Wurfbahnen, wie Galilei sie beschrieb

Einführung quadratischer Funktionen

Markus Reichhalter

Thema	Einführung des Begriffes der quadratischen Funktion, die Parameter der Scheitelform und erste Anwendungen
Stoffzusammenhang	Quadratische Funktionen
Klassenstufe	1. Biennium

Intention und Inhalt

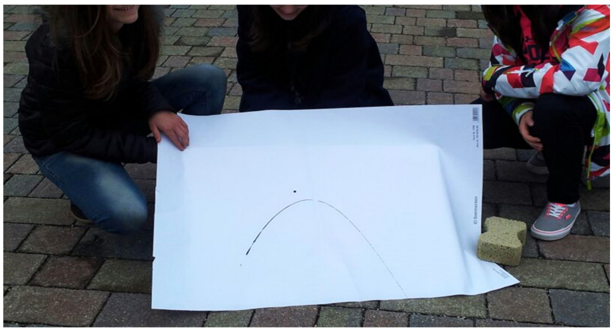
In der ersten Unterrichtsstunde befassen sich die Lernenden auf enaktive Weise mit der Bahn eines Wurfes anhand eines Experiments von Galileo Galilei (siehe unten). Nach einer kurzen Wiederholung zu linearen Funktionen und deren Anwendung zur Beschreibung gleichförmiger Bewegungen analysieren sie mit GeoGebra die Graphen nichtlinearer Funktionen. Dabei wird festgestellt, dass Parabeln, also Graphen quadratischer Funktionen, die Form der Wurfbahn beschreiben. Nachdem quadratische Funktionen in Scheitelform eingeführt werden, analysieren die Lernenden selbständig mit GeoGebra die Bedeutung der Parameter der Scheitelform (Dauer ca. zwei Stunden – ikonische Phase). Als Beispiel wird der senkrechte Wurf eines Gegenstandes empirisch untersucht. Anschließend wird die Normalform quadratischer Funktionen und als Anwendung die Bewegungsgleichung gleichförmig beschleunigter Bewegungen eingeführt. Fragen werden entwickelt – so beispielsweise nach dem höchsten Punkt der Wurfbahn und nach der Ankunftszeit am Boden – und nach deren Antworten gesucht. So wird in dieser einstündigen symbolischen Phase die Umrechnung der Normalform in Scheitelform thematisiert. Anwendungsbeispiele dienen zur Ergebnissicherung (Dauer ca. zwei Stunden). Im letzten Teil der Lernumgebung wird unter Zuhilfenahme des Additionsverfahrens zum Lösen linearer Gleichungssysteme besprochen, wie aus drei bekannten Punkten einer Parabel deren Funktionsgleichung berechnet werden kann (Dauer ca. eine Stunde). Eine Übungsphase dazu schließt die Lernumgebung (vorerst) ab.

Lernziele

Die Lernenden verstehen den Begriff der quadratischen Funktion und kennen deren Darstellung mit Funktionstermen (in Normal- und Scheitelform), Wertetabellen und Funktionsgraphen.
Sie erkennen eine Parabel als Graph einer quadratischen Funktion und verstehen, wie die Parameter der Scheitelform die Form des Graphen beeinflussen. Sie können den Scheitel als einen der charakteristischen Punkte bestimmen und darüber hinaus Beispiele aus dem Alltag, insbesondere Wurfbahnen, mathematisch beschreiben.

Fachlicher Hintergrund

Die enaktive Einführung in das Thema folgt einem Experiment Galileo Galileis, das er in seinem Werk „I discorsi“ beschrieben hat: Um die Wurfparabel verlangsamt analysieren zu können, ließ er eine in Tinte getauchte Kugel in einem Bogen über eine schiefe Ebene rollen. Dieses Experiment wiederholen die Lernenden im ersten Teil der Lernumgebung und widerlegen so die von Aristoteles bis in die Neuzeit gültige Theorie der Wurfbahn.



Im dritten Teil wird die Umrechnung zwischen Normal- und Scheitelform nicht wie oft üblich durch quadratisches Ergänzen erledigt: Durch Koeffizientenvergleich in den beiden Formeln werden Formeln für x_0 und y_0 hergeleitet. Erfahrungsgemäß hat sich diese Methode (besonders für Lernende mit Dyskalkulie) als leichter verständlich und einfacher anwendbar herausgestellt.

Methodische Hinweise

Im ersten Teil erarbeiteten die Lernenden enaktiv das Konzept der Parabel als Bahn eines Wurfes in Gruppenarbeit. Dabei sollten den Lernenden abwaschbare Tinte oder Handschuhe zur Verfügung gestellt werden.
Im zweiten Teil arbeiteten die Lernenden paarweise mit GeoGebra. Auf diesem ikonischen Weg lernten sie die Graphen der quadratischen Funktionen und deren Beeinflussung durch die Parameter der Scheitelform kennen. Dazu war es hilfreich, Schieberegler für die Parameter zu verwenden, um die Veränderung der Graphen auch dynamisch verfolgen zu können. Indem die Lernenden Graphen quadratischer Funktionen über ihre experimentell erhaltenen Parabeln legten, wurde ihnen veranschaulicht, dass die mithilfe des Galileo-Experiments erhaltenen Bahnen solchen Parabeln entsprechen und somit Graphen quadratischer Funktionen sind. Aus Exporten des Grafikfensters, ergänzt durch ihre eigenen Beobachtungen, erstellten die Lernenden ein Word-Dokument.
Im dritten Teil wurde symbolisch die Bewegungsgleichung als Beispiel einer quadratischen Funktion in Normalform eingeführt. Zur Vermeidung des doppelt belegten Parameters a einerseits als Koeffizient des quadratischen Terms der Normalform und andererseits als Beschleunigung der Bewegungsgleichung, empfiehlt es sich, für die Beschleunigung einen anderen Buchstaben zu wählen. In Partnerarbeit arbeiteten die Lernenden abschließend an Anwendungsbeispielen.
Die Übungsbeispiele wurden nach der Taxonomie von Bloom – soweit angemessen – geordnet. Dabei sollten sich die Lernenden von den weniger komplexen (Wissen → Verstehen → Anwenden) bis zu komplexeren Stufen (Analyse → Synthese → Bewerten) vorarbeiten.

Leistungsbewertung

Bewertet werden kann das im zweiten Teil der Lernumgebungen erstellte Dokument anhand von Kriterien wie Übersichtlichkeit, Korrektheit und Vollständigkeit.
Die Lernenden selbst können den eigenen Kenntnisstand in der Übungsphase überprüfen. Zu diesem Zweck arbeiten sie im Sinne einer formativen Beurteilung gezielt an speziellen Bereichen, die sich an der Taxonomie von Bloom orientieren.
Eine Schularbeit als summative Bewertung könnte den Abschluss der Lernumgebung bilden. Diese sollte sich an den Aufgaben der Übungsphase orientieren und die Komplexitätsstufen „Wissen", „Verstehen" und „Anwenden" als Minimalanforderungen beinhalten. Auch die Ergebnisse der letzten Übungsphase (siehe unten) könnten, nachdem sie präsentiert wurden, als Bewertungsgrundlage herangezogen werden.
Bei Lernenden mit Dyskalkulie kann beim letzten Bereich nur auf die richtige Modellierung und den richtigen Rechenweg, aber nicht auf Fehler bei der Berechnung geachtet werden. Der Taschenrechner wird allen als Hilfsmittel erlaubt.

Quadratische Funktionen

1 Pizzaverkäufer

Ein Pizzaschnitten-Verkäufer verkauft ein Stück um 2 € und hat so jeden Tag 100 Kunden. Nun überlegt er, ob er den Preis erhöhen sollte. Allerdings würde er pro 10 Cent Preiserhöhung vier Kunden verlieren. Was sollte er tun?

2 Löwengehege

Für die Umzäunung eines Löwengeheges stehen 100 m Zaun zur Verfügung. Wie müssen die Abmessungen eines rechteckigen Geheges gewählt werden, um dem Löwen so viel Platz wie möglich zu verschaffen?

3 Hochsprung

Die Bahn des Schwerpunktes eines Hochspringers hat die Form einer Parabel mit dem Parameter $a = -1$. Der Körperschwerpunkt liegt bei einem optimalen Sprung 90 cm vor der Messlatte. Welche Höhe kann dabei übersprungen werden? Wie sieht die Situation aus, wenn der Absprungpunkt nicht genau getroffen wird?

4 Schnittpunkte mit der x-Achse

Finde quadratische Funktionen in Scheitel- bzw. Normalform, die

- zwei Schnittpunkte mit der x-Achse,
- genau einen Schnittpunkt mit der x-Achse,
- keinen Schnittpunkt mit der x-Achse

aufweisen. Welche Bedingungen erfüllen die Parameter jeweils?

5 Höhe schätzen

Finde ein Schätzverfahren, mit dem du aus der Fallzeit eines Gegenstandes auf seine Fallhöhe schließen kannst.

6 Wushan-Brücke

Im Bild siehst du die Wushan-Brücke, die den Jangtsekiang nahe der chinesischen Stadt Chongqing überquert. Sie ist die siebtgrößte Bogenbrücke der Welt. Ihr parabelförmiger Bogen überspannt 460 m der unter ihm liegenden Straße. Diese verläuft etwa 85 m unterhalb des Scheitels. Was kannst du über diese Brücke herausfinden?

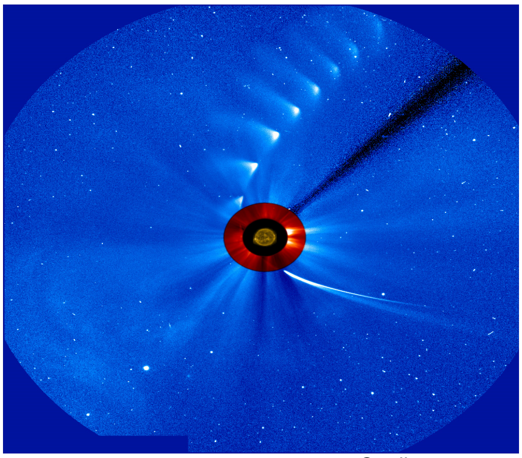
Quelle: Wikimedia commons

7 Komet ISON

Der Komet ISON wurde am 21. September 2012 entdeckt, als er fast eine Milliarde Kilometer von der Sonne entfernt war. Seitdem wurde er intensiv beobachtet. Dabei wurde festgestellt, dass er sich auf einer fast parabelförmigen Bahn vom Rand des Sonnensystems in dessen Inneres bewegt, um dann seinen Rückweg ins Weltall anzutreten, sofern er die Reise um die Sonne überlebt. In einem geeigneten Koordinatensystem, das in seiner Bahnebene liegt, konnten folgende Positionen in astronomischen Einheiten gemessen werden.

Datum	x-Koordinate	y-Koordinate
14.11.2013	-0,18	0,63
15.11.2013	-0,17	0,60
16.11.2013	-0,17	0,59
17.11.2013	-0,17	0,56
18.11.2013	-0,16	0,53
19.11.2013	-0,16	0,49
20.11.2013	-0,15	0,46

Quelle: Wikimedia commons



Quelle: nasa.gov
(ESA/NASA/SOHO/SDO/GSFC)

Was kannst du über ISON durch Recherchen, Berechnungen oder mithilfe von Excel bzw. GeoGebra herausfinden? Beurteile deine Ergebnisse.