Bedeutung von Parametern in quadratischen Funktionen

Thema	Bedeutung von Parametern in quadratischen Funktionen
Stoffzusammenhang	Funktionale Zusammenhänge
Jahrgangsstufe	9
Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche	Funktionaler Zusammenhang (gemäß KMK-Bildungsstandards)
Prozessbezogene Kompetenzen	Mathematisch Argumentieren, Probleme mathematisch lösen, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, mathematisch Kommunizieren (gemäß KMK-Bildungsstandards)
Autorin	Lena Richter

Intention und Ziele

Die im Folgenden dargestellte Lernumgebung bietet den Schülern die Gelegenheit ein Verständnis für die Parameter in quadratischen Funktionen zu entwickeln. In der 90-minütige Unterrichtseinheit sollen die Schüler angeregt werden, die Veränderungen der Form und Lage der Parabel und somit auch des quadratischen Funktionsterms zu erforschen. In Anlehnung an die im Lehrplan geforderte „parallele Betrachtung von Funktionsgraph und entsprechender Gleichung"[1] wird ein Gruppenpuzzle angeboten, welches die einzelnen Koeffizienten in sogenannten Expertengruppen, oder auch „Puzzlegruppen", betrachtet. Hierbei werden sowohl die Parameter a, b, c der allgemeinen quadratischen Funktion $f(x)=ax^2+bx+c$ als auch die Parameter a, d, e der Scheitelform $f(x)=a(x+d)^2+e$ in den Expertengruppen untersucht. Außerdem soll die Lernumgebung die Entwicklung der in der Tabelle genannten inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen fördern und unterstützen.

Vorkenntnisse

Die Schüler sollten bereits Kenntnisse zur Normalparabel als Graph einer quadratischen Funktion der Form $f(x)=x^2$ aufweisen und den Begriff des Scheitels kennen und verstehen. Außerdem ist anzudenken, die quadratische Ergänzung vorab beizubringen, um die Umformung von allgemeiner Form in Scheitelform durch diese Vorkenntnisse von den Schülern erarbeiten lassen zu können.

[1] http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26254 (Zugriff am 03.10.2015)

Methodische Hinweise

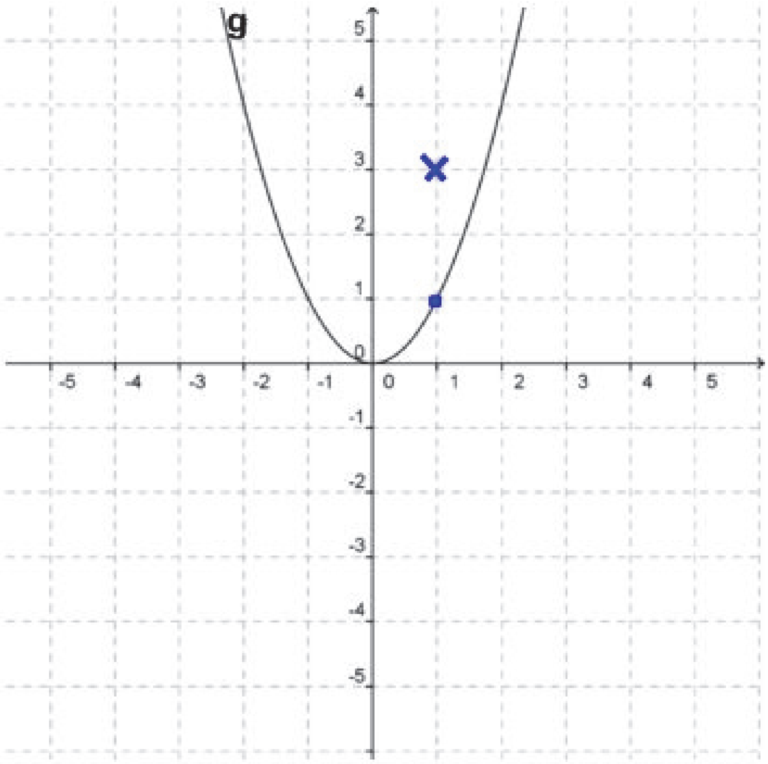
Für die Durchführung des Gruppenpuzzles werden die Schüler in Experten- und Stammgruppen eingeteilt. Jeder Schüler ist Teil einer Stammgruppe und einer Expertengruppe. In den Expertengruppen wird gemeinsam mit „gleichnamigen" Experten aus anderen Stammgruppen ein spezielles Themengebiet, hier je ein Parameter, erarbeiten (Aneignung). Anschließend werden die Ergebnisse in den Stammgruppen zusammengetragen (Vermittlung) und mithilfe des gesammelten Expertenwissens gemeinsam ein Aufgabe erarbeitet (Verarbeitung).

Das entwickelte Übungseinheit bietet die Möglichkeit die Parameter der allgemeinen Form und der Scheitelform als zwei separate Gruppenpuzzle zeitlich parallel innerhalb einer Klasse anzubieten oder für die genannten Formen je eine Unterrichteinheit zu gestalten. Im Folgenden wird von einer parallelen Bearbeitung innerhalb einer Unterrichtseinheit ausgegangen.
Die Aufgaben der Expertengruppen des Parameters a sind für beide Formen identisch, ebenso deckt sich der Parameter c der allgemeinen Form mit dem Parameter e der Scheitelform. Dies ermöglicht auch eine flexible Anpassung des Aufbaus an die Schülerzahl, da gegebenenfalls für die genannten Parameter nur eine Expertengruppe gebildet werden kann.
Die Expertengruppe D wird gebeten, die Änderungen des Graphen mithilfe einer Wertetabelle zu erforschen. Hier wäre auch eine geometrische Herleitung, ähnlich der übrigen Aufgabenstellungen, durch horizontales Addieren der x-Werte einer zur y-Achse parallelen Geraden durch x=-d möglich. Da diese Gerade keine Funktion darstellt und somit keine Funktionsgleichung angegeben werden kann, wurde die Alternative der Wertetabelle gewählt.
In der Phase der Vermittlung wird das Expertenwissen über die einzelnen Parameter in den Stammgruppen zusammengetragen und in einem Ergebnisbogen festgehalten, welcher nach einer Überprüfung der Ergebnisse den Schülern als Lernmaterial dienen kann. Durch die gewählte Sozialform des Gruppenpuzzles leistet so jeder Schüler einen wichtigen Beitrag, denn jeder Parameter hat einen Einfluss auf Form und Lage des Graphen.
Anschließend bekommt jede Stammgruppe eine quadratische Funktionsgleichung, welche auf Basis der erworbenen Kenntnissen zu untersuchen ist. Die Aufgabenstellung ist so angelegt, dass die Stammgruppe ABC, welche die Parameter der allgemeinen Form erarbeitet, und die Stammgruppe ADE mit Parametern der Scheitelform identische Lösungen erhalten. Die Ergebnisse der beiden Formen werden im Klassenplenum präsentiert und vergleichen. Die Schüler werden ermutigt einen Zusammenhang und eine mathematische Umformung zu finden. Hierbei kann die quadratische Ergänzung als Vorkenntnis hilfreich sein kann, um diese Verbindung aus bereits Bekanntem herzuleiten.

Gruppenpuzzle zu „Parametern in quadratischen Funktionstermen“

Expertengruppe A

Betrachte den Graphen der Funktion **$g(x)=x^2$.**
An der Stelle x=1 wurden der y-Werte der Funktionen verdreifacht, also 1*3=3 und diese Stelle im Koordinatensystem markiert.



a) Führe dies für andere x-Werte durch.
b) Was fällt dir auf? Welche Unterschiede zum Graph von g(x) erkennst du?

c) Welche Kurve entsteht und wo ist der Scheitel?

d) Wie lautet der Funktionsterm des neuen Graphen?
(Tipp: Überlege, was du mit den y-Werten der x^2-Funktion gemacht hast)

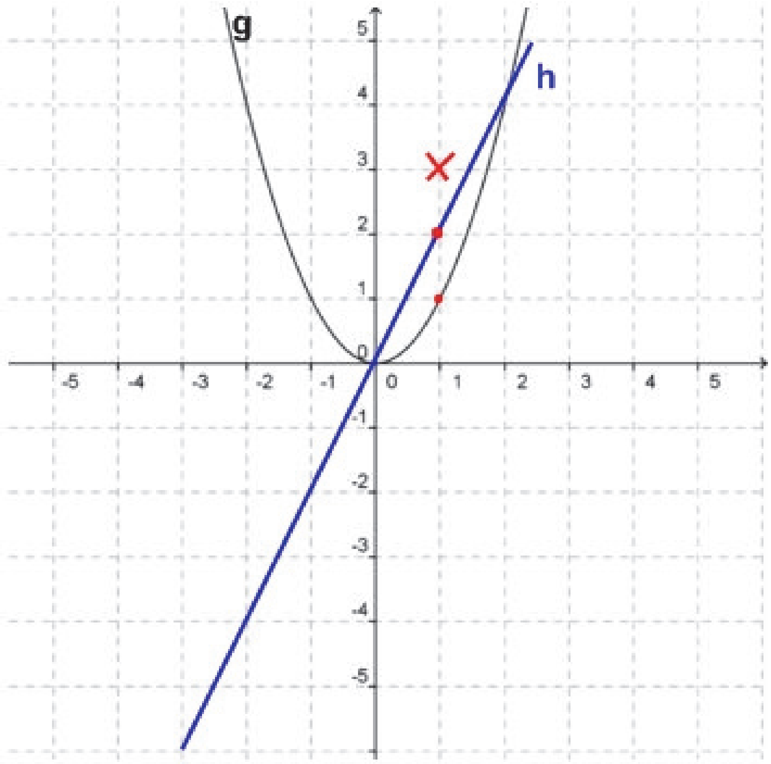
e) Multipliziere die Funktionswerte von g mit anderen Werten a und wiederhole a)-d).

1. Wie lautet der allgemeine Funktionsterm mit Parameter a?
   f(x)= _________
2. Welche Kurve entsteht und wo liegt der Scheitel?
   Der Graph ist eine __________ mit Scheitel (_|_).
3. Was passiert für Werte von a<0 bzw. a>0?
   Für a<0 ist der Graph nach _____ geöffnet.
   Für a>0 ist der Graph nach _____ geöffnet.
4. Was passiert für Werte von |a|<1 bzw. |a|>1?
   Für |a|<1 ist die Parabel ______ als die Normalparabel.
   Für |a|>1 ist die Parabel ______ als die Normalparabel.

Gruppenpuzzle zu „Parametern in quadratischen Funktionstermen“

Expertengruppe B

Betrachte die Graphen der Funktionen **$g(x)=x^2$** und **$h(x)=2x$**.
An der Stelle x=1 wurden die y-Werte der Funktionen addiert, also 1+2=3 und diese Stelle im Koordinatensystem markiert.



a) Führe dies für andere x-Werte durch.
b) Was fällt dir auf? Welche Unterschiede zum Graph von g(x) erkennst du?

c) Welche Kurve entsteht und wo ist der Scheitel?

d) Wie lautet der Funktionsterm des neuen Graphen?

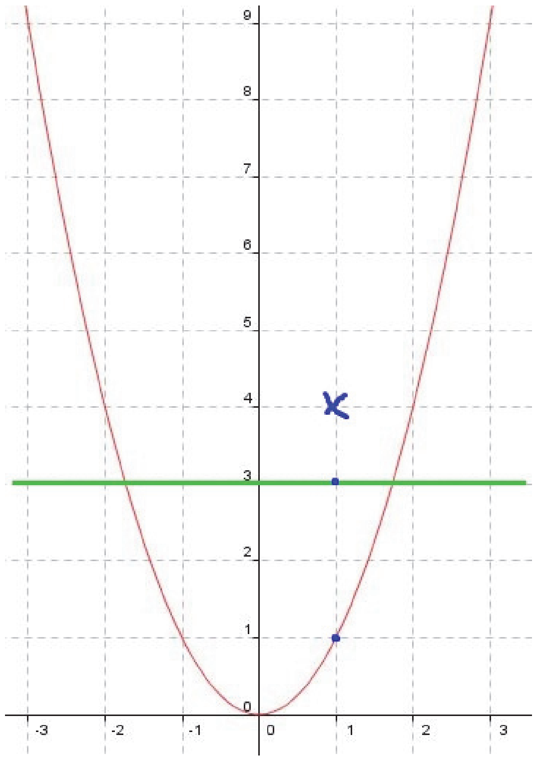
e) Setze in h(x) eine andere Zahl b als Koeffizient vor x und wiederhole a)-d).

1. Wie lautet der allgemeine Funktionsterm mit Parameter b?
   f(x)= ________
2. Welche allgemeinen Beobachtungen kannst du dabei machen?
   Der Graph ist eine in __- und __-Richtung verschobene _____________.

Gruppenpuzzle zu „Parametern in quadratischen Funktionstermen“

Expertengruppe C

Betrachte die Graphen der Funktionen $g(x)=x^2$ und $h(x)=3$.
An der Stelle $x=1$ wurden die y-Werte der Funktionen addiert, also $1+3=4$ und diese Stelle im Koordinatensystem markiert.



a) Führe dies für andere x-Werte durch.
b) Was fällt dir auf? Welche Unterschiede zum Graph von g(x) erkennst du?

c) Welche Kurve entsteht und wo ist der Scheitel?

d) Wie lautet der Funktionsterm des neuen Graphen?

e) Setze für h(x) eine andere Zahl c und wiederhole a)-d).

1. Wie lautet der allgemeine Funktionsterm mit Parameter c?
   f(x)= _________
2. Welche Kurve entsteht?
   Der Graph ist eine um __ in __-Richtung verschobene Normalparabel.
3. Wie kann man den Scheitel allgemein mit dem Parameter c schreiben?
   Der Scheitel liegt bei S(_|_).
4. Für welche c hat die Parabel wie viele Nullstellen?
   Für c<0 hat die Parabel __Nullstelle(n).
   Für c=0 hat die Parabel __Nullstelle(n), genau den ________.
   Für c>0 hat die Parabel __Nullstelle(n).

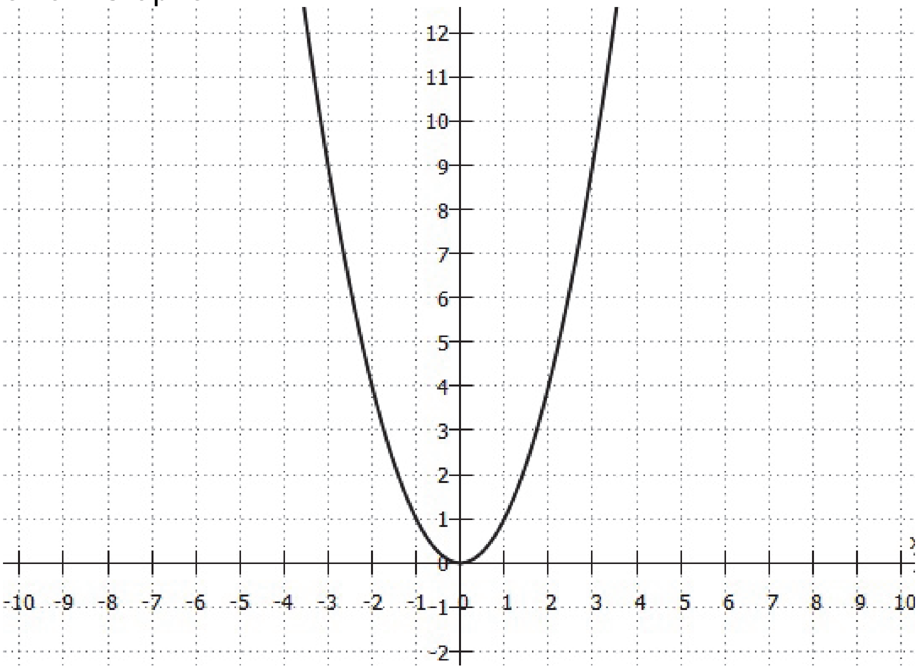
Gruppenpuzzle zu „Parametern in quadratischen Funktionstermen“

Expertengruppe D

a) Vervollständige die folgende Wertetabelle.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
x+3								
g(x) = x²								
h(x) = (x+3)²								

b) Trage die Funktionswerte für $h(x)=(x+3)^2$ in das Koordinatensystem ein und ergänze zu einem Graphen.



c) Was fällt dir auf? Welche Unterschiede zum Graph von g(x) erkennst du?

d) Welche Kurve entsteht und wo ist der Scheitel?

d) Wie lautet der Funktionsterm des neuen Graphen?

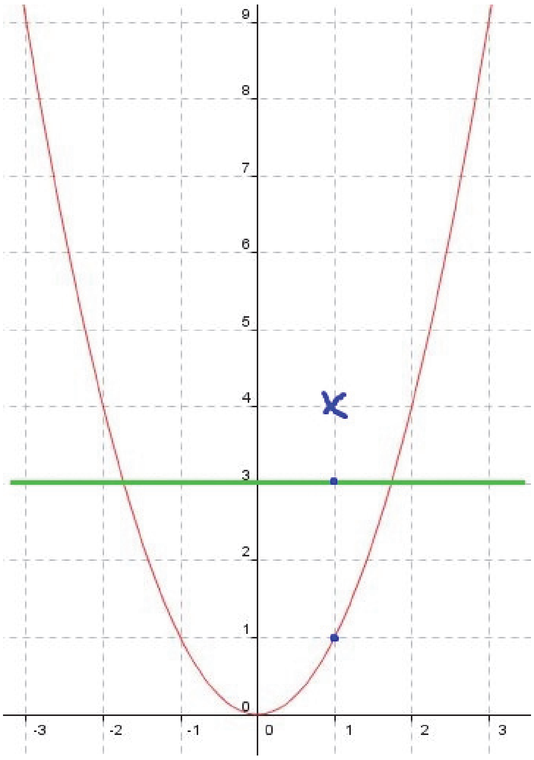
e) Addiere zu x in h(x) andere Werte d und wiederhole a)-d).

1. Wie lautet der allgemeine Funktionsterm mit Parameter d?
   f(x)= _________
2. Welche allgemeinen Beobachtungen kannst du dabei machen?
   Der Graph ist eine um ___ in __-Richtung verschobene Normalparabel.
3. Wie kann man den Scheitel allgemein mit dem Parameter d schreiben?
   Der Scheitel liegt bei S(_|_).

Gruppenpuzzle zu „Parametern in quadratischen Funktionstermen“

Expertengruppe E

Betrachte die Graphen der Funktionen $g(x)=x^2$ und $h(x)=3$.
An der Stelle x=1 wurden die y-Werte der Funktionen addiert, also 1+3=4 und diese Stelle im Koordinatensystem markiert.



a) Führe dies für andere x-Werte durch.
b) Was fällt dir auf? Welche Unterschiede zum Graph von g(x) erkennst du?

c) Welche Kurve entsteht und wo ist der Scheitel?

d) Wie lautet der Funktionsterm des neuen Graphen?

e) Setze für h(x) eine andere Zahl e und wiederhole a)-d).

1. Wie lautet der allgemeine Funktionsterm mit Parameter e?
   f(x)= _________
2. Welche Kurve entsteht?
   Der Graph ist eine um __ in __-Richtung verschobene Normalparabel.
3. Wie kann man den Scheitel allgemein mit dem Parameter e schreiben?
   Der Scheitel liegt bei S(_|_).
4. Für welche e hat die Parabel wie viele Nullstellen?
   Für e<0 hat die Parabel __Nullstelle(n).
   Für e=0 hat die Parabel __Nullstelle(n), genau den ________.
   Für e>0 hat die Parabel __Nullstelle(n).

Gruppenpuzzle zu „Parametern in quadratischen Funktionstermen“

Stammgruppe ABC

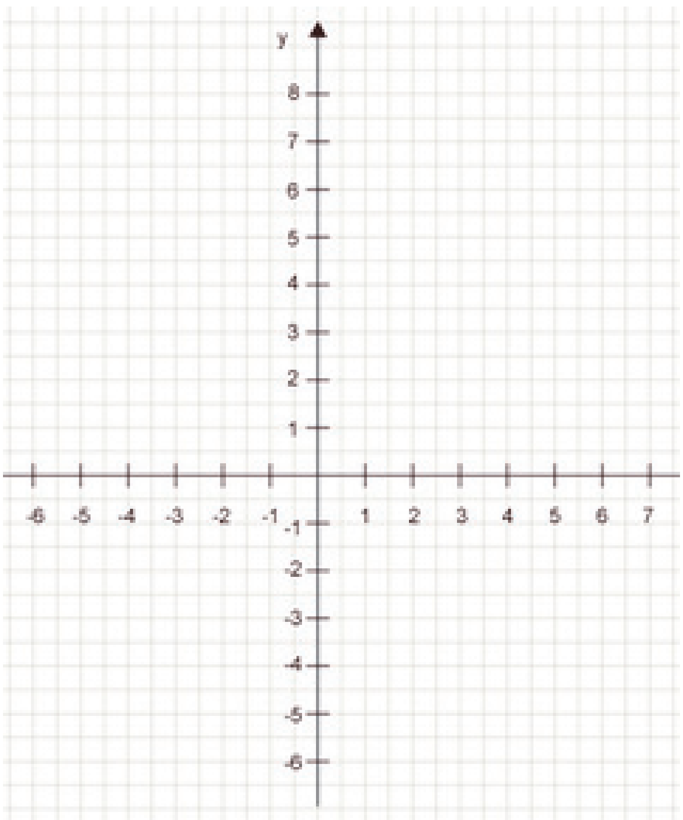
Betrachte die folgende Funktion $f(x) = 2x^2 - 12x + 20$.

a) Welche Aussagen könnt ihr mit eueren Ergebnissen aus den Expertengruppen aufstellen?

b) Ergänzt die folgende Wertetabelle

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$2x^2$								
$12x$								
$2x^2-12x$								
$2x^2-12x+20$								

c) Trage die Werte für $f(x)= 2x^2-12x+20$ in das Koordinatensystem ein und verbinde zu einem Graph.



Gruppenpuzzle zu „Parametern in quadratischen Funktionstermen“

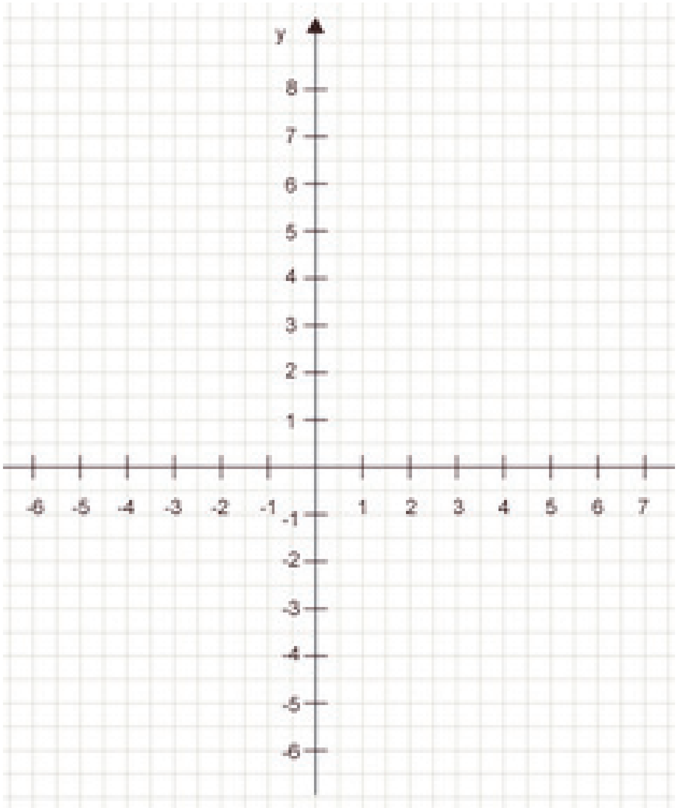
Stammgruppe ADE

Betrachte die folgende Funktion $f(x) = 2(x - 3)^2 + 2$.
Welche Aussagen könnt ihr mit eueren Ergebnissen aus den Expertengruppen aufstellen?

b) Ergänzt die folgende Wertetabelle

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x-3								
$(x-3)^2$								
$2(x-3)^2$								
$2(x-3)^2+2$								

c) Trage die Werte für $f(x)= 2(x-3)^2+2$ in das Koordinatensystem ein und verbinde zu einem Graph.



Ergebnisse der Gruppenpuzzles

Parameter in quadratischen Funktionstermen

Allgemeine Form $f(x)= ax^2 + bx + c$

Parameter a

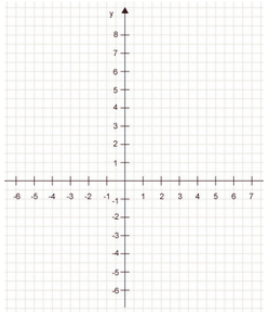
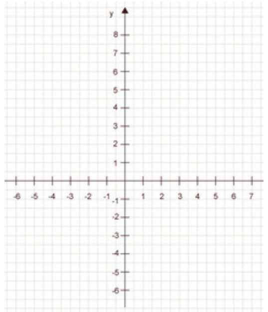
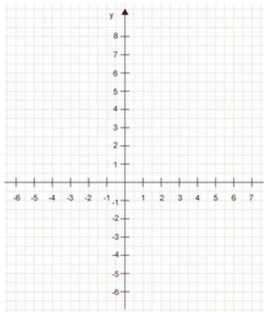
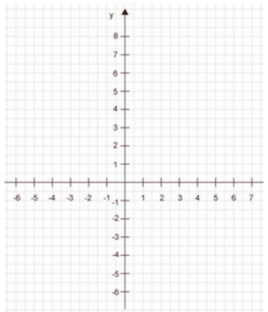
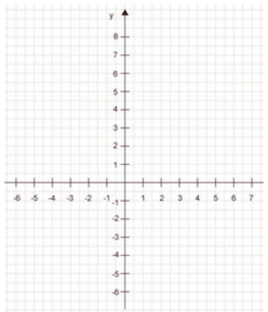
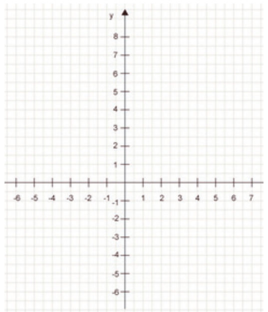
- f(x)= ________
- Der Graph ist eine _________ mit Scheitel (_|_).
- Für a<0 ist der Graph nach _____ geöffnet.
  Für a>0 ist der Graph nach _____ geöffnet.
- Für |a|<1 ist die Parabel ______ als die Normalparabel.
  Für |a|>1 ist die Parabel ______ als die Normalparabel.

Parameter b

- f(x)= ________
- Der Graph ist eine in __- und __-Richtung verschobene _____________.

Parameter c

- f(x)= ________
- Der Graph ist eine um __ in __-Richtung verschobene Normalparabel.
- Der Scheitel liegt bei S(_|_).
- Für c<0 hat die Parabel __Nullstelle(n).
  Für c=0 hat die Parabel __Nullstelle(n), genau den ________.
  Für c>0 hat die Parabel __Nullstelle(n).

Scheitelform $f(x) = a(x + d)^2 +e$

Parameter a

- f(x)= ________
- Der Graph ist eine _________ mit Scheitel (_|_).
- Für a<0 ist der Graph nach _____ geöffnet.
  Für a>0 ist der Graph nach _____ geöffnet.
- Für |a|<1 ist die Parabel ______ als die Normalparabel.
  Für |a|>1 ist die Parabel ______ als die Normalparabel.

Parameter d

- f(x)= ________
- Der Graph ist eine um ___ in __-Richtung verschobene Normalparabel.
- Der Scheitel liegt bei S(_|_).

Parameter e

- f(x)= ________
- Der Graph ist eine um __ in __-Richtung verschobene Normalparabel.
- Der Scheitel liegt bei S(_|_).
- Für e<0 hat die Parabel __Nullstelle(n).
  Für e=0 hat die Parabel __Nullstelle(n), genau den ________.
  Für e>0 hat die Parabel __Nullstelle(n).