

# Funktionen und ihre Ableitungen

## Funktionsverlauf, Monotonie und Krümmung

Johann Rubatscher

Thema	$f, f'$ und $f''$
Stoffzusammenhang	Differentialrechnung, funktionale Zusammenhänge
Klassenstufe	2. Biennium

### Intention

Ziel dieses Arbeitsblatts ist es, ein Verständnis bei den Lernenden über die Zusammenhänge zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen hervorzurufen und dieses zu festigen.

Zur Bearbeitung der Fragestellungen sind keinerlei Rechnungen erforderlich. Erfahrungsgemäß dauert der Arbeitsauftrag in etwa 50 Minuten.

### Fachlicher Hintergrund

Mehrere mathematisch salopp formulierte Fragestellungen zu den bereits behandelten Begriffen „Monotonie“ und „Krümmung“ dienen der Festigung des Verständnisses über deren Zusammenhänge.

### Methodische Hinweise

Nach der Behandlung der Grundlagen im Unterricht bedarf es keiner weiteren Erläuterung, um das Arbeitsblatt bearbeiten zu können. Die Fragestellungen werden von den Lernenden zu zweit oder in der Gruppe bearbeitet. Der Schwierigkeitsgrad ist als „mittelmäßig“ einzustufen. Das Arbeitsblatt wurde bereits einige Male erprobt; es entstand stets eine rege Diskussion.

### Leistungsbewertung

Mit einer Variation der Aufgabenstellungen kann leicht überprüft werden, ob die Lernenden die erarbeiteten Zusammenhänge erfasst haben und ob sie ihre Behauptungen mit den entsprechenden Argumenten auch untermauern können.

# Die Funktion und ihre Ableitungsfunktionen

In den folgenden Aufgabenstellungen ist die Funktion  $f$  „brav“, d.h. stetig, differenzierbar und frei von allen Böswilligkeiten, die sich nur Mathematiker ausdenken können.

## Aufgabe 1

Die Funktion  $f$  ist im Intervall  $I$  streng monoton fallend. Wie verhält sich der entsprechende Funktionswert  $f(x)$  im Intervall  $I$ , wenn der  $x$ -Wert der Funktion abnimmt? Begründe deine Antwort.

## Aufgabe 2

In einer Rechtskurve hat die Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  die Steigung 4. Welche Steigung wird  $f$  in dieser Rechtskurve an der Stelle  $x_1$  haben, wenn  $x_1$  rechts von  $x_0$  liegt? Begründe die Antwort.

## Aufgabe 3

$f''$  hat an der Stelle  $x_0$  den Wert -5. Was sagt dies über  $f'$  in einer Umgebung von  $x_0$  aus, was über  $f'(x_0)$ ? Was lässt sich über  $f(x_0)$  aussagen? Begründe.

## Aufgabe 4

$f'$  kreuzt an der Stelle  $x_0$  die  $x$ -Achse von links oben kommend. Welche besondere Stelle ist  $x_0$ ? Begründe.

## Aufgabe 5

Stelle, falls nötig, folgende Argumentation richtig:

In einem Rechtskrümmungsbereich einer Funktion  $f$  nimmt die Steigung der Tangente an die Kurve ab, wenn man von links nach rechts „wandert“. Da die Ableitung einer Funktion aber die Steigung der Tangente an der entsprechenden Stelle angibt, ist  $f'$  im Rechtskrümmungsbereich streng monoton fallend und  $f''$  ebenso. Begründe eine eventuelle Richtigstellung.

## Aufgabe 6

Skizziere, falls überhaupt möglich, das Teilstück einer Funktion  $f$ , die links gekrümmt und gleichzeitig streng monoton fallend ist. Was lässt sich über  $f''$  in diesem Kurvenstück aussagen? Begründe.

### **Aufgabe 7**

Die Funktion  $f$  geht an der Stelle  $x_0$  von einer Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung über. Gleichzeitig ist  $f$  im Bereich um  $x_0$  streng monoton steigend. Ist dies möglich? Begründe mithilfe einer Skizze.

### **Aufgabe 8**

Die Funktion  $f$  geht an der Stelle  $x_0$  von einer Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung über. Gleichzeitig ist  $f$  im Bereich um  $x_0$  streng monoton fallend. Ist dies möglich? Begründe mithilfe einer Skizze.

### **Aufgabe 9**

$f''$  ist in einem Bereich monoton fallend und besitzt dort eine Nullstelle. Was kannst du in diesem Bereich für  $f$  schlussfolgern? Begründe.

### **Aufgabe 10**

In einem Intervall  $I$  ist  $f'$  streng monoton steigend; die Werte von  $f'$  sind im Intervall jedoch negativ. Skizziere den Verlauf von  $f$  im Intervall  $I$  und begründe mit Worten deine Lösung.