige om en strategi, hverken før de går i gang eller underveis. De velger hver især, somme tider på skift og somme tider synkront, en fremgangsmåte eller ide og «tenker høyt», så den anden kan følge med, gjøre innsigelser og komme med innspill.

Det er bemerkelsesverdig, at B1 og B2 på egen hand får ideen om at komme frem til nye figurtall ved at sammensette de foregående, i motsetning til lærerens måte at se og presentere figurtallene på.

Mere generelt gjelder, at episodene er eksemplariske for forløpene i forskningsprosjektet: Det fungerer godt i klassen at la elevene arbeide på (for dem) nye måter, hvor de ikke alltid vet, hva de skal gjøre for at løse den stilte oppgave. Det er altså mulig at tilrettelegge oppleggene åpne og likevel styre elevenes faglige utbytte rimelig. Lithners typer av strategier er velegnede til at innfange, hva som skjer, når elevene arbeider i grupper. Det er mulig at identifisere tilfelle av kreativ, matematisk tenkning (CMR) i data (mine opptakelser av elever under gruppearbeidet). Data fra det samlede forskningsprosjekt omfatter dessuten en lang rekke andre situasjoner, hvor løsningen på tilsvarende måte kommer i et glimt fra en elev, uten påviselig sammenheng med det forutgående.

5 Avrunding

EU-prosjektet KeyCoMath og den norske del av det, forskningsprosjektets «Elevstrategier», kan ses som en eksponent for den utdannelsestenkning, der i de seneste ti år har medført en øket interesse i "inquiry" innenfor undervisning i realfag på alle nivåer. Talrike forsknings- og utviklingsprosjekter sikter mot at karakterisere og nyttiggjøre undersøkende, elevaktiverende og utforskende undervisning i en lang rekke forskjellige utførelser og fortolkninger (Andresen, 2013). Prosjektet "Elevstrategier" bidrar med en reflektert innsikt i forekomster av matematisk kreativitet hos elever i videregående skole. De undervisningseksperimenter, vi gjennomførte i prosjektet, har vist, at det er mulig at oppmuntre elevene til mere selvstendig matematisk tenkning gjennom åpne undervisningsopplegg, hvor elevene ikke alltid vet, hvordan de skal løse oppstått problemer og oppgaver. Det viste seg også mulig i høy grad at styre retningen av det faglige utbytte for elevene gjennom formuleringen av de åpne opplegg. Og det viste seg, at den matematikdidaktiske teori, som utgjorde grunnlaget for prosjektet, egnede seg godt til at innfange, beskrive og perspektivere den selvstendige matematiske tenkning i undervisningen.

Alle lærerne i prosjektet: Håkon, Frode, Kjetil, Inge, Trine, Jørgen, Anne og Marit, gjorde et godt, engasjert, kompetent og vellykket stykke arbeid! Det var også god støtte om prosjektet fra skolenes ledelser. Støtte, engasjement og eierskap regnes for avgjørende faktorer, når man vurderer potensialene i et prosjekt for at føre til egentlig, permanent utvikling og endring. En lang rekke forskningsprosjekter og undersøkelser underbygger denne oppfattelse (Sowder (2007), Andresen, M. og Henriksen, B. (2010)). Fra Universitetet i Bergen sin side var det også en god oppakning om prosjektet, idet den daværende instituttleder for Matematisk Institutt, Professor Jarle Berntsen, hadde ansøkt om og fått midler til at frikjøpe forskeren fra undervisning på instituttet det år, hvor prosjektets datainnsamling foregikk. Uten dette frikjøp hadde prosjektet ikke kunnet gjennomføres.

Lærerne hadde fra starten uttrykt ønske om at benytte deres deltagelse i prosjektet som en anledning til at utprøve nye ideer og endre deres undervisning. Underveis i prosjektet blev det

gjennomført to gruppeintervju med alle lærerne. I det andet intervju, som fant sted ved avslutningen av det skoleår, hvor undervisningseksperimentene var gjennomført, gav flere av lærerne uttrykk for en vis skuffelse over manglende synlige resultater av undervisningseksperimentene. Selve eksperimentenes forløp var vellykkete, men der var ikke noen merkbar endring at spore i de pågjeldende klasser etterpå. På lærernes initiativ hadde vi i prosjektet gjennomført en ekstra runde med undervisningseksperimenter i de samme klasser som første rundes (på nær to klasser). Begrunnelsen for at gjennomføre ennå en runde var, at lærerne følte seg oppmuntret av første rundes gode erfaringer i klassene og gjerne ville prøve igjen, denne gang med elever, som allerede hadde erfaring med at arbeide med problemløsning. Data fra anden runde avslørete dog ikke vesentlige forskjeller på elevenes arbeidsmåter eller holdninger i anden runde. I det andet intervju ga lærerne hovedsakelig to begrunnelser for den manglende, observerbare forskjell:
i) Den relativt korte varighet av undervisningseksperimentene sammenlignet med, hvor veletablerte elevenes forestillinger var om matematikkundervisning og om deres egen rolle i den, og ii) Elevenes tidligere erfaringer med matematikk i skolen. Et par av lærerne mente, at elevene burde begynne at arbeide systematisk med problemløsning efter Polyas skjema mye tidligere (enn videregående). En nevnte, at klassen hadde hatt uventet gode resultater i en prøve kort tid etter det første undervisningseksperiment.

Flere av lærerne gav uttrykk for, at deres elever hadde været engasjerte i og glade for eksperimentene, men at de ikke anså innholdet for at være relevant for deres kommende eksamen.

Ved at bruke begrepene fra prosjektets teoretiske grunnlag kan lærernes erfaringer ses som uttryk for at deres forestillinger (beliefs) om faget matematikk og om undervisning i matematikk blev realiserte i undervisningseksperimentene. Men det skapte et behov for at etablere og utvikle normer og holdninger i klassen, som ganske vist ikke var i motstrid med klassens eksisterende normer, selv om noen kanskje var "på kanten", men som likevel krevede en del endrete oppfattelser hos elevene og i klassen som helhet. Spesielt virket undervisningseksperimentene utfordrende på klassens sosiomatematiske normer, som ikke riktig nådde at endre seg eller utvikles i løpet av den korte periode.

På tross av den omtalte lette skuffelse var det mange positive tilkjennegivelser, især med henblikk på lærernes eget arbeid i fremtiden. En av lærerne utalte i andet intervju, at det i begynnelsen "Ikke riktig var til at se, hva det var, du (forskeren) ville ha oss til at gjøre". Men at det etterhvert blev klart, at der var tale om et relativt åpent opplegg til lærerne, som jo selv skulle tilrettelegge innholdet i undervisningseksperimentene på baggrund av løpende diskusjoner på gruppens møder. Som det også fremgår av de nærmest uredigerte opplegg til undervisning gjengitt i foregående kapitel, blev det ikke benyttet en fast mal ved designet av forløpene. Den gjennomgående, røde tråd var ikke formen men tanken om at få elevene mere selvstendig på banen. Det så ut til at lykkes i de aktuelle situasjoner.

Samtidig ser det ut til, at lærerne også kom mere på banen i forhold til at realisere deres egne visjoner for undervisningen. Det er vårt håp, at denne lille bog kan inspirere andre matematikklærere til det samme!

6 Litteratur

- Andresen, M. (2013). European Aims to Stimulate Inquiry in School Mathematics. In: *Nordic research in didactics of mathematics: Past, present and future*. Cappelen Damm Akademisk 2013 ISBN 978-82-02-39348-9 (pp. 41-60).

- Andresen, M. (2014). Students' strategies for modelling a Feris wheel. In *Proceedings of NORMA14. The seventh Nordic conference on mathematics education in Turku*, 2-6 June 2014 (to be published).

- Andresen, M. (2015a). Glimt af kreativitet I problemløsning (Glimpses of creativity in problem solving). In: *Tangenten: Tidsskrift for matematikk i grundskolen* 2015 vol. 2. ISSN 0802-8192. 6 pages.

- Andresen, M. (2015b). Students' creativity in problem solving. In: *Acta Mathematica Nitriensia.* 2015 vol 1. ISSN 2453-6091 (10 pages).

- Andresen, M., & Henriksen, B. (2010). *Effective, long-range developments – evaluation of a national initiative. Report on the Mathematics Project, 2006-2008*. NAVIMAT, Copenhagen.

- Cobb, P. (1999). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. In: A. E. Kelly and R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education*, (pp. 307- 333).Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. In: *Educational Studies of mathematics* (2008) 67:255-276. Springer.

- Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words. Exercises in visual thinking*. The Mathematical Association of America.

- Nelsen, R. B. (2000). *Proofs without words. Exercises in visual thinking*. The Mathematical Association of America.

- Polya, G. (1985). *How to solve it. New aspects of mathematical method*. Princeton University Press.

- Schoenfeld, Alan H. (2011). *How we think. A Theory of Goal-Oriented Decision Making and its Educational Applications.* Routledge.

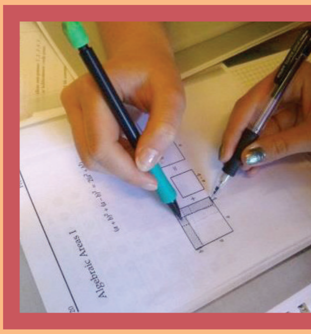
- Sowder, J.T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In: F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning,* (pp. 157-223). National Council of Teachers of Mathematics, USA.. Information Age Publishing.

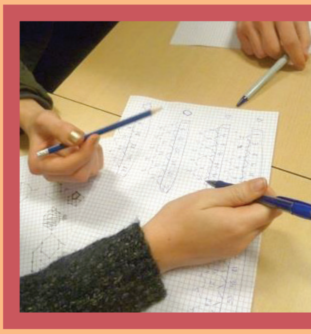
- Yackel, E., & Rasmussen, C. (2002). Beliefs and norms in the mathematics classroom. In: G.C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 313-330). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

I forskningsprosjektet „Elevstrategier“ jobbet vi sammen med åtte matematikklærere fra fem videregående skoler i Bergen. Vi vil ha en mer undersøkende og eksperimentell arbeidsmåte i matematikk i videregående skole. Mange elever er flinke til å løse oppgaver, som likner på dem de allerede kjenner. Det er selvfølgelig nyttig, men det kanskje mest spennende med matematikken er muligheten til å løse nye problemer.

Elevene skal kunne det, som står i læreboken, men de skal også kunne bruke det. Og ikke minst: De skal lære seg å formulere hypoteser og diskutere dem, etterhvert som de får utviklet en verktøykasse med matematiske metoder. Det handler om å prøve seg frem og bruke metodene, de har lært seg, selv om problemstillingen er ny.

Denne boken er blitt til som en del av EU-prosjektet KeyCoMat, under programmet Lifelong Learning. Boken er tenkt som en kombinert bruks- og inspirasjonsbok, og den er skrevet på bakgrunn av forskningsprosjektet, av to av prosjektets deltakere. Den inneholder opplegg til undervisningsforløp, som kan brukes direkte eller etter litt tilpasning til et gitt nivå og i en gitt sammenheng. Dessuten inneholder den en kort beskrivelse av forskningsprosjektet, teoretiske matematikkdidaktiske overveielser samt analyse og diskusjon av utvalgte utklipp fra forskningsprosjektets data.





With support of the “Lifelong Learning Programme” of the European Union

Lifelong Learning Programme

Developing Key Competences by Mathematics Education