AUTONOME PROVINZ BOZEN - SÜDTIROL
Deutsches Bildungsressort

PROVINCIA AUTONOMA DI BOLZANO - ALTO ADIGE
Dipartimento istruzione e formazione tedesca

Aufgaben für kompetenzorientierten Mathematikunterricht

Karin Höller, Volker Ulm (Hrsg.)

Lifelong Learning Programme

Karin Höller, Volker Ulm (Hrsg.)

Aufgaben für kompetenzorientierten Mathematikunterricht

Lifelong
Learning
Programme

Online-Materialien

Alle in diesem Buch abgedruckten Arbeitsmaterialien sowie zusätzliche Dateien sind in elektronischer Fassung erhältlich unter:

www.KeyCoMath.eu

und

www.bildung.suedtirol.it/mathematik

ISBN 978-3-00-045898-9

Design des Buchumschlages: Carsten Miller
Foto auf dem Buchumschlag: © Maksim Šmeljov – Fotolia.com
Lektorat: Carolin Götz

Lifelong Learning Programme

Developing Key Competences by Mathematics Education

Dieses Buch wurde im Zuge des Projekts "Developing Key Competences by Mathematics Education" im Rahmen des "Lifelong Learning Programme" mit Unterstützung der Europäischen Kommission finanziert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung trägt allein der Verfasser; die Europäische Kommission haftet nicht für die weitere Verwendung der darin enthaltenen Angaben.

Inhalt

Zur leichteren Verwendung der Unterrichtsmaterialien in diesem Buch sind diese Klassenstufen zugeordnet. Dabei wurde auf die Oberschule in Südtirol Bezug genommen. In die Oberschule treten Schülerinnen und Schüler im Alter von etwa 14 Jahren ein, nachdem sie in der Regel fünf Jahre die Grundschule und drei Jahre die Mittelschule besucht haben. Die Oberschule umfasst fünf Jahrgänge, die sich folgendermaßen gliedern:

	Dauer	ungefähres Alter der Schülerinnen und Schüler
Erstes Biennium, 1. und 2. Klasse	zwei Jahre	14 – 16 Jahre
Zweites Biennium, 3. und 4. Klasse	zwei Jahre	16 – 18 Jahre
5. Klasse	ein Jahr	18 – 19 Jahre

Entwicklung mathematischer Kompetenzen mit Lernumgebungen

Kompetenzorientierter Unterricht im Schulalltag

Volker Ulm

1 Ziel und Entstehung dieses Buches

Dieses Buch wurde von Lehrkräften für Lehrkräfte erstellt. In den Jahren 2013 und 2014 gestaltete das Deutsche Bildungsressort der Autonomen Provinz Bozen, Südtirol, in Kooperation mit der Universität Bayreuth für Lehrkräfte an Gymnasien und Fachoberschulen in Südtirol eine Seminarreihe mit dem Titel „Aufgaben für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht". In gemeinsamen Treffen beschäftigten sich die Teilnehmer mit grundsätzlichen Fragen der Gestaltung von Mathematikunterricht, der Konzeption von Aufgaben, der Förderung und der Diagnose von mathematischen Kompetenzen bei Schülerinnen und Schülern sowie der Leistungsbewertung.
Zwischen den Veranstaltungen bezogen die Teilnehmer die Seminarinhalte auf ihre Unterrichtspraxis, sie entwickelten entsprechende Unterrichtsmaterialien und erprobten sie in ihren Klassen. Die gewonnenen Ergebnisse und Erfahrungen wurden in der Teilnehmergruppe ausgetauscht und reflektiert. In der gemeinsamen Diskussion wurden die einzelnen Lernmaterialien kooperativ weiterentwickelt.
Als Resultat dieses Prozesses wurde die vorliegende Publikation verfasst. Sie enthält Aufgaben für kompetenzorientierten Mathematikunterricht, die an Oberschulen in Südtirol entwickelt und erprobt wurden.

2 Ziele von Schule und Kompetenzorientierung

Das Anliegen dieses Buches ist es, Impulse und Hilfen für einen Mathematikunterricht zu geben, der in bestem Maße allgemeinbildend ist und vielfältige Ziele auf verschiedenen Ebenen anstrebt. Konkretisiert sind derartige Zielvorstellungen beispielsweise in den Rahmenrichtlinien für die deutschsprachigen Gymnasien und Fachoberschulen in Südtirol:
„Die Oberschule als Schule für junge Erwachsene […] bereitet die Schülerinnen und Schüler auf die Anforderungen eines Hochschulstudiums, einer weiterführenden Ausbildung oder eines unmittelbaren Einstiegs ins Berufsleben vor. Im Sinne des lebensbegleitenden Lernens bietet sie Orientierung, eröffnet den Lernenden autonome und demokratische Entscheidungsmöglichkeiten und unterstützt eigenverantwortliches Handeln. […] Sie stärkt die Persönlichkeit der Lernenden in ihrer Handlungs- und Entscheidungsfähigkeit und ermöglicht den Aufbau der dafür notwendigen Kompetenzen, Einstellungen und Haltungen. […]
Weiters ermöglichen es Oberschulen den Schülerinnen und Schülern durch Mitbestimmung und Erfahrung im sozialen Lernen zu Bürgerinnen und Bürgern heranzuwachsen, die das demokratische Zusammenleben in dieser Gesellschaft als besonders wertvoll schätzen und es für sich und andere nutzen können." (Landesregierung Südtirol 2010)

Derartige Ziele der Schule finden sich in ähnlichen Formulierungen in vielen Ländern in den Lehrplänen und Richtlinien für Schulen. Es ist jeweils beschrieben, was das Bildungssystem leisten soll. Da der Unterricht in Fächer gegliedert ist, ist es Aufgabe eines jeden Faches, den Bildungsauftrag der Schule umzusetzen.

Doch was bedeuteten die allgemeinen Bildungsanliegen für das jeweilige Fach? Konkretisiert wurde dies in den letzten Jahren in kompetenzorientierten Lehrplänen und Bildungsstandards. Sie beschreiben, welche Kompetenzen Schülerinnen und Schüler im jeweiligen Fach entwickeln sollen. Speziell im Fach Mathematik sind dies Fähigkeiten, mathematisch zu denken und Mathematik in vielfältigen Situationen flexibel nutzen. Gegliedert werden können diese mathematischen Kompetenzen in zwei Arten:

Prozessbezogene Kompetenzen sind Fähigkeiten, Mathematik zu betreiben. Sie beschreiben typische Prozesse mathematischen Tuns, z. B.

- modellieren,
- argumentieren,
- kommunizieren und kooperieren,
- Probleme lösen,
- mathematische Darstellungen verwenden,
- mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen.

Inhaltsbezogene Kompetenzen sind Fähigkeiten, mit spezifischen fachlichen Inhalten verständnisvoll umzugehen. Diese Fähigkeiten sollten sich in den Inhaltsbereichen der Schulmathematik entwickeln. Mit den Bezeichnungen aus den Rahmenrichtlinien für Südtirol sind dies:

- Zahl und Variable
- Ebene und Raum
- Relationen und Funktionen
- Daten und Zufall

Beide Kompetenzarten sind in der Praxis des Mathematikunterrichts natürlich eng miteinander verbunden. Prozessbezogene mathematische Kompetenzen werden von den Schülerinnen und Schülern in der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten erworben. Umgekehrt entwickeln sich inhaltsbezogene Kompetenzen beim Betreiben von Mathematik, also bei entsprechenden Prozessen.

3 Lernen

Die Entwicklung von Fähigkeiten, Wissen, Haltungen, Einstellungen etc. kann mit einem Wort knapp zusammengefasst werden: Lernen. Im Hinblick auf die vielfältigen Ziele von Schule erscheint es deshalb sinnvoll, das Phänomen menschlichen Lernens etwas zu beleuchten, um daraus wiederum Folgerungen für Unterricht zu ziehen.

Lernen – ein konstruktiver Prozess

Lernen ist ein konstruktiver Prozess. Wissen kann nicht wie ein Gegenstand eins zu eins von der Lehrperson an die Schülerinnen und Schüler weitergereicht werden, sondern jeder Lernende muss sein Wissen und sein Verständnis selbst konstruieren. Was heißt dabei „konstruieren“? Betrachten wir dazu das Organ des Lernens aus Sicht der Neurobiologie. Im menschlichen Gehirn befinden sich weit über 100 Milliarden Nervenzellen (Neuronen), davon etwa 20 Milliarden in der Großhirnrinde. Sie sind vielfach miteinander vernetzt. Jedes Neuron kann Input von bis zu 10000 anderen Neuronen in Form von elektrischen Impulsen erhalten und an etwa ebenso viele Neuronen selbst Signale aussenden. Beim Lernen entstehen in der Regel keinen neuen Neuronen. Vielmehr ändern sich Stärken der Verbindungen zwischen Nervenzellen, also die Fähigkeiten von Neuronen, andere durch Aussendung elektrischer Signale zu erregen. Neue Verbindungen werden aufgebaut, bestehende Verbindungen werden verstärkt oder auch geschwächt bzw. abgebaut. Das neuronale Netz im Kopf wird beim Lernen umkonstruiert.
Mit dieser biologischen Sicht ergeben sich allerlei Folgerungen für das Lernen, aber auch für Lehren und die Gestaltung von Unterricht.

Lernen – ein individueller Prozess

Lernprozesse laufen im Kopf jedes Einzelnen ab. Sie sind von außen nur bedingt beeinflussbar. Der Lernende generiert Wissen und Verständnis, indem er individuelle Erfahrungen vor dem Hintergrund seines persönlichen Vorwissens und seiner Vorerfahrungen interpretiert und verarbeitet. Dass dies bei jedem Menschen anders erfolgt, erscheint insbesondere im Hinblick auf die Komplexität des Gehirns als neuronalem Netz offensichtlich.

Lernen – ein aktiver Prozess

Lernen ist eine Aktivität. Die individuellen Konstruktionsprozesse erfolgen umso effektiver und dauerhafter, je intensiver sich der Einzelne mit den zu lernenden Inhalten beschäftigt, je mehr er mit ihnen im Geist hantiert, je sorgfältiger er sie von verschiedenen Seiten betrachtet und je deutlicher er sie auf sein persönliches Vorwissen bezieht.

Lernen – ein selbstgesteuerter Prozess

Lernen erfordert eine bewusst organisierende und steuernde Aktivität des Individuums – zumindest zu einem gewissen Grad. Inwieweit ist selbstgesteuertes Lernen aber in der Realität überhaupt möglich? Kann man in der Schule selbstgesteuert lernen, wenn doch Lehrpläne Inhalte und Ziele festlegen und durch die Unterrichtsorganisation Zeiten und Abläufe geregelt sind?
Reine Selbststeuerung beim Lernen ist kaum realisierbar. Aber Lernprozesse können auch nicht rein fremdgesteuert erfolgen – genauso wenig, wie man jemanden zwingen kann, spontan Hunger zu haben oder spontan einzuschlafen. Eine Schülerin bzw. ein Schüler muss sich aktiv dafür entscheiden, beispielsweise einen Text mit Verständnis zu lesen oder sich auf eine mathematische Problemstellung einzulassen. Dies kann ihr bzw. ihm niemand abnehmen. Anders betrachtet: Es gehört mit zur Freiheit von uns Menschen, dass uns niemand zum Denken bzw. zum Lernen zwingen kann.

Lernen – ein situativer Prozess

Lernen wird durch die jeweilige Lernsituation maßgeblich beeinflusst. Ein sinnstiftender Kontext, eine anregende Geschichte, eine angenehme Atmosphäre, all dies kann das Lernen fördern und ihm Bedeutung verleihen. Umgekehrt kann eine Angst erzeugende Situation Lernen hemmen. Unter Angst verengt sich das Denken, man sucht einen möglichst schnellen und direkten Ausweg aus der Angstsituation. Phantasie und Kreativität werden dadurch eingeschränkt.

Lernen – ein sozialer Prozess

Auch wenn Lernen ein individueller Vorgang ist, so ist es doch gleichzeitig ein sozialer Prozess. Lernen wird durch den gesellschaftlichen Rahmen und das soziokulturelle Umfeld des Individuums maßgeblich bestimmt. Schulisches Lernen findet im Klassenkontext statt. Die Mitschüler und die Lehrkraft sind in der Schule Partner im Lernprozess. Dies gilt es bei der Gestaltung von Unterrichtssituationen zu berücksichtigen und für das Lernen zu nutzen.

Lernen an Beispielen

Lernen erfolgt über Beispiele. Drei Beispiele mögen dies deutlich machen:
Nahezu jeder Erwachsene, der Deutsch spricht, verbindet mit dem Begriff „Apfel“ konkrete Vorstellungen von Äpfeln. Er erkennt einen Apfel als solchen, auch wenn er das konkrete Stück Obst vorher noch nie gesehen hat. Als Erwachsener hatte man in seinem Leben vielleicht bereits Hunderte oder Tausende von Äpfeln vor Augen, kann sich an einzelne Äpfel wohl kaum mehr erinnern, hat aber aus den vielen Beispielen allgemeine Vorstellungen von Äpfeln gebildet. Die zugehörigen Lernprozesse beginnen be-

reits in den ersten Lebensjahren. Als Kind kommt man mit vielen konkreten Objekten in Kontakt und extrahiert daraus allgemeines Wissen über die Klasse der Objekte. Unser Gehirn kann dies sehr gut: Durch die Verallgemeinerung von konkreten Erfahrungen allgemeines Wissen erzeugen (vgl. Spitzer 2003, S. 75f).

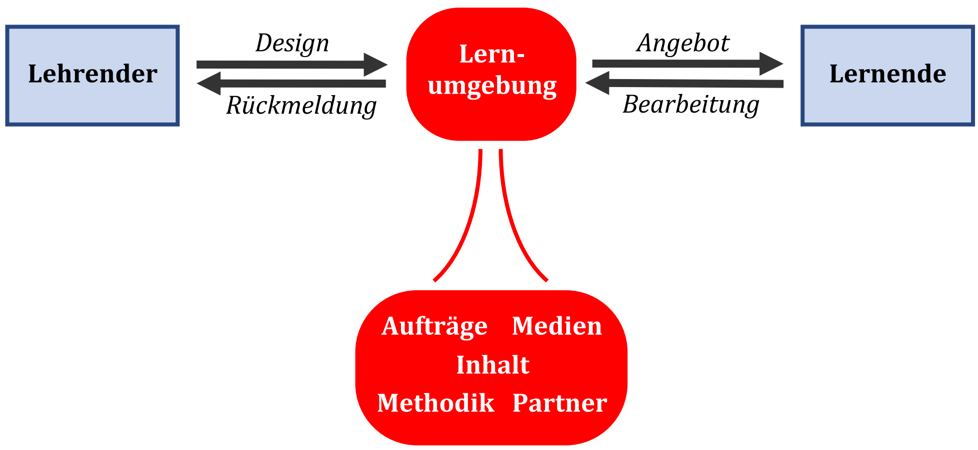
Dies trifft auch für so abstraktes Wissen wie Grammatik zu. Die deutsche Grammatik lässt sich als sehr komplexes Regelwerk mit vielfältigen Ausnahmen beschreiben. Kinder lernen, Sätze in ihrer Muttersprache zu konstruieren, jedoch nicht, indem sie explizit Grammatikregeln lernen. Sie hören der Sprache ihrer Umwelt zu, bilden selbst eigene Sätze und lernen so über Beispiele Grammatik, ohne dass ihnen die Regeln dazu bewusst sind.

Diese Gedanken lassen sich auch auf den Mathematikunterricht übertragen. Es gibt in der Schulmathematik viele Regeln – wie etwa die Regel zur Division von Brüchen: Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit dem Kehrbruch multipliziert. Natürlich sollten Schülerinnen und Schüler diese Regel irgendwann in ihre Hefte notieren. Allerdings gewinnt man vor allem über Beispiele Verständnis zur Division von Brüchen – etwa, indem man 10 Liter Wasser (real oder in Gedanken) in 2-Liter-Krüge gießt und so fünf Krüge füllen kann, oder indem man dieselbe Menge Wasser in ¼-Liter-Gläser schüttet und so vierzig Gläser befüllt. Die Regel beschreibt dann, was über Beispiele gelernt wird.

4 Lernumgebungen

Welche Folgerungen für schulischen Unterricht können aus den dargestellten Aspekten des Lernens gezogen werden? Das vorliegende Buch liefert dazu Antworten auf drei Ebenen: Zunächst wird ein allgemeines Modell für Lehr-Lern-Prozesse entwickelt, dann wird ein methodisches Konzept für die Gestaltung von Unterricht begründet und schließlich werden in allen nachfolgenden Kapiteln konkrete Unterrichtsmaterialien für Schülerinnen und Schüler vorgestellt.

Wenn man die erwähnten Aspekte des Lernens ernst nimmt, erscheint folgendes Modell der Lernumgebungen zur Beschreibung von Lehr-Lern-Prozessen tragfähig.



Da eine Lehrkraft an Schülerinnen und Schüler Wissen nicht direkt weitergeben kann, stellt eine Lernumgebung das Bindeglied zwischen allen Beteiligten her. Kernaufgabe der Lehrkraft ist es, die Lernumgebung zu entwerfen.

Der Begriff „Lernumgebung" beschränkt sich dabei nicht nur auf bloßes Material (z. B. Arbeitsblätter), sondern schließt das gesamte Arrangement von Arbeitsaufträgen, Unterrichtsmethoden, Inhalten, Medien und das soziale Umfeld ein. Damit schafft die Lehrkraft ein Angebot für die Lernenden, eine Basis für Lernprozesse.

Die Schüler arbeiten in und mit der Lernumgebung, sie beschäftigen sich mit den Inhalten. Dadurch gewinnt die Lehrkraft Rückmeldungen über die Schüler, aber auch über die Lernumgebung.

Basierend auf den in Abschnitt 3 aufgezeigten Aspekten des Lernens ergeben sich fundamentale Folgerungen für die Gestaltung von Lernumgebungen. Sie sind methodisch so zu konzipieren, dass sie

- eigenständiges, selbstgesteuertes Arbeiten der Schülerinnen und Schüler,
- individuelles, aktives Handeln,
- gemeinsames Forschen und Entdecken,
- Diskutieren und Präsentieren von Ideen,
- kooperatives Erarbeiten von Ergebnissen

erfordern und fördern.

Inhaltlich sollten Lernumgebungen so gestaltet sein, dass sie

- sinnstiftende Kontexte bieten,
- sich an tragfähigen Beispielen orientieren,
- Problemsituationen unter verschiedenen Blickwinkeln beleuchten.

5 Unterrichtsmethodik

Wie kann Unterricht konkret organisiert werden, um die dargestellten Forderungen umzusetzen? Dazu gibt es eine Vielfalt methodischer Konzepte. Das im Folgenden dargestellte Beispiel ist insofern prototypisch, dass es auf sehr natürliche Art in vier Phasen individuelles Lernen mit Kooperation im sozialen Kontext und Unterrichtsgesprächen unter Leitung der Lehrkraft verbindet.

Individuelles Arbeiten
Kooperation in Kleingruppen
Präsentation und Diskussion im Klassenplenum
Zusammenfassung der Resultate

Individuelles Arbeiten

Wie oben erläutert, ist Lernen ein individueller, aktiver, selbstgesteuerter Konstruktionsprozess. In diesem Sinne geht es zunächst für jeden Einzelnen darum, eine mathematische Situation zu erschließen und zu verstehen, sich zu orientieren und ein Gefühl für die Situation zu gewinnen. Die Thematik ist in das persönliche Vorwissen einzuordnen, Strategien und Lösungsideen sind zu entwickeln und schließlich umzusetzen. Die Analyse dieser Orientierungs- und Bearbeitungsprozesse zeigt, dass es sich hierbei um zutiefst individuelle Vorgänge handelt. Jeder Schüler besitzt ein eigenes „Denk-Netz" (Vorwissen, Denkmuster, Problemlösestrategien, ...) und ein eigenes Tempo beim Arbeiten. Deshalb erscheint es sinnvoll und zweckmäßig zugleich, diese Phase jeden Schüler individuell durchlaufen und durchleben zu lassen.

Kooperation in Kleingruppen

Lernen ist auch ein sozialer Prozess. Haben die Schüler einen Zugang zu einer Thematik gefunden, ist es ein sehr natürlicher Fortgang, dass sie sich mit ihren Mitschülern darüber unterhalten. Es stehen also die Kooperation und die Kommunikation mit dem bzw. den Nachbarn im Mittelpunkt. Ein derartiger Austausch begünstigt Lernen in mehrerlei Hinsicht. Einerseits führt das aktive Kommunizieren zu einer Strukturierung der eigenen Gedanken und einer weiteren Durchdringung des Stoffes. Andererseits kann der Nachbar helfen, wenn es darum geht, Verständnisfehler zu klären, Grundlagenwissen zu aktivieren, weitere Ideen zu entwickeln und auftretende Probleme zu bewältigen. Ein derart kooperatives Arbeiten unterstützt auch den Aufbau sozialer Kompetenzen, indem es Schüler dazu veranlasst, einander zuzuhören, zusammenzuarbeiten, sich wechselseitig zu unterstützen, miteinander zu diskutieren, mit diskrepanten Ansichten umzugehen und Kompromisse zu schließen.

Präsentation und Diskussion im Klassenteam

Nachdem die Schülerinnen und Schüler alleine und in Gruppen mathematisch gearbeitet haben, stellen sie ihre Überlegungen und Ergebnisse im Klassenplenum vor und diskutieren sie. Durch die verschiedenen Beiträge wird der fachliche Inhalt perspektivenreich beleuchtet. Gleichzeitig trainieren die Schülerinnen und Schüler das Reden über Mathematik, das Präsentieren eigener Ergebnisse, aber auch das Sprechen vor einer Gruppe, der Klasse. Natürlich wird man nicht davon ausgehen können, dass die Beiträge der Schülerinnen und Schüler hinsichtlich des Inhalts, der Darstellung und der Verständlichkeit stets perfekt sind. Dies muss aber kein Manko sein, im Gegenteil: Ein Bildungsziel des Mathematikunterrichts ist es, den Schülern Kommunikations- und Argumentationskompetenz zu vermitteln. Der wohl einzige Ort, an dem derartige Schlüsselkompetenzen mit Bezug zu Mathematik systematisch vermittelt werden können, ist der Mathematikunterricht. Deshalb gilt es, die sich dort ergebenden Lernchancen zu nutzen.

Zusammenfassung der Resultate

Schließlich kann die Bearbeitung der Thematik zu einem Abschluss gebracht werden, indem die Schülerresultate unter der fachkundigen Leitung der Lehrkraft zu einem Gesamtergebnis zusammengefasst bzw. erweitert werden. Die Schülerinnen und Schüler sind dann „reif" für eine fundierte Ergebnissicherung, die mathematische Konventionen, den stofflichen Rahmen und curriculare Vorgaben berücksichtigt.

Die Grundidee dieses methodischen Konzepts ist die natürliche Verbindung verschiedener Phasen des Lernens im alltäglichen Klassenunterricht, die jeweils spezifische Funktionen erfüllen können. Die Schülerinnen und Schüler erhalten Freiräume, um selbstständig Mathematik zu betreiben, sie entwickeln ihre Gedanken zu gemeinsamen Ergebnissen weiter und werden unter Leitung der Lehrkraft mit der „regulären Mathematik" (Gallin, Ruf 2011) vertraut gemacht. Allerdings ist zu bemerken: Selbstverständlich wäre es zu einseitig, den gesamten Mathematikunterricht nur nach diesem methodischen Konzept zu strukturieren. Ausgewogener Mathematikunterricht ist „bunt". Er lebt von der Vielfältigkeit inhaltlicher Themen, einem breiten Spektrum an Unterrichtsmethoden und dem Reichtum an Aufgabentypen.

6 Literatur

Gallin, P., Ruf, U. (2011): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik, Kallmeyer, Seelze

Landesregierung Südtirol (2010): Rahmenrichtlinien des Landes für die Festlegung der Curricula in den deutschsprachigen Gymnasien und Fachoberschulen Südtirols

Spitzer, M. (2003): Lernen, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg

Ulm, V. (2005): Mathematikunterricht für individuelle Lernwege öffnen, Kallmeyer, Seelze

Wittmann, E. Ch. (1995): Mathematics Education as a "Design Science", Ed. Studies in Mathematics 29, S. 355-374

1 Entfernungs- und Höhenmessung

Funktionsweise von Apps

Marion Zöggeler, Hubert Brugger, Karin Höller

Thema	Mathematische Berechnungen einer App zur Entfernungsmessung
Stoffzusammenhang	Trigonometrie
Klassenstufe	2. Biennium

Intention

Smartphones und Tablets bieten eine Fülle von Apps, denen nicht selten eine mathematische Berechnung zugrunde liegt – so auch bei verschiedenen Entfernungs- und Höhenmessungen. Die Arbeitsaufträge sollen die Lernenden dazu anregen, derartige technische Anwendungen zu hinterfragen.

Für diese Lernumgebung sind ein bis zwei Unterrichtsstunden vorzusehen.

Fachlicher Hintergrund

Um den Arbeitsauftrag ausführen zu können, sind Grundkenntnisse aus der Trigonometrie erforderlich.

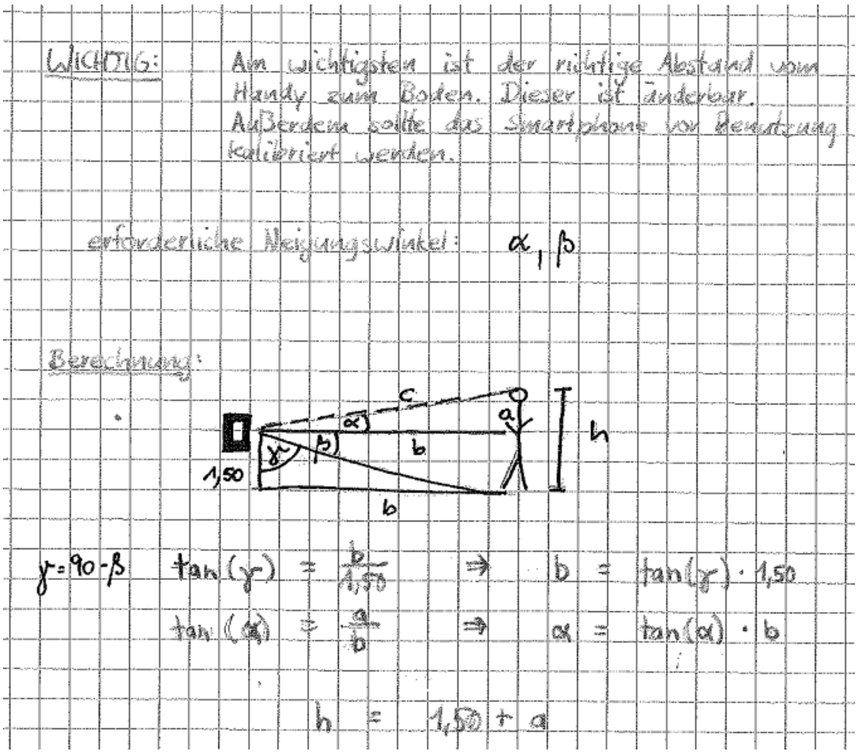
Methodische Hinweise

Der Arbeitsauftrag ist für Gruppen von zwei bis drei Lernenden gedacht. Großer Wert wird auf die Dokumentation der Arbeit gelegt, auf die Beschreibung der Vorgehensweise. Die nachfolgend aufgeführten Fragen sollen diese Dokumentation lenken.

Für diesen Experimentierauftrag müssen genügend Smartphones bzw. Tablets zur Verfügung stehen. Des Weiteren sollten Messbänder, Lineale, Winkelmessgeräte sowie Schnüre bereitliegen.

Schülerlösung

Eine Schülerlösung zum Thema „Kleine Entfernungen (1 - 50 m)“ auf dem Arbeitsblatt:



Leistungsbewertung

Jede Schülerlösung enthält eine Skizze, aus der hervorgeht, welche Bezugsgrößen angegeben sind bzw. gemessen werden. Die fehlenden Größen erhält man dann durch das Anwenden trigonometrischer Beziehungen. Die Leistungsbewertung berücksichtigt genau diese beiden Aspekte. Einfließen sollten aber auch der Messvorgang selbst bzw. die Suche nach Hintergrundinformationen (z. B. Handbuch zur App usw.).

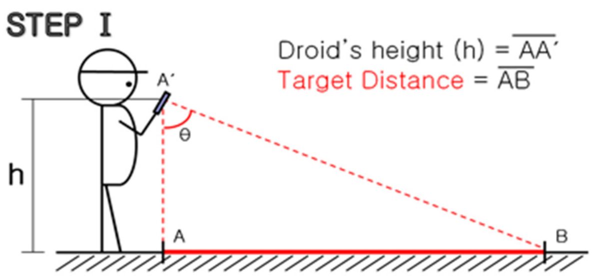
Entfernungs- und Höhenmessungen

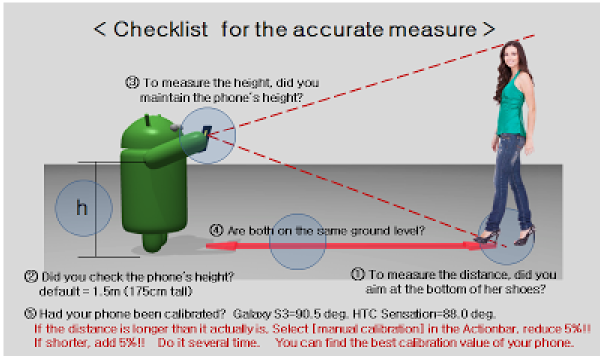
Funktionsweise von Apps

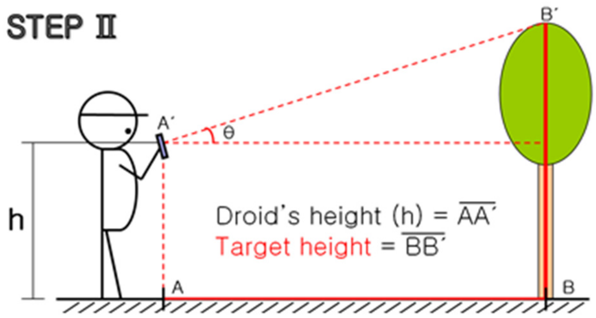
Smartphones und Tablets bieten eine Fülle von Apps, denen nicht selten eine mathematische Berechnung zugrunde liegt. So auch bei verschiedenen Entfernungsmessungen.

Kleine Entfernungen (1 - 50 m)

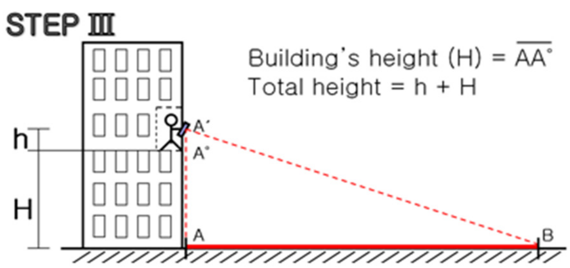
Aus dem Handbuch von „Smart Measure Lite“:







- The measured length is for reference.
- Before use this App, calibrate your devices with known distance.
- If the measured distance is **longer** than it, **reduce** by 5% at manual calibration. If **shorter**, **increase** by 5%. Do it several times. You can find your own best calibration.



Abgebildet ist hier die Anleitung zur App „Smart Measure“. Führe einige Entfernungs- und Höhenmessungen mit deinem Smartphone oder Tablet aus und miss die Entfernung und die Höhen mit einem Meterband nach. Vergleiche.

Nun wollen wir die App ein bisschen genauer unter die Lupe nehmen:

- Welche Bezugsgrößen sind zur Ausführung der App erforderlich?
- Das Gerät kann Neigungswinkel messen. Welche Neigungswinkel sind zur Berechnung der Entfernung und der Höhe eines Objektes notwendig?
- Wie werden letztlich Entfernung und Höhe berechnet?
- Fertige eine Skizze an, miss die erforderlichen Größen mit dem Messband nach und berechne selbst mithilfe der Trigonometrie die Entfernung bzw. die Höhe.

2 Wichtige Linien im Dreieck

Eine computerunterstützte Unterrichtseinheit

Walther Unterleitner, Manfred Piok, Maximilian Gartner

Thema	Besondere Linien und Punkte im Dreieck (Eulersche Gerade)
Stoffzusammenhang	Ebene und Raum
Klassenstufe	1. Biennium

Intention

Die Lernenden konstruieren in GeoGebra die wichtigen Punkte im Dreieck und untersuchen deren Eigenschaften, indem sie die Form der Dreiecke verändern. Insgesamt erstreckt sich die Unterrichtseinheit über vier bis sechs Unterrichtsstunden, in Abhängigkeit der GeoGebra-Vorkenntnisse.

Fachlicher Hintergrund

Die wichtigen (besonderen) Punkte im Dreieck (Schnittpunkt der Mittelsenkrechten als Umkreismittelpunkt, Schnittpunkt der Winkelhalbierenden als Inkreismittelpunkt, Schwerpunkt und Schnittpunkt der Höhen) werden konstruiert. Die Lage der Punkte variiert je nach Art des Dreiecks; drei der vier liegen auf der Eulerschen Geraden. Die Verwendung der Software GeoGebra ermöglicht es den Lernenden, in kurzer Zeit eine Vielzahl verschiedener Fälle auszutesten und entsprechende Schlüsse zu ziehen. Als Zusatzaufgabe können sich die „schnelleren" Lernenden auf die Suche nach dem Fermat-Punkt begeben.

Methodische Hinweise

Um die Lernumgebung bearbeiten zu können, sind Kenntnisse zu folgenden Begriffen notwendig:

- Mittelsenkrechte
- Winkelhalbierende
- Schwerlinie
- Höhe
- Abstand

Die erste Übung kann – je nach Vorkenntnissen der Lernenden in GeoGebra – als Demonstrationsbeispiel benutzt werden, um die Werkzeuge der Software zu erklären.
Die Erarbeitung erfolgt in Einzel- und Partnerarbeit.

Leistungsbewertung

Mithilfe eines Textverarbeitungsprogramms kann ein digitales Dokument erstellt werden. Der Lernende bearbeitet die Aufträge und schreibt seine Erkenntnisse und Überlegungen nieder. Die mit GeoGebra erzeugten Grafiken werden in das Dokument eingebunden. Die dadurch entstandene Dokumentation wird nach Inhalt, Übersichtlichkeit, Sauberkeit der Konstruktion und Argumentation bewertet.

Die wichtigen Linien im Dreieck

Erstelle mit GeoGebra für jede Aufgabe ein eigenes Fenster, auf das du jederzeit zugreifen kannst.

1 Höhen

Konstruiere ein beliebiges Dreieck und trage die drei Höhen ein. Konstruiere den Höhenschnittpunkt H.
Bewege die Eckpunkte des Dreiecks so, dass sich der Höhenschnittpunkt H verschiebt.
Dokumentiere, wie sich die Lage des Höhenschnittpunktes in Abhängigkeit von der Form des Dreiecks verändert.

2 Mittelsenkrechten

Konstruiere die Mittelsenkrechten eines Dreiecks. Bezeichne ihren Schnittpunkt mit U.

Bewege die Eckpunkte des Dreiecks so, dass sich der Schnittpunkt U verschiebt.
Dokumentiere, wie sich die Lage von U in Abhängigkeit von der Form des Dreiecks verändert.

3 Winkelhalbierenden

Konstruiere die Winkelhalbierenden eines Dreiecks. Bezeichne ihren Schnittpunkt mit I.
Ist es möglich, dass der Schnittpunkt I auch außerhalb des Dreiecks liegt? Begründe.

4 Schwerlinien

Konstruiere die Strecken vom Mittelpunkt der Seiten eines Dreiecks zum jeweils gegenüberliegenden Eckpunkt. Bezeichne ihren Schnittpunkt mit S und untersuchen dessen Lage.

5 Kreise und Verhältnisse

Welcher der vier Punkte hat von den drei Eckpunkten des jeweiligen Dreiecks den gleichen Abstand?

Welcher der vier Punkte hat von den drei Seiten des jeweiligen Dreiecks den gleichen Abstand?

Miss die Entfernungen von den Eckpunkten zu den jeweiligen Schnittpunkten bzw. von den Schnittpunkten zu den Dreiecksseiten. Was stellst du fest?

Zusatzaufgabe: Gibt es einen Punkt, für den die Summe der Abstände zu den Eckpunkten des Dreiecks minimal ist?

6 Zusammenhang der verschiedenen Schnittpunkte

Konstruiere ein Dreieck, das den Bildschirm ziemlich ausfüllt. Zeichne die bisher kennengelernten besonderen Linien mit deren Schnittpunkten ein. Blende die besonderen Linien aus, sodass ein übersichtliches Gesamtbild entsteht. Bewege das Dreieck und beobachte die Lage der vier Schnittpunkte. Was stellst du fest?

Gelingt es dir, die Eckpunkte des Dreiecks so zu verschieben, dass alle vier Schnittpunkte auf einer Geraden liegen?

3 Einführung in die Trigonometrie

Sinus, Kosinus, Tangens am rechtwinkligen Dreieck und am Einheitskreis

Monika Sellemond, Anton Proßliner, Martin Niederkofler

Thema	Trigonometrie
Stoffzusammenhang	Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck und am Einheitskreis, trigonometrische Funktionen (evtl. mit Parametern)
Klassenstufe	2. Biennium

Intention

Mit dem Satz des Pythagoras kann am rechtwinkligen Dreieck aus zwei gegebenen Seiten die dritte berechnet. Nun werden auch die Winkelgrößen miteinbezogen. In der Unterrichtseinheit lernen die Schülerinnen und Schüler Grundbegriffe der Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck und am Einheitskreis kennen. Daraus erarbeiten sie die Sinus-, die Kosinus- und die Tangensfunktion.

Fachlicher Hintergrund

Rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie außer im rechten Winkel noch in einem weiteren Winkel übereinstimmen. Damit hängen Sinus, Kosinus und Tangens als Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken nur von einem Innenwinkel, nicht aber von der Größe des jeweiligen Dreiecks ab.
Am Einheitskreis lassen sich die Definitionen von Sinus, Kosinus und Tangens auf beliebige Winkel erweitern. Daraus gewinnt man die trigonometrischen Funktionen, wenn man den Winkel als freie Variable betrachtet.

Methodische Hinweise

Die Arbeitsaufträge werden vorwiegend in Partner- oder Gruppenarbeit gelöst; die Ergebnisse werden im Plenum diskutiert und festgehalten.
Nach Arbeitsauftrag 1 erfolgt ein Input der Lehrperson zur Wiederholung der Grundbegriffe im rechtwinkligen Dreieck und zur Definition von Sinus, Kosinus und Tangens. Durch einen Übungsblock werden die Begriffe und Zusammenhänge gefestigt.

Sollten den Lernenden die verschiedenen Winkelmaße noch nicht bekannt sein, werden diese ergänzend mit den entsprechenden Tastensymbolen am Taschenrechner erklärt.

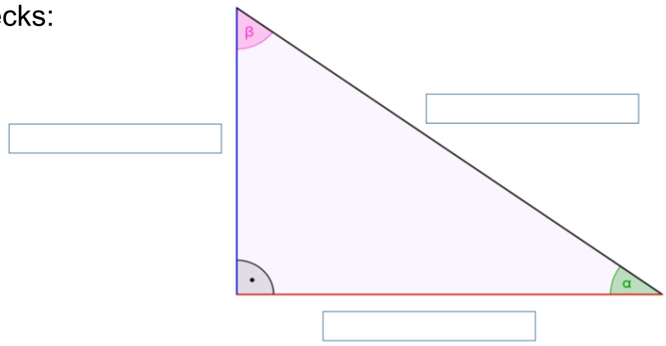
Leistungsbewertung

Bewertet werden kann beispielsweise

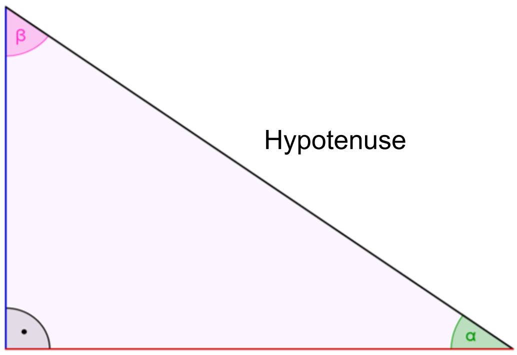
- die Mitarbeit während der Phase der Gruppenarbeit,
- die Präsentation des erhaltenen Ergebnisses sowie
- eine abschließende Testarbeit.

Grundbegriffe im rechtwinkligen Dreieck

Benenne die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks:



Um den Zusammenhang zwischen Winkelgrößen und Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck zu beschreiben, muss man unterscheiden, ob eine Kathete an oder gegenüber einem Winkel liegt.



Definition von Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck

Unter dem **Sinus** eines Winkels versteht man das Verhältnis zwischen Gegenkathete und Hypotenuse.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Unter dem **Kosinus** eines Winkels versteht man das Verhältnis zwischen Ankathete und Hypotenuse.

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Der **Tangens** wird durch das Verhältnis von Sinus zu Kosinus oder auch durch das Verhältnis von Gegenkathete zur Ankathete definiert:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Ankathete von }\alpha}$$

Warum hängen diese Verhältnisse nur vom Winkel α, nicht aber von der jeweiligen Größe des Dreiecks ab?

Trigonometrie

1 Dreiecke zu Gruppen zuordnen

Schneide verschiedene Dreiecke aus Papier aus.

Teile die Dreiecke in Gruppen ein.

Nenne Eigenschaften, die diese Dreiecksgruppen charakterisieren, und halte deine Überlegungen schriftlich fest.

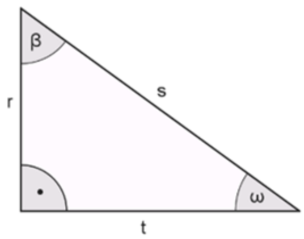
2 Wertebereich von Sinus, Kosinus und Tangens

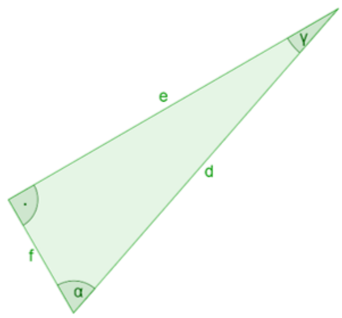
Überlege und notiere: Welche Werte können Sinus, Kosinus und Tangens annehmen?

3 Grundaufgaben

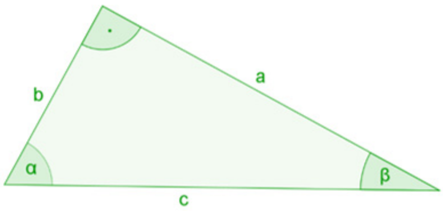
Ergänze die fehlenden Angaben und vergleiche anschließend deine Ergebnisse mit denen deines Banknachbarn bzw. deiner Banknachbarin:

$\sin\beta = \frac{\square}{\square}$ $\quad$ $\sin \square = \frac{r}{\square}$





$\sin\alpha = \frac{\square}{\square}$ $\quad$ $\sin \square = \frac{\square}{d}$



$\tan\alpha = \frac{\square}{\square}$

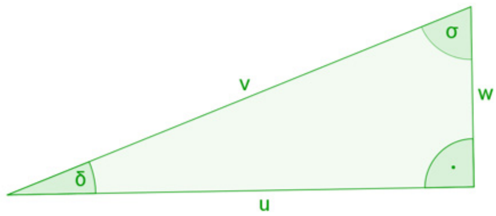
$\cos\beta = \frac{\square}{\square}$

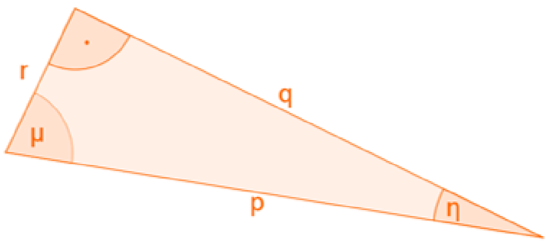
$\sin\beta = \frac{\square}{\square}$

$\tan\delta = \frac{\square}{\square}$

$\tan\sigma = \frac{\square}{\square}$

$\cos\delta = \frac{\square}{\square}$





$\frac{r}{q} = \tan \square$

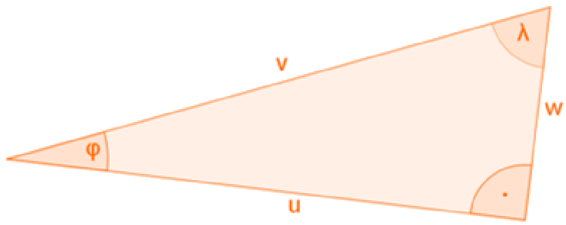
$\frac{q}{p} = \square\ \mu$

$\frac{q}{r} = \tan \square$

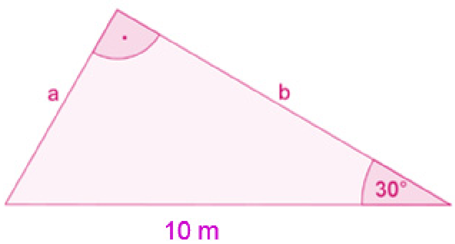
$\frac{w}{v} = \cos \square$

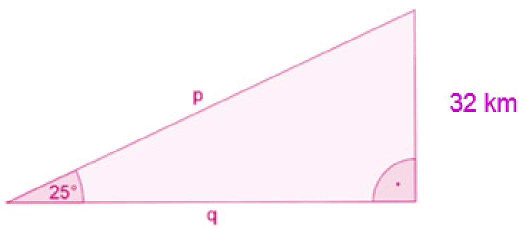
$\frac{w}{\square} = \sin \square$

$\frac{\square}{u} = \tan \square$



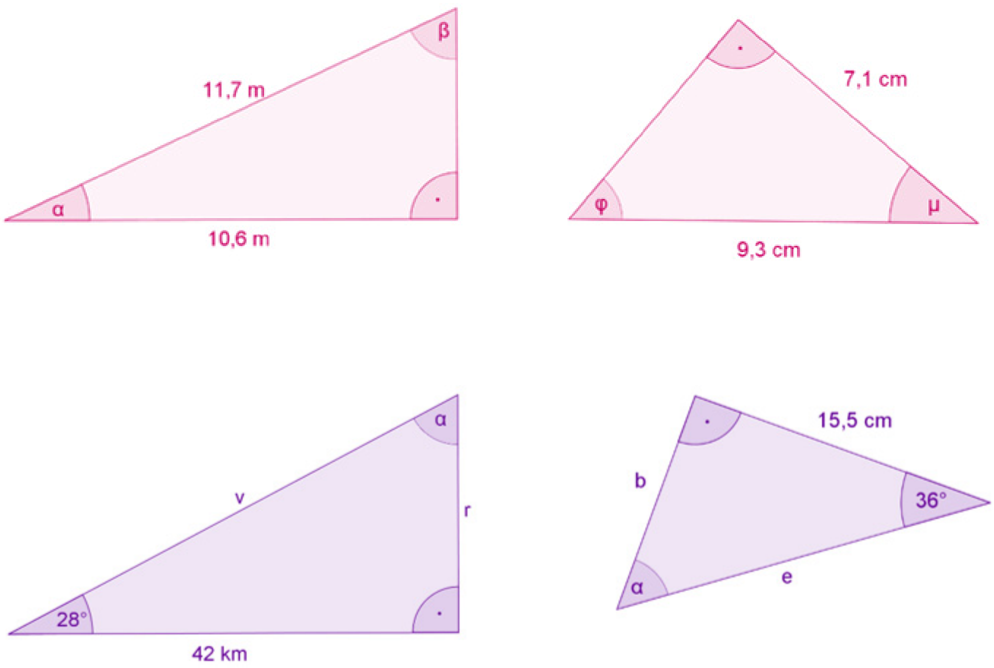
Berechne die fehlenden Seitenlängen:





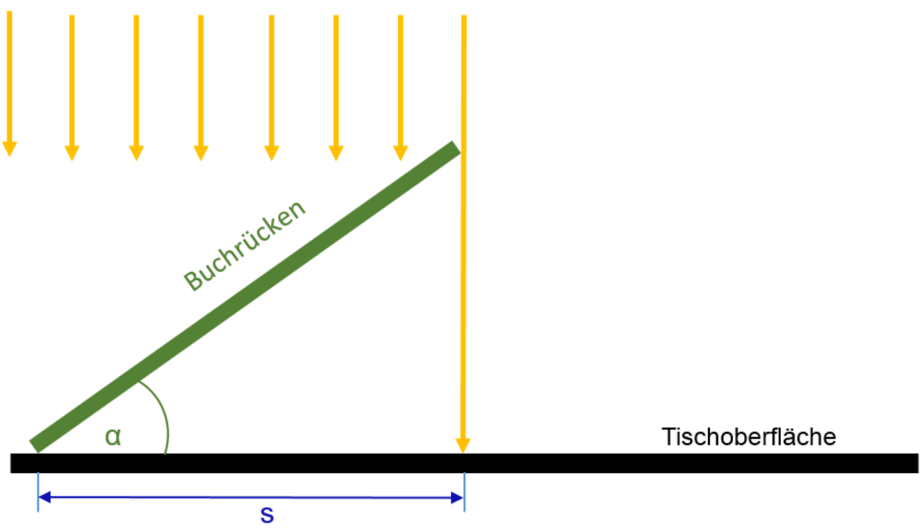
4 Umkehraufgabe – Berechnung der Winkel

Berechne die fehlenden Winkelgrößen und Seitenlängen:



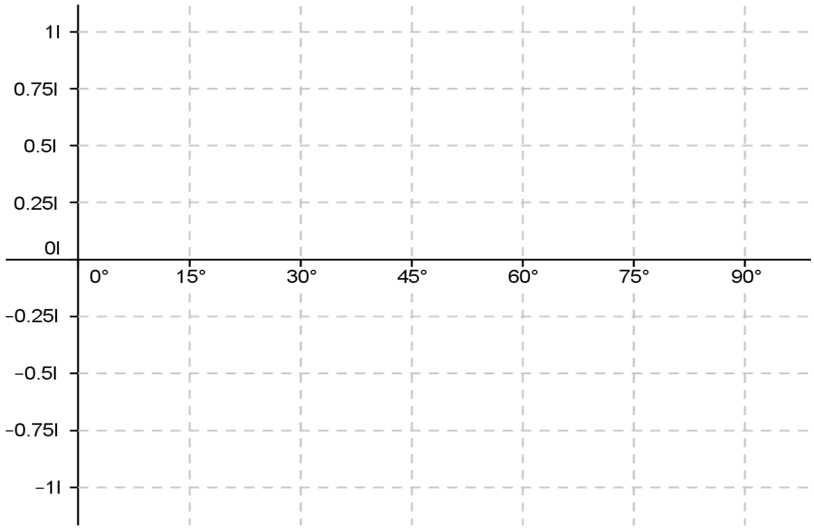
5 Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Halte senkrecht über einem schräg gehaltenen Buch eine Lichtquelle (siehe Abbildung). Dabei wirft das Buch einen Schatten auf die Tischplatte. Miss die Länge s des Schattens für verschiedene Neigungswinkel α und trage die Punkte mit den Koordinaten $(\alpha|s)$ in ein Koordinatensystem ein. Die Länge des Buchrückens wird mit l bezeichnet.



Wertetabelle:

α	s



Welcher funktionelle Zusammenhang besteht zwischen α, l und s?

Ein Widerspruch für Winkel, die größer als 90° sind?

Der Taschenrechner liefert Sinus-, Kosinus- und Tangenswerte für beliebige Winkel.
Beispiel: $\cos 120° = -0{,}5$.

Nach unserer bisherigen Definition ist dies nicht erklärbar:

- Im rechtwinkligen Dreieck gibt es keine Winkel größer als 90°.
- Da Seitenlängen positiv sind, kann unmöglich ein negatives Seitenverhältnis hervorgehen.

Um die Taschenrechnerausgabe zu verstehen, drehen wir unser „Buch“ um 360°. Dies modellieren wir in GeoGebra mit dem Einheitskreis ($r = 1$) mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung.

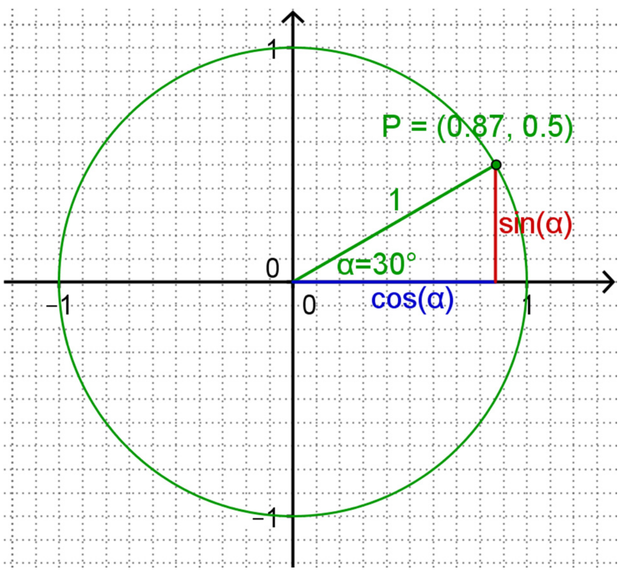
Arbeitsauftrag (GeoGebra)

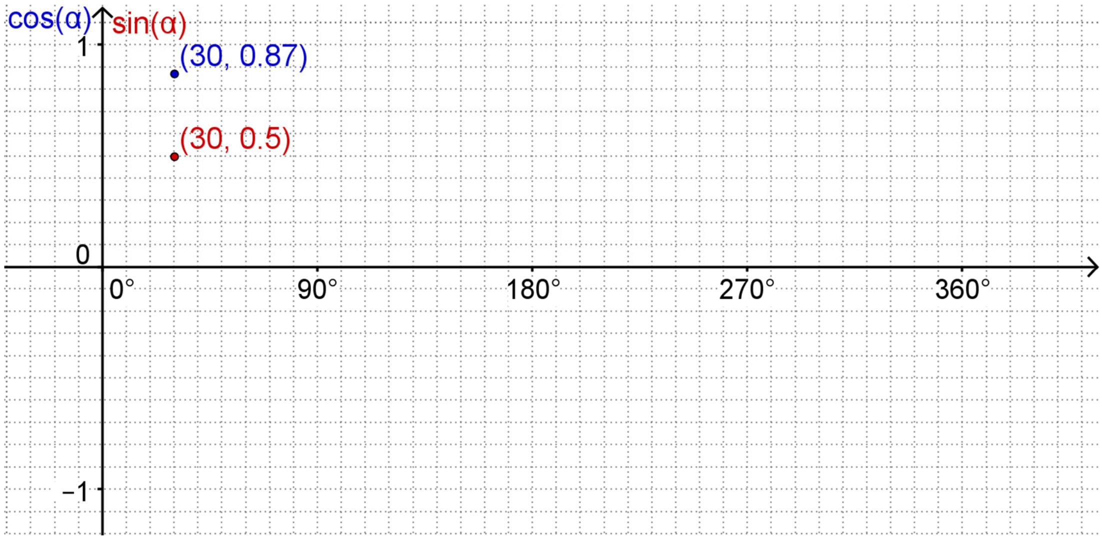
Zeichne um den Koordinatenursprung einen Kreis mit Radius $r = 1$.

Markiere im Abstand von 15° auf der Kreislinie Punkte und bestimme durch Messung die zugehörigen Sinus- und Kosinuswerte (vgl. Abb. für $\alpha = 30°$).

Trage die Ergebnisse für die zugehörigen Winkel im untenstehenden Koordinatensystem ein ($0 < \alpha < 360°$).

Zeichne mit den Messdaten die Sinuskurve (rot) sowie die Kosinuskurve (blau). Beschreibe den Verlauf der Kurven in eigenen Worten.

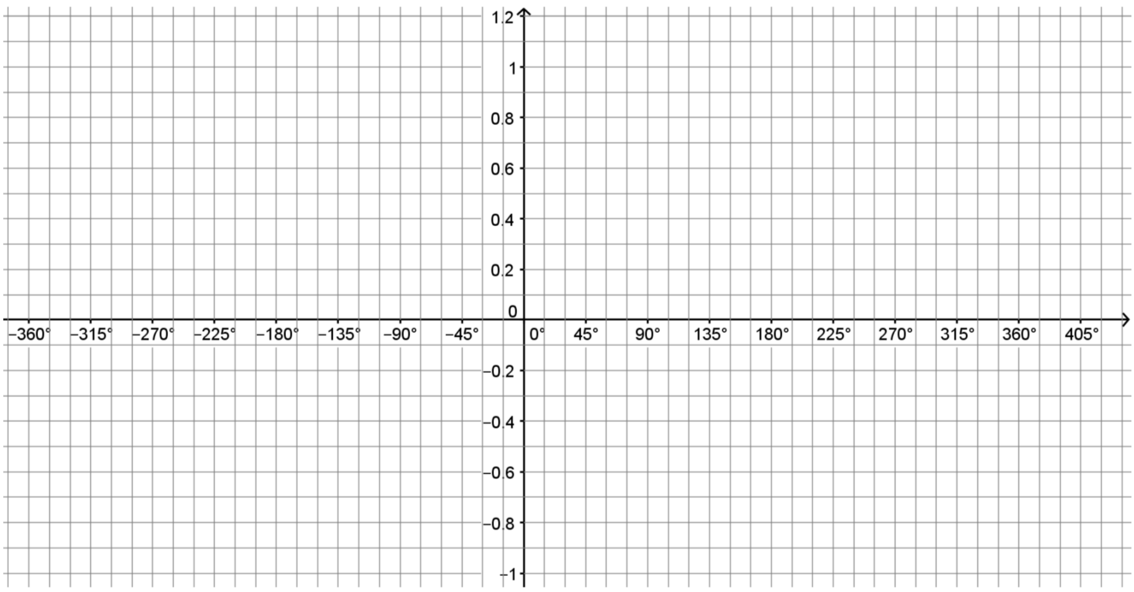




Öffne die Datei „Sinus_Kosinus_Einheitskreis.ggb“, verändere den Winkel α und vergleiche die entstehende Kurve mit deinem Schaubild.

Stelle folgende Überlegungen an:

- Wie verlaufen die Kurven, wenn der Winkel größer als 360° ist?
- Was geschieht bei negativen Winkelgrößen?
- Für welche Winkelgrößen ergeben sich gleiche Sinus- und Kosinuswerte? Drücke dies mithilfe einer Formel aus.



Funktionen, bei denen sich die Funktionswerte in festen Abständen wiederholen, heißen **periodische Funktionen**.

Der kürzeste dieser Abstände heißt **Periodenlänge.**

Die Periodenlänge der Sinus- und Kosinusfunktion beträgt …………………. .

Begründe den sogenannten **trigonometrischen Pythagoras**:

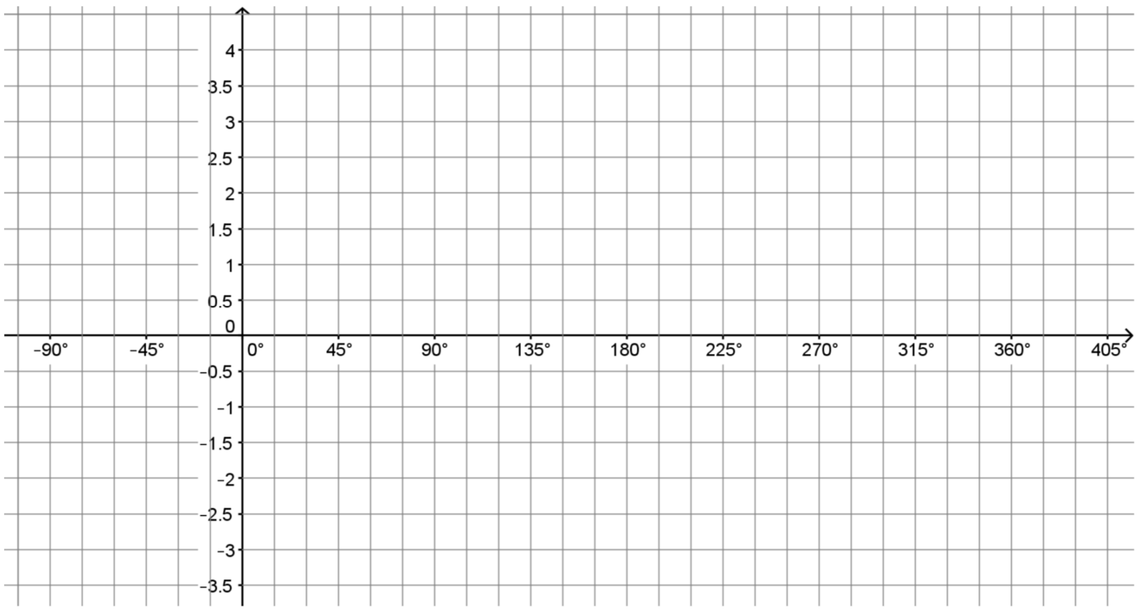
$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

6 Die Tangensfunktion

Bestimme für verschiedene Winkelwerte das Verhältnis zwischen Sinus und Kosinus und trage die Punkte im Koordinatensystem ein.

α	$sin(\alpha)$	$cos(\alpha)$	$tan(\alpha)$
0°			
30°			
45°			
60°			
90°			
180°			
225°			
270°			
315°			
360°			

α	$sin(\alpha)$	$cos(\alpha)$	$tan(\alpha)$
- 30°			
- 45°			
- 60°			



Beschreibe den Kurvenverlauf der Tangensfunktion. Wo gibt es „kritische“ Stellen?

7 Anwendungsaufgaben

Das Wassermolekül hat einen Winkel zwischen den zwei Wasserstoffatomen von 104,45°.
Der Abstand zwischen Wasserstoffatom und Sauerstoffatom beträgt 95,84 pm = 95,84 · 10^{-12} m.

Berechne den Abstand zwischen den Wasserstoffatomen.

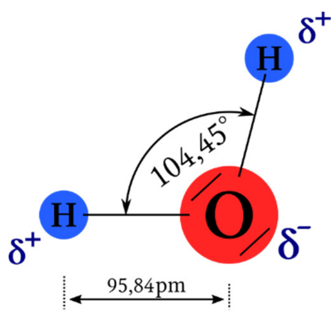


Bild aus: Wikimedia Commons

Eine große Aufgabensammlung nach verschiedenen Anforderungsprofilen findet sich unter http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/s1ge/rd/rdindex.html.

4 Sinus- und Kosinussatz

Trigonometrie in beliebigen Dreiecken

Monika Sellemond, Anton Proßliner, Martin Niederkofler

Thema	Sinus- und Kosinussatz
Stoffzusammenhang	Trigonometrie in beliebigen Dreiecken
Klassenstufe	2. Biennium

Intention

Ausgehend vom rechtwinkligen Dreieck wird die Trigonometrie auf beliebige Dreiecke ausgeweitet: Aus drei Größen eines allgemeinen Dreiecks können alle anderen Größen berechnet werden.

Fachlicher Hintergrund

Die Grundidee bei der Erarbeitung des Sinus- und des Kosinussatzes im allgemeinen Dreieck ist jeweils die gleiche: Aus einem allgemeinen Dreieck entstehen durch Einzeichnen einer Höhe zwei rechtwinklige Dreiecke. Auf diese wird die Definition von Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck angewendet. Aus den dabei entstehenden Gleichungen wird die Höhe eliminiert, so dass schließlich nur noch Seitenlängen und Innenwinkel des Ausgangsdreiecks als Variablen auftreten.

Methodische Hinweise

Die Arbeitsaufträge werden vorwiegend in Partner- oder Gruppenarbeit gelöst; die Ergebnisse werden im Plenum diskutiert und festgehalten.

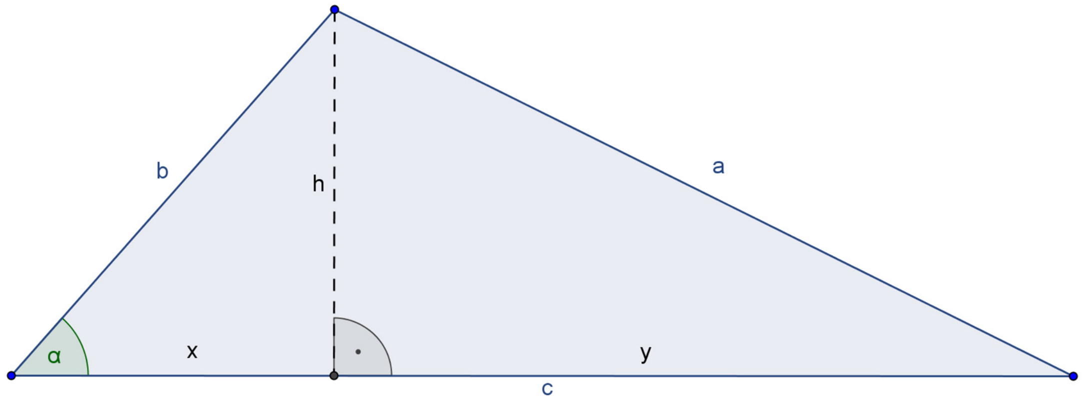
Leistungsbewertung

Die individuellen Beiträge der Schülerinnen und Schüler zur Erarbeitung des Sinus- und des Kosinussatzes können Grundlage einer Leistungsbewertung sein. Die Unterrichtseinheit wird mit vielfältigen inner- und außermathematischen Anwendungen des Sinus- und des Kosinussatzes fortgeführt. Dies kann schließlich auch das Thema eines Leistungstests darstellen.

Trigonometrie in beliebigen Dreiecken

1 Kosinussatz

Ein Dreieck ist eindeutig gegeben, wenn man zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel kennt (Kongruenzsatz SWS) – so zum Beispiel die Seiten b und c und den Winkel α in diesem Dreieck.



Ziel ist es, die Seitenlänge a in Abhängigkeit von b, c und α anzugeben.

Im rechten Teildreieck gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$h^2 =$ .... (*)

Im linken Teildreieck kann h in Abhängigkeit von b und dem Winkel α berechnet werden:

$h =$ .... (**)

Versuche, h aus (*) und (**) zu eliminieren:

.... (***)

Drücke die Strecke y durch c und x und damit durch b, c und α aus.

....

Setze diesen Term für y in (***) ein und löse nach a^2 auf.

....

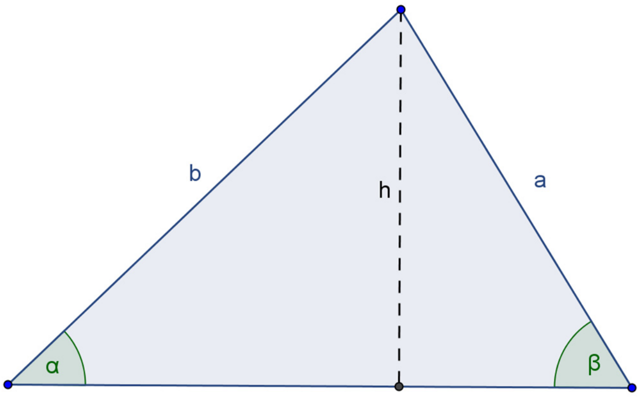
....

Damit erhältst du den **Kosinussatz:**

Formuliere diese Aussage auch mit Worten!

2 Sinussatz

Sind die Seite b und die Winkel α und β in einem Dreieck gegeben, so ist das Dreieck eindeutig festgelegt. Ziel ist es, nun die Seite a in Abhängigkeit von b, α und β anzugeben.



Der Weg führt wieder über die Höhe. Drücke einerseits die Höhe h durch b und α aus und drücke andererseits h durch a und β aus.

....

....

....

Das Gleichsetzen der erhaltenen Gleichungen lässt sich h eliminieren. Dies führt zum **Sinussatz:**

$$\boxed{\quad \_\_\_\_\_\_\_\_ \; = \; \_\_\_\_\_\_\_\_ \quad}$$

Formuliere diese Aussage auch mit Worten!

Zusatz

Überlege, wie der Sinussatz bei Teilung des Dreieckes durch die anderen beiden Höhen lautet.

Eine große Aufgabensammlung nach verschiedenen Anforderungsprofilen findet sich unter:
http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/s1ge/tb/tbindex.html

5 Anwendungen der Trigonometrie

Nutzen in Elektrotechnik, Mechanik und beim Heimwerken

Martin Niederkofler, Maximilian Gartner

Thema	Anwendung der Trigonometrie in der Elektrotechnik, Darstellung periodischer Vorgänge durch Winkelfunktionen in der Mechanik, Anwendung der Trigonometrie beim Modellieren
Stoffzusammenhang	Trigonometrie
Klassenstufe	2. Biennium

Intention

Die Lernumgebung beinhaltet Anwendungsbeispiele der Trigonometrie aus verschiedenen Lebensbereichen (Elektrische Leistung, Radfahren, Hausbau). Die Lernenden können erfahren, dass trigonometrische Beziehungen bzw. Zusammenhänge konkrete Anwendungen finden und dass periodische Vorgänge durch die Winkelfunktionen beschrieben werden können.

Diese Lernumgebung umfasst ca. drei Unterrichtseinheiten.

Fachlicher Hintergrund

Zu 1 Elektrische Leistungen

Zu Beginn gibt es eine kurze Einführung zum Thema „Elektrische Leistungen“. Da die verschiedenen elektrischen Leistungsarten (Wirk-, Blind- und Scheinleistung) in einem rechtwinkligen Dreieck darstellbar sind, sind der Satz des Pythagoras und die trigonometrischen Funktionen anwendbar.
Bei der zweiten Aufgabenstellung wird ein Messwert interpretiert.

Lösungen der Arbeitsaufträge:

- $S^2 = P^2 + Q^2,\ Q = S \cdot \sin(\varphi),\ P = S \cdot \cos(\varphi)$, u. a.
- $Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 47{,}62$ var
- Die dritte Angabe ($\cos(\varphi) = 0{,}97$) beschreibt das Verhältnis der Wirkleistung P zur Scheinleistung S. Je näher dieser Wert bei 1 liegt, umso größer ist die Wirkleistung und umso niedriger die Blindleistung.

Zu 2 Tritt in die Pedale

Zu Beginn wird kurz in die Themen „Kräfte“ bzw. „Drehmoment“ eingeführt. Die angebotene Skizze vereinfacht stark das beim Tritt in die Fahrradpedale auftretende Drehmoment. Da das Treten ein sich wiederholender Vorgang ist, ergibt sich eine periodische Funktion. Dabei ist das Drehmoment nur vom Winkel α abhängig, da sich nur dieser im Laufe einer Umdrehung ändert. Die Länge des Hebelarms s_2 berechnet sich durch $s_2 = s_1 \cdot \cos(\alpha)$. Die Länge des Pedals s_1 und die Kraft F bleiben in diesem vereinfachten Modell konstant. Somit ergibt sich die symbolische Darstellung:

$$M(\alpha) = F \cdot s_1 \cdot \cos(\alpha)$$

Die graphische Darstellung zeigt folglich den Graphen der Kosinusfunktion mit der Amplitude $F \cdot s_1$. Man erkennt schnell, in welchem Bereich von α die Kraftwirkung am größten bzw. kleinsten ist. Ebenso werden die Grenzen des vereinfachten Modells aufgezeigt (Drehmoment gleich 0 z. B. bei 90°).

Zu 3 Dachdecken

Schwerpunkt der Aufgabe ist die Bestimmung des Neigungswinkels und der Längenmaße eines Daches aufgrund zweier Fotos. Der Neigungswinkel kann mithilfe eines Geodreiecks oder durch trigonometrische Zusammenhänge ermittelt werden. Die Längenmaße des Daches werden durch Abschätzen und Vergleichen bestimmt. Anschließend muss der Flächeninhalt des Daches berechnet werden: Der Großteil des Daches kann als Rechteck angenommen werden, die restliche Dachfläche kann auf verschiedene Weise angenähert werden.

Methodische Hinweise

Aufgabe 1 („Elektrische Leistungen“) kann zunächst alleine bearbeitet werden. Der Austausch der Lösungen erfolgt dann zu zweit.
Die Aufgaben 2 („Tritt in die Pedale“) und 3 („Dachdecken“) werden am besten in Gruppen bearbeitet. Anschließend werden die Arbeitsergebnisse präsentiert und diskutiert.

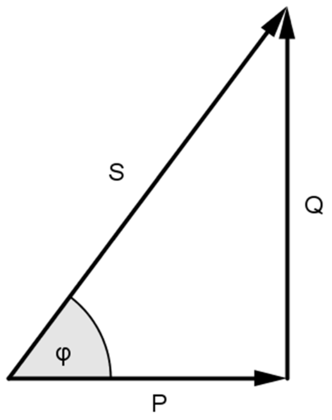
Anwendung der Trigonometrie

1 Elektrische Leistungen

Viele elektrische Betriebsmittel beziehen neben der tatsächlichen Leistung, der sog. Wirkleistung P (Einheit W), auch eine sog. Blindleistung Q (Einheit var) aus dem Stromnetz. Im Gegensatz zur Wirkleistung wird Blindleistung jedoch nicht „verbraucht“, sondern pendelt zwischen Stromerzeuger und Stromverbraucher hin und her. Dies hat einige Nachteile, u. a.:

- Die pendelnde Leistung verursacht beim Transport Verluste.
- Die Umwelt wird unnötig belastet.
- Die Bereitstellung der Blindleistung wird von den Energieversorgungsunternehmen in Rechnung gestellt.

Die Gesamtleistung im Stromkreis ist die so genannte Scheinleistung S (Einheit VA). Der Zusammenhang der drei Leistungen wird im folgenden Diagramm dargestellt:



Erstelle Formeln, mit denen die Zusammenhänge der drei Leistungen im Stromkreis beschrieben werden können.

Betrachte das Messgerät im Bild und berechne die nicht angezeigte Leistung. Welche Bedeutung hat die dritte Angabe am Messgerät?

2 Tritt in die Pedale

Wenn du beim Fahrradfahren in die Pedale trittst, wirkt die von dir ausgeübte Kraft auf die Pedale, welche die sog. Hebelarme bilden.

Auch wenn du immer gleichmäßig stark trittst, wird nicht immer gleich viel Kraft auf die Kette übertragen. Die effektiv, also tatsächlich wirkende physikalische Größe wird Drehmoment genannt.

Das Drehmoment berechnet sich aus dem Produkt von Kraft (Einheit N (Newton)) und Länge des Hebelarms. Diese zwei Größen müssen zueinander im rechten Winkel stehen.

Das Drehmoment bei einem Fahrrad berechnet sich somit durch

$M = F \cdot s_2$

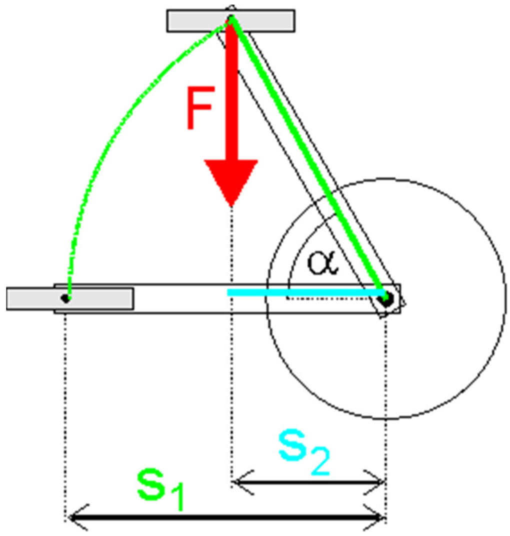


Bild aus: http://www.physikerboard.de

Wie verändert sich das Drehmoment, wenn du in die Pedale trittst? Benutze für deine Überlegungen unterschiedliche mathematische Darstellungen.

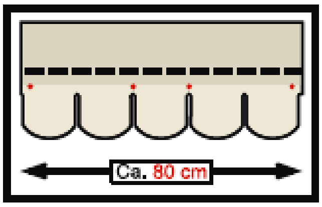
3 Dachdecken

» E-mail

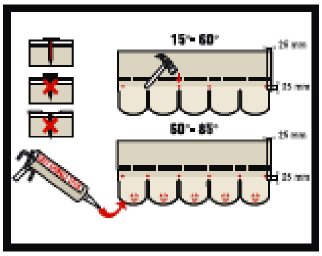
```
von: Möchtegernheimwerker
an: Matheprofi
Betreff: Bitte um Hilfe!

Hallo Matheprofi,
kannst du mir bitte behilflich sein? Ich möchte das Dach meines Geräte-
schuppens mit neuen Dachziegeln decken. Wie viele Pakete Dachziegel be-
nötige ich? Brauche ich sonst noch etwas? Zur Veranschaulichung habe ich
zwei Fotos und die Anleitung fürs Verlegen der Dachziegel mitgeschickt.

Vielen Dank für deine Hilfe!
```

Auf der Anleitung gibt es u. a. auch noch die folgenden Hinweise:

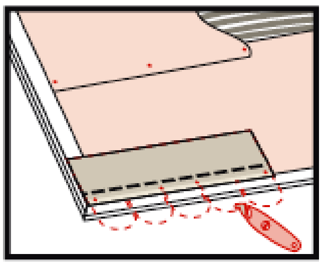
Bei Dachneigungen von $> 60°$ ist ein zusätzlicher Klebstoff erforderlich. Eine Kartusche Klebstoff reicht für ca. 6 m².
Bei der Verlegung verwenden Sie ca. 50 Nägel pro m².
Die Anfangsreihe der Dachplatten überlappen mit 10 cm (Dachneigung >21°) oder mit 5 cm (Dachneigung 15° bis 20°).



2 m² pro Paket



Benützen Sie verzinkte Schindelnägel, Typ Easy Shingle® und Bitumenkaltkleber Easy Shingle® Stick



1 Paket = 13 m Anfangsreihe

6 Bilder in Bewegung setzen

Arbeiten mit Abbildungsmatrizen in Derive

Iris Mack

Thema	Matrizenrechnung, Ähnlichkeitsabbildungen
Stoffzusammenhang	Vektoroperationen, Grundbegriffe der analytischen Geometrie, trigonometrische Beziehungen und Ähnlichkeitsbeziehungen
Klassenstufe	2. Biennium

Intention

Computeranimationen und Computergraphiken sind mittlerweile allgegenwärtig. Man begegnet ihnen in Filmen, in Computerspielen, in der Werbung, in Dokumentationen und sogar in den Nachrichten. Wie aber werden diese Grafiken am Computer erstellt?
Zunächst müssen alle Gegenstände, ob Haus, Hund, Auto oder Blume, durch Gitternetzmodelle am Computer nachgebaut werden. Diese Modelle bestehen aus einem Gitter miteinander verbundener Punkten, die mit Hilfe von Matrizen dargestellt werden können. Um den Figuren „Leben" einzuhauchen, muss dieses Gitternetz bewegt werden.

Fachlicher Hintergrund

In dieser Lernumgebung geht es um das Rechnen mit Matrizen, die Darstellung der Kongruenzabbildungen mit Hilfe von Matrizen und deren Verwendung in der Computergrafik. Die Schülerinnen und Schüler lernen folgende Themen kennen:

- Matrizenaddition und Assoziativgesetz
- Skalare Multiplikation
- Matrizenmultiplikation
- Einheitsmatrizen und ihre Besonderheiten
- Einschränkung des Kommutativgesetzes bei der Matrizenmultiplikation
- Transponierte Matrix
- Abbildungsmatrizen und Kongruenzabbildungen
- Streckung und Stauchung
- Koordinatendarstellung von Figuren mittels Gitternetz im zwei- und dreidimensionalen Raum

Methodische Hinweise

Die Lernumgebung ist für sechs Unterrichtsstunden konzipiert. Diese finden im Computerraum mit der Computersoftware DERIVE statt. Die Lernenden arbeiten nach Wahl alleine, in Zweier- oder Dreiergruppen. Idealerweise sollte jedem Lernenden ein Computer zur Verfügung stehen. Für die Hausaufgaben benötigen die Schüler DERIVE auch zu Hause. Sollte die Schule eine Schülerlizenz erworben haben, können die Lernenden eine Kopie des Programmes mit nach Hause nehmen, andernfalls kann man eine 30-Tage-Testversion auf http://deutsch.eazel.com/lv/group/view/kl51482/Derive.htm downloaden.

1. Stunde

Der Einstieg in das Thema erfolgt durch die Lehrperson: Was sind Matrizen? Was haben Matrizen und Computerspiele gemeinsam?
Die Lehrperson stellt den Lernenden das Ziel der Unterrichtseinheit vor: Am Ende sollen sie in der Lage sein, eigenhändig mit DERIVE eine räumliche Figur zu zeichnen und diese zu bewegen.
Was ist hierzu nötig? Das Verständnis der Matrizenoperationen, das Darstellen von Figuren mit Hilfe von Gitternetzen und die Umsetzung der Abbildungen in Abbildungsmatrizen. Dies soll in den nächsten Stunden Schritt für Schritt erarbeitet werden.
Anschließend wird das erste Arbeitsblatt zum Thema Rechnen mit Matrizen ausgeteilt. Die Aufgaben werden nacheinander und nach folgendem Muster gelöst:

- Jeder Lernende bearbeitet die Aufgabe zunächst eigenständig.
- Im nächsten Schritt tauschen sich die Lernenden untereinander aus und diskutieren ihre Ergebnisse.
- Abschließend werden die Ergebnisse gesammelt und im Plenum besprochen.

Beispiel einer Schülerlösung:

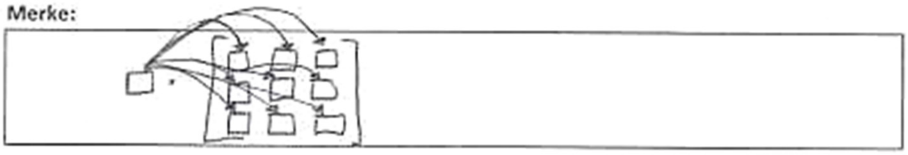
Multiplikation mit einem Skalar:

Lass Derive Folgendes berechnen: $3A$, $-7D$, $\frac{1}{2}F$, $\sqrt{4}\,E$, $25\,I_3$

Was fällt dir auf?

Komponentenweise: Jedes mit jedem
Jedes Glied des Matrix wird mit dem Skalarprodukt multiplizie

Merke:



2. Stunde

In der zweiten Stunde sollen die Lernenden eine Möglichkeit finden, Matrizen zu multiplizieren. Dies geschieht wie in der vorhergehenden Stunde zunächst in Einzelarbeit, anschließend im Gespräch mit dem Nachbarn und schlussendlich in einer gemeinsamen Diskussion.

Beispiel einer Schülerlösung:

Merke:

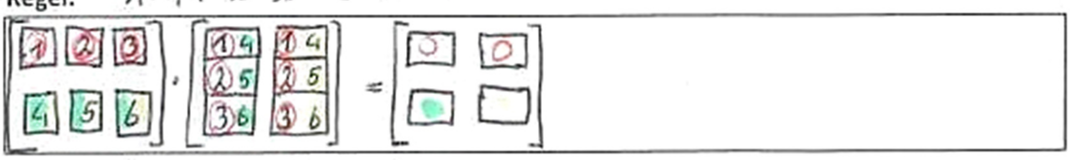
Die Spaltenzahl der ersten Matrix muss gleich der Zeilenzahl der zweiten Matrix sein. Das Matrizenprodukt hat dann die Zeilenzahl der ersten und Spaltenzahl der zweiten

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$ $A \cdot B = C \Rightarrow C \in \mathbb{R}^{n \times k}$

Versuche eine Regel für die Matrizenmultiplikation zu finden!

Tipp: Beginne mit 2x2 Matrizen, deren Einträge fast nur Nullen enthalten und arbeite dich langsam vor!

Regel: $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 20$



$4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 6 =$

Anmerkung: Nachdem die Lernenden ihre Ergebnisse an der Tafel präsentiert hatten, baten sie mich, ihnen nun die korrekte mathematische Definition der Matrizenmultiplikation an die Tafel zu schreiben. Ich war zuerst skeptisch, entschied mich dann aber dafür, die Herleitung der allgemeinen Matrizenmultiplikation gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern zu wagen. Ich war erstaunt, wie schnell die Lernenden das System verstanden hatten, denn in knappen fünf Minuten hatten wir das Folgende an der Tafel stehen:

$$AB = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j}\beta_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j}\beta_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} \alpha_{lj}\beta_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{m} \alpha_{lj}\beta_{jn} \end{pmatrix} \quad \text{für } A \in \mathbb{R}^{l\times m}, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

3. Stunde

Die Lernenden werden angehalten, die Aufgaben 5 und 6 in Kleingruppen zu bearbeiten.
Hier zeigte sich deutlich das unterschiedliche Arbeitstempo der Lernenden. Während einige innerhalb einer Unterrichtsstunde nicht nur die „Frau mit dem hüpfenden Hut", sondern bereits den „bellenden Hund" fertigstellten, waren andere noch damit beschäftigt, alle Koordinaten der Frau zu bestimmen. Manche variierten die erste Aufgabe und setzten der Frau anstelle des Zylinders einen Hexenhut auf. Andere wiederum gaben der Frau zusätzlich noch eine Fahne oder einen Spazierstock in die Hand.

4. Stunde

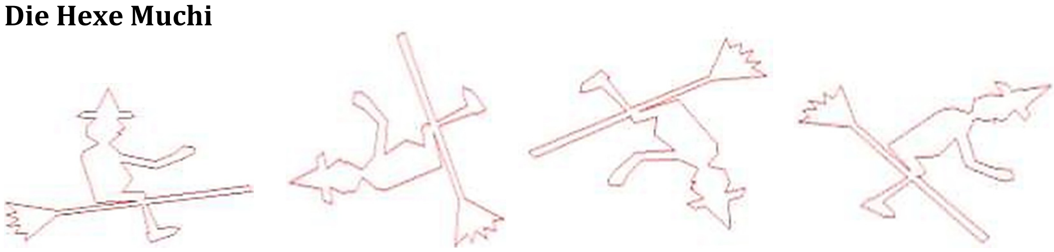
In dieser Stunde steht es den Lernenden frei, woran sie weiterarbeiten. Bis zur nächsten Stunde müssen jedoch alle ein selbst erstelltes, animiertes Bild abgeben.
Während einige den „Hund" fertigstellten, arbeiteten andere Lernende an den zu Hause begonnenen Arbeiten. Manche Schülerinnen und Schüler nutzten die Stunde, um Unklarheiten zu beseitigen und mir ausführlich Fragen hinsichtlich der Verwendung von DERIVE sowie der Funktionsweise einiger Befehle zu stellen.

5. und 6. Stunde

Die Lehrperson verteilt das letzte Arbeitsblatt. In diesen zwei Stunden erarbeiten sich die Lernenden selbst Abbildungsmatrizen. Ihre Vermutungen können sie mit Hilfe von DERIVE überprüfen.
Die korrekte Eingabe der DERIVE-Befehle stellte die Lernenden vor eine Herausforderung. Ich selbst war die ganze Stunde damit beschäftigt, den Schülerinnen und Schülern bei der korrekten Befehlseingabe zu helfen. Besonders bei der Fehlersuche in ihren „Programmen" musste ich sie unterstützen – einige von ihnen waren bereits daheim erfolglos auf Fehlersuche gewesen.

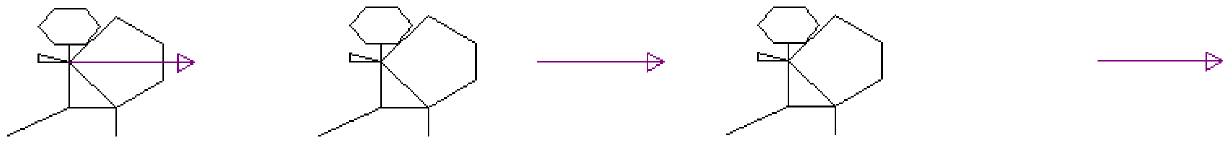
Beispiele einiger Schülerlösungen:

Die Hexe Muchi



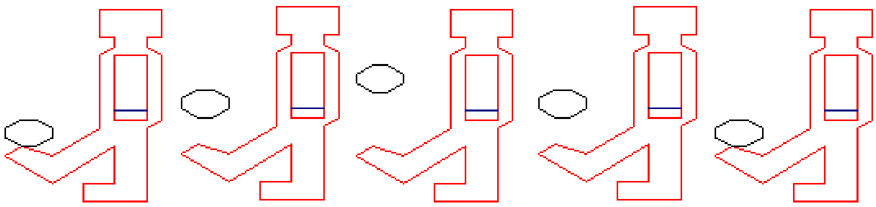
Mittels Schieberegler fliegt die Hexe einen Looping.

Schütze des Todes



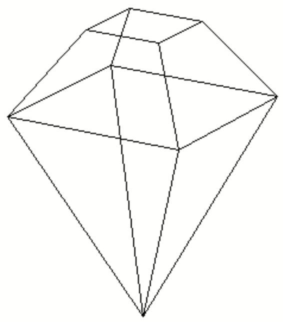
Der Schieberegler lässt den Pfeil von der Sehne fliegen.

Fußballer

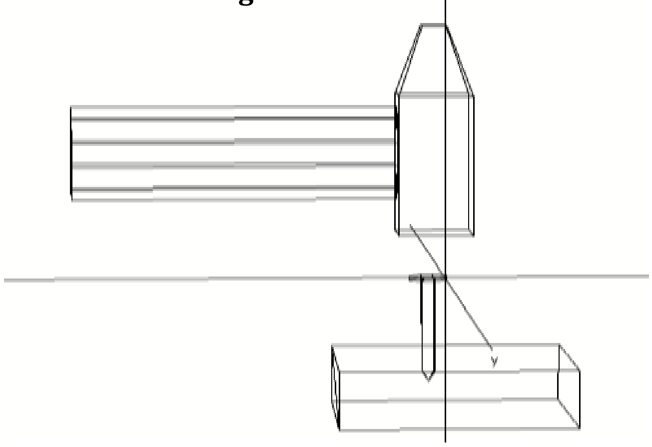


Beim Betätigen des Schiebereglers hüpft der Ball auf und ab.

Drehender Edelstein



Hammer und Nagel



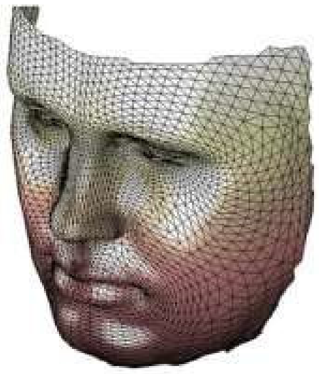
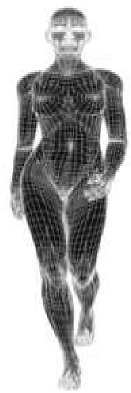
Mit dem Schieberegler lässt sich der Diamant drehen. Der Hammer schlägt den Nagel in den Holzklotz.

Leistungsbewertung

Die Lernenden werden aufgefordert, die selbsterstellten DERIVE-Files in einem Ordner abzuspeichern. Die Arbeiten der Schüler werden anhand der folgenden Kriterien bewertet:

- Vollständige Erfüllung des Arbeitsauftrages
- Struktur, Gliederung und Übersicht der Arbeit
- Kreativität und Originalität der Arbeit
- Korrekter Gebrauch der mathematischen sowie der deutschen Sprache

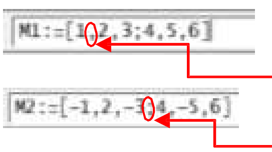
Matrizen mit DERIVE

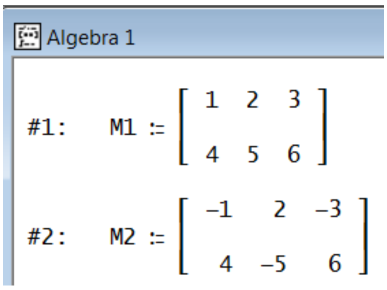
Gitternetzmodell eines Gesichtes und einer gehenden Frau

Quelle: http://www2.informatik.hu-berlin.de/~eisert/teaching.html
http://www.bildburg.de/effekte/gifanimationen/drahtgitter/animiertefrauindervorderansicht.html

1 Eingabe von Matrizen



Die Einträge in einer Zeile werden durch Komma getrennt, die nächste Zeile beginnt nach dem Strichpunkt.



Gib die folgenden Matrizen in DERIVE ein:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Lass mit DERIVE Folgendes berechnen:

$$3A, \quad -7D, \quad \frac{1}{2}F, \quad \sqrt{2}E, \quad 25I_3$$

Was fällt Dir auf?

3 Addition von Matrizen

Versuche, mit DERIVE Folgendes zu berechnen:

$$A + I_2, \quad A + B, \quad B + D, \quad I_2 + I_2, \quad I_2 + I_3, \quad F + I_3$$

Notiere jeweils, was geschieht! Wann ist die Addition von Matrizen möglich?

4 Multiplikation von Matrizen

Versuche, mit DERIVE Folgendes zu berechnen:

$$A \cdot A,\quad A \cdot I_2,\quad I_2 \cdot A,\quad A \cdot B,\quad B \cdot A,\quad B \cdot B,\quad B \cdot D,\quad B \cdot E$$
$$D \cdot E,\quad D \cdot I_2,\quad I_2 \cdot D,\quad I_3 \cdot D,\quad D \cdot D,\quad F \cdot I_3,\quad I_3 \cdot F,\quad F \cdot F$$

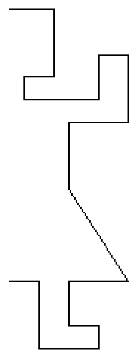
Was fällt Dir auf? Wann ist die Multiplikation von Matrizen möglich?

Versuche, eine Regel für die Matrizenmultiplikation zu finden.

5 Der hüpfende Hut

Wir möchten in DERIVE eine Frau mit Hut zeichnen, welchen wir mit Hilfe eines Schiebereglers zum Hüpfen bringen.

Zunächst muss unsere Figur gezeichnet werden. Hierzu ist es notwendig, die Punkte in Form einer Matrix in DERIVE einzugeben. Ändere die Einstellungen im Graphikfenster so, dass die Ausgabe an deinem Computer aussieht, wie die Abbildung rechts.

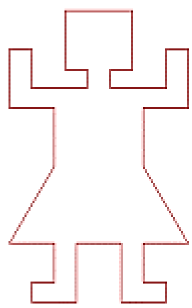


Die rechte Hälfte unserer Frau wird eingegeben, jede Zeile entspricht den Koordinaten eines Punktes. Da eine 19x2-Matrix auf diesem Arbeitsblatt zu viel Platz in Anspruch nehmen würde, sind die Gitterpunkte in einer 2x19-Matrix gegeben.

Anmerkung: In DERIVE erhält man zu einer Matrix A die transponierte Matrix, indem man A' eingibt.

#1: $\quad A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 4 & 4 & 3 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 7 & 10 & 10 & 13 & 13 & 11 & 11 & 12 & 12 & 15 & 15 \end{bmatrix}$

Die zweite Hälfte unserer Figur erhalten wir durch Achsenspiegelung an der y-Achse.



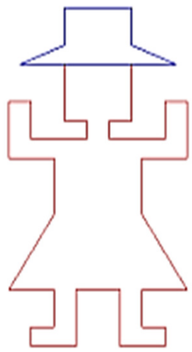
Wie müsste die zugehörige Matrix aussehen? Begründe.

$S_y = \begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}$

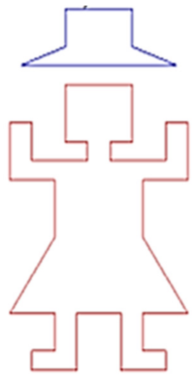
Füge nun alle Koordinaten der Figur in einer Matrix zusammen. Verwende dazu den Befehl APPEND_COLUMNS(A,B). Er hängt an die Matrix A die Spalten der Matrix B an.

Wir setzen der Frau noch einen Hut auf. Damit DERIVE den Polygonzug schließt, müssen wir den ersten Punkt als letzten Punkt nochmals eingeben.

$$\#7: \quad Hut := \begin{bmatrix} -3.5 & 15 \\ 3.5 & 15 \\ 1.5 & 16 \\ 1.5 & 18 \\ -1.5 & 18 \\ -1.5 & 16 \\ -3.5 & 15 \end{bmatrix}$$



Nun wollen wir, dass der Hut auf und nieder springt. Hierzu müssen wir einen Verschiebungsvektor bzw., da wir alle Punkte gleichzeitig verschieben, eine „Verschiebungsmatrix“ angeben.
Wie sieht diese Matrix aus? Begründe deine Wahl!



Um das Ganze über einen Schieberegler manipulieren zu können, geben wir die Verschiebung mit Hilfe eines Parameters an. Um diese im Graphikfenster zeichnen zu lassen, ist zunächst ein Schieberegler mit dem Menü "Einfügen" zu erstellen. Der Parameter k soll dabei die Werte 0 (Hut bleibt auf dem Kopf) und 1 (Hut fliegt in die Höhe) annehmen.

6 Der bellende Hund

Erstelle mit DERIVE folgende Abfolge von Bildern, indem du Matrizen und einen Schieberegler verwendest.

Bild für k=0

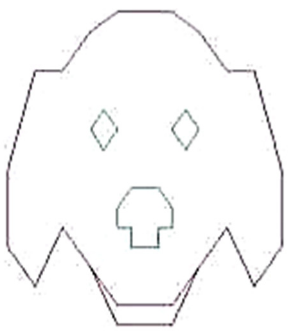


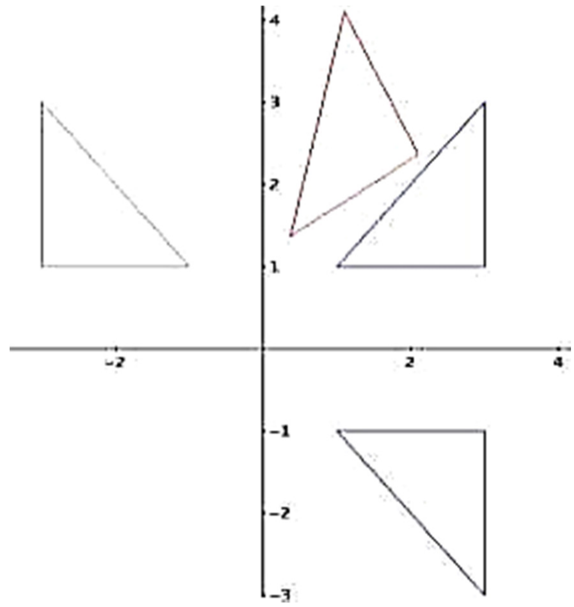
Bild für k=2

7 Ein eigenes Bild erstellen

Erstelle eigenständig ein lustiges, sich bewegendes Bild.

8 Abbildungen in der Ebene

Erstelle einen Polygonzug deiner Wahl.



Spiegeln

Spiegle deine Figur zuerst an der x-Achse und anschließend an der y-Achse.

Wie sehen deine Abbildungsmatrizen aus?

Drehen

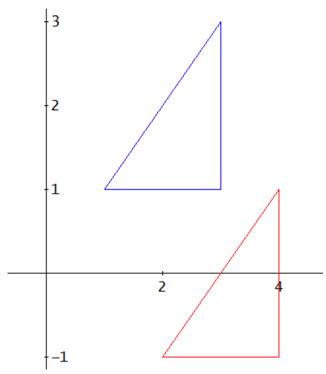
Möchtest du deine Figur nicht nur spiegeln, sondern auch drehen, so musst du die Drehmatrix verwenden. Diese sieht für eine Drehung um den Ursprung mit dem Winkel w wie folgt aus:

#4: $D(w) := \begin{bmatrix} \mathrm{COS}(w°) & \mathrm{SIN}(w°) \\ -\mathrm{SIN}(w°) & \mathrm{COS}(w°) \end{bmatrix}$

Dieses Zeichen ° erlaubt die Eingabe des Winkels im Gradmaß.

Verschieben

Die Verschiebung um einen Vektor geschieht, indem man zu jedem Punkt der Figur den Verschiebungsvektor addiert. Hierfür benötigt man bei einer Figur mit n Punkten eine $(n + 1) \times 2$-Matrix, welche in der ersten Spalte die Verschiebung in x-Richtung und in der zweiten Spalte die Verschiebung in y-Richtung angibt.



Mit Hilfe der Verschiebung kann man nun auch Drehungen um beliebige Drehpunkte ausführen. Zunächst wird die Figur in den Ursprung geschoben, dann wird sie um den gewünschten Winkel gedreht und anschließend wird sie mit dem Gegenvektor wieder zurückgeschoben.

9 Abbildungen im Raum

Ähnlich wie im zweidimensionalen Raum kann man auch im dreidimensionalen Raum mit Abbildungsmatrizen arbeiten. Die Figuren werden ebenfalls über Polygonzüge definiert.

Wie sehen die Matrizen für Verschiebungen und Drehungen im Raum aus?

Erstelle eine dreidimensionale Figur. Drehe und verschiebe sie nach Belieben.

7 Termanalyse

Erfassen der Struktur von Termen

Johann Rubatscher

Thema	Analyse von Termen
Stoffzusammenhang	Rechnen mit Termen
Klassenstufe	1. Biennium

Intention

Erfahrungsgemäß scheitern Erklärungen der Lehrperson beim Rechnen mit Termen (Vorrangregeln, Faktorisieren, Ausklammern, Kürzen, ...) häufig an der mangelnden Kenntnis der Lernenden von Begriffen wie „Summe“, „Summand“, „Produkt“ und „Faktor“.
Zur Festigung dieser Begriffe ist die Beschreibung (grafisch und in Worten) von Termstrukturen ein bewährtes Verfahren. Die hier zusätzlich investierte Zeit wird im weiteren Verlauf des Unterrichts aufgeholt, da in Algebra somit immer wieder auf dasselbe Konzept zurückgegriffen werden kann.

Fachlicher Hintergrund

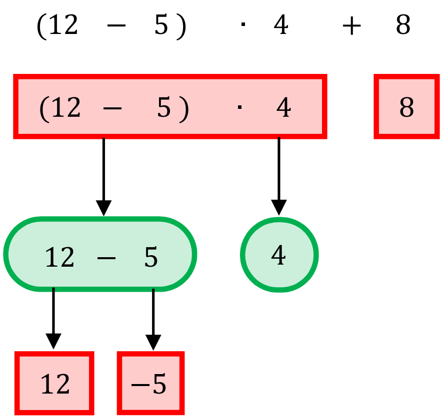
Die Lernumgebung enthält Beispiele für die Analyse von Rechentermen. Jedoch ist auch die Umkehrung des Vorganges möglich. Es soll ein Term aufgestellt werden, für den die Termstruktur und der Termwert vorgeben sind.

Methodische Hinweise

Zu Beginn werden folgende Vereinbarungen getroffen:

Alle Bestandteile eines Terms, die durch eine Strichoperation verknüpft sind, werden als *Summanden* bezeichnet; $5-3$ wird als Schreibweise für $5+(-3)$ erklärt. Die Summanden werden als Rechtecke dargestellt: $\boxed{\quad} + \boxed{\quad}$
Alle Ausdrücke, die durch eine Punktoperation verknüpft sind, werden als *Faktoren* bezeichnet; $\frac{5}{3}$ wird als Schreibweise für $5 \cdot \frac{1}{3}$ erklärt. Die Faktoren werden als abgerundete Rechtecke dargestellt:
$\cdot$

Bei der Termanalyse arbeitet man sich schrittweise von der obersten bis zur untersten Ebene vor. Zuerst wird nach Strichoperationen, die sich außerhalb von Klammern befinden, gesucht (siehe Aufgaben mit Lösungen). Dabei soll die Struktur des Terms vom Lernenden auch in Worten ausgedrückt werden. Zu Beginn ist es vorteilhaft, die entsprechenden Termbestandteile in die jeweiligen grafischen Blöcke zu übertragen. Zunächst werden gemeinsam einfache Terme an der Tafel analysiert, wobei deren Komplexität allmählich gesteigert wird.



Auf der obersten Ebene ist der Term eine *Summe* und besteht aus zwei *Summanden*.

Der erste *Summand* ist ein *Produkt*, das aus zwei *Faktoren* besteht. Der zweite *Summand* ist eine *Zahl*.

Es sei darauf hingewiesen, dass man sich bei der konkreten Termwertberechnung von der untersten zur obersten Ebene vorarbeitet. Wer also den Termwert berechnet, muss die Termanalyse bereits durchgeführt haben. Im Unterschied zu dem in Lehrbüchern verwendeten Rechenbaum liegt bei der Termanalyse die Gliederung des Terms in umgekehrter Reihenfolge vor.
Nach dieser ca. zweistündigen Einführung kann immer wieder auf das Konzept zurückgegriffen werden. In den meisten Fällen wird dann nur noch die oberste Ebene gebraucht.

Leistungsbewertung

Ob und inwieweit der Lernende fähig ist, die Termstruktur zu erfassen, kann durch Kurztests überprüft werden. Dabei ist es bei komplexeren Termen aus Zeitgründen möglich, auf eine konkrete Berechnung des Termwerts zu verzichten.

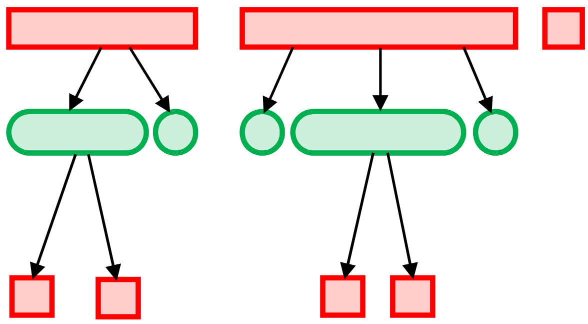
Termanalyse

Aufgabe 1

Führe eine Termanalyse zu folgendem Term durch:

$(35 - 6) \cdot 5 - 27 \cdot (18 + 7) \div 2 - 6$

Lösung:



Auf der obersten Ebene ist der Term eine *Summe* und besteht aus drei *Summanden*.

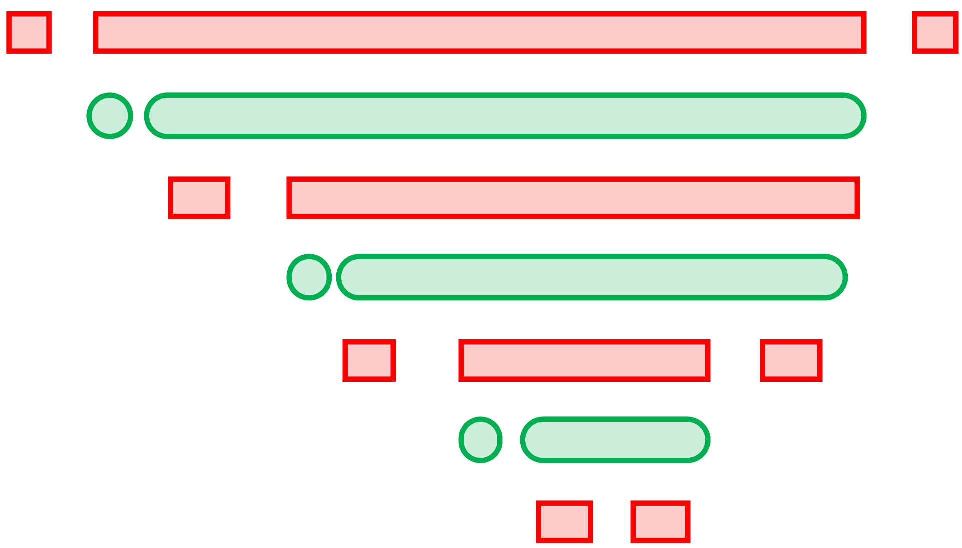
Der erste *Summand* ist ein *Produkt*, das aus zwei *Faktoren* besteht. Der zweite *Summand* ist ein *Produkt* bestehend aus drei *Faktoren*. Der dritte *Summand* ist eine *Zahl*.

Aufgabe 2

Führe eine Termanalyse durch.

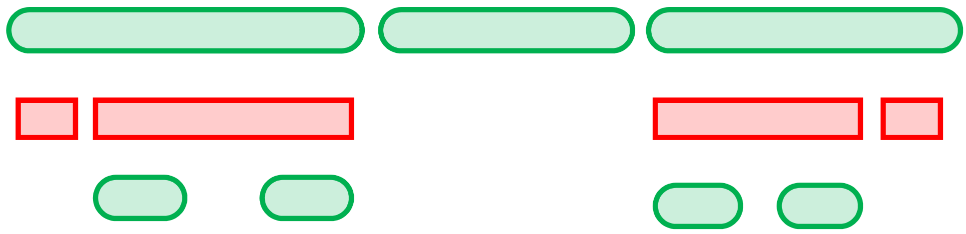
$$\frac{5}{7} - \frac{6}{7}\left\{-\frac{1}{3} + \frac{7}{2}\left[\frac{5}{14} - \frac{11}{21}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{11}\right) - \frac{2}{7}\right]\right\} - \frac{1}{7}$$

Lösung:



Aufgabe 3

Finde einen Term, der zu dieser Struktur passt und den Termwert 1809 besitzt.



Aufgabe 4

Untersuche, wie die Vorgehensweise bei der Berechnung eines Termwerts mit den Ebenen des Terms zusammenhängt.

Aufgabe 5

Kommen bei der Termanalyse in den Ebenen Summanden und Faktoren immer alternierend vor? Führe gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an.

8 Holzstapel – Wo liegt die Grenze?

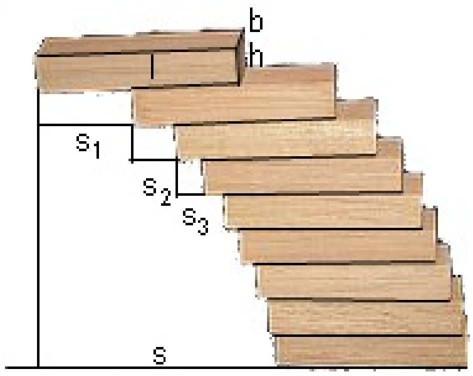
Die harmonische Reihe erkunden

Aron Brunner, Johann Rubatscher

Thema	Holzstapel
Stoffzusammenhang	Folgen und Reihen, Schwerpunkt, harmonische Reihe
Klassenstufe	2. Biennium

Intention

Die Frage, wie weit homogene Holzquader (Dominosteine oder CD-Hüllen) mit den Maßen l, b und h bei einem Turm in eine Richtung verschoben werden können, sodass dieser Turm nicht zusammenbricht, ist mehr als ein Jahrhundert alt. Dem maximalen Überhang s des obersten Quaders soll hier nachgegangen werden. Auf neue Entwicklungen wird in der Literaturliste verwiesen.



https://de.wikipedia.org/wiki/Harmonische_Reihe

Fachlicher Hintergrund

Ein Turm aus Quadern kippt nicht bzw. fällt nicht um, wenn der Fußpunkt des gemeinsamen Schwerpunkts der beteiligten Quader die Standfläche des darunter liegenden Quaders nicht verlässt. Die maximale Verschiebestrecke s der Quader ergibt sich also aus der Suche dieses Schwerpunkts, welcher gerade noch innerhalb der Standfläche liegt. Durch schrittweises „Unterschieben" von Quadern erhält man für s die Reihe

$$l/2 + l/4 + l/6 + l/8 + l/10 + l/12 + l/14 + \cdots,$$

was nach Herausheben des Faktors $l/2$ die Reihe

$$l/2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

ergibt. Die Klammer enthält die harmonische Reihe, die nicht konvergiert. D. h. es kann bei einer beliebig hohen Anzahl von Quadern eine beliebig große Verschiebestrecke erzielt werden.

Erarbeitung der Resultate

Der erste, oberste Quader kann genau um $s_1 = l/2$ verschoben werden, da dann der Schwerpunkt in der Quadermitte genau über der Kante des unteren Quaders zu liegen kommt.
Zwei Quader zusammen können um $s_2 = l/4$ verschoben werden, da aus Symmetriegründen der Schwerpunkt in der Mitte der beiden Einzelschwerpunkte liegt.
Drei Quader zusammen zu verschieben, löst man am besten über eine Schwerpunktgleichung. Der gemeinsame Schwerpunkt der drei Quader liegt genau über der Kante des vierten unteren Quaders. D. h. die Massenanteile der einzelnen Quader, welche links vom Schwerpunkt liegen, stimmen mit jenen rechts vom Schwerpunkt überein. Es bezeichne x die Lage des Schwerpunkts vom linken Rand

des drittuntersten Quaders, somit ist x gleich s_3. An die Stelle der Massen treten die Längen, da in Längsrichtung verschoben wird:

$$\begin{aligned}
\text{Summe der Einzelmassen links} &\quad = \quad \text{Summe der Einzelmassen rechts} \\
\text{Summe der Einzellängen links} &\quad = \quad \text{Summe der Einzellängen rechts} \\
x + (x + l/4) + (x + l/4 + l/2) &\quad = \quad (l - x) + (l - x - l/4) + (l - x - l/4 - l/2)
\end{aligned}$$

Das Auflösen der Gleichung liefert: $x = s_3 = l/6$

Für vier Quader erhält man analog für $x = s_4$:

$$\begin{aligned}
&x + (x + l/6) + (x + l/6 + l/4) + (x + l/6 + l/4 + l/2) = \\
&\qquad = (l - x) + (l - x - l/6) + (l - x - l/6 - l/4) + (l - x - l/6 - l/4 - l/2)
\end{aligned}$$

Das Auflösen dieser Gleichung liefert: $x = s_4 = l/8$

Das Fortsetzen für $s_5,\ s_6,\ s_7, \ldots$ führt auf die oben genannte gesamte Verschiebestrecke:

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 + \cdots = l/2 + l/4 + l/6 + l/8 + l/10 + l/12 + \cdots$$

Eine alternative Herleitung:

Der Schwerpunkt von zwei Quadern liegt in der Mitte der Schwerpunkte von zwei Einzelquadern (Symmetrie).
Der Schwerpunkt von drei Quadern liegt jedoch nicht mehr in der Mitte zwischen dem Schwerpunkt von zwei Quadern und dem Schwerpunkt des dritten Quaders, sondern ist in Richtung des Schwerpunkts von zwei Quadern verschoben, da die zwei Quader zwei Quadermassen darstellen. Also ist dieser Schwerpunkt im Verhältnis 2:1 verschoben, was ein Drittel von $l/2$ bedeutet. Daher gilt:

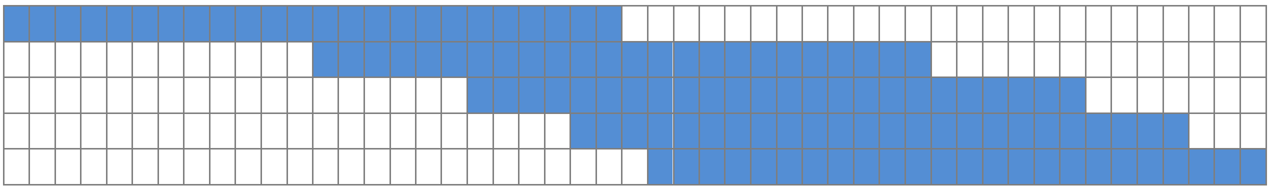
$$s_3 = 1/3 \cdot l/2 = l/6$$

Der Schwerpunkt von vier Quadern ist entsprechend im Verhältnis 3:1 verschoben, d.h.:

$$s_4 = 1/4 \cdot l/2 = l/8$$

Der Schwerpunkt von fünf Quadern ist im Verhältnis 4:1 verschoben, also gilt:

$$s_5 = 1/5 \cdot l/2 = l/10$$



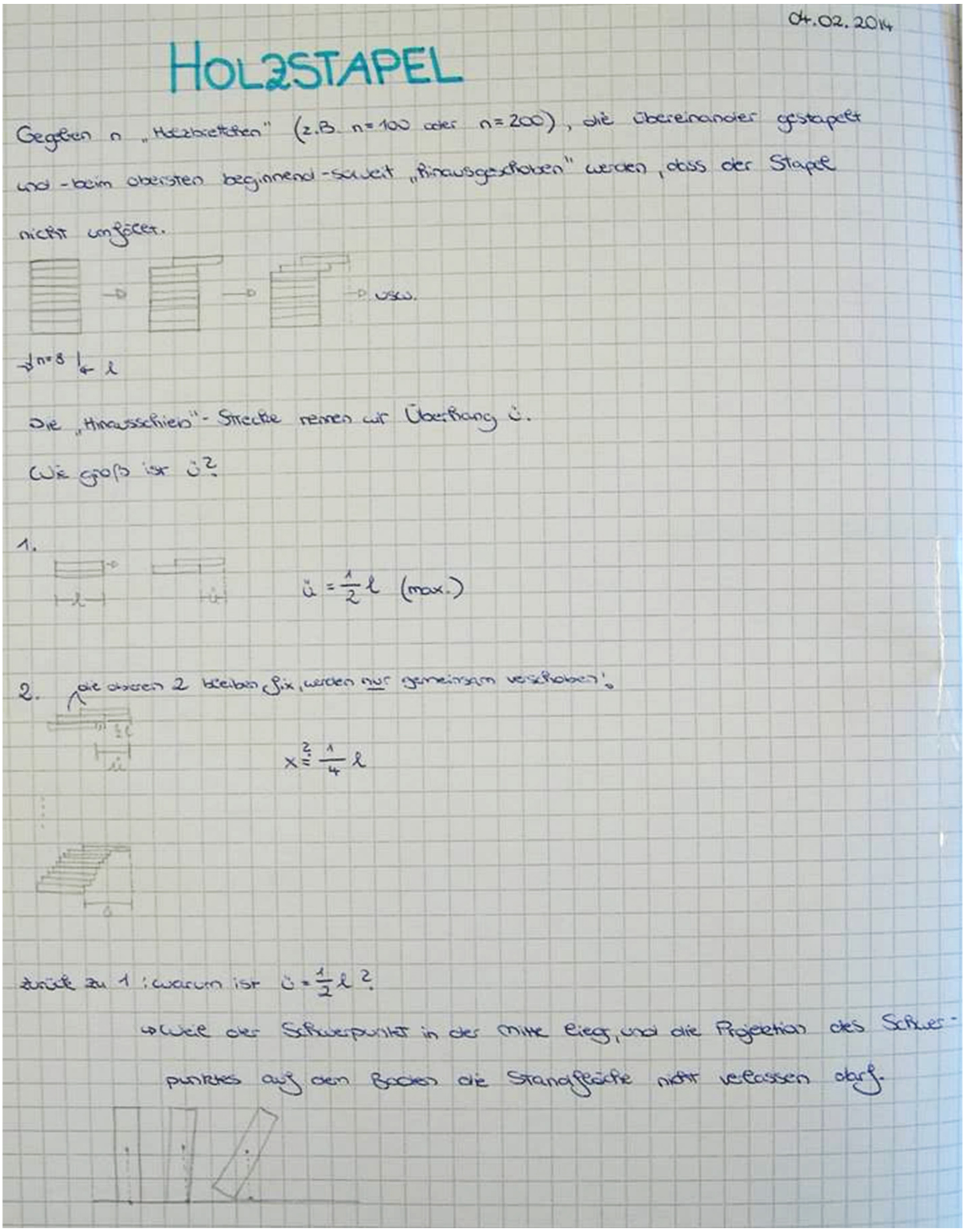
Die Lernenden sollten auf die Weiterführung der Reihe hingewiesen werden. Die Summenbildung der harmonischen Reihe kann mit einem Tabellenkalkulationsprogramm etwa bis $n = 200.000$ durchgeführt werden.

Literatur

Pöppe, C. (2010): Türme aus Bauklötzen – Mathematische Unterhaltungen, Spektrum der Wissenschaft, September 2010, S. 64

Paterson, M., Peres, Y., Thorup, M., Winkler, P., Zwick, U. (2008): Maximum Overhang, arXiv.org, Cornell University Library, http://arxiv.org/pdf/0707.0093v1.pdf

Schülerergebnisse



04.02.2014

HOLZSTAPEL

Gegeben n „Holzbrettchen" (z.B. $n=100$ oder $n=200$), die übereinander gestapelt und – beim obersten beginnend – soweit „hinausgeschoben" werden, dass der Stapel nicht umfällt.

usw.

$n=8$ l

Die „Hinausschieb"-Strecke nennen wir Überhang ü.

Wie groß ist ü?

1. $ü = \frac{1}{2} l$ (max.)

2. die oberen 2 bleiben fix, werden nur gemeinsam verschoben!

$\frac{1}{2} l$ $ü$

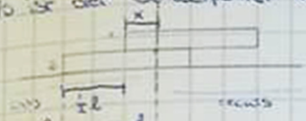
$x \overset{?}{=} \frac{1}{4} l$

zurück zu 1: warum ist $ü = \frac{1}{2} l$?

→ weil der Schwerpunkt in der Mitte liegt, und die Projektion des Schwerpunktes auf den Boden die Standfläche nicht verlassen darf.

meinsame Schwerpunkt dieser beiden oberen Brettchen auf der rechten Kante des unteren Brettchen ist. Das ist $a_2 = ?$.

Wo ist der Schwerpunkt von Brettchen 1 und Brettchen 2 zusammen?



$\ell_{links} = \ell_{rechts}$

$\underbrace{}_{\frac{1}{2}\ell}$

$\ell_1^{links} + \ell_2^{links} = \ell_1^{rechts} + \ell_2^{rechts}$

06/02/2014

$x + \frac{1}{2}\ell + x = \ell - x + \left(\ell - \left(\frac{1}{2}\ell + x\right)\right)$

$2x + \frac{1}{2}\ell = 2\ell - x - \frac{1}{2}\ell - x$

$4x = 2\ell - \frac{1}{2}\ell - \frac{1}{2}\ell$

$4x = \ell$

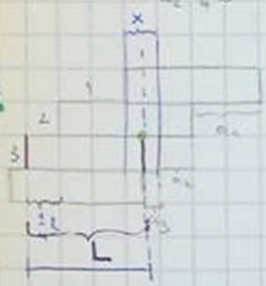
$x = \frac{1}{4}\ell$

$\Rightarrow$

$ü = \frac{1}{2}\ell + \frac{1}{4}\ell = \frac{3}{4}\ell$

• = Schwerpunkt der oberen 2 Brettchen

n = 4



• = Schwerpunkt

x = wo ist der Schwerpunkt?

$\ell_{links} = \ell_{rechts}$

$\underbrace{x}_{L_1\,links} + \underbrace{\frac{1}{2}\ell + x}_{L_2\,links} + \underbrace{\frac{3}{4}\ell + x}_{L_3\,links} = \underbrace{(\ell - x)}_{L_1\,rechts} + \underbrace{\left(\ell - \left(\frac{1}{2}\ell + x\right)\right)}_{L_2\,rechts} + \underbrace{\left(\ell - \left(\frac{3}{4}\ell + x\right)\right)}_{L_3\,rechts}$

$3x + \frac{5}{4}\ell = \ell - x + \ell - \frac{1}{2}\ell - x + \ell - \frac{3}{4}\ell - x$

$6x = 3\ell - \frac{5}{4}\ell - \frac{5}{4}\ell$

$6x = \frac{2}{4}\ell$

$x = \frac{1}{12}\ell$

$L = \frac{1}{4}\ell + \frac{1}{2}\ell + \frac{1}{12}\ell$

$= \frac{3+6+1}{12}\ell$

$= \frac{10}{12}\ell = \frac{5}{6}\ell$

$\Rightarrow a_3 = \ell - \frac{5}{6}\ell = \frac{1}{6}\ell$

Holzstapel – Wo liegt die Grenze?

https://de.wikipedia.org/wiki/Harmonische_Reihe

1 Beschreibung der Aufgabe und erstes Probieren

Nimm zwei gleiche Holzquader (Dominosteine oder CD-Hüllen) der Länge l, der Breite b und der Höhe h (wobei h viel kleiner als l und b sei), staple sie übereinander und verschiebe den oberen Quader so weit in Längsrichtung, dass er möglichst weit über den unteren ragt.
Lege einen dritten baugleichen Quader unter und verschiebe beide oberen Quader gemeinsam zusammen wieder so weit, dass der Turm gerade nicht zusammenbricht.
Lege wiederum einen baugleichen Quader unter und wiederhole den Verschiebevorgang mit dem Turm der bereits verschobenen Quader. Usw. usf.

2 Berechnung

Überlege mit Papier / Bleistift / Taschenrechner / Geometriesoftware, wie weit du die Quader sukzessive verschieben kannst, wenn die Gesamtanzahl der Quader $n = 2,\ n = 3,\ n = 4,\ n = 5$ usw. ist? Wie groß ist jeweils die gesamte Verschiebestrecke s?

3 Wie weit?

Welches ist die Anzahl n_{max} an Holzquadern, mit denen ein derartiger Turm aufgebaut werden kann, welcher nicht einstürzt?

4 Mit dem Computer

Ermittle mit einem Tabellenkalkulationsprogramm n_{max}.

5 Weiterführung

Wie groß ist s, wenn konstant jeder Quader jeweils um $l/3$ bzw. um $l/4$ hinausgeschoben wird?
Wie sieht es aus, wenn kreisförmige Holzscheibchen verwendet werden?
Was verändert sich, wenn du auch „Gegengewichte“ bzw. beliebige Aufbauten einbauen darfst?

Lies folgende Artikel:

Pöppe, C. (2010): Türme aus Bauklötzen – Mathematische Unterhaltungen, Spektrum der Wissenschaft, September 2010, S. 64

Paterson, M., Peres, Y., Thorup, M., Winkler, P., Zwick, U. (2008): Maximum Overhang, arXiv.org, Cornell University Library, http://arxiv.org/pdf/0707.0093v1.pdf

9 Funktionales Denken

Einführung in den Themenbereich „Funktion“

Dorothea Huber

Thema	Einführung in das funktionale Denken
Stoffzusammenhang	Relationen und Funktionen
Klassenstufe	1. Biennium

Intention

In dieser Lernumgebung sollen sich die Lernenden mit funktionalen Zusammenhängen und deren Graphen intensiv auseinandersetzen. Durch die teilweise rein qualitative Betrachtung wird es möglich, Graphen von noch nicht bekannten Funktionstypen zu untersuchen. Dadurch tritt das rein mechanische Rechnen bzw. das reine Anwenden von Lösungsverfahren in den Hintergrund.
Laut Kröpfl (2007) sind die zwei wesentlichen oder globalen Ideen der Funktionen die Abhängigkeit einer Variablen von einer oder mehrerer Variablen und der Verlauf einer Funktion. Der Verlauf drückt sich vor allem in den Änderungen aus, welche an der Wertetabelle oder am Graphen der Funktion abgelesen werden können.
Im alltäglichen Leben gehören die wenigsten Funktionen zu elementaren Funktionstypen. Die Lernenden erhalten eine allgemeine Einführung in die Funktionen und lernen erst später die linearen und die quadratischen Funktionen als spezielle Funktionstypen kennen.
Bei der Zusammenstellung der Übungen wurde das EIS-Modell (enaktiv, ikonisch und symbolisch) angewandt.

Fachlicher Hintergrund

In dieser Lernumgebung lernen die Schülerinnen und Schüler verschiedene Funktionstypen kennen, insbesondere solche, die nicht durch eine Funktionsgleichung beschrieben werden. Sie erfahren, dass einige Graphen unmöglich sind, d. h. keine Funktion darstellen. Sie lernen stetige und diskrete Funktionen kennen. Sie wiederholen die Prozentrechnung und die Flächenformel für Rechtecke und untersuchen insbesondere Graphen von Funktionen bzgl. ihrer Änderungsrate.

Folgende thematische Aspekte werden behandelt:

- Zeit-Weg-Funktionen (gleichförmige und beschleunigte Bewegungen), d. h. lineare und quadratische Funktionen
- Füllfunktionen (Volumen $\rightarrow$ Füllhöhe)
- Potenzfunktionen bzw. indirekt proportionaler Zusammenhang
- Exponentialfunktionen

Methodische Hinweise

Um die Lernenden besser betreuen zu können (z. B. bei der Übung mit dem CBR-Gerät), wurde der Unterricht größtenteils als Stationenarbeit konzipiert. Bei dieser Methode ist es wichtig, die leistungsschwächeren Lernenden verstärkt zu betreuen, da sie sonst schnell verloren wirken und oft schon bei der Aufgabenstellung überfordert sind. Ein möglicher Unterrichtsverlauf:

1. Unterrichtsstunde

Zunächst wird von den Lernenden eine persönliche „Wohlfühlkurve“ vom vorhergehenden Tag erstellt und mit dem Nachbarn bzw. der Nachbarin besprochen. Einige „interessante“ Graphen werden in der Klasse vorgestellt.
Die Klasse wird geteilt. Ein Teil bearbeitet in Partnerarbeit die zweite Station „Graphen gehen“ im Innenhof der Schule, der andere Teil bleibt im Klassenzimmer und arbeitet mithilfe eines CBR-Geräts an Station 1. Das CBR-Gerät misst den Abstand eines Gegenstandes in Abhängigkeit von der Zeit. Die Lehrperson hilft bei den Einstellungen für die erste Messung. Diese Station ist als sogenannte „Blütenaufgabe“ konzipiert. Sie besteht aus einfachen Bestimmungsaufgaben, einer Umkehraufgabe und einer schwierigeren Umkehraufgabe (gleichmäßig beschleunigte Bewegung), die nicht von allen Lernenden gelöst werden muss. Die Richtigkeit der Lösung kann von den Lernenden selbst überprüft werden.
Bei Station 2 „Graphen gehen“ werden Zeit-Weg-Graphen in Partnerarbeit abgegangen. Hilfsmittel ist ein Stuhl. Es gibt auch einen unmöglichen Graphen. Die Lernenden sollen erkennen, dass es sich dabei nicht um den Graphen einer Funktion bzw. eine Bewegung handeln kann.
Die Hausaufgabe thematisiert das „Hochziehen einer Fahne“.

2. Unterrichtsstunde

Die Lernenden setzen die Stationenarbeit fort. Bei Station 3 „Füllgraphen“ messen sie die Füllhöhe eines Erlenmeyerkolbens in Abhängigkeit vom Volumen. Am Ende der dritten Station sollen die Lernenden imstande sein, andere Füllgraphen und Gefäße richtig zuzuordnen.
Station 4 „Rechtecke“ behandelt die indirekt proportionale Zuordnung und ihre Eigenschaften. Die Flächenformel eines Rechtecks wird wiederholt.
Station 5 „Reißzweckenschwund“ ist ein Beispiel für eine diskrete exponentielle Funktion.

3. Unterrichtsstunde

Die Stationenarbeit wird zu einem Abschluss gebracht. Bei Bedarf werden die Ideen und Ergebnisse zu einige Stationen besprochen.

Erfahrungen

Beim Einsatz im Unterricht konnten folgende Beobachtungen gemacht werden:

- Anstelle der erwarteten Erklärung „Man kann nicht zu einem Zeitpunkt an zwei Orten sein“ wird der unmögliche Graph mit „Die Zeit kann nicht stehen bleiben“ begründet.
- Bei der Untersuchung der Füllhöhe eines Gefäßes in Abhängigkeit vom Volumen oder der Zeit wird die Skala auf dem benutzten Erlenmeyerkolben außer Acht gelassen.
- Durch die qualitative Einführung zum Thema „Funktionen“ wird vor allem der globale Verlauf des Graphen und weniger die Zuordnung einzelner Werte betrachtet.
- Die Regelmäßigkeit beim Reißzweckenschwund wird nicht erkannt.

Leistungsbewertung

Die Lernumgebung sollte in einer Erarbeitungs- oder Übungsphase eingesetzt werden. Die erarbeiteten Inhalte, Kenntnisse und Fertigkeiten könnten in einem Test zum Beispiel wie folgt überprüft werden:

- Bewegungs-Graph beschreiben
- Füllhöhe eines Graphen identifizieren / beschreiben
- Ähnliche Zuordnungen: z. B. Zeit → Geschwindigkeit, Zeit → gelesene Seiten
- Experiment: ein Blatt mehrmals in der Mitte falten, Zahl der Papierschichten in Abhängigkeit von der Zahl der Faltungen als funktionalen Zusammenhang auffassen und diesen darstellen

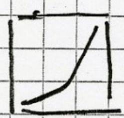
Dokumente von Schülerarbeiten

Zu Station 3 „Gefäße füllen“

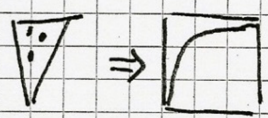
Station 3 erklären: Füllgefäße

Je schmaler ein Gefäß ist, desto schneller lässt es sich füllen. Dabei hat die Linie auf dem Grafen eine größere Steigung. Je breiter ein Gefäß, desto langsamer lässt es sich füllen. Dabei hat die Linie auf dem Graphen eine geringe Neigung. (Bei beiden immer auf die gleiche Höhe des Gefäßes bezogen!)

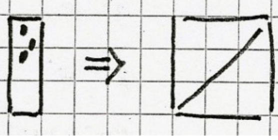
Wenn a) ein Gefäß oben schmaler ist als am Ende (nach unten hin immer breiter ist), dann steigt das Wasser an der schmalen Stelle schneller. Der Graph beginnt nicht so steil, aber zum Ende hin wird er steiler.

 Graph schaut ca. so aus 

b) ein Gefäß oben breiter ist als am Ende, dann steigt an den breiten Stellen, das Wasser langsamer.

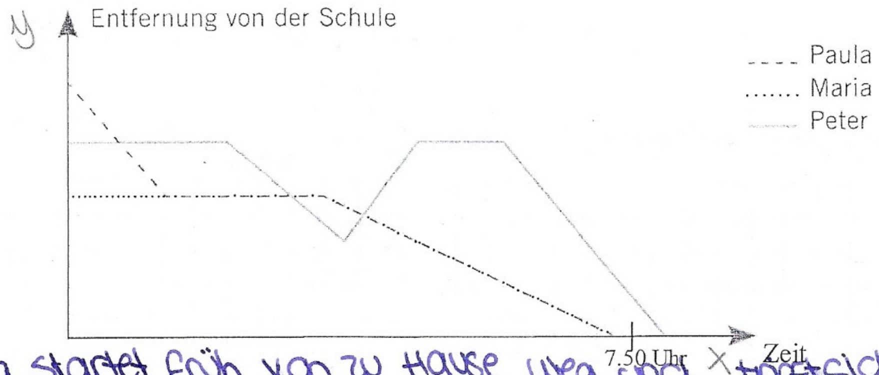


c) ein Gefäß an allen Stellen gleich breit/schmal ist, dann steigt das Wasser gleichmäßig an (bei Zylinder, Quader...)



Wenn das Gefäß von breit schmaler wird, wie beim Erlenmeyer Kolben dann ist die Kurve im Füllgraphen zuerst flach und dann immer steiler. Wenn man gleichmäßig Wasser hinein-schüttet, füllt sich das Gefäß zuerst langsamer und dann schneller, da es unten ja breiter ist. Also steigt der Wasserspiegel langsamer, weil mehr „Platz“ auszufüllen ist. Ist das Gefäß unten schmal und oben breit ist es genau umgekehrt, da ist die Kurve zuerst steil und dann flach, da es sich zuerst schnell und dann langsam füllt. Ist das Gefäß immer gleich, dann ist auch die Kurve immer gleich steil. Zusammenfassend kann man sagen, je flacher die Kurve, desto breiter ist das Gefäß und je steiler die Kurve, desto schmaler ist das Gefäß. Vorraussetzung ist, dass die Gefäße gleichmäßig gefüllt werden.

Testbeispiele



Paula startet früh von zu Hause weg und trifft sich mit Maria vor ihrem Haus. Dort unterhalten sie sich noch etwas und gehen zusammen direkt zur Schule. Sie kommen dort pünktlich an. Peter startet etwas später von zu Hause weg als Paula. Auf seinem Weg zur Schule trifft er Paula u. Maria aber geht gleich weiter. Nach einigen Minuten fällt ihm auf dass er das Matheheft zu Hause vergessen hat und eilt nach Hause. Auf dem Weg nach Hause trifft er erneut auf M. u. P.. Zu Hause muss er das Buch noch lange suchen. Dann macht er sich wieder auf den Weg in die Schule und kommt aber zu spät.

(3). a) Wie sehen die Graphen von linearen Funktionen aus? Was beobachtet man bei den Wertetabellen von linearen Funktionen?

Graphen von linearen Funktionen werden mit einer Gerade dargestellt. Bei einer Wertetabelle beobachtet man, dass die Zahlen auf der y-Achse immer regelmäßig zu- oder abnehmen

(z.B.

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-2	0	2	4

+2 +2 +2)

Literatur

Büchter A., Henn H.-W. (Hrsg.) (2008): Der Mathe-Koffer, Friedrich Verlag

Kröpfl, B. (2007): Höhere mathematische Allgemeinbildung am Beispiel von Funktionen, Profil Verlag, München Wien

Mathematik 5 bis 10, Heft 8|2009, Friedrich-Verlag

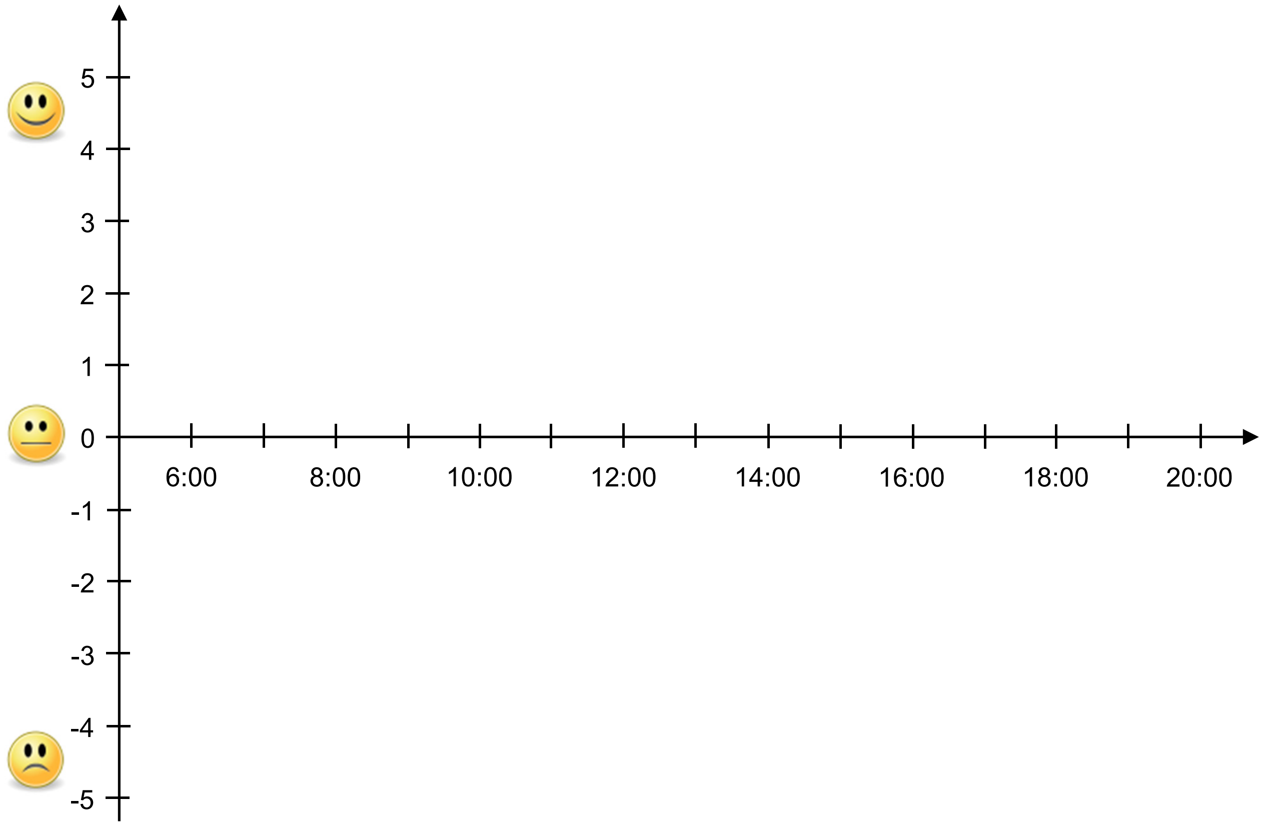
http://www.nawi-aktiv.de/umaterial/labor/laborgeraetequiz_zuordnung.htm

http://www.individualisierung.org/_neu/download/funktionen_pool1.pdf

Einstieg in funktionales Denken

Meine persönliche Wohlfühlkurve

Zeichne deine Wohlfühlkurve vom gestrigen Tag.



(nach: Mathematik 5 bis 10, Heft 8|2009, Friedrich-Verlag)

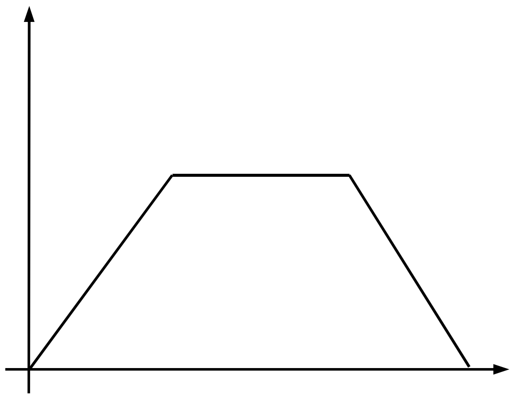
Stationenarbeit

1 Station „CBR“

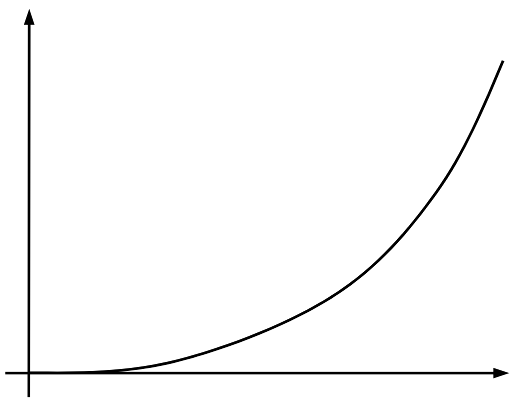
Bewege die Hand vom CBR-Gerät weg und skizziere den Graphen.

Bewege die Hand zum CBR-Gerät hin. Skizziere den Graphen und überlege dir, welche Größe auf der x-Achse und auf der y-Achse aufgetragen wird.

Welche Bewegung musst du mit der Hand machen, um folgenden Graphen zu erhalten? Teste es.

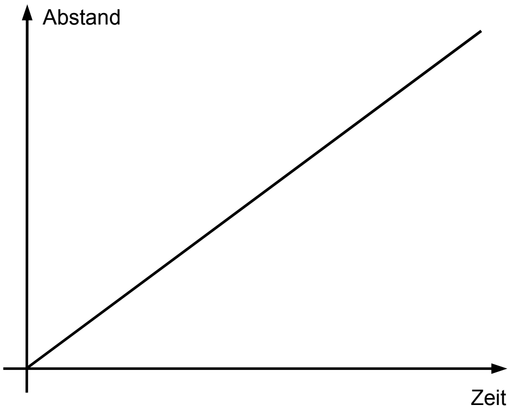


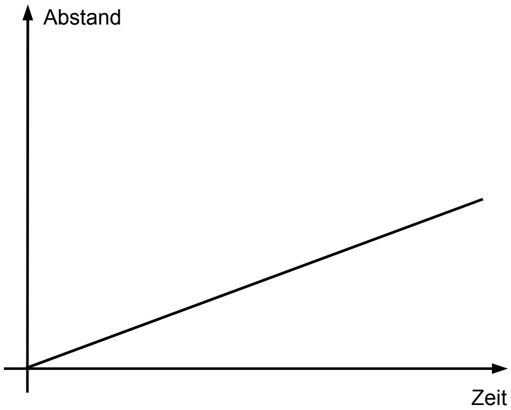
Welche Bewegung musst du mit der Hand machen, um folgenden Graphen zu erhalten? Teste es.

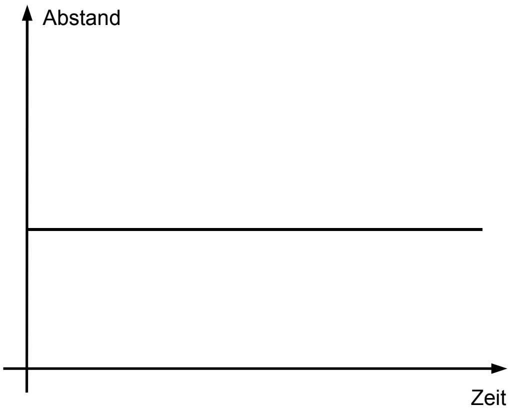


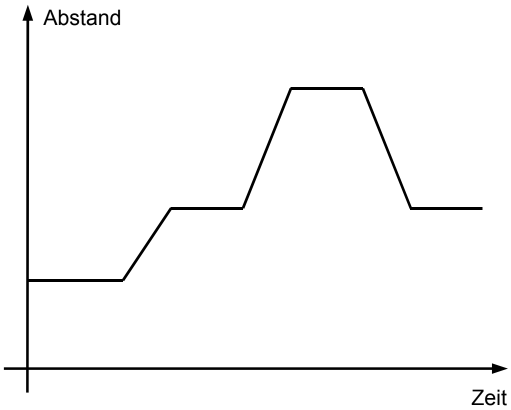
2 Station „Graphen gehen“

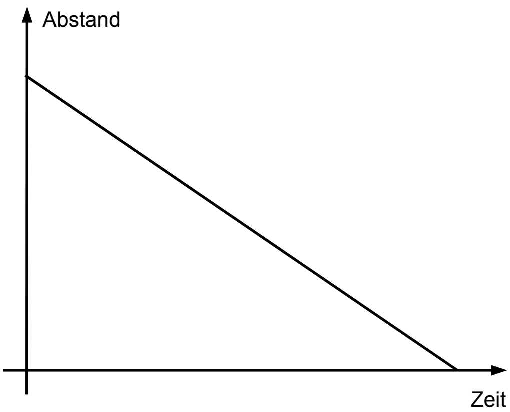
Wählt eine Wand und geht die Graphen nach. Die Graphen sollen euren Abstand zur Wand in Abhängigkeit von der Zeit darstellen. Beschreibt hierbei die Bewegungen auch in Worten. Falls einzelne Graphen nicht umsetzbar sind, begründet warum.

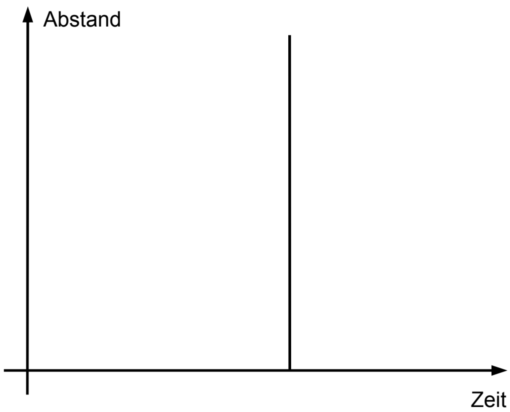










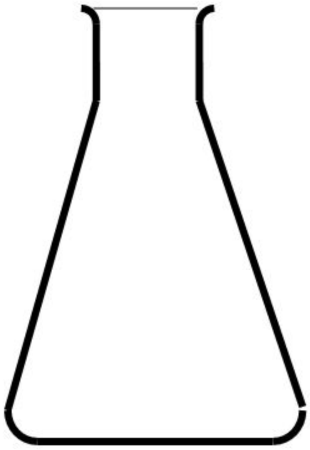


(nach: Mathematik 5 bis 10, Heft 8|2009, Friedrich-Verlag)

3 Station „Gefäße füllen“

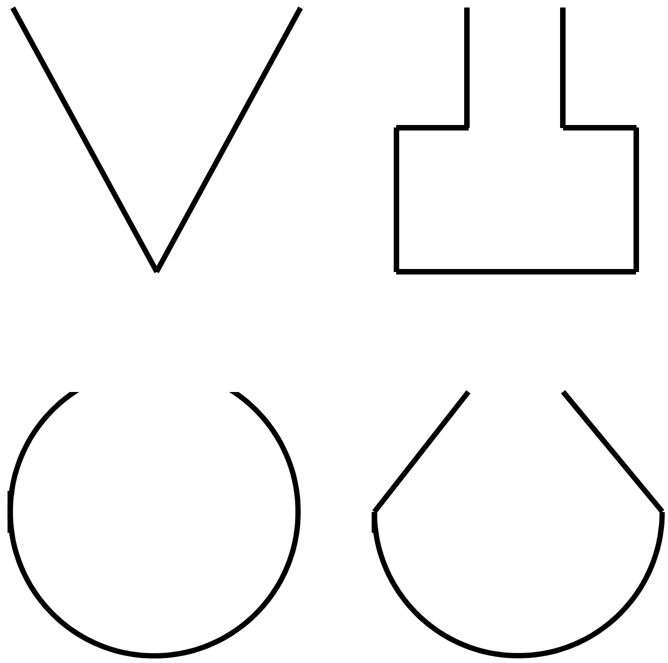
Für diesen Versuch benötigt ihr einen Erlenmeyerkolben, ein Lineal sowie einen Messzylinder.

Untersucht, wie sich der Wasserstand ändert, wenn man den Erlenmeyerkolben gleichmäßig mit Wasser füllt. Stellt das Ergebnis grafisch dar. Beschriftet die x-Achse mit dem Volumen und die y-Achse mit der Höhe des Wasserstands.



(Bild aus http://www.nawi-aktiv.de/umaterial/labor/laborgeraetequiz_zuordnung.htm)

Finde zu den abgebildeten Gefäßen den passenden Füllgraphen.



(nach: Mathematik 5 bis 10, Heft 8|2009, Friedrich Verlag)

Beschreibe, wie man vom Gefäß zum Füllgraphen und umgekehrt kommt.

Erfinde selbst derartige Beispiele.

4 Station „Rechtecke“

Schneide aus Papier vier verschiedene Rechtecke mit dem Flächeninhalt 9 cm² aus!

Zeichne in ein Koordinatensystem den Zusammenhang zwischen den Seiten möglicher Rechtecke ein. Auf den beiden Achsen sollen die Seitenlängen a und b der Rechtecke eingetragen werden. (Maßstab: 1 Kästchen ≙ 1 cm)

Mit welcher Formel findest du die zweite Seitenlänge des Rechtecks, wenn eine Seite gegeben ist?

Klebe die ausgeschnittenen Rechtecke sinnvoll ins Schaubild.

Schneidet der Graph die Achsen? Begründe.

Falls du Station 5 schon gemacht hast: Welche Unterschiede und Gemeinsamkeiten entdeckst du bei den beiden Graphen?

5 Station „Reißzweckenschwund“

Wenn man Reißzwecken fallen lässt, werden sicher einige „auf den Rücken“ und andere „auf die Seite“ fallen. Nun sollt ihr untersuchen, nach welcher Regel dies geschieht. Ihr benötigt 100 Reißzwecken und einen Becher zum Würfeln.

Werft die Reißzwecken auf den Boden und sortiert die auf der Seite liegenden aus. Notiert die Anzahl der übriggebliebenen. Wiederholt das Experiment mit den übriggebliebenen Reißzwecken noch vier Mal.

Stellt die Ergebnisse eurer Experimente grafisch dar. Beschriftet die x-Achse mit der Anzahl der Würfe und die y-Achse mit der Anzahl der übriggebliebenen Reißzwecken.

Gibt es eine Regelmäßigkeit? Welche?

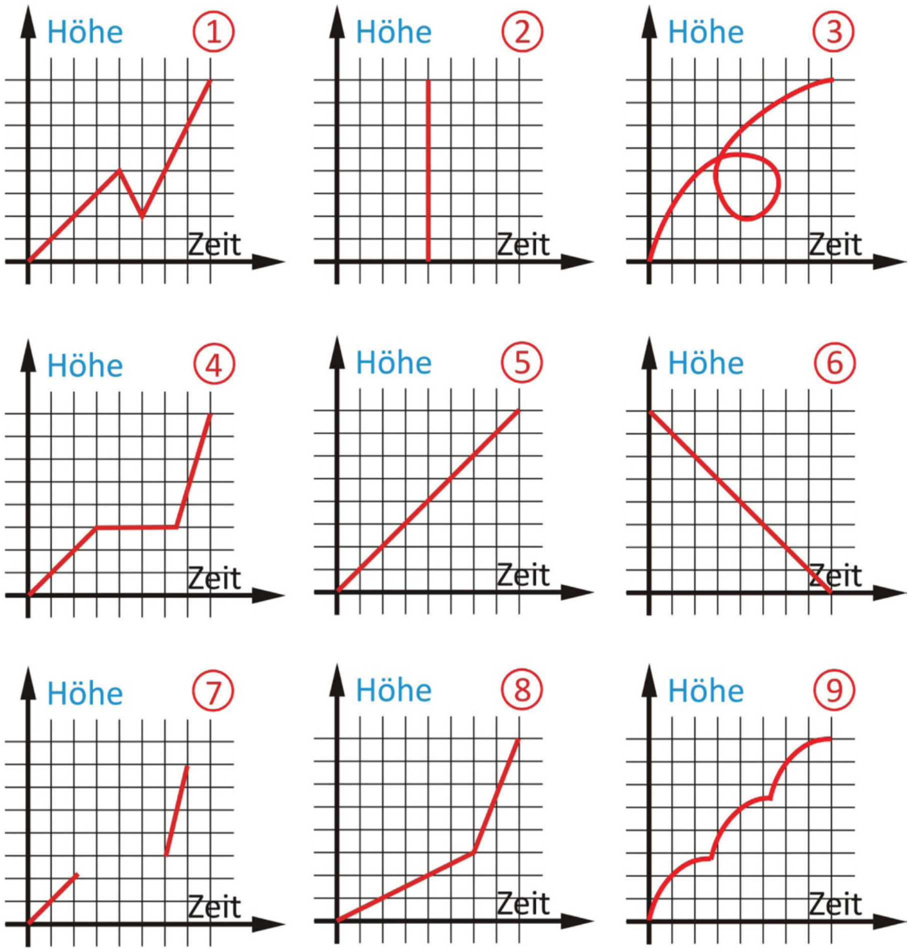
Falls du Station 4 schon gemacht hast: Welche Unterschiede und Gemeinsamkeiten entdeckst du bei den beiden Graphen?

(Idee aus: Mathekoffer, Friedrich-Verlag)

Hausaufgabe

1 Hochziehen einer Fahne

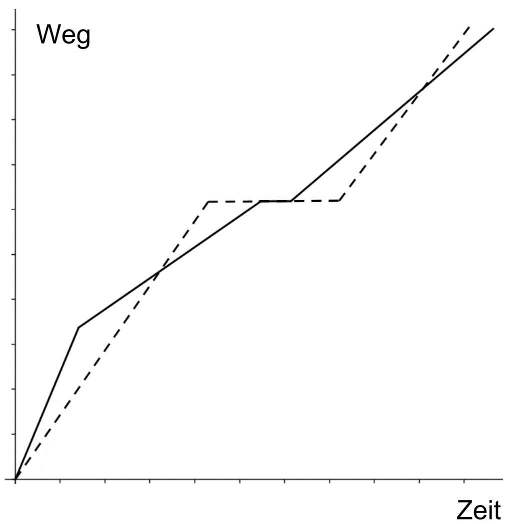
Die neun Abbildungen beschreiben teilweise das Hochziehen einer Fahne. Wie du vielleicht schon beobachtet hast, kann dieser Vorgang sehr unterschiedlich sein. Manche ziehen schnell die Fahne hoch, andere Leute wiederum rasten dazwischen, ... Beschreibe, sofern möglich, wie das Hochziehen der Fahne erfolgt.



(aus: http://www.individualisierung.org/_neu/download/funktionen_pool1.pdf)

2 Fahrradrennen

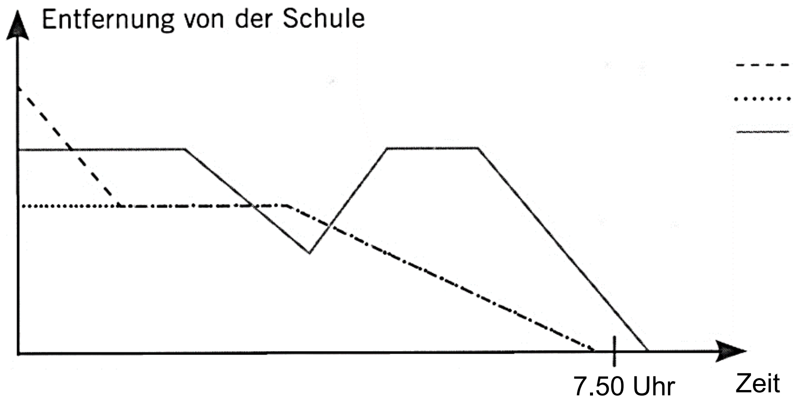
Das Diagramm stellt ein Fahrradrennen dar.
Kommentiere das Rennen als Radioreporter/in.



Test zu den Funktionen

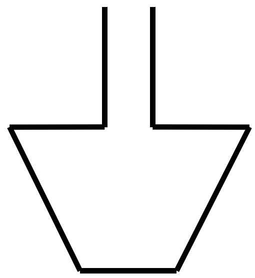
Aufgabe 1

Peter, Paula und Maria sind Klassenkameraden und wohnen an der gleichen Straße. Am Ende der Straße liegt ihre Schule. Jeden Morgen gehen sie zu Fuß zur Schule, die um 7.50 Uhr beginnt. Die Zeichnung zeigt, wo sie sich gestern zu verschiedenen Zeiten befunden haben.
Was ist in der Früh passiert? (Es muss keine spannende Geschichte sein. Man muss aber erkennen, dass du einen Graphen lesen kannst.)



Aufgabe 2

Zeichne den Füllgraphen des Gefäßes.



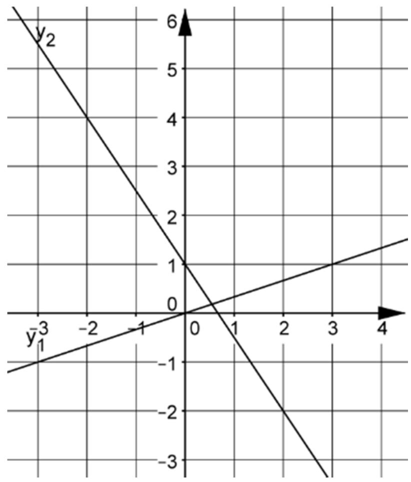
Aufgabe 3

Wie sehen die Graphen von linearen Funktionen aus? Was beobachtet man bei den Wertetabellen von linearen Funktionen?

Zeichne den Graphen von: $y = \frac{1}{2}x + 3$

Aufgabe 4

Gib zu beiden Graphen die Funktionsgleichung an.



10 Wurfbahnen, wie Galilei sie beschrieb

Einführung quadratischer Funktionen

Markus Reichhalter

Thema	Einführung des Begriffes der quadratischen Funktion, die Parameter der Scheitelform und erste Anwendungen
Stoffzusammenhang	Quadratische Funktionen
Klassenstufe	1. Biennium

Intention und Inhalt

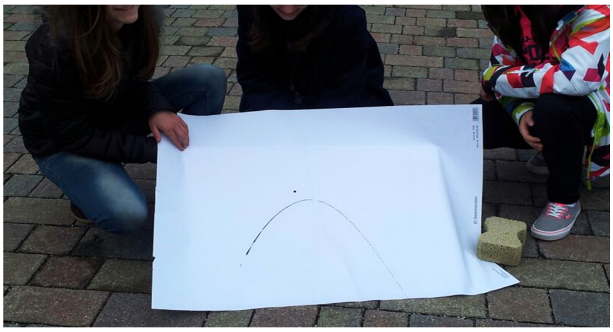
In der ersten Unterrichtsstunde befassen sich die Lernenden auf enaktive Weise mit der Bahn eines Wurfes anhand eines Experiments von Galileo Galilei (siehe unten). Nach einer kurzen Wiederholung zu linearen Funktionen und deren Anwendung zur Beschreibung gleichförmiger Bewegungen analysieren sie mit GeoGebra die Graphen nichtlinearer Funktionen. Dabei wird festgestellt, dass Parabeln, also Graphen quadratischer Funktionen, die Form der Wurfbahn beschreiben. Nachdem quadratische Funktionen in Scheitelform eingeführt werden, analysieren die Lernenden selbständig mit GeoGebra die Bedeutung der Parameter der Scheitelform (Dauer ca. zwei Stunden – ikonische Phase). Als Beispiel wird der senkrechte Wurf eines Gegenstandes empirisch untersucht. Anschließend wird die Normalform quadratischer Funktionen und als Anwendung die Bewegungsgleichung gleichförmig beschleunigter Bewegungen eingeführt. Fragen werden entwickelt – so beispielsweise nach dem höchsten Punkt der Wurfbahn und nach der Ankunftszeit am Boden – und nach deren Antworten gesucht. So wird in dieser einstündigen symbolischen Phase die Umrechnung der Normalform in Scheitelform thematisiert. Anwendungsbeispiele dienen zur Ergebnissicherung (Dauer ca. zwei Stunden). Im letzten Teil der Lernumgebung wird unter Zuhilfenahme des Additionsverfahrens zum Lösen linearer Gleichungssysteme besprochen, wie aus drei bekannten Punkten einer Parabel deren Funktionsgleichung berechnet werden kann (Dauer ca. eine Stunde). Eine Übungsphase dazu schließt die Lernumgebung (vorerst) ab.

Lernziele

Die Lernenden verstehen den Begriff der quadratischen Funktion und kennen deren Darstellung mit Funktionstermen (in Normal- und Scheitelform), Wertetabellen und Funktionsgraphen.
Sie erkennen eine Parabel als Graph einer quadratischen Funktion und verstehen, wie die Parameter der Scheitelform die Form des Graphen beeinflussen. Sie können den Scheitel als einen der charakteristischen Punkte bestimmen und darüber hinaus Beispiele aus dem Alltag, insbesondere Wurfbahnen, mathematisch beschreiben.

Fachlicher Hintergrund

Die enaktive Einführung in das Thema folgt einem Experiment Galileo Galileis, das er in seinem Werk „I discorsi“ beschrieben hat: Um die Wurfparabel verlangsamt analysieren zu können, ließ er eine in Tinte getauchte Kugel in einem Bogen über eine schiefe Ebene rollen. Dieses Experiment wiederholen die Lernenden im ersten Teil der Lernumgebung und widerlegen so die von Aristoteles bis in die Neuzeit gültige Theorie der Wurfbahn.



Im dritten Teil wird die Umrechnung zwischen Normal- und Scheitelform nicht wie oft üblich durch quadratisches Ergänzen erledigt: Durch Koeffizientenvergleich in den beiden Formeln werden Formeln für x_0 und y_0 hergeleitet. Erfahrungsgemäß hat sich diese Methode (besonders für Lernende mit Dyskalkulie) als leichter verständlich und einfacher anwendbar herausgestellt.

Methodische Hinweise

Im ersten Teil erarbeiteten die Lernenden enaktiv das Konzept der Parabel als Bahn eines Wurfes in Gruppenarbeit. Dabei sollten den Lernenden abwaschbare Tinte oder Handschuhe zur Verfügung gestellt werden.
Im zweiten Teil arbeiteten die Lernenden paarweise mit GeoGebra. Auf diesem ikonischen Weg lernten sie die Graphen der quadratischen Funktionen und deren Beeinflussung durch die Parameter der Scheitelform kennen. Dazu war es hilfreich, Schieberegler für die Parameter zu verwenden, um die Veränderung der Graphen auch dynamisch verfolgen zu können. Indem die Lernenden Graphen quadratischer Funktionen über ihre experimentell erhaltenen Parabeln legten, wurde ihnen veranschaulicht, dass die mithilfe des Galileo-Experiments erhaltenen Bahnen solchen Parabeln entsprechen und somit Graphen quadratischer Funktionen sind. Aus Exporten des Grafikfensters, ergänzt durch ihre eigenen Beobachtungen, erstellten die Lernenden ein Word-Dokument.
Im dritten Teil wurde symbolisch die Bewegungsgleichung als Beispiel einer quadratischen Funktion in Normalform eingeführt. Zur Vermeidung des doppelt belegten Parameters a einerseits als Koeffizient des quadratischen Terms der Normalform und andererseits als Beschleunigung der Bewegungsgleichung, empfiehlt es sich, für die Beschleunigung einen anderen Buchstaben zu wählen. In Partnerarbeit arbeiteten die Lernenden abschließend an Anwendungsbeispielen.
Die Übungsbeispiele wurden nach der Taxonomie von Bloom – soweit angemessen – geordnet. Dabei sollten sich die Lernenden von den weniger komplexen (Wissen → Verstehen → Anwenden) bis zu komplexeren Stufen (Analyse → Synthese → Bewerten) vorarbeiten.

Leistungsbewertung

Bewertet werden kann das im zweiten Teil der Lernumgebungen erstellte Dokument anhand von Kriterien wie Übersichtlichkeit, Korrektheit und Vollständigkeit.
Die Lernenden selbst können den eigenen Kenntnisstand in der Übungsphase überprüfen. Zu diesem Zweck arbeiten sie im Sinne einer formativen Beurteilung gezielt an speziellen Bereichen, die sich an der Taxonomie von Bloom orientieren.
Eine Schularbeit als summative Bewertung könnte den Abschluss der Lernumgebung bilden. Diese sollte sich an den Aufgaben der Übungsphase orientieren und die Komplexitätsstufen „Wissen", „Verstehen" und „Anwenden" als Minimalanforderungen beinhalten. Auch die Ergebnisse der letzten Übungsphase (siehe unten) könnten, nachdem sie präsentiert wurden, als Bewertungsgrundlage herangezogen werden.
Bei Lernenden mit Dyskalkulie kann beim letzten Bereich nur auf die richtige Modellierung und den richtigen Rechenweg, aber nicht auf Fehler bei der Berechnung geachtet werden. Der Taschenrechner wird allen als Hilfsmittel erlaubt.

Quadratische Funktionen

1 Pizzaverkäufer

Ein Pizzaschnitten-Verkäufer verkauft ein Stück um 2 € und hat so jeden Tag 100 Kunden. Nun überlegt er, ob er den Preis erhöhen sollte. Allerdings würde er pro 10 Cent Preiserhöhung vier Kunden verlieren. Was sollte er tun?

2 Löwengehege

Für die Umzäunung eines Löwengeheges stehen 100 m Zaun zur Verfügung. Wie müssen die Abmessungen eines rechteckigen Geheges gewählt werden, um dem Löwen so viel Platz wie möglich zu verschaffen?

3 Hochsprung

Die Bahn des Schwerpunktes eines Hochspringers hat die Form einer Parabel mit dem Parameter $a = -1$. Der Körperschwerpunkt liegt bei einem optimalen Sprung 90 cm vor der Messlatte. Welche Höhe kann dabei übersprungen werden? Wie sieht die Situation aus, wenn der Absprungpunkt nicht genau getroffen wird?

4 Schnittpunkte mit der x-Achse

Finde quadratische Funktionen in Scheitel- bzw. Normalform, die

- zwei Schnittpunkte mit der x-Achse,
- genau einen Schnittpunkt mit der x-Achse,
- keinen Schnittpunkt mit der x-Achse

aufweisen. Welche Bedingungen erfüllen die Parameter jeweils?

5 Höhe schätzen

Finde ein Schätzverfahren, mit dem du aus der Fallzeit eines Gegenstandes auf seine Fallhöhe schließen kannst.

6 Wushan-Brücke

Im Bild siehst du die Wushan-Brücke, die den Jangtsekiang nahe der chinesischen Stadt Chongqing überquert. Sie ist die siebtgrößte Bogenbrücke der Welt. Ihr parabelförmiger Bogen überspannt 460 m der unter ihm liegenden Straße. Diese verläuft etwa 85 m unterhalb des Scheitels. Was kannst du über diese Brücke herausfinden?

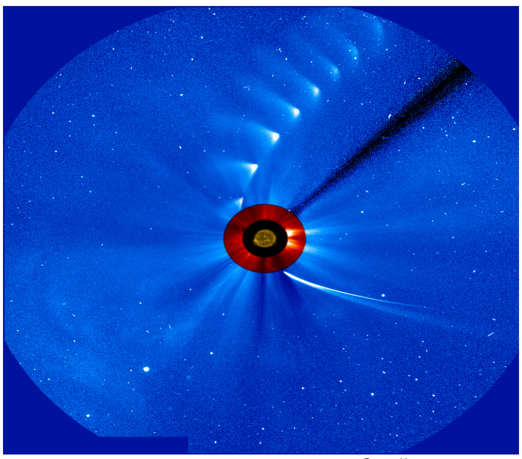

Quelle: Wikimedia commons

7 Komet ISON

Der Komet ISON wurde am 21. September 2012 entdeckt, als er fast eine Milliarde Kilometer von der Sonne entfernt war. Seitdem wurde er intensiv beobachtet. Dabei wurde festgestellt, dass er sich auf einer fast parabelförmigen Bahn vom Rand des Sonnensystems in dessen Inneres bewegt, um dann seinen Rückweg ins Weltall anzutreten, sofern er die Reise um die Sonne überlebt. In einem geeigneten Koordinatensystem, das in seiner Bahnebene liegt, konnten folgende Positionen in astronomischen Einheiten gemessen werden.

Datum	**x-Koordinate**	**y-Koordinate**
14.11.2013	-0,18	0,63
15.11.2013	-0,17	0,60
16.11.2013	-0,17	0,59
17.11.2013	-0,17	0,56
18.11.2013	-0,16	0,53
19.11.2013	-0,16	0,49
20.11.2013	-0,15	0,46


Quelle: Wikimedia commons


Quelle: nasa.gov
(ESA/NASA/SOHO/SDO/GSFC)

Was kannst du über ISON durch Recherchen, Berechnungen oder mithilfe von Excel bzw. GeoGebra herausfinden? Beurteile deine Ergebnisse.

11 Tageslängen im Jahresverlauf

Modellieren mit der Sinusfunktion

Julian Eichbichler

Thema	Modellieren mithilfe der allgemeinen Sinusfunktion
Stoffzusammenhang	Trigonometrische Funktionen
Klassenstufe	2. Biennium

Intention

In dieser Lernumgebung sollen die Lernenden nicht nur den Verlauf der trigonometrischen Funktionen kennenlernen, sondern auch den Einfluss verschiedener Parameter auf die Amplitude, die Periodendauer und die Phasenverschiebung erkennen. Dies erfolgt anhand von praktischen Beispielen. Weiterführend kann die Bewegung Erde-Mond analysiert werden: Wie entstehen die Jahreszeiten? Wie ändert sich der Verlauf der Tageslänge, wenn ich mich am Nord- bzw. Südpol befinde? Wann ist der kürzeste und wann der längste Tag im Jahr? Warum?

Fachlicher Hintergrund

Der Verlauf der Länge eines Tages in der Heimatstadt soll graphisch dargestellt und durch eine geeignete Näherungskurve (Regressionsmodell) angenähert werden. Diese Funktion wird anhand verschiedener Aufgabenstellungen analysiert. Dadurch treten die Lernenden mit der allgemeinen Sinusfunktion in Kontakt und lernen den Einfluss der verschiedenen Parameter kennen. Darüber hinaus sollen sie Erscheinungen im Alltag hinterfragen und verstehen. Es ist möglich, die Modellierung in ca. vier Unterrichtsstunden durchzuführen.

Die Lernenden sollten bereits über Vorwissen zu den Winkelfunktionen am Einheitskreis verfügen. Dadurch sollten sie für die Funktion $f(x) = \sin x$ bereits den Wertebereich, den Graphen und die Periodizität kennen.

Die Lernenden sollen nun den Einfluss der vier Parameter der Sinusfunktion kennenlernen. Mit der Aufgabenstellung "Bestimme den Jahresverlauf der Tageslänge deiner Heimatstadt" verknüpfen die Lernenden zunächst keine trigonometrische Funktion. Erst durch das geeignete Regressionsmodell wird erkannt, dass es sich hier um eine Winkelfunktion handelt, auch wenn diese zunächst eigenartig erscheint. In der Folge sollen die Lernenden durch die Beschäftigung mit den Aufgaben die Bedeutung der Parameter im Funktionsterm der allgemeinen Sinusfunktion

$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$$

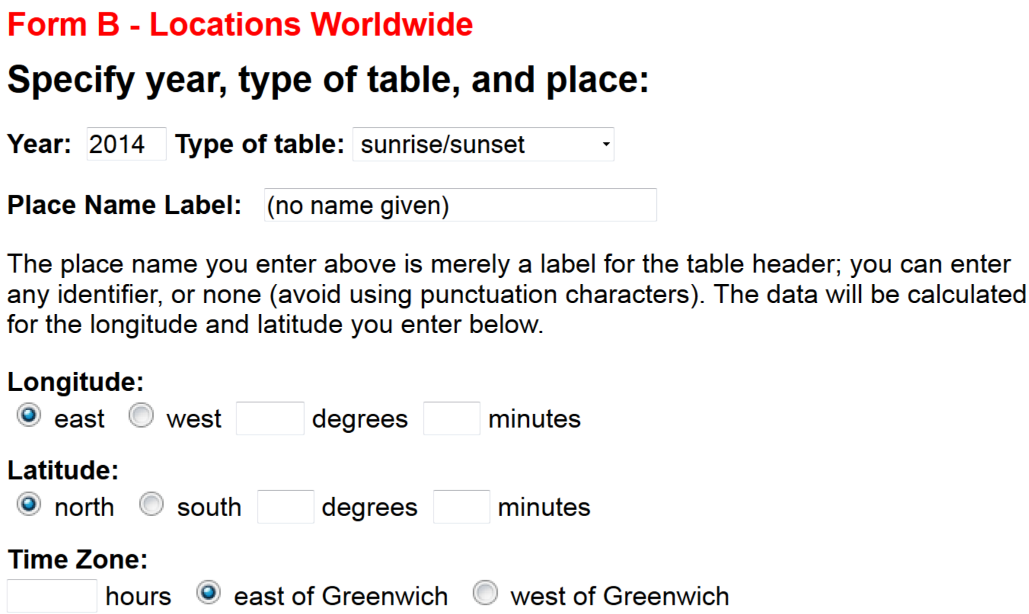
verstehen.

Methodische Hinweise

Über die Seite

http://aa.usno.navy.mil/data/docs/RS_OneYear.php

kann man die Uhrzeiten des Sonnenauf- und des Sonnenuntergangs für die Heimatstadt berechnen lassen:



Form B - Locations Worldwide

Specify year, type of table, and place:

Year: 2014 Type of table: sunrise/sunset

Place Name Label: (no name given)

The place name you enter above is merely a label for the table header; you can enter any identifier, or none (avoid using punctuation characters). The data will be calculated for the longitude and latitude you enter below.

Longitude:
east west degrees minutes

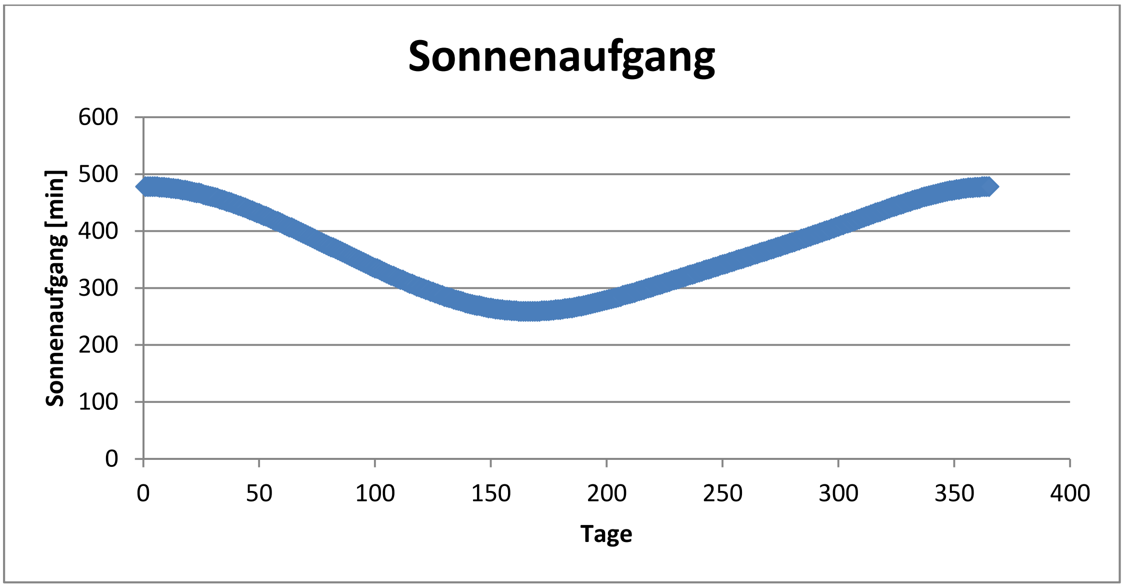
Latitude:
north south degrees minutes

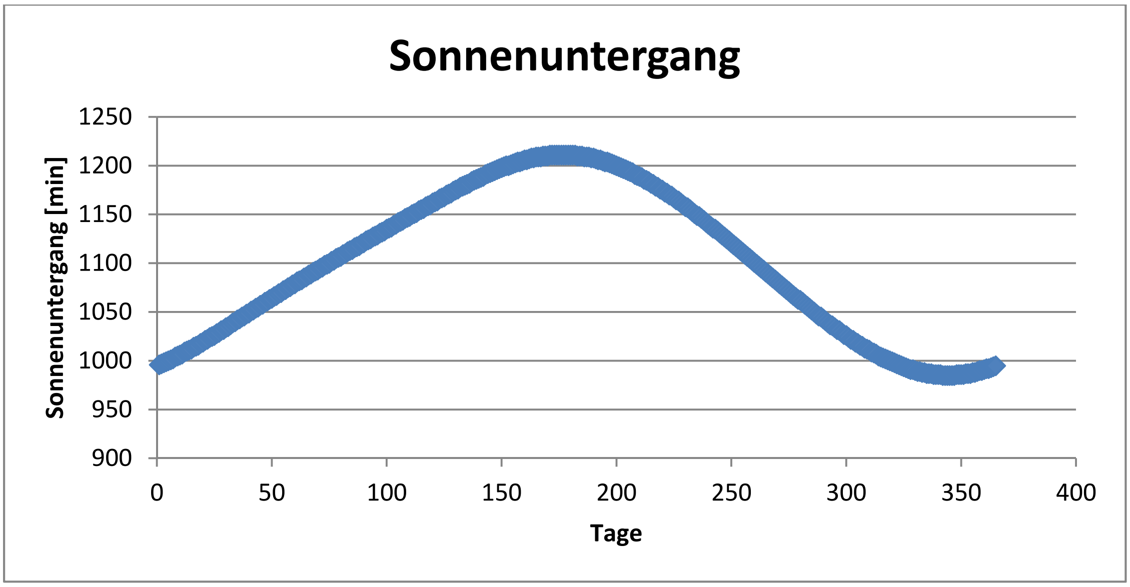
Time Zone:
hours east of Greenwich west of Greenwich

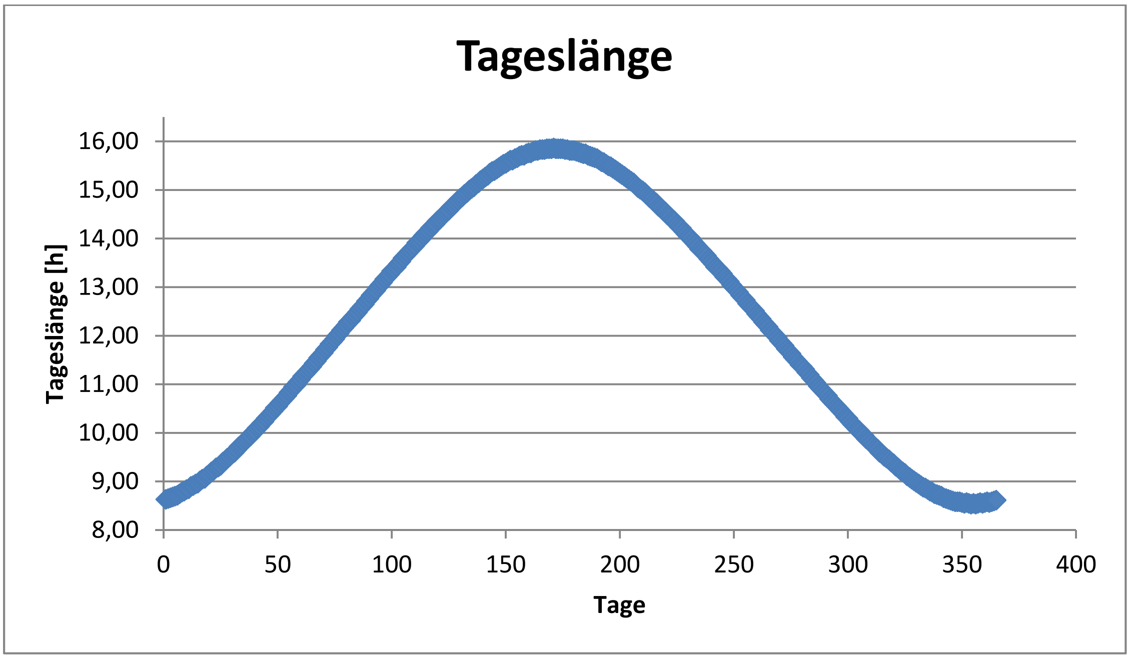
Zuerst müssen die Längen- und Breitengrade der Heimatstadt herausgefunden werden. Des Weiteren ist die Zeitverschiebung der Heimatstadt zu berücksichtigen und die Frage nach deren Einfluss zu klären.

Auf der Webseite gibt es Anleitungen, wie man die errechneten Daten, die im Browser angezeigt werden, in Excel importieren kann.

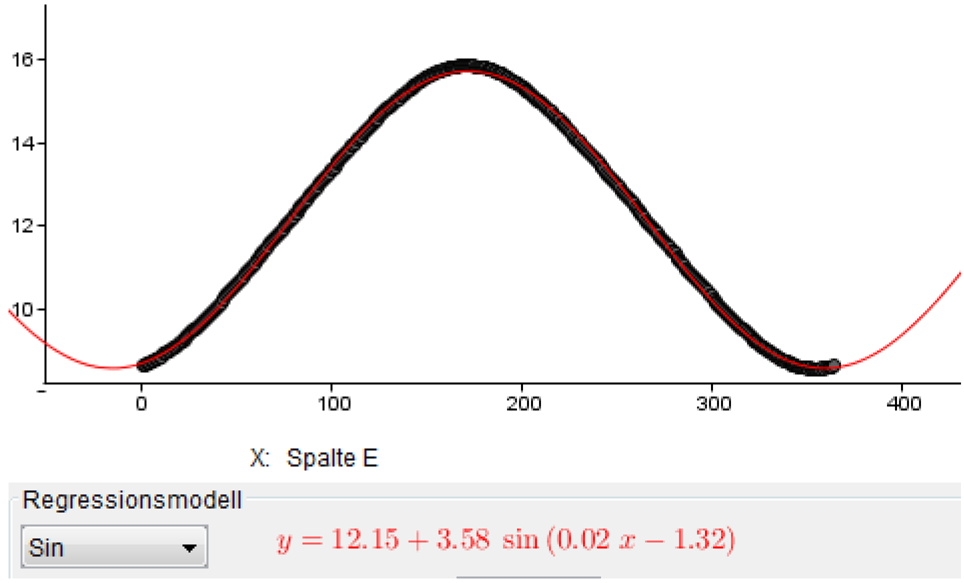
Es ergaben sich im Unterricht folgende Graphen:

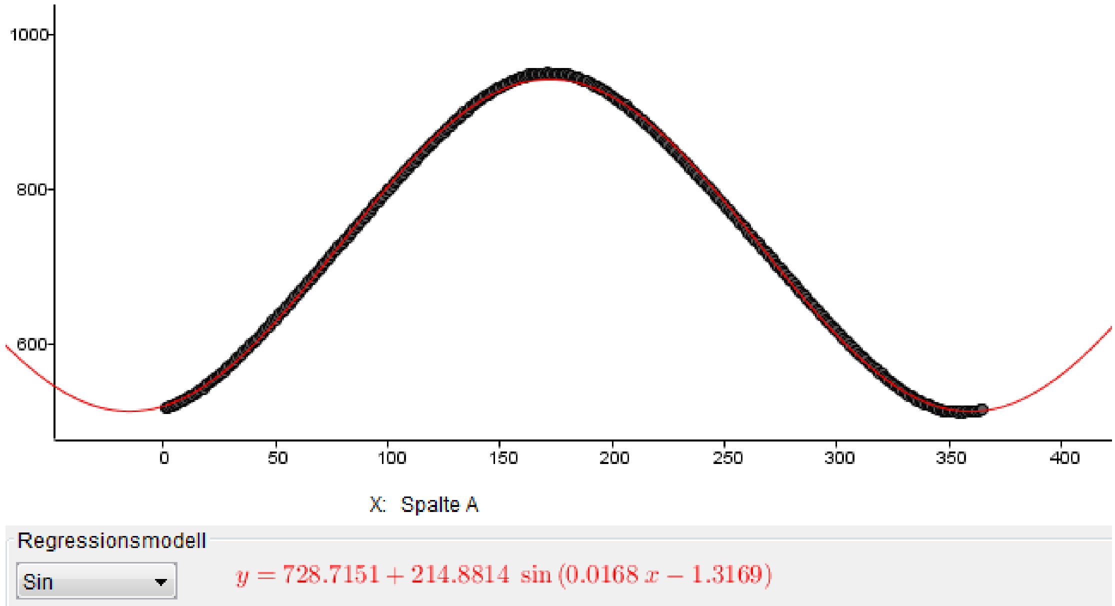

Sonnenaufgang
Sonnenaufgang [min]
600
500
400
300
200
100
0
0
50
100
150
200
250
300
350
400
Tage


Sonnenuntergang
Sonnenuntergang [min]
1250
1200
1150
1100
1050
1000
950
900
0
50
100
150
200
250
300
350
400
Tage


Tageslänge
Tageslänge [h]
16,00
15,00
14,00
13,00
12,00
11,00
10,00
9,00
8,00
0
50
100
150
200
250
300
350
400
Tage

Um die Tageslängen-Kurve mit dem Graphen einer Sinusfunktion anzunähern, eignet sich kein Regressionsmodell in Excel, da hier keine trigonometrischen Regressionsmodelle zur Verfügung stehen. In GeoGebra hingegen ist dies möglich:





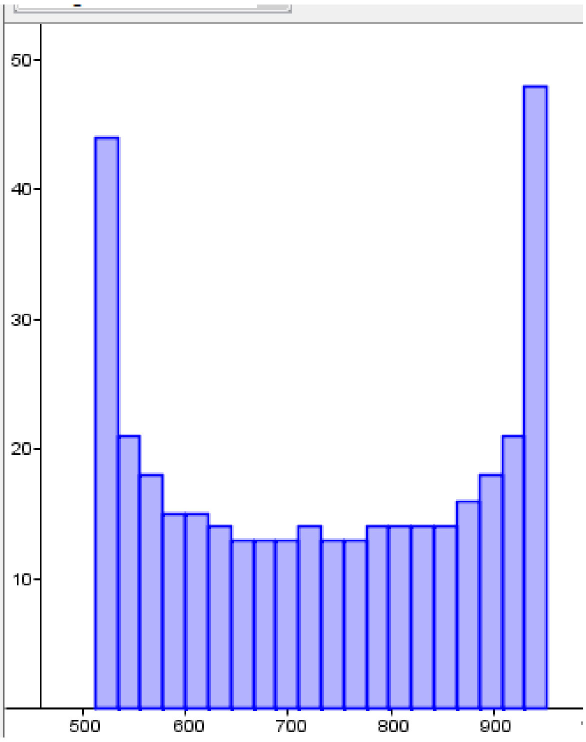
Anhand der Näherungsfunktion $f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$ kann nun die Analyse der Daten durchgeführt werden:

Mittlere Tageslänge:	$d = 728{,}7$ min $= 12$ h 9 min
Unterschied längster – kürzester Tag:	$2a = 429{,}8$ min $= 7$ h 10 min
Periodendauer:	$T = \frac{2\pi}{b} = 374$ Tage (Problem: Rundungsfehler)
Phasenverschiebung	$\varphi = \frac{c}{b} = 78{,}4$ Tage

Somit wäre der 18. Dezember das Minimum, d. h. der kürzeste Tag.

Vergleich mit realen Werten:

n	365
Mittelwert	734.2904
σ	150.0175
s	150.2234
Σx	268016
Σx²	205015996
Min	512
Q1	589.5
Median	737
Q3	879.5
Max	952



Zu Beginn der Aufgabenbearbeitung ist die Angabe der Homepage, von der die Daten ermittelt werden sollen, unbedingt erforderlich. Hintergrund hierfür ist, dass größere Städte bereits Tageslängen auf unterschiedlichen Seiten ins Internet gestellt haben. Schwierigkeiten bereitet den Lernenden vor allem die Datenanalyse.

Leistungsbewertung

Diese Modellierungsaufgabe fördert nicht nur mathematische Fähigkeiten, sondern beispielsweise auch physikalische und geographische. Hier kommt es vor allem auf die Vollständigkeit des geforderten Berichts und die Nachvollziehbarkeit der Argumentationen an. Bei der nächsten Schularbeit bietet es sich an, eine Frage zum Projekt zu stellen. (Z. B.: Welche Funktion beschreibt den Jahresverlauf der Tageslänge und warum? Erkläre.)

Weiterführende Überlegungen

Im Anschluss an das Projekt sollte die allgemeine Sinusfunktion systematisch analysiert werden.

a) Untersuche den Einfluss der Parameter a, b, c und d auf den Graphen der Funktion
$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d.$$

Beispiel: Untersuche die Graphen von $\sin(x)$, $\sin(2x)$, $\sin(3x)$, $\sin(0{,}5x)$, $\sin(0{,}2x)$.
Wie wirkt sich der Faktor auf den Graphen der Funktion aus?

b) Schreibe einen übersichtlichen Bericht über deine Beobachtungen.

c) Finde passende Bezeichnungen für die Bedeutung der einzelnen Parameter.

Bestimme den Jahresverlauf der Tageslänge deiner Heimatstadt!

Im Folgenden kannst du den Verlauf der Tageslänge deines Heimatortes untersuchen, graphisch darstellen und durch eine geeignete Näherungskurve (Regressionsmodell) annähern.

Als Datengrundlage verwendest du Daten aus dem Internet. Welche Programme du zur Verarbeitung und Analyse der Daten nutzt, steht dir frei.

1 Daten beschaffen

Beschaffe dir über die Seite

http://aa.usno.navy.mil/data/docs/RS_OneYear.php

die Uhrzeiten des Sonnenauf- und des Sonnenuntergangs in deinem Heimatort.

2 Daten analysieren

Analysiere die gewonnenen Daten:

- Wie groß ist die mittlere Tageslänge?
- Um wie viele Minuten unterscheidet sich der kürzeste vom längsten Tag?
- Berechne die Änderung der Tageslänge pro Tag in Minuten. Warum ändert sich die Tageslänge in gewissen Zeiträumen besonders schnell?
- Wie sieht der Jahresverlauf der Tageslänge am Nordpol aus?
- Wenn der Tag am Nordpol länger ist als bei uns, müsste eigentlich die Temperatur dort höher sein als bei uns! Argumentiere.
- Sind deine Daten und Ergebnisse realistisch?

3 Zusatz

Die Sonne ist nicht punktförmig. Wie sollte man also den Sonnentag definieren?

Geht die Sonne wirklich im Osten auf? … Denke an andere Orte auf der Erde.

4 Bewertungsgrundlage

Schreibe einen übersichtlichen Bericht über deine Beobachtungen und finde passende Bezeichnungen für die Bedeutung der einzelnen Größen.

12 Das Tangentenproblem

Einstieg in die Differentialrechnung

Manuel Winkler

Thema	Mathematische Beschreibung einer tangentialen Zufahrtsstraße
Stoffzusammenhang	Lineare Funktionen, Parabel durch drei Punkte, Differentialquotient
Klassenstufe	2. Biennium

Intention

In dieser Unterrichtseinheit soll den Lernenden der Einstieg in die Differentialrechnung ermöglicht werden. Ausgehend von der Problemstellung, an eine Autobahn eine tangentiale Zufahrtstraße zu entwerfen, wird schrittweise auf den Differentialquotienten geschlossen. Dies dient als Vorstufe zu den Ableitungen.

In dieser Unterrichtseinheit wird Bezug auf folgende Kompetenzen, Fertigkeiten und Kenntnisse genommen:

- Zeichnen von Funktionen
- Bestimmung linearer Funktionen über y-Achsenabschnitt und Steigungsdreieck
- Bestimmung einer Parabel bei drei gegebenen Punkten
- Bestimmung von Grenzwerten
- Tangente
- Umgang mit dem Differentialquotienten und dessen Herleitung
- Zeichnen von Funktionen am Computer

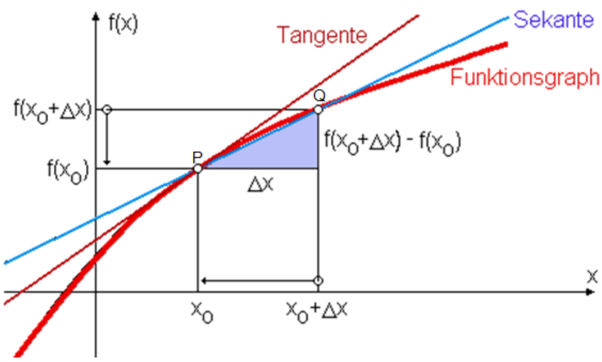
Zur Physik bestehen inhaltliche Zusammenhänge:

- Geschwindigkeit/Momentangeschwindigkeit als Steigung im Weg-Zeit-Diagramm
- Wurfparabel

Die Unterrichtseinheit ist für zwei bis drei Unterrichtsstunden konzipiert.

Fachlicher Hintergrund

Um die Steigung einer Funktion $f(x)$ im Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$ zu ermitteln, wird zum Funktionsgraphen eine beliebige Sekante eingezeichnet, welche durch P verläuft. Ist Q in x-Richtung um Δx von P entfernt, so hat dieser Punkt die Koordinaten $Q(x_0 + \Delta x \mid f(x_0 + \Delta x))$.



(aus: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/70/Ableitung.png)

Die Steigung der Sekante lässt sich am Steigungsdreieck bestimmen:

$$a_{Sekante} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Die Sekante geht in die Tangente im Punkt P über, wenn sich der Punkt Q immer weiter dem Punkt P nähert, also Δx gegen Null geht. Im Grenzfall gilt demnach für bei x_0 differenzierbare Funktionen:

$$a_{Tangente} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Methodische Hinweise

Um einen Bezug zur Alltagswelt herzustellen und die Lernenden zu motivieren, wird ein gekrümmtes Autobahnsegment gewählt, an welches in Punkt A eine tangentiale Zufahrtsstraße angebaut werden soll.

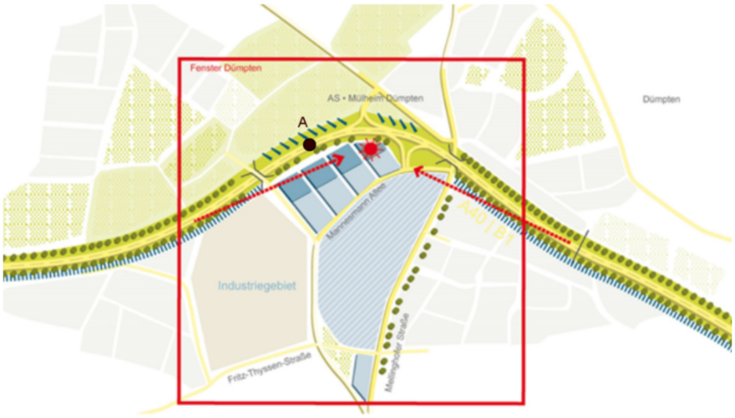


Bild aus: http://www.planung-a40-b1.de/Duempten.86.0.html

Den Lernenden wird ein Arbeitsblatt mit der Aufgabenstellung ausgeteilt. Bei Bedarf stehen zwei Hilfekarten mit gestuften Hilfen zur Verfügung.
In einem ersten Arbeitsschritt sollen die Schülerinnen und Schüler dem Bild der Straße ein Koordinatensystem zuordnen und die Straße in einer sinnvollen Umgebung um den Punkt A mit einer Funktion, z. B. einer Parabel, approximieren. Mit Augenmaß soll eine möglichst passende Tangente in Punkt A eingezeichnet werden. Mittels der Maße des zugefügten Steigungsdreieckes und des y-Achsenabschnittes kann – über die Punkt-Steigungsformel – die ungefähre Funktionsvorschrift der Tangente gefunden werden.

Ist dieser Arbeitsschritt beendet und mit den Lernenden diskutiert worden, wird im Unterrichtsgespräch fortgefahren. An die Tafel wird der Funktionsgraph gezeichnet. Punkt P wird hinzugefügt, wobei nur die x-Komponente x_0 als bekannt anzunehmen sei. Auch die Sekante mit Punkt Q wird dargestellt. Die Lernenden sollen nun die nachfolgenden Überlegungen anstellen:

- Wie lautet die y-Komponente des Punktes P?
- Wie lauten, ausgehend von einer Verschiebung um Δx in x-Richtung, die Koordinaten des Punktes Q?
- Wie lässt sich jetzt die Steigung der Sekante bestimmen?
- Was muss geschehen, dass sich die Sekante zur Tangente transformiert?

Unter dieser Anleitung sollten die Lernenden imstande sein, den Differentialquotienten herzuleiten. Durch eine Wiederholung des Grenzwertbegriffs in der Unterrichtseinheit kann eventuellen Schwierigkeiten bei Grenzwertberechnungen vorgebeugt werden.

Um einen Zusammenhang zur Physik zu finden, kann die Trajektorie eines ballistischen Körpers hinzugezogen werden, dessen Momentangeschwindigkeit zu einem gegeben Zeitpunkt bestimmt werden soll.

Leistungsbewertung

Die ausgeführten Arbeitsaufträge liegen der Leistungsbewertung zugrunde. Kriterien hierfür könnten die Sauberkeit der Diagramme, der mathematische Formalismus und die analytische Vorgehensweise sein.

Planung einer Autobahnbeschleunigungsstraße

An der unten abgebildeten Autobahn soll in Punkt A eine tangentiale Zufahrtsstraße angegliedert werden. Die Funktionsgleichung, welche den Verlauf der Zufahrtsstraße beschreibt, soll dazu bestimmt werden.

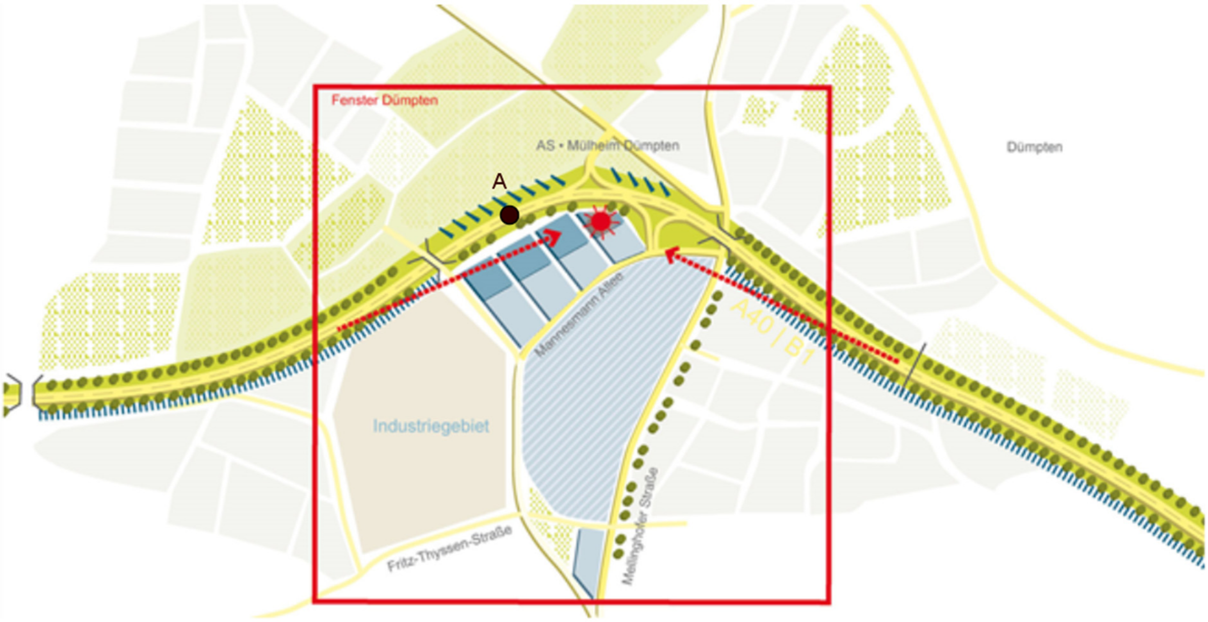


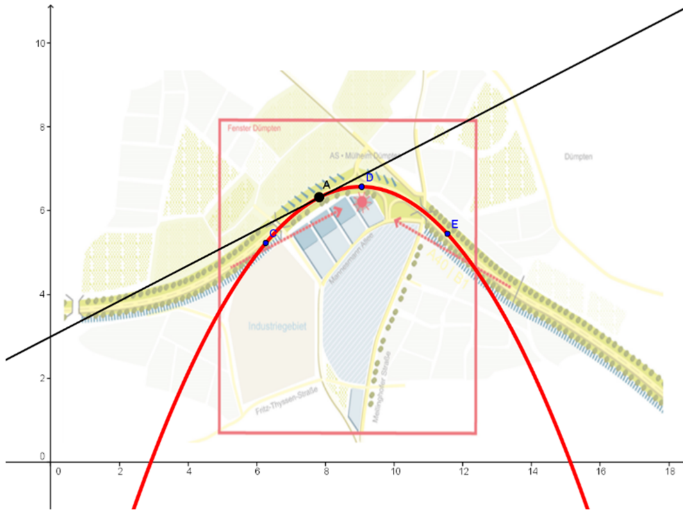
Bild aus: http://www.planung-a40-b1.de/Duempten.86.0.html

Hilfe 1

Die Form der Hauptstraße soll mit einer mathematischen Funktion beschrieben werden. Wir begnügen uns, einen Bereich in der Umgebung des Punktes A mit einer Parabel zu approximieren.

Zeichne dazu in die Karte ein geeignetes Koordinatensystem ein und ermittle eine quadratische Funktion, welche die Form der Kurve in der Umgebung von A möglichst gut widerspiegelt.

In Punkt A zeichnest du nun näherungsweise die Tangente ein und bestimmst dazu die Funktionsvorschrift.

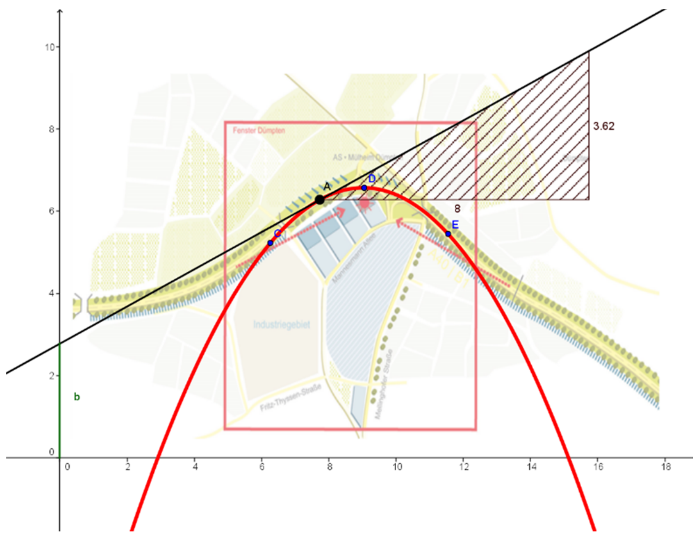


Hilfe 2

Die Form der Straße soll mit einer mathematischen Funktion beschrieben werden. Wir begnügen uns, einen Bereich in der Umgebung des Punktes A mit einer Parabel zu approximieren.
Zeichne dazu in die Karte ein geeignetes Koordinatensystem ein sowie drei Straßenpunkte, deren Koordinaten du durch Abmessen mit dem Geodreieck bestimmst.

Bestimme nun die quadratische Funktion, welche durch diese drei Punkte verläuft: Setze dazu die Koordinaten der drei Punkte in die quadratische Funktion $y = ax^2 + bx + c$ ein. Löse das so entstehende Dreifachgleichungssystem mit dem Additionsverfahren. Du erhältst so die Koeffizienten a, b und c.

Zeichne nun in Punkt A so gut wie möglich mit dem Lineal die Tangente ein. Die Tangente ist eine Gerade, welche die Kurve in Punkt A nur berührt. Sie ist eine lineare Funktion der Form $y = mx + t$.
Den y-Achsenabschnitt t kannst du aus dem Koordinatensystem ablesen, die Steigung m lässt sich über ein Steigungsdreieck ermitteln.



13 Funktionen und ihre Ableitungen

Funktionsverlauf, Monotonie und Krümmung

Johann Rubatscher

Thema	f, f' und f''
Stoffzusammenhang	Differentialrechnung, funktionale Zusammenhänge
Klassenstufe	2. Biennium

Intention

Ziel dieses Arbeitsblatts ist es, ein Verständnis bei den Lernenden über die Zusammenhänge zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen hervorzurufen und dieses zu festigen.
Zur Bearbeitung der Fragestellungen sind keinerlei Rechnungen erforderlich. Erfahrungsgemäß dauert der Arbeitsauftrag in etwa 50 Minuten.

Fachlicher Hintergrund

Mehrere mathematisch salopp formulierte Fragestellungen zu den bereits behandelten Begriffen „Monotonie" und „Krümmung" dienen der Festigung des Verständnisses über deren Zusammenhänge.

Methodische Hinweise

Nach der Behandlung der Grundlagen im Unterricht bedarf es keiner weiteren Erläuterung, um das Arbeitsblatt bearbeiten zu können. Die Fragestellungen werden von den Lernenden zu zweit oder in der Gruppe bearbeitet. Der Schwierigkeitsgrad ist als „mittelmäßig" einzustufen. Das Arbeitsblatt wurde bereits einige Male erprobt; es entstand stets eine rege Diskussion.

Leistungsbewertung

Mit einer Variation der Aufgabenstellungen kann leicht überprüft werden, ob die Lernenden die erarbeiteten Zusammenhänge erfasst haben und ob sie ihre Behauptungen mit den entsprechenden Argumenten auch untermauern können.

Die Funktion und ihre Ableitungsfunktionen

In den folgenden Aufgabenstellungen ist die Funktion f „brav“, d.h. stetig, differenzierbar und frei von allen Böswilligkeiten, die sich nur Mathematiker ausdenken können.

Aufgabe 1

Die Funktion f ist im Intervall I streng monoton fallend. Wie verhält sich der entsprechende Funktionswert $f(x)$ im Intervall I, wenn der x-Wert der Funktion abnimmt? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 2

In einer Rechtskurve hat die Funktion f an der Stelle x_0 die Steigung 4. Welche Steigung wird f in dieser Rechtskurve an der Stelle x_1 haben, wenn x_1 rechts von x_0 liegt? Begründe die Antwort.

Aufgabe 3

f'' hat an der Stelle x_0 den Wert -5. Was sagt dies über f' in einer Umgebung von x_0 aus, was über $f'(x_0)$? Was lässt sich über $f(x_0)$ aussagen? Begründe.

Aufgabe 4

f' kreuzt an der Stelle x_0 die x-Achse von links oben kommend. Welche besondere Stelle ist x_0? Begründe.

Aufgabe 5

Stelle, falls nötig, folgende Argumentation richtig:
In einem Rechtskrümmungsbereich einer Funktion f nimmt die Steigung der Tangente an die Kurve ab, wenn man von links nach rechts „wandert“. Da die Ableitung einer Funktion aber die Steigung der Tangente an der entsprechenden Stelle angibt, ist f' im Rechtskrümmungsbereich streng monoton fallend und f'' ebenso. Begründe eine eventuelle Richtigstellung.

Aufgabe 6

Skizziere, falls überhaupt möglich, das Teilstück einer Funktion f, die links gekrümmt und gleichzeitig streng monoton fallend ist. Was lässt sich über f'' in diesem Kurvenstück aussagen? Begründe.

Aufgabe 7

Die Funktion f geht an der Stelle x_0 von einer Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung über. Gleichzeitig ist f im Bereich um x_0 streng monoton steigend. Ist dies möglich? Begründe mithilfe einer Skizze.

Aufgabe 8

Die Funktion f geht an der Stelle x_0 von einer Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung über. Gleichzeitig ist f im Bereich um x_0 streng monoton fallend. Ist dies möglich? Begründe mithilfe einer Skizze.

Aufgabe 9

f'' ist in einem Bereich monoton fallend und besitzt dort eine Nullstelle. Was kannst du in diesem Bereich für f schlussfolgern? Begründe.

Aufgabe 10

In einem Intervall I ist f' streng monoton steigend; die Werte von f' sind im Intervall jedoch negativ. Skizziere den Verlauf von f im Intervall I und begründe mit Worten deine Lösung.

14 Welche Form einer Bienenwabe ist optimal?

Optimierungsaufgaben

Marion Zöggeler, Hubert Brugger, Karin Höller

Thema	Optimale Bauweise in der Natur Minima und Maxima finden
Stoffzusammenhang	Geometrische Größen von Figuren und Körpern, qualitative Eigenschaften einer Funktion, Extremwertprobleme, Funktionen in zwei Variablen
Klassenstufe	Je nach Bearbeitung für 2. Biennium oder 5. Klasse

Intention

Die Lernumgebung beschäftigt sich mit der optimalen Bauweise von Bienenwaben. Es handelt sich hier um ein anschauliches, fächerübergreifendes Beispiel einer Optimierungsaufgabe, bei der verschiedenste Bereiche der Mathematik miteinander verknüpft werden. In besonderem Maße werden die Bereiche „Ebene und Raum" sowie „Relationen und Funktionen" einbezogen.
Wird die Lernumgebung in einer unteren Klassenstufe erarbeitet, liegt der Schwerpunkt auf der geometrischen Vorstellung, auf qualitativen Funktionsbeschreibungen und der experimentellen Lösungsfindung mithilfe von Computerprogrammen. Für höhere Klassenstufen eignet sich die Lernumgebung zur Anwendung der Differentialrechnung in einer und mehreren Variablen.

Für diese Lernumgebung sind mindestens vier Unterrichtsstunden vorzusehen.

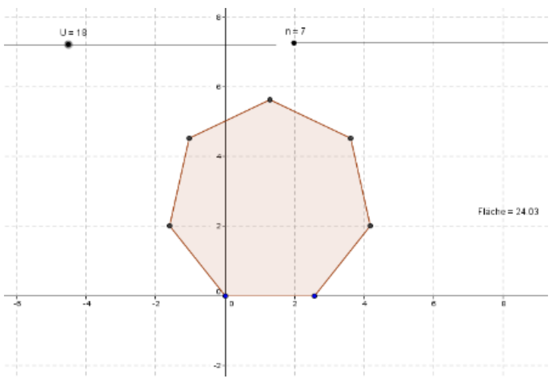
Fachlicher Hintergrund

Die Aufgabenstellungen sollen die Lernenden schrittweise zur optimalen Wabe führen. Dafür sind zunächst einfachere Aufgaben in der Ebene zu bearbeiten, die dann ins Räumliche übertragen werden sollen.

Hierzu nachfolgende Lösungsvorschläge:

Zu 1 Maximale Fläche

Mit GeoGebra werden bei gleichbleibendem Umfang verschiedene Vielecke konstruiert und die dazugehörigen Flächeninhalte berechnet. Dabei erkennt man sehr gut, dass sich die Flächen mit zunehmender Anzahl der Seiten einer Kreisfläche als Grenzwert nähern.



Die zugehörige GeoGeobra-Datei steht zum Download zur Verfügung unter www.KeyCoMath.eu.

Fläche von regelmäßigen Vielecken – eingeschrieben in einen Kreis

Mit Excel kann eine tabellarische Übersicht der Flächeninhalte von verschiedenen Polygonen erstellt werden.

Beispiel für einen Kreisradius von 10 cm:

Anzahl der Ecken n	**Zentriwinkel im Gradmaß**	**Zentriwinkel im Bogenmaß**	**Fläche des n-Eckes in cm^2**
3	120,00	2,094395102	129,9038106
4	90,00	1,570796327	200,0000000
5	72,00	1,256637061	237,7641291
6	60,00	1,047197551	259,8076211
7	51,43	0,897597901	273,6410189
8	45,00	0,785398163	282,8427125
9	40,00	0,698131701	289,2544244
10	36,00	0,628318531	293,8926261
20	18,00	0,314159265	309,0169944
30	12,00	0,209439510	311,8675362
40	9,00	0,157079633	312,8689301
50	7,20	0,125663706	313,3330839
60	6,00	0,104719755	313,5853898
70	5,14	0,089759790	313,7375812
80	4,50	0,078539816	313,8363829
90	4,00	0,069813170	313,9041318
100	3,60	0,062831853	313,9525976
150	2,40	0,041887902	314,0674030
200	1,80	0,031415927	314,1075908
250	1,44	0,025132741	314,1261930
300	1,20	0,020943951	314,1362983
350	1,03	0,017951958	314,1423915
400	0,90	0,015707963	314,1463462
450	0,80	0,013962634	314,1490576
500	0,72	0,012566371	314,1509971

Ergebnis: Der Flächeninhalt des Vielecks nähert sich immer mehr dem Flächeninhalt eines Kreises.

Die zugehörige Excel-Datei ist unter www.KeyCoMath.eu verfügbar.

Für die vierte und fünfte Klasse bietet sich auch eine Grenzwertberechnung an:

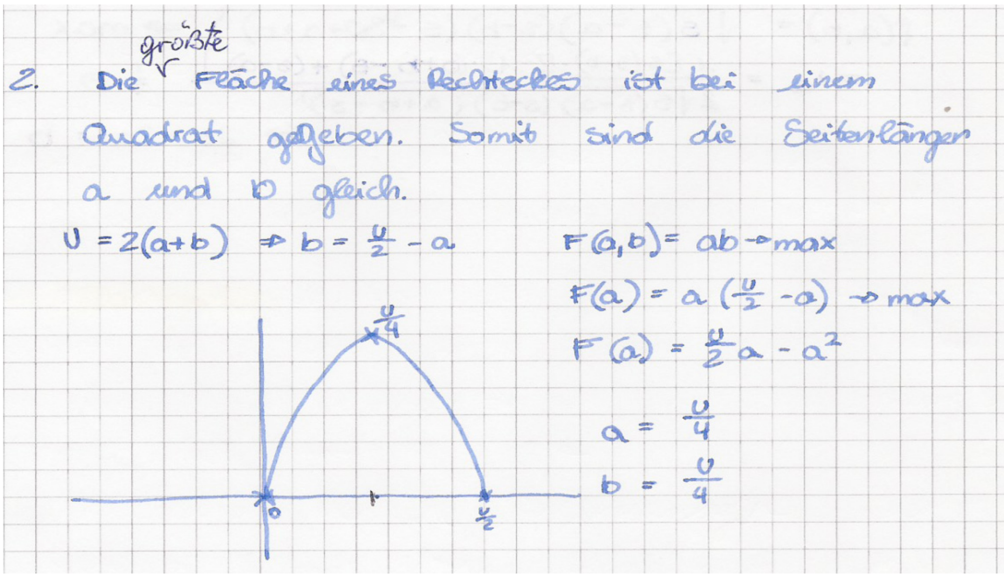
$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \quad = \quad \lim_{x\to 0} 2\pi \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} \quad = \quad r^2\pi$$

Hierbei wurden die Substitution $\frac{2\pi}{n} = x$ sowie der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ genutzt.

Zu 2 Spezialfall: Rechteck

Betrachtet wird ein Rechteck mit gegebenem Umfang: Wie sind die Seiten a und b zu wählen, um eine maximale Fläche zu erreichen?

Diese Fragestellung führt zu einer quadratischen Funktion, deren Maximum es zu bestimmen gilt. Ein Lösungsansatz einer Schülerin:



2. Die größte Fläche eines Rechteckes ist bei einem Quadrat gegeben. Somit sind die Seitenlängen a und b gleich.

$U = 2(a+b) \Rightarrow b = \frac{U}{2} - a$

$F(a,b) = ab \rightarrow max$

$F(a) = a\left(\frac{U}{2} - a\right) \rightarrow max$

$F(a) = \frac{U}{2}a - a^2$

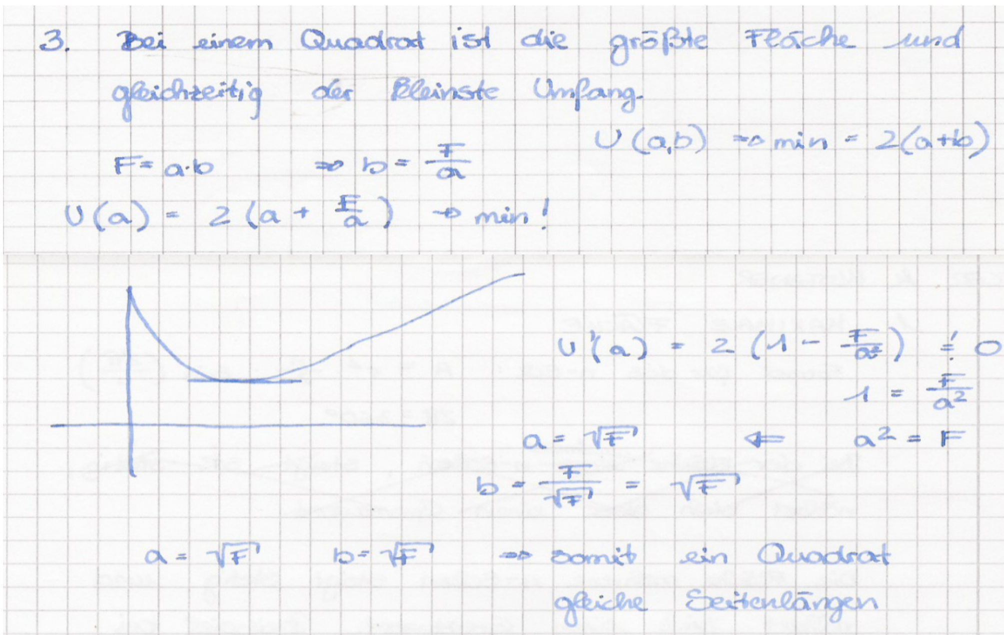
$a = \frac{U}{4}$

$b = \frac{U}{4}$

Neben den mechanischen Rechenverfahren soll auch auf eine qualitative Beschreibung der Funktionen Wert gelegt werden.

Zu 3 Umgekehrt: Minimaler Umfang (bei vorgegebener Fläche)

Bei dieser Aufgabe soll der Umfang eines Rechtecks $U(a) = 2\left(a + \frac{A}{a}\right)$ bei gegebenem Flächeninhalt A in Anhängigkeit von einer Seitenlänge a bezüglich eines Minimums untersucht werden. Hierbei kann eine grafische Darstellung durch den Computer hilfreich sein. In oberen Klassen wird die Differentialrechnung eingesetzt. Ein Lösungsansatz einer Schülerin:



3. Bei einem Quadrat ist die größte Fläche und gleichzeitig der kleinste Umfang.

$U(a,b) \rightarrow min = 2(a+b)$

$F = a \cdot b \Rightarrow b = \frac{F}{a}$

$U(a) = 2\left(a + \frac{F}{a}\right) \rightarrow min!$

$U'(a) = 2\left(1 - \frac{F}{a^2}\right) \stackrel{!}{=} 0$

$1 = \frac{F}{a^2}$

$a = \sqrt{F} \Leftarrow a^2 = F$

$b = \frac{F}{\sqrt{F}} = \sqrt{F}$

$a = \sqrt{F}$ $b = \sqrt{F}$ $\Rightarrow$ somit ein Quadrat gleiche Seitenlängen

Zu 4 Spezialfall: Dreieck

Durch die Heronsche Formel $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ kann die Fläche eines Dreiecks bei gegebenem Umfang mithilfe zweier Variablen ausgedrückt werden, wobei $s = \frac{U}{2} = \frac{a+b+c}{2}$.
Experimentelle Lösungen erhält man mit Excel oder GeoGebra; eine exakte Lösung erfordert den Einsatz von Methoden der Analysis in zwei Variablen.

Ein Lösungsansatz eines Schülers:

$$(4)\quad U = a+b+c = 15 \Rightarrow c = 15-a-b \qquad s = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow \frac{a+b+15-a-b}{2} = 7{,}5$$

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \longrightarrow \max$$

$$A(a,b) = \sqrt{7{,}5\cdot(7{,}5-a)(7{,}5-b)(7{,}5-15+a+b)}$$

$$f'_a = \frac{1}{2\sqrt{\;''}} \cdot 7{,}5(7{,}5-b)\underbrace{(-56{,}25+7{,}5a+7{,}5b+7{,}5a-a^2-ab)}_{15-2a-b} \overset{!}{=} 0$$

$$f'_b = \frac{1}{2\sqrt{\;''}} \cdot 7{,}5(7{,}5-a)\underbrace{(7{,}5-b)(-7{,}5+a+b)}_{7{,}5-a-b+7{,}5-b = 15-2b-a} \overset{!}{=} 0$$

$$(56{,}25-7{,}5b)\cdot(15-2a-b) = 843{,}75-112{,}5a-56{,}25b-112{,}5b+15ab+7{,}5b^2$$

$$7{,}5b^2-168{,}75b-112{,}5a+15ab+843{,}75 = 0$$

$$7{,}5a^2-168{,}75a-112{,}5b+15ab+843{,}75 = 0$$

$$7{,}5b^2-7{,}5a^2-168{,}75b+168{,}75a-112{,}5a+112{,}5b = 0$$

$$7{,}5b^2-56{,}25b = 7{,}5a^2-56{,}25a \;\Downarrow\; b = a$$

$$a = b \;\Downarrow\; c = 15-2a \qquad A = \sqrt{7{,}5(7{,}5-a)(7{,}5-a)(7{,}5(15-2a))} = \sqrt{7{,}5(112{,}5a-30a^2+2a^3-421{,}875+112{,}5a-7{,}5a^2)}$$

$$f' = \frac{225-75a+6a^2}{2\sqrt{\;''}} \Rightarrow 6a^2-75a+225 \overset{!}{=} 0 \quad 7{,}5 \quad (5) \Rightarrow a = 5 = b \Rightarrow c = 15-2\cdot 5 = 5$$

gleichseitiges Δ!

Zu 5 Von der Ebene in den Raum

Bei dieser Aufgabenstellung müssen Begriffe vom zwei- in den dreidimensionalen Raum übertragen werden.

- Umfang entspricht Oberfläche
- Fläche entspricht Volumen
- Rechteck entspricht Quader
- Quadrat entspricht Würfel

Dies sollte allen Lernenden gelingen. Dagegen dürfte das effektive Ermitteln der optimalen Lösungen im dreidimensionalen Raum besonders motivierte Lernende ansprechen, da es sich um Extremwertaufgaben in zwei Variablen handelt.

Beispiel: Betrachte einen Quader mit vorgegebener Oberfläche und bestimme die Seiten a, b und c so, dass man als Ergebnis das maximale Volumen erhält.

Ein Lösungsansatz eines Schülers:

5.1

$$V = a \cdot b \cdot c \rightarrow \max$$

$$O = 2a \cdot b + 2ac + 2bc$$

$$2ac + 2bc = O - 2ab$$

$$c = \frac{O - 2ab}{2(a+b)}$$

$$V = a \cdot b \cdot \left(\frac{O - 2ab}{2(a+b)}\right)$$

$$V = \frac{Oab - 2a^2b^2}{2(a+b)} = \frac{Oab - 2a^2b^2}{2a+2b}$$

$$V'a = \frac{(Ob - 4a \cdot b^2) \cdot (2a+2b) - (Oab - 2a^2b^2) \cdot (2)}{(2a+2b)^2}$$

$$V'a = \frac{\cancel{2abO} - 8a^2b^2 + 2b^2O - 8ab^3 - \cancel{2abO} + 4a^2b^2}{(2a+2b)^2}$$

$$\frac{-4a^2b^2 + 2b^2O - 8ab^3}{4a^2 + 8ab + 4b^2} = 0$$

$$-2a^2 + b^2O - 8ab^3 = 0$$

$$V'b = \frac{(Oa - 4a^2b) \cdot (2a+2b) - (Oab - 2a^2b^2) \cdot 2}{(2a+2b)^2} = 0$$

$$2a^2O - 8a^3b + \cancel{2abO} - 8a^2b^2 - \cancel{2abO} + 4a^2b^2 = 0$$

$$2a^2O - 8a^3b - 4a^2b^2 = 0$$

$$V'a = -4a^2b^2 + 2b^2O - 8ab^3 = 0 \quad | :b^2$$

$$-4a^2 + 2O - 8ab = 0 \quad | +8ab$$

$$-4a^2 + 2O = 8ab \quad | :2a$$

$$-4a + \frac{2O}{a} = 8b \quad | :8$$

$$-\frac{\cancel{4}^1}{\cancel{8}_2}a + \frac{O}{4a} = b$$

$6a^2 = O \Rightarrow a^2 = \frac{O}{6}$

$a = \sqrt{\frac{O}{6}}$

$4a^2 + 8ab = 2O$ $\Rightarrow b = \sqrt{\frac{O}{6}}$

$4b^2 \; 8ab = 2O$

$4(a^2-b^2) = 0 \Leftrightarrow (a=b) \vee (a=-b)$

$$2a^2O - 8a^3\left(-\frac{1}{2}a + \frac{O}{4a}\right) - 4a^2\left(-\frac{4}{8}a + \frac{O}{4a}\right)^2 = 0$$

$$\cancel{2a^2O} + 4a^4 - \cancel{2Oa^2} - 4a^2\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{\cancel{2}^1 \cancel{a} O}{\cancel{8}_4 \cancel{a}} + \frac{O^2}{16a^2}\right) = 0$$

$$4a^4 - a^4 + a^2O - \frac{O^2}{4} = 0$$

$$3a^4 + a^2O - \frac{O^2}{4} = 0 \quad | \cdot 4$$

$$12a^4 + 4a^2O - O^2 = 0$$

$z_{1,2} = \frac{-2 \pm 4O}{12} = -\frac{1}{2}O$, $\frac{O}{6}$

$O = 8$ z-Beispiel

$$12a^4 + 32a^2 - 64 = 0 \quad | :4$$

$$3a^4 + 8a^2 = 16$$

$$a^2(3a^2 + 8) = 16$$

$\Rightarrow a_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{O}{6}}$

$a \geq 0$ $a = \sqrt{\frac{O}{6}} = b$

$\Rightarrow c = \frac{O}{6}$

$$a = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}1547$$

$$b = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3} + \frac{8}{4\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}} =$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{8\cdot 3}{8\cdot\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{\sqrt{3}} =$$

$$\frac{-3+9}{3\cdot\sqrt{3}} = \frac{\cancel{6}^2}{{}_1\cancel{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3} = 1{,}1547$$

$$c = \frac{8 - 2 \cdot (1{,}1547)^2}{2\,(1{,}1547 \cdot 2)} = 1{,}1547$$

Das maximale Volumen ergibt sich bei einem Würfel.

6) $O(\alpha) = 6ab + \frac{3a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3} - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\right) \to \min$

$O(90^\circ) = 6ab + \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$

Fläche des regelmäßigen 6 Eckes

$O'_a = 6b + \frac{\cancel{6}^{3} a \sqrt{3}}{\cancel{2}} = 0$

$6b = -3a \cdot \sqrt{3}$

???

Beispiel: Betrachte einen Quader mit vorgegebenem Volumen und bestimme die Seiten a, b und c so, dass eine möglichst kleine Oberfläche entsteht.

Ein Lösungsansatz eines Schülers:

5.2 $\quad V = abc$ gegeben

$$O(a,b,c) = 2ab + 2ac + 2bc \rightarrow \min$$

$$c = \frac{V}{ab}$$

$$O = 2ab + 2\cancel{a}\left(\frac{V}{\cancel{a}b}\right) + 2\cancel{b}\left(\frac{V}{a\cancel{b}}\right) \rightarrow \min$$

$$O'a = 2b - \frac{2V}{a^2} = 0$$

$$O'b = 2a - \frac{2V}{b^2} = 0$$

$$a = \frac{V}{b^2}$$

$$2b - \frac{2V}{\left(\frac{V}{b^2}\right)^2} = 0 \qquad 2b - 2\cancel{V} \cdot \frac{b^4}{V^{\cancel{2}}} = 0$$

$$2b - \frac{2b^4}{V} = 0 \quad | \cdot V$$

$$2bV - 2b^4 = 0 \quad | : 2$$

$$-b^4 + Vb = 0$$

$$-b^4 + Vb = 0 \quad | : b$$

$$-b^3 + V = 0$$

$$b^3 = V$$

$$b = \sqrt[3]{V}$$

$$a = \frac{V}{(\sqrt[3]{V})^2} \quad \Big| \cdot \frac{\sqrt[3]{V}}{\sqrt[3]{V}} \qquad \cancel{a = \frac{V}{(V^{\frac{1}{3}})^2} = \frac{V}{V^{\frac{2}{3}}} =}$$

$$\frac{\cancel{V} \cdot \sqrt[3]{V}}{\cancel{V}} = a$$

$$a = \sqrt[3]{V}$$

$$c = \frac{V}{ab} = \frac{V}{\sqrt[3]{V} \cdot \sqrt[3]{V}} = \frac{\cancel{V} \cdot \sqrt[3]{V}}{\cancel{V}}$$

$$c = \sqrt[3]{V} \qquad O''a = +\frac{4V}{a^3} \rightarrow \min$$

Zu 6 Optimale Form einer Bienenwabe – sechseckige Grundfläche

Es gilt aufzuzeigen, dass jedes reguläre Parkett nur aus gleichseitigen Dreiecken, Quadraten oder regelmäßigen Sechsecken bestehen kann.
An jeder Ecke eines Parkettsteins treffen mindestens drei Parkettsteine zusammen. Die Summe der beieinander liegenden Innenwinkel ist 360°. Für den Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks gilt:

$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$$

Dieser muss Teiler von 360° sein, was nur für $n = 3$, 4 und 6 zutrifft.

Um den minimalen Umfang des Vielecks zu bestimmen, können auch die Ergebnisse aus Aufgabe 1 „Maximale Fläche“ herangezogen werden.

Zu 7 Optimale Form einer Bienenwabe – optimaler Neigungswinkel

Die Schülerinnen und Schüler können auch ein Modell der Bienenwabe aus Papier bauen. Dies fördert die Anschauung und das Verständnis der geometrischen Situation. Eine Bastelanleitung ist beispielsweise zu finden unter:
http://www.friedrich-verlag.de/go/doc/doc_download.cfm?863A9A4813DE4E43ACC8C085D8AD7222

Diese Aufgabe eignet sich lediglich für die oberen Klassenstufen. Zur Bestimmung der minimalen Oberfläche der Bienenwabe ($\alpha = 54{,}7356°$) ist eine Anwendung der Differentialrechnung notwendig. Zudem ist Vorwissen aus der Trigonometrie gefordert.

Methodische Hinweise

Es bietet sich an, die Arbeitsaufträge in Partner- oder Gruppenarbeit zu erledigen. Im Anschluss daran können in der Klasse verschiedene Lösungsansätze miteinander verglichen werden.

Leistungsbewertung

Eine Leistungsbewertung kann sich sowohl auf das Aufstellen der Modelle, die Umsetzung am Computer, die Präsentation der Ergebnisse als auch die zielführende und kreative Arbeitsweise beziehen.

Literatur

Schlieker, V., Weyers, W. (2002): Bienen bauen besser, in: mathematik lehren, Heft 111, Friedrich Verlag
Dietrich, V., Winter, M, Hrsg. (2003): Architektur des Lebens, Mathematische Anwendungen in Biologie, Chemie, Physik, Cornelsen Volk und Wissen Verlag
Steiner, G., Wilharter, J. (2007): Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 3, Reniets Verlag

Optimierungsaufgaben: Welches ist die optimale Form einer Bienenwabe?

In der Natur haben sich im Laufe der Evolution Bauweisen stetig verbessert und sind jetzt nahezu optimal – so auch der Wabenbau der Bienen. Doch was heißt in diesem Zusammenhang optimal?

Bearbeite dazu folgende Fragestellungen:

1 Maximale Fläche

Gegeben ist ein Stück Seil einer bestimmten Länge. Wie kannst du damit eine möglichst große Fläche eingrenzen?
Probiere verschiedene geometrische Figuren aus. Dokumentiere deine Ergebnisse.

Welche ist die geeignetste geometrische Form? Begründe deine Vermutung. Verwende dazu auch Excel oder GeoGebra.

Tipp: Flächenformel für regelmäßige Vielecke: $A = n \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

2 Spezialfall: Rechteck

Wähle ein Rechteck mit gegebenem Umfang. Finde heraus, mit welchen Seitenlängen die Fläche möglichst groß wird. Begründe deinen Lösungsvorschlag.
Gibt es verschiedene Lösungswege?

3 Umgekehrt: Minimaler Umfang

Betrachte ein Rechteck mit gegebener Fläche. Welche Längen müssen die Seiten haben, damit der Umfang möglichst klein wird. Begründe deinen Lösungsvorschlag.

4 Spezialfall: Dreieck

Untersuche ein beliebiges Dreieck mit einem vorgegebenen Umfang. Wie lang müssen die Seiten sein, damit die Fläche möglichst groß wird. Begründe deinen Lösungsvorschlag, indem du die Fläche als Funktion in zwei Variablen betrachtest.

Tipp: Heronsche Flächenformel für das Dreieck: $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, mit $s = \frac{U}{2} = \frac{a+b+c}{2}$

5 Von der Ebene in den Raum

Übertrage die Aufgabenstellungen 2 und 3 auf den dreidimensionalen Raum. Finde auch hierzu entsprechende optimale Lösungen.

6 Optimale Form einer Bienenwabe – sechseckige Grundfläche

Zunächst wird die Thematik in der Ebene betrachtet. Bienenwaben bilden ein reguläres Parkett, d.h. gleiche regelmäßige Vielecke bedecken die Ebene lückenlos. Außerdem ist bei gegebenem Flächeninhalt der Umfang möglichst klein.

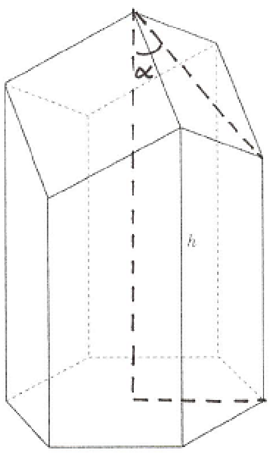
Welche Vielecke kommen für das Bilden eines regulären Parketts in Frage?

Tipp: Formel für den Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks: $\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$

Bei welchem dieser Vielecke ist der Umfang bei gegebenem Flächeninhalt minimal?

Tipp: Nutze das Ergebnis von Aufgabe 1 „Maximale Fläche".

7 Optimale Form einer Bienenwabe – optimaler Neigungswinkel



Die Abbildung nebenan zeigt ein Modell einer Bienenwabe. Du siehst, dass der Deckel kein ebenes Sechseck ist, sondern dass die Wabe durch drei spitz zulaufende Rhomben abgeschlossen wird. Der Biologe D'Arcy Wentworth Thompson hat 1917 in mühevoller Arbeit herausgefunden, dass zum einen die Maße der Waben nur im Mikrometerbereich voneinander abweichen und zum anderen die Oberfläche nur vom Neigungswinkel α der drei Spitzflächen abhängig ist. Er hat dafür sogar eine Formel aufgestellt:

$$O(\alpha) = 6ab + \frac{3a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\right)$$

Dabei ist a die Sechseckseite und b die längere Seitenkante.

Bestimme den Winkel α so, dass eine minimale Oberfläche entsteht.

15 Zufallsexperimente

Den Zufall erforschen

Maximilian Gartner, Walther Unterleitner, Manfred Piok

Thema	Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung
Stoffzusammenhang	Daten und Zufall
Klassenstufe	1. Biennium

Intention

In der Lernumgebung werden verschiedene Zufallsexperimente mit Würfeln und Münzen ausprobiert, sodass die Schülerinnen und Schüler einen Zugang zum elementaren Wahrscheinlichkeitsbegriff bei einfachen und mehrstufigen Experimenten erhalten.
Die Lernenden sollen den Zusammenhang zwischen statistischer und klassischer Wahrscheinlichkeit erkennen, ein Gespür für Auswirkungen der Zufallsschwankungen und den Erwartungswert bekommen.
Insgesamt erstreckt sich die Unterrichtseinheit über ca. sechs Unterrichtsstunden.

Fachlicher Hintergrund

In der Unterrichtseinheit werden folgende Themenbereiche bearbeitet:
- Statistische Wahrscheinlichkeit
- Darstellung und Streuung von Ergebnissen in Zufallsexperimenten
- Gewinnwahrscheinlichkeit und -erwartung
- Computerunterstützte Simulation von Zufallsexperimenten
- Zufallsschwankungen

Methodische Hinweise

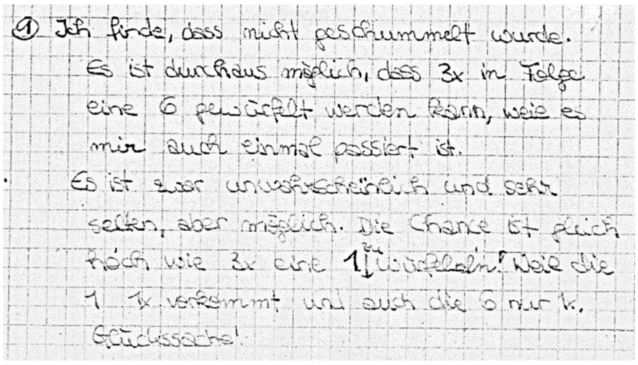
Die Arbeitsaufträge werden in Gruppen von zwei bis drei Personen ausgeführt, wobei die Gruppenergebnisse bei zwei Zufallsexperimenten zu einem Klassenergebnis zusammengetragen werden.

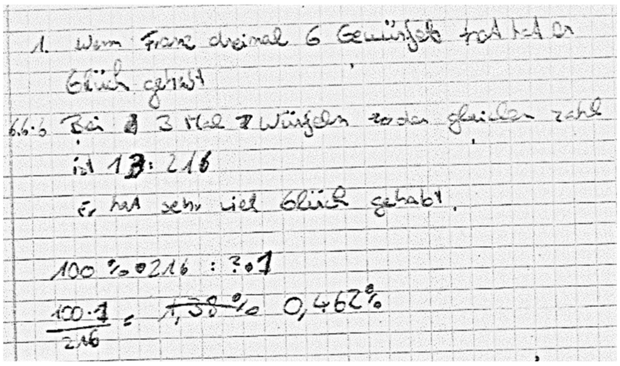
Die benutzten Excel-Tabellen zur Simulation der Zufallsexperimente stehen zum Download bereit unter: www.KeyCoMath.eu
Sie können auch in Kooperation mit der Informatiklehrperson von den Lernenden selbst erstellt werden. Dementsprechend erhöht sich die Dauer der Unterrichtseinheit.

Erfahrungen aus dem Unterricht

Ist der Würfel gezinkt?

Die Schülerinnen und Schüler haben geschlossen erkannt, dass es durchaus möglich sein kann, dass dreimal in Folge eine Sechs gewürfelt wird. Einige argumentieren (mehr oder weniger korrekt) mit numerischen Wahrscheinlichkeiten, andere mit eigenen Erfahrungen oder speziellen Würfeltechniken.


① Ich finde, dass nicht geschummelt wurde.
Es ist durchaus möglich, dass 3x in Folge
eine 6 gewürfelt werden kann, wie es
mir auch einmal passiert ist.
Es ist zwar unwahrscheinlich und sehr
selten, aber möglich. Die Chance ist gleich
hoch wie 3x eine 1 zu würfeln! Weil die
1 1x vorkommt und auch die 6 nur 1x.
Glückssache!


1. Wenn Franz dreimal 6 Gewürfelt hat hat er
Glück gehabt
6·6·6 Bei 3 Mal Würfeln von der gleichen Zahl
ist 1 : 216
Er hat sehr viel Glück gehabt.

100 % : 216 : 1
$\frac{100 \cdot 1}{216}$ = ~~1,38 %~~ 0,462%

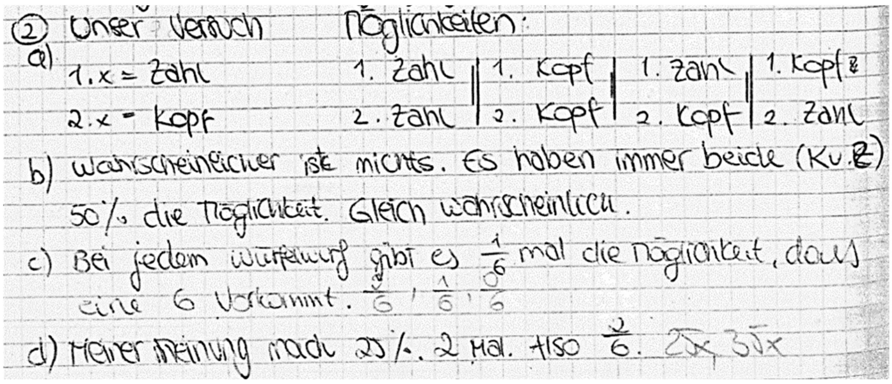
Zweimaliger Wurf

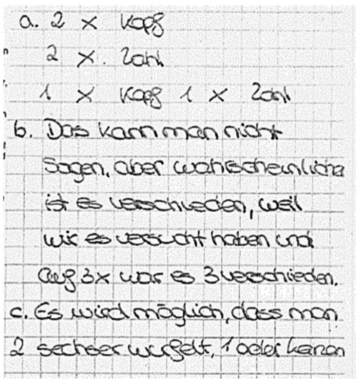
Münze werfen: Den meisten Lernenden gelingt es, die vier Möglichkeiten aufzuschreiben. Trotzdem ist nicht allen klar, dass beide Ereignisse gleich wahrscheinlich sind.

Würfel werfen: Die Argumentationen zum doppelten Wurf sind recht unterschiedlich. Die Erkenntnis, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs beim einmaligen Wurf $\frac{1}{6}$ ist, ist weit verbreitet. Einzelne können diese Überlegung auch auf den zweimaligen Wurf übertragen.

Beim Versuch, eine Schätzung der Anzahl der Doppelsechsen bei 50 Würfen anzugeben, haben viele Schüler Schwierigkeiten, begründete Schätzungen anzugeben. Die Durchführung des Würfelexperiments mit 50 Würfen erfolgt zu Hause. Die zugehörigen Ergebnisse der einzelnen Lernenden werden von der Lehrperson gesammelt und ausgewertet.

Die Lernenden besprechen in Vierer- und Fünfergruppen ihre Prognosen zu den 600 Doppelwürfen. Im Anschluss werden die Ergebnisse präsentiert. Hierbei fällt auf, dass es Gruppen gibt, die ihre Schätzungen auf die relativen Häufigkeiten des Experiments mit 50 Würfen zurückführen und andere sich wiederum bereits auf den Wahrscheinlichkeitsbegriff beziehen.
Die Lehrperson präsentiert die Auswertung der Zusammenfassung. In diesem Zusammenhang werden die Begriffe der empirischen und klassischen Wahrscheinlichkeit definiert.


② Unser Versuch Möglichkeiten:
a) 1.x = Zahl 1. Zahl | 1. Kopf | 1. Zahl | 1. Kopf
2.x = Kopf 2. Zahl | 2. Kopf | 2. Kopf | 2. Zahl
b) Wahrscheinlicher ist nichts. Es haben immer beide (K u. Z)
50 % die Möglichkeit. Gleich wahrscheinlich.
c) Bei jedem Würfelwurf gibt es $\frac{1}{6}$ mal die Möglichkeit, dass
eine 6 vorkommt. $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{0}{6}$
d) Meiner Meinung nach 25 %. 2 Mal. Also $\frac{2}{6}$. 25x, 35x


a. 2 x Kopf
2 x Zahl
1 x Kopf 1 x Zahl
b. Das kann man nicht
Sagen, aber wahrscheinlich
ist es verschieden, weil
wir es versucht haben und
auf 3x war es 3 verschieden.
c. Es wird möglich, dass man
2 sechser würfelt, 1 oder keinen

Würfelspiel mit zwei Würfeln

Die Frage nach einem fairen Spiel wird sehr unterschiedlich beantwortet.

a) Für mich ist ein „faires Spiel", wenn die Chance zu gewinnen nicht zu klein ist und wenn die Gewinnsumme angemessen ist.

a) fair sein ist entsprechend wenn man Fair spielen wird macht keine Verlust und keine Gewinn also z.b. spielt man 2 Spielen Also wollat nicht gewonnen also 10€ zeit Fax werden

Die Überlegungen, ob es sich bei diesem Spiel um ein faires oder unfaires Spiel handelt, wurden hauptsächlich empirisch behandelt.

b) Anzahl der Versuche	Gewinn (2x6)		Verlust (1x6 – 0x6; 0x6 – 0x6)	
	1. Spiel	2. Spiel	1. Spiel	2. Spiel
1			X	X
2			X	X
3			X	X
4			X	X
5			X	X
6			X	X
7			X	X
8			X	X
9			X	X
10			X	X
11			X	X
12			X	X
13			X	X
14			X	X
15			X	X
16			X	X
17			X	X
18			X	X
19			X	X
20		X	X	

1. Spiel: Wir hatten 20€ Verlust!
2. Spiel: Wir hatten 10€ Verlust! 20 x 1 € gegeben
10€ x 1 gewonnen

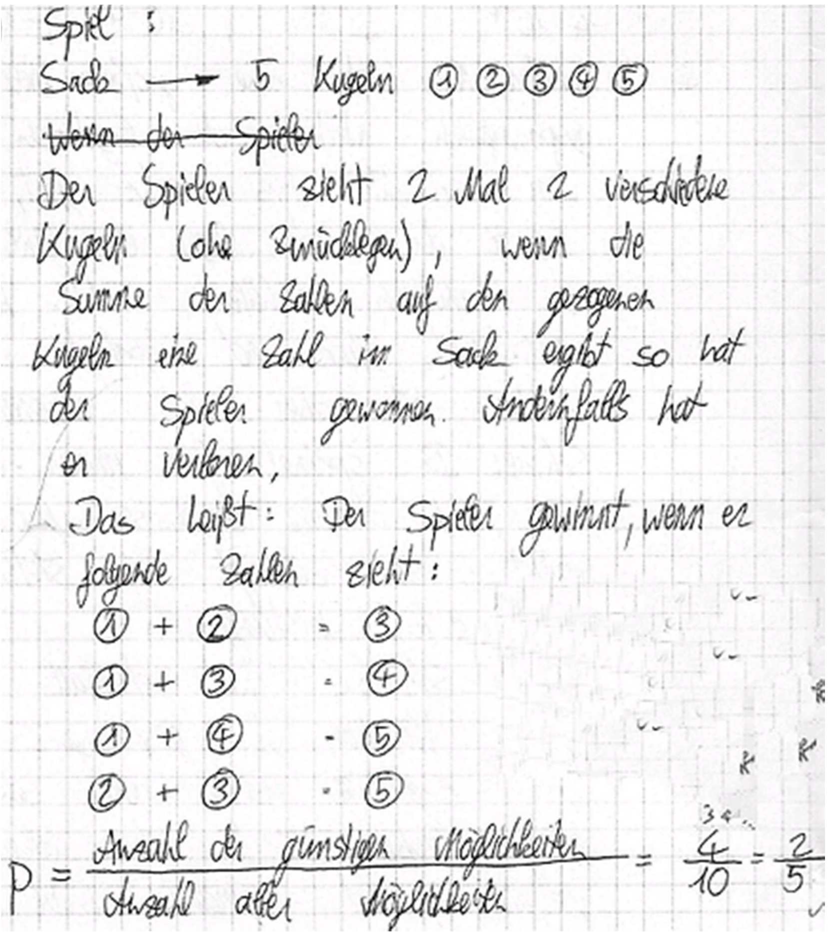
Man müsste bei 20 Spielen 2 x Doppel 6 würfeln um keinen Verlust zu machen. Das ist sehr unwahrscheinlich!

Das Spiel ist unfair, denn die Wahrscheinlichkeit, dass man 2 mal eine 6 ~~...~~ würfelt ist ziemlich klein. ~~...~~ ~~Wenn~~ Bei 36 Spielen ist die Wahrscheinlichkeit, dass man eine doppelte 6 würfelt gleich 1. Man macht Verlust von insg. 26€, da man ein mal 10€ gewinnt. Da man bei jedem Wurf 1€ setzen muss und nur bei einer doppelten 6, 10€ gewinnt ist das Spiel sehr unfair

ANNA		Denis		Romina	
Verlust	Gewinn	Verlust	Gewinn	Verlust	Gewinn
卌 ||||	|	卌 卌		卌 ||||	|

Entwicklung von Spielvarianten

Die Ergebnisse waren sowohl in ihrer Vollständigkeit als auch in ihrer Komplexität recht unterschiedlich.



Spiel:
Sack → 5 Kugeln ① ② ③ ④ ⑤
~~Wenn der Spieler~~
Der Spieler zieht 2 Mal 2 verschiedene Kugeln (ohne Zurücklegen), wenn die Summe der Zahlen auf den gezogenen Kugeln eine Zahl im Sack ergibt so hat der Spieler gewonnen. Andernfalls hat er verloren.
Das heißt: Der Spieler gewinnt, wenn er folgende Zahlen zieht:
① + ② = ③
① + ③ = ④
① + ④ = ⑤
② + ③ = ⑤

$$P = \frac{\text{Anzahl der günstigen Möglichkeiten}}{\text{Anzahl aller Möglichkeiten}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Leistungsbewertung

Die erstellte Lernunterlage darf bei der dazugehörigen Leistungserhebung verwendet werden und wird mit der Arbeit gemeinsam abgegeben.

Zufallsexperimente

1 Ist der Würfel gezinkt?

Beim „Mensch ärgere Dich nicht“ hat Franz dreimal in Folge eine 6 gewürfelt. Peter ärgert sich und behauptet, Franz hätte einen gezinkten Würfel verwendet.
Was hältst du davon? Begründe deine Aussagen.

2 Zweimaliger Wurf

Münze werfen

Eine Münze wird zweimal geworfen. Es wird notiert, welche Seite oben liegt. Versuche alle möglichen Ergebnisse übersichtlich darzustellen.
Welches Ergebnis ist deiner Meinung nach wahrscheinlicher: zweimal dieselbe Seite oder zwei verschiedene Seiten? Begründe.

Würfel werfen

Ein Würfel wird zweimal hintereinander geworfen. Wie schätzt du die Chancen ein, eine bestimmte Anzahl Sechser zu würfeln. Begründe.

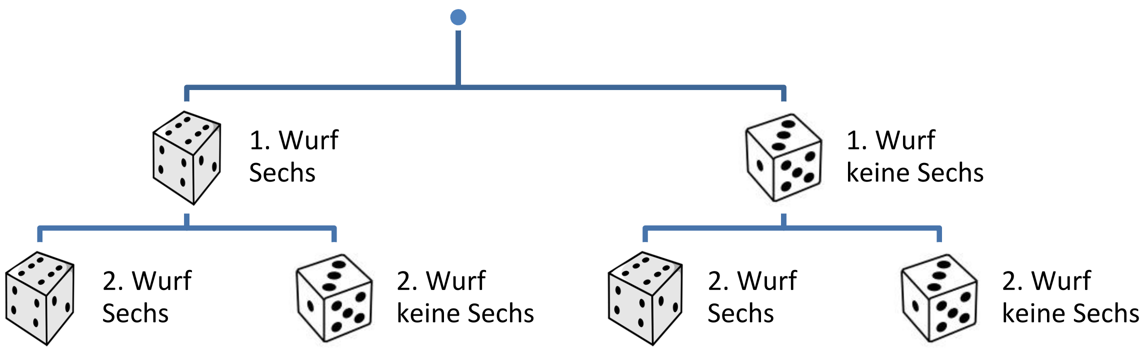
Führe das Experiment mit den zwei Würfen 50 Mal durch und melde deine Ergebnisse deiner Lehrperson, die alle Ergebnisse sammelt.
Hat sich deine Einschätzung geändert oder wurde sie bestätigt?

Das Würfel-Experiment mit den zwei Würfen wird 600 Mal durchgeführt. Schätze, wie oft die folgenden Ereignisse eintreten:

A: Beim ersten Wurf kommt eine 6.
B: Beim ersten Wurf kommt keine 6.
C: Beim zweiten Wurf kommt eine 6.
D: Beim ersten und zweiten Wurf kommt eine 6.
E: Es wird mindestens eine 6 gewürfelt.

Überlege dir mindestens drei weitere Ereignisse und gib für diese ebenfalls eine Schätzung an.

Übertrage das unten stehende Baumdiagramm ins Heft und beschrifte die verschiedenen Ereignisse mit den theoretischen, relativen Häufigkeiten.



Legostein werfen

Ein quadratischer Legostein wird einmal geworfen. Gib die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse an:

A: Der Stein liegt auf der Grundfläche.
B: Der Stein liegt auf einer Seitenfläche.
C: Der Stein liegt auf der Seite mit den Noppen.

Begründe deine Antworten.

3 Würfelsummen – Simulation mit Excel

Zwei Würfel werden geworfen.

Welche Würfelsummen (Summe der beiden Augenzahlen) sind möglich und welche der Summen kommen deiner Meinung nach mit einer hohen und welche mit einer niedrigen Wahrscheinlichkeit vor? Begründe deine Aussage.

Gib jeweils eine Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der verschiedenen Würfelsummen an.

Du kannst ein solches Experiment auch mit Excel simulieren. Öffne die Datei „Zwei_Wuerfel.xls“. Mit „F9“ kannst du 500 Mal zwei Würfel werfen. Führe das Experiment 30 Mal durch, sodass du insgesamt 15000 Würfe hast. Vergleiche das Ergebnis mit deiner Schätzung. Was stellst du fest?

4 Würfelspiel mit zwei Würfeln

Gespielt wird gegen eine Spielbank:

- Einsatz: 1 €
- Ein Würfel wird zweimal hintereinander geworfen. Erscheint beides Mal eine 6, dann werden dem Spieler 10 € ausgezahlt.

Überlege dir, ob es sich um ein faires Spiel handelt. Diskutiere zunächst mit deinem Banknachbarn bzw. deiner Banknachbarin, was unter einem „fairen Spiel“ zu verstehen ist.

Spiele mit deinem Banknachbarn bzw. deiner Banknachbarin das Spiel 20 Mal, notiere die Würfe und den Gewinn.

Tragt alle Ergebnisse der Klasse zusammen und berechnet den mittleren Gewinn pro Spiel.

5 Entwicklung von Spielvarianten

Ändere das Spiel aus Aufgabe 4 ab.

Mögliche Änderungen:

- Einsatz und Gewinnbetrag
- Bedingung für den Gewinn (oben: zweimal eine 6)
- Statt zu würfeln wird eine Münze geworfen.
- Anzahl der Würfe

Gib bei deiner Lehrperson zwei deiner entwickelten Spiele mit entsprechender Analyse der Gewinnsituation ab.

6 Dreimal 6 – Simulation mit Excel

Hat sich deine Einschätzung zur Problemstellung 1 geändert oder wurde sie bestätigt? Begründe.

Öffne die Datei „Drei_Wuerfel.xls“ und simuliere damit die unter 1 geschilderte Situation mit Excel. Wie oft tritt der Fall bei einer Simulation von 10000 Mal Würfeln ein? Was bedeutet das für deine Antwort?

16 Vorgeschmack auf schließende Statistik

Erwartungswerte und zufällige Schwankungen erkunden

Manfred Piok

Thema	Einstieg in die schließende Statistik
Stoffzusammenhang	Daten und Zufall
Klassenstufe	1. Biennium

Intention

Ausgehend von einem Zufallsexperiment mit $p = 0{,}5$ wird ein erster Eindruck eines Vertrauensintervalls gegeben.
Die Lernenden sollen den Zusammenhang zwischen statistischer und klassischer Wahrscheinlichkeit erkennen, ein Gespür für Auswirkungen der Zufallsschwankungen und für den Erwartungswert bekommen.

Fachlicher Hintergrund

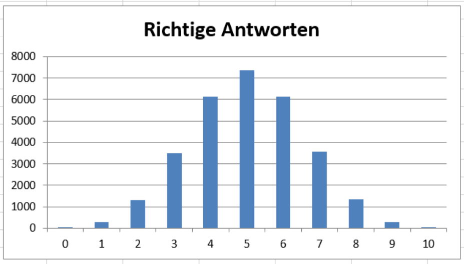
Die Lernenden erkunden Zufallsschwankungen und Konfidenzintervalle. In Aufgabe 1 bereiten einfache Rückschlüsse von einer Testsituation auf eine allgemeine Situation den Begriff der Konfidenzintervalle für $p = 0{,}5$ vor.

Methodische Hinweise

Die Arbeitsaufträge werden in Gruppen von zwei bis drei Personen ausgeführt, wobei die Gruppenergebnisse bei einem Zufallsexperiment zu einem Klassenergebnis zusammengetragen werden.

Die in Aufgabe 1 erwähnte Excel-Tabelle steht zum Download bereit unter: www.KeyCoMath.eu

Aufgabennummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			Anzahl Richtige
falsch (0) oder richtig (1)	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0			3
Anzahl Richtige	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		Anzahl Iterationen
Absolute Häufigkeit	31	281	1315	3515	6123	7376	6138	3560	1348	294	19		30000
Relative Häufigkeit	0,10%	0,94%	4,38%	11,72%	20,41%	24,59%	20,46%	11,87%	4,49%	0,98%	0,06%		



Vorgeschmack auf schließende Statistik

1 Multiple-Choice-Test – Simulation mit Excel

a) Eine Prüfung besteht aus fünf Multiple-Choice-Fragen mit jeweils zwei Antwortmöglichkeiten, wobei eine der beiden richtig und die andere falsch ist.
Peter ist absolut unvorbereitet und kreuzt eine richtige und vier falsche Antworten an. War mit diesem Ergebnis zu rechnen? Begründe. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es überhaupt?

b) Versuche, ein Zufallsexperiment zu entwickeln, mit der sich diese Situation simulieren lässt, und spiele es durch.

c) Mit wie vielen richtigen Antworten, die zufällig ausgewählt werden, ist deiner Meinung nach am ehesten zu rechnen, wenn der Test 10, 20, 50 bzw. n Fragen enthält? Gib eine Begründung an.

d) Überprüfe dies durch eine Simulation mit Excel (Test mit zehn Fragen). Hierbei wird ein Test simuliert, der zehn Fragen enthält, wobei du diesen mit der Funktionstaste „F9" jeweils 500 Mal durchführen kannst.
In der zweiten Zeile der oberen Tabelle sind die Lösungen der einzelnen Aufgaben angegeben: 1 bedeutet richtig, 0 bedeutet falsch.

e) Ab wie vielen richtigen Antworten sollte deiner Meinung nach der Test als bestanden gelten, um schlecht vorbereitete Lernende möglichst nicht zu belohnen? Gib eine Begründung an.

f) Welchen Anteil der Unvorbereiteten schließt man jeweils aus, wenn der Test ab 6, 7, 8 bzw. 9 richtigen Antworten als bestanden gilt?

2 n-facher Münzwurf als Modell für Zufallsexperimente

Viele Zufallsexperimente lassen sich durch einen n-fachen Münzwurf modellieren. Bei jedem Wurf ist die Wahrscheinlichkeit für den Erfolg gleich $\frac{1}{2}$.
Die mittlere Anzahl der erwarteten Erfolge bei häufiger Wiederholung des n-fachen Münzwurfs ist gleich $\frac{1}{2}n$.

Bei realen Durchführungen schwanken die Werte für die Anzahl der Erfolge zufällig um den Erwartungswert. Kleine Abweichungen kommen relativ häufig vor, große Abweichungen sind selten. Aus vielen Simulationen und theoretischen Überlegungen gewinnt man nützliche Regeln für den Schwankungsbereich:
Bei etwa 68 % der Durchführungen liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall $[\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\sqrt{n}; \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\sqrt{n}]$.
Bei etwa 95 % der Durchführungen eines n-fachen Münzwurfs liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall $[\frac{1}{2}n - \sqrt{n}; \frac{1}{2}n + \sqrt{n}]$.

a) Versuche, diese Aussagen durch die Ergebnisse von Aufgabe 1 zu bestätigen.

b) Wähle in einem Multiple-Choice-Test eine andere Anzahl von Aufgaben und überlege, mit wie vielen richtig beantworteten Aufgaben der Test als bestanden gelten soll.

3 Testen und entscheiden

Ein Zoologe untersucht, ob es bei Kröten – ebenso wie bei Menschen – Rechts- oder Linkshänder gibt. Dazu legt er ihr ein Objekt auf den Kopf und notiert, mit welcher „Hand“ sie es zu entfernen versucht.

a) Von 20 Versuchen wurden sieben Mal die linke und 13 Mal die rechte „Hand“ benutzt. Ist das außergewöhnlich?

b) Überlege dir ein anderes entsprechendes Experiment und beschreibe die Durchführung und die Auswertung.

Online-Materialien

Alle in diesem Buch abgedruckten Arbeitsmaterialien sowie zusätzliche Dateien sind in elektronischer Fassung erhältlich unter:

www.KeyCoMath.eu

und

www.bildung.suedtirol.it/mathematik

ISBN 978-3-00-045898-9

Design des Buchumschlages: Carsten Miller
Foto auf dem Buchumschlag: © Maksim Šmeljov – Fotolia.com
Lektorat: Carolin Götz

Developing by Key Competences Mathematics Education

Lifelong Learning Programme

Dieses Buch wurde im Zuge des Projekts "Developing Key Competences by Mathematics Education" im Rahmen des "Lifelong Learning Programme" mit Unterstützung der Europäischen Kommission finanziert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung trägt allein der Verfasser; die Europäische Kommission haftet nicht für die weitere Verwendung der darin enthaltenen Angaben.

Kernstück eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts bilden ansprechende und sinnvolle Aufgabenstellungen. Ausgehend von den in Südtirol geltenden Rahmenrichtlinien haben Lehrerteams Aufgaben für den eigenen Unterricht entwickelt und erprobt. Im Rahmen von Fortbildungsveranstaltungen wurden gemeinsam Erfahrungen – auch bezüglich der Leistungsbewertung – ausgetauscht, die Aufgabenstellungen optimiert und Vernetzungen mit anderen Themenbereichen sichtbar gemacht.

Im vorliegenden Buch sind sechzehn ausgewählte Unterrichtsbeispiele, teils samt Schülerlösungen, zusammengestellt. Sie sollen zum einen Ideen für einen interessanten und nachhaltigen Mathematikunterricht liefern, zum anderen zu einer ähnlichen Arbeitsweise bei der Entwicklung von Aufgabenstellungen anregen und dadurch die Weiterentwicklung des eigenen Unterrichts unterstützen.

www.KeyCoMath.eu

ISBN 978-3-00-045898-9

Mit Unterstützung durch das „Lifelong Learning Programme“ der Europäischen Union

Lifelong Learning Programme

UNIVERSITÄT BAYREUTH