

Grundwissen Mathematik am bayerischen Gymnasium (G8)

Richard Reindl

2004–2009

Das Grundwissen ist zweispaltig dargestellt, links die Definitionen, Sätze und Beweise, rechts Abbildungen und Beispiele.

Es handelt sich nicht nur um einen Grundwissenskatalog, sondern um eine kompakte Darstellung des Stoffes mit den notwendigen Herleitungen und Beweisen. Daher eignet sich der Text zur Wiederholung und zum Selbststudium des Stoffes.

Die Auswahl des Stoffes beruht auf meinem Unterricht und den von mir gesetzten Schwerpunkten, ist also nicht unbedingt eine 1:1-Umsetzung des Lehrplans. Es wird auch kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben.

Die von mir gesetzten Schwerpunktkapitel sind mit einem * gekennzeichnet.

Grundwissen Mathematik – Jahrgangsstufe 5

Zahlen

Definitionen und Regeln	Beispiele
<p>Zahlenmengen*</p> <p>Eine Zusammenfassung von Zahlen nennt man eine <i>Zahlenmenge</i>. Die Elemente einer Menge müssen verschieden sein.</p> <p>x ist ein Element von A: $x \in A$ x ist kein Element von A: $x \notin A$</p> <p>Die Menge $\emptyset = \{ \}$, die kein Element enthält, heißt <i>leere Menge</i>.</p> <p>Die Anzahl der Elemente einer Menge nennt man ihre <i>Mächtigkeit</i>. $A =$ Zahl der Elemente von A</p> <p>Ist jedes Element von A auch ein Element von B, dann ist A in B enthalten oder A ist eine <i>Teilmenge</i> von B:</p> $A \subset B$ <p>Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst:</p> $A \subset A$ <p>Mengen kann man durch bestimmte Eigenschaften der Elemente angeben:</p> $\{x \mid \text{Eigenschaft}\} = \text{Menge aller Zahlen } x \text{ mit der Eigenschaft}$ <p>Alle Elemente, die gleichzeitig in zwei Mengen vorkommen, bilden ihre <i>Durchschnittsmenge</i>:</p> $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$ <p>Eine Zahl gehört zur <i>Vereinigungsmenge</i> von A und B, wenn sie entweder Element von A oder Element von B oder Element von beiden Mengen ist:</p> $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$ <p>A ohne B:</p> $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$ <p>\mathbb{N} = Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ \mathbb{Z} = Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}^- =$ Menge der negativen ganzen Zahlen</p>	<p>$A = \{2, 5, 7, 8, 9\}$ $\{2, 2, 2, 3, 4, 4\} = \{2, 3, 4\}$ $5 \in A$ $1 \notin A$ $\{ \}$ oder \emptyset $\{2, 4, 5, 6\} = 4$ $\{ \} = 0, \quad \{0\} = 1$ $\{5, 8, 9\} \subset \{2, 5, 7, 8, 9\}$ Die leere Menge ist Teilmenge von jeder Menge: $\{ \} \subset A$ bzw. $\emptyset \subset A$ (A beliebige Menge)</p> <p>$\{x \mid x \text{ gerade und } 3 \leq x < 10\} = \{4, 6, 8\}$ $\{x \mid x \text{ durch } 3 \text{ teilbar und } 3 \leq x < 18\} = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ durch } 3 \text{ und durch } 5 \text{ teilbar}\} = \{15, 30, 45, \dots\}$ $\{1, 2, 5, 6, 8, 9\} \cap \{2, 4, 6, 7, 9\} = \{2, 6, 9\}$ $\{1, 3, 5, 7\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \{ \}$ $A \cap \{ \} = \{ \}$ bzw. $A \cap \emptyset = \emptyset$ $\{1, 2, 5\} \cup \{3, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\{1, 2, 5, 6\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ $A \cup \{ \} = A$ bzw. $A \cup \emptyset = A$ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{2, 4, 6\} = \{1, 3, 5, 7\}$ $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{3, 5, 7\}$ $A \setminus \{ \} = A$ bzw. $A \setminus \emptyset = A$ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ $\mathbb{Z}^- = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$</p>

Definitionen und Regeln	Beispiele
<p>Grundrechenarten</p> <p>Addition, addieren:</p> <p>1. Summand + 2. Summand = Wert der Summe</p>	$\underbrace{3 + 5}_{\text{Summe}} = \underbrace{8}_{\text{Wert der Summe}}$ <p>3 plus 5 gleich 8</p>
<p>Subtraktion, subtrahieren:</p> <p>Minuend – Subtrahend = Wert der Differenz</p>	$\underbrace{8 - 3}_{\text{Differenz}} = \underbrace{5}_{\text{Wert der Differenz}}$ <p>8 minus 3 gleich 5</p>
<p>Multiplikation, multiplizieren:</p> <p>1. Faktor · 2. Faktor = Wert des Produkts</p> $a \cdot b = \underbrace{b + b + \dots + b}_{a \text{ Summanden}}$	$\underbrace{3 \cdot 5}_{\text{Produkt}} = \underbrace{15}_{\text{Wert des Produkts}}$ <p>3 mal 5 gleich 15</p> $3 \cdot 5 = 5 + 5 + 5$
<p>Division, dividieren:</p> <p>Dividend : Divisor = Wert des Quotienten</p> <p>Teilung: Aufteilen in gleiche Teile</p> <p>Messung: Wie oft enthalten</p>	$\underbrace{15 : 3}_{\text{Quotient}} = \underbrace{5}_{\text{Wert des Quotienten}}$ <p>15 dividiert durch 3 gleich 5</p> $24 \text{ m} : 3 = 8 \text{ m}$ $24 \text{ m} : 3 \text{ m} = 8$
<p>Potenz, potenzieren:</p> <p>Basis^{Exponent} = Wert der Potenz</p> $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$ <p>Definition: $a^0 = 1$ für $a > 0$</p> $a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad 0^n = 0 \quad 1^n = 1$ <p>$a^2 = a \cdot a$ heißt auch „a Quadrat“.</p> <p>Quadratzahlen von 0^2 bis 20^2, zusätzlich 25^2 auswendig!</p> <p>Zweierpotenzen von 2^0 bis 2^{10} auswendig!</p> <p>Zehnerpotenzen:</p> $10^n = 1 \text{ mit } n \text{ Nullen}$ <p>$10^6 = \text{Million}$</p> <p>$10^9 = \text{Milliarde}$</p> <p>$10^{12} = \text{Billion}$</p> <p>$10^{15} = \text{Billiarde}$</p> <p>Jede Zahl des <i>Dezimalsystems</i> (Zehnersystems) kann als Summe von Zehnerpotenzen geschrieben werden.</p>	$\underbrace{3^5}_{\text{Potenz}} = \underbrace{243}_{\text{Wert der Potenz}}$ <p>3 hoch 5 gleich 243</p> $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ <p>$2^0 = 1, 7^0 = 1, 0^0$ nicht definiert</p> $9^0 = 1, \quad 6^1 = 6, \quad 0^7 = 0 \quad 1^8 = 1$ <p>$0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16, 5^2 = 25,$ $6^2 = 36, 7^2 = 49, 8^2 = 64, 9^2 = 81, 10^2 = 100,$ $11^2 = 121, 12^2 = 144, 13^2 = 169, 14^2 = 196,$ $15^2 = 225, 16^2 = 256, 17^2 = 289, 18^2 = 324,$ $19^2 = 361, 20^2 = 400, 25^2 = 625$</p> <p>$2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32,$ $2^6 = 64, 2^7 = 128, 2^8 = 256, 2^9 = 512, 2^{10} = 1024$</p> <p>$10^0 = 1, \quad 10^1 = 10, \quad 10^2 = 100$ $10^3 = 1000, \quad 7 \cdot 10^5 = 700\,000$</p> <p>$10^{18} = \text{Trillion}$</p> <p>$10^{24} = \text{Quadrillion}$</p> <p>$10^{30} = \text{Quintillion}$</p> <p>$10^{36} = \text{Sextillion}$</p> <p>$68047 = 6 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$</p>

Definitionen und Regeln

Rechenregeln

Reihenfolge einer Rechnung:

Klammer – Potenz – Punkt – Strich

Klammern von innen nach außen!

$$\begin{array}{l} a + 0 = a \quad a - 0 = a \quad a \cdot 1 = a \quad a : 1 = a \\ a - a = 0 \quad a : a = 1 \quad a \cdot 0 = 0 \quad 0 : a = 0 \end{array}$$

$a : 0$ und $0 : 0$ sind nicht definiert!!

$$a + b = b + a \quad a \cdot b = b \cdot a$$

(Kommutativgesetze, KG)

$$\begin{array}{l} a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) \\ a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \end{array}$$

(Assoziativgesetze, AG)

$$\begin{array}{l} a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c \end{array}$$

(Distributivgesetze, DG)

$$\begin{array}{l} x + a = b \Rightarrow x = b - a \quad | \quad x \cdot a = b \Rightarrow x = b : a \\ x - a = b \Rightarrow x = b + a \quad | \quad x : a = b \Rightarrow x = b \cdot a \end{array}$$

Der kleine Gauß:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n \cdot (n + 1) : 2$$

Beispiele

$$\begin{aligned} 28 - 3 \cdot (7 - 5)^3 &= 28 - 3 \cdot 2^3 = \\ &= 28 - 3 \cdot 8 = 28 - 24 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(15 - 8) \cdot 2 - 2 \cdot 4]^3 &= [7 \cdot 2 - 2 \cdot 4]^3 = \\ &= [14 - 8]^3 = 6^3 = 216 \end{aligned}$$

$$7 + 0 = 7 - 0 = 7, \quad 7 \cdot 1 = 7 : 1 = 7$$

$$7 - 7 = 0 \cdot 7 = 0 : 7 = 0, \quad 7 : 7 = 1$$

$$3 + 7 = 7 + 3 = 10, \quad 3 \cdot 7 = 7 \cdot 3 = 21$$

$$2 + 5 + 7 = \underbrace{(2 + 5)}_7 + 7 = 2 + \underbrace{(5 + 7)}_{12} = 14$$

$$8 \cdot (7 + 3) = 8 \cdot 10 = 80 \text{ oder}$$

$$8 \cdot (7 + 3) = 8 \cdot 7 + 8 \cdot 3 = 56 + 24 = 80$$

$$\begin{aligned} 7 \cdot 998 &= 7 \cdot (1000 - 2) = 7 \cdot 1000 - 7 \cdot 2 = \\ &= 7000 - 14 = 6986 \end{aligned}$$

$$x + 8 = 15 \Rightarrow x = 15 - 8 = 7$$

$$x - 8 = 15 \Rightarrow x = 15 + 8 = 23$$

$$x \cdot 8 = 72 \Rightarrow x = 72 : 8 = 9$$

$$x : 8 = 7 \Rightarrow x = 7 \cdot 8 = 56$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = 100 \cdot 101 : 2 = 5050$$

Teilbarkeit

Die *Vielfachenmenge* einer Zahl a ist die Menge aller Vielfachen von a .

$$V(a) = \{x \mid x = n \cdot a \text{ mit } n \in \mathbb{N}\}$$

a ist Teiler von b , wenn b ein Vielfaches von a ist.

$$a \mid b \iff b = n \cdot a \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$

$$a \mid b \text{ und } a \mid c \implies a \mid (b + c) \text{ und } a \mid (b - c)$$

$$a \mid b \text{ und } b \mid c \implies a \mid c$$

Für jede natürliche Zahl a gilt $1 \mid a$ und $a \mid a$.

Die *Teilmengen* einer Zahl a ist die Menge aller Teiler von a .

$$T(a) = \{x \mid x \mid a\} = \{x \mid x \text{ Teiler von } a\}$$

$$\text{Für } a \geq 2 \text{ ist } |T(a)| \geq 2$$

$$|T(a)| \text{ ist ungerade} \iff a \text{ ist Quadratzahl}$$

Teilung mit Rest:

$$d : s = e R r \iff d = s \cdot e + r \text{ mit } r < s$$

$$V(6) = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$$

$$V(2) = \text{Menge der geraden Zahlen}$$

$$7 \mid 35 \text{ weil } 35 = 5 \cdot 7$$

$$9 \mid 99 \text{ und } 9 \mid 27 \implies 9 \mid (99 + 27) = 126$$

$$12 \mid 60 \text{ und } 60 \mid 180 \implies 12 \mid 180$$

$$T(6) = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$T(48) = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 6 & \\ 48, & 24, & 16, & 12, & 8 & \end{array} \right\}$$

$$T(36) = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 6 & \\ 36, & 18, & 12, & 9 & & \end{array} \right\}$$

$$|T(6)| = 4, |T(48)| = 10, |T(36)| = 9$$

$$30 : 7 = 4 R 2, \text{ weil } 30 = 7 \cdot 4 + 2$$

Definitionen und Regeln	Beispiele
<p>Teilbarkeitsregeln</p> <p>x ist durch 2 teilbar, wenn die letzte Ziffer von x durch 2 teilbar oder 0 ist.</p> <p>x ist durch 4 teilbar, wenn die aus den letzten beiden Ziffern von x gebildete Zahl durch 4 teilbar oder 00 ist.</p> <p>x ist durch 5 teilbar, wenn die letzte Ziffer von x 5 oder 0 ist.</p> <p>x ist durch 25 teilbar, wenn die letzten beiden Ziffern von x 00, 25, 50 oder 75 sind.</p> <p>Die <i>Quersumme</i> (QS) einer Zahl ist die Summe ihrer Ziffern.</p> <p>Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.</p> <p>Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.</p>	<p>$2 \mid 1378$, da $2 \mid 8$, $2 \nmid 4441$, da $2 \nmid 1$</p> <p>$2 \mid 13330$</p> <p>$4 \mid 1324$, da $4 \mid 24$, $4 \nmid 4442$, da $4 \nmid 42$</p> <p>$4 \mid 13300$</p> <p>$5 \mid 1375$, $5 \mid 9970$, $5 \nmid 5058$</p> <p>$25 \mid 1375$, $25 \mid 9900$, $25 \nmid 5055$</p> <p>$QS(73024) = 7 + 3 + 0 + 2 + 4 = 16$</p> <p>$3 \mid 1377$ weil $QS(1377) = 18$ und $3 \mid 18$</p> <p>$3 \nmid 505$ weil $QS(505) = 10$ und $3 \nmid 10$</p> <p>$9 \mid 5877$ weil $QS(5877) = 27$ und $9 \mid 27$</p> <p>$9 \nmid 987$ weil $QS(987) = 24$ und $9 \nmid 24$</p>
<p>Primzahlen</p> <p>Eine natürliche Zahl heißt <i>Primzahl</i> oder kurz <i>prim</i>, wenn ihre Teilmengen genau zwei Elemente enthält, d.h. wenn sie nur durch eins und sich selbst ohne Rest teilbar ist.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $x \text{ prim} \iff T(x) = 2$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> Es gibt unendlich viele Primzahlen. </div> <p>Jede natürliche Zahl größer als eins lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen schreiben (<i>Primfaktorenzerlegung</i>).</p> <p>Menge der gemeinsamen Teiler von a und b:</p> $T(a, b) = T(a) \cap T(b)$ <p>Das größte Element von $T(a, b)$ ist der <i>größte gemeinsame Teiler</i> (ggT) von a und b.</p> <p>Praktisch findet man den $ggT(a, b)$ mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung von a und b oder mit der <i>Kettendivision</i>:</p> <p>Man teilt die größere durch die kleinere Zahl. Man teilt immer wieder den Divisor durch den Rest, bis der Rest null herauskommt. Der letzte Divisor ist der gesuchte ggT.</p> <p>Menge der gemeinsamen Vielfachen von a und b:</p> $V(a, b) = V(a) \cap V(b)$ <p>Das kleinste Element von $V(a, b)$ ist das <i>kleinste gemeinsame Vielfache</i> (kgV) von a und b.</p>	<p>$T(7) = \{1, 7\} \implies 7$ ist prim</p> <p>$T(87) = \{1, 3, 29, 87\} \implies 87$ ist nicht prim</p> <p>Menge der Primzahlen:</p> <p>$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, \dots\}$</p> <p>$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$, $51 = 3 \cdot 17$</p> <p>$81 = 3^4$, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$</p> <p>$2102100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$</p> <p>$T(12, 18) = \left\{ \begin{matrix} 1, & 2, & 3 \\ 12, & 6, & 4 \end{matrix} \right\} \cap \left\{ \begin{matrix} 1, & 2, & 3 \\ 18, & 9, & 6 \end{matrix} \right\} =$ $= \{1, 2, 3, \boxed{6}\} \implies ggT(12, 18) = 6$</p> <p>$\left. \begin{matrix} 36 = \boxed{2} \cdot 2 \cdot \boxed{3 \cdot 3} \\ 54 = \boxed{2} \cdot 3 \cdot \boxed{3 \cdot 3} \end{matrix} \right\} ggT(36, 54) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$</p> <p>$126 : 70 = 1 \text{ R } 56$ $70 : 56 = 1 \text{ R } 14$ $56 : \boxed{14} = 4 \text{ R } \boxed{0} \implies ggT(126, 70) = 14$</p> <p>$V(6, 8) = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, \dots\} \cap$ $\cap \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, \dots\} = \{24, 48, \dots\}$ $\implies kgV(6, 8) = 24$</p>

Definitionen und Regeln

Praktisch findet man das $\text{kgV}(a, b)$ mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung von a und b oder mit folgendem Zusammenhang, wobei man den $\text{ggT}(a, b)$ mit der Kettendivision ermittelt:

$$\text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b) = a \cdot b$$

Beispiele

$$\left. \begin{array}{l} 36 = \boxed{2 \cdot 2} \cdot 3 \cdot 3 \\ 54 = 2 \cdot \boxed{3 \cdot 3 \cdot 3} \end{array} \right\} \text{kgV}(36, 54) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3}_{108}$$

$$\text{kgV}(36, 54) = \underbrace{36 \cdot 54}_{1944} : \underbrace{\text{ggT}(36, 54)}_{18} = 108$$

Ganze Zahlen

Die *Spiegelzahl* von a ist $-a$, die Spiegelzahl von $-a$ ist a : $-(-a) = a$.

$$a > 0 \implies -a < 0 \quad a < 0 \implies -a > 0$$

$b < a$, wenn b auf der Zahlengeraden links von a .

Der *Betrag* einer Zahl ist ihr Abstand vom Nullpunkt auf der Zahlengeraden:

$$|a| = \begin{cases} +a & \text{wenn } a \geq 0 \\ -a & \text{wenn } a < 0 \end{cases}$$

$$|a| = |-a| \quad |a| \geq 0$$

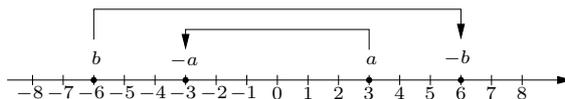
Rechenregeln für ganze Zahlen:

$$\begin{array}{ll} +(+a) = +a = a & +(-a) = -a \\ -(-a) = +a = a & -(+a) = -a \\ a - b = -(b - a) & \\ -a - b = -(a + b) & \\ a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b) & \\ (-a) \cdot (-b) = a \cdot b & \\ a : (-b) = (-a) : b = -(a : b) & \\ (-a) : (-b) = a : b & \end{array}$$

Kommutativgesetz
Assoziativgesetz
Distributivgesetz

$$(-1)^1 = -1, \quad (-1)^2 = 1, \quad (-1)^3 = -1$$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{für gerades } n \\ -1 & \text{für ungerades } n \end{cases}$$



$$\begin{array}{ll} -(+3) = -3 & -(-6) = +6 = 6 \\ (-7) < (-3) & (-3) < 2 \quad 2 < 3 \\ |6| = 6 & |-6| = -(-6) = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5 + (-12) = 5 - 12 = -(12 - 5) = -7 \\ -5 + (-12) = -5 - 12 = -(5 + 12) = -17 \\ 3 \cdot (-5) = (-3) \cdot 5 = -15 \\ (-3) \cdot (-5) = +15 = 15 \\ 30 : (-5) = (-30) : 5 = -6 \\ (-30) : (-5) = +6 = 6 \\ 3 + (-5) = (-5) + 3 \quad (-9) + (-7) = (-7) + (-9) \\ (-4) + [(-7) + 3] = [(-4) + (-7)] + 3 \\ \underbrace{\quad\quad\quad}_{(-4)} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{-(4+7)=-11} \\ \underbrace{- (4+4)=-8}_{\text{Assoziativgesetz}} \quad \underbrace{- (11-3)=-8}_{\text{Assoziativgesetz}} \\ (-4) \cdot [(-7) + 3] = (-4) \cdot (-7) + (-4) \cdot 3 \\ \underbrace{\quad\quad\quad}_{(-4)} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{+28} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{(-12)} \\ \underbrace{4 \cdot 4=16}_{\text{Distributivgesetz}} \quad \underbrace{28-12=16}_{\text{Distributivgesetz}} \\ (-1)^{44} = 1, \quad (-1)^{17} = -1, \quad (-1)^{100} = 1 \\ (-2)^2 = 4, \quad (-2)^3 = -8, \quad (-2)^9 = -512 \end{array}$$

Abzählen von Möglichkeiten

Platz 1 kann mit z_1 , Platz 2 mit z_2 , ... und Platz n mit z_n verschiedenen Gegenständen besetzt werden. Dann können alle n Plätze auf

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_n$$

verschiedene Arten belegt werden.

n verschiedene Gegenstände kann man auf

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$$

verschiedene Arten auf n Plätze verteilen.

3 Hüte, 7 T-Shirts und 4 Hosen kann man auf

$$3 \cdot 7 \cdot 4 = 84$$

verschiedene Arten miteinander kombinieren.

5 Personen kann man auf

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

verschiedene Arten in einer Reihe aufstellen.

Definitionen und Regeln

Zahlensysteme*

Die *Basis* des Zehnersystems (Dezimalsystems) ist 10, die *Stufenzahlen* sind die Zehnerpotenzen, es gibt zehn Ziffern.

Stufenzahlen: $10^0 = 1, 10^1 = 10, 10^2 = 100, \dots$

Ziffern: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Jede natürliche Zahl $b \geq 2$ kann als Basis eines Zahlensystems verwendet werden. Die Stufenzahlen sind dann die Potenzen von b , es gibt b Ziffern von 0 bis $b - 1$.

Stufenzahlen: $b^0 = 1, b^1 = b, b^2, b^3, b^4, \dots$

Ziffern: 0, 1, 2, ... $b - 1$

Die Basis des Zweiersystems (Dualsystems) ist 2, die Stufenzahlen sind die Zweierpotenzen, es gibt nur zwei Ziffern (0, 1).

Stufenzahlen: $2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, \dots$

Ziffern: 0, 1 oder O, L

Die Basis des Sechzehnersystems (Hexadezimalsystems) ist 16, die Stufenzahlen sind die Potenzen von 16, es gibt 16 Ziffern.

Stufenzahlen: $16^0 = 1, 16^1 = 16, 16^2 = 256, \dots$

Ziffern: 0 bis 9 A B C D E F
 10 11 12 13 14 15

Beispiele

$$3784 = 3 \cdot \underbrace{10^3}_{1000} + 7 \cdot \underbrace{10^2}_{100} + 8 \cdot \underbrace{10^1}_{10} + 4 \cdot \underbrace{10^0}_1$$

$$3007004 = 3 \cdot \underbrace{10^6}_{1000000} + 7 \cdot \underbrace{10^3}_{1000} + 4 \cdot \underbrace{10^0}_1$$

$$(2905)_b = 2 \cdot b^3 + 9 \cdot b^2 + 0 \cdot b^1 + 5 \cdot b^0$$

$$\text{LOL} = (101)_2 = 1 \cdot \underbrace{2^2}_4 + 0 \cdot \underbrace{2^1}_2 + 1 \cdot \underbrace{2^0}_1 = 5$$

dual	L	LO	LL	LOO	LOL	LLO	LLL
dezimal	1	2	3	4	5	6	7
dual	LOOO	LOOL	LOLO	LOLL	LLOO		
dezimal	8	9	10	11	12		

$$\text{LOLL} = 8 + 0 + 2 + 1 = 11$$

$$\text{LOLLOLL} = 64 + 0 + 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 91$$

In der Computerliteratur werden Hexzahlen oft mit einem Dollarzeichen geschrieben:

$$(\text{A0B})_{16} = \$\text{A0B}$$

$$\$FF = 15 \cdot \underbrace{16^1}_{16} + 15 \cdot \underbrace{16^0}_1 = 255$$

$$\$100 = 1 \cdot \underbrace{16^2}_{256} + 0 \cdot \underbrace{16^1}_{16} + 0 \cdot \underbrace{16^0}_1 = 256$$

$$\$AFF = 10 \cdot \underbrace{16^2}_{256} + 15 \cdot \underbrace{16^1}_{16} + 15 \cdot \underbrace{16^0}_1 = 2815$$

Größen

Vorsilben

Name	Abk.	Wert
Hekto	h	$\cdot 100$
Kilo	k	$\cdot 1000$
Mega	M	$\cdot 10^6$
Giga	G	$\cdot 10^9$
Tera	T	$\cdot 10^{12}$
Dezi	d	: 10
Zenti	c	: 100
Milli	m	: 1000
Mikro	μ	: 10^6
Nano	n	: 10^9
Piko	p	: 10^{12}
Femto	f	: 10^{15}

Benennungen

m	g	€	Ct	l
Meter	Gramm	Euro	Cent	Liter
s	min	h	d	a
Sekunde	Minute	Stunde	Tag	Jahr

Länge 1 km = 1000 m
 1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm
 1 mm = 1000 μm = 10^6 nm
 1 μm = 1 μ = 1000 nm = 10^6 pm
 1 nm = 1000 pm

Zeit 1 h = 60 min = 3600 s
 1 min = 60 s
 1 s = 1000 ms = 10^6 μs
 1 ms = 1000 μs = 10^6 ns
 1 μs = 1000 ns = 10^6 ps
 1 ns = 1000 ps

Definitionen und Regeln

Bei der Kommaschreibweise von Größen bezieht sich die Einheit (Benennung) auf die Stelle vor dem Komma:

$$\begin{array}{l} \text{Kommaschreibweise} \qquad \qquad \text{gemischte Schreibweise} \\ \overbrace{1234,56789 \text{ m}} = \overbrace{1 \text{ km } 234 \text{ m } 567 \text{ mm } 890 \text{ }\mu} \\ \\ \text{Kommaschreibweise} \qquad \qquad \text{gemischte Schreibweise} \\ \overbrace{1234,56789 \text{ kg}} = \overbrace{1 \text{ t } 234 \text{ kg } 567 \text{ g } 890 \text{ mg}} \end{array}$$

Beispiele

Masse 1 t = 1 Tonne = 1000 kg = 10⁶ g
 1 Ztr = 1 Zentner = 50 kg
 1 kg = 1000 g = 10⁶ mg
 1 g = 1000 mg = 10⁶ µg
 1 mg = 1000 µg = 10⁶ ng
 1 µg = 1000 ng = 10⁶ pg
 1 ng = 1000 pg

Geometrie

Definitionen und Regeln

Elemente der Geometrie

Die Geometrie handelt von *Punkten* (keine Ausdehnung, nulldimensional), *Linien* (eindimensional), *Flächen* (zweidimensional) und *räumlichen Körpern* (dreidimensional). Eine *Gerade* ist eine nach beiden Seiten unendlich lange, gerade Linie.

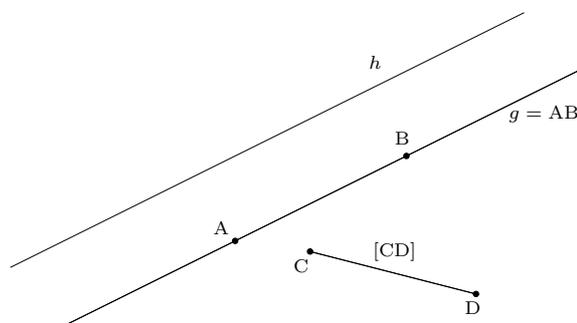
Durch zwei Punkte A und B lässt sich genau eine Gerade $g = AB$ zeichnen.

Sind C und D zwei Punkte, dann ist die *Strecke* [CD] der Teil der Geraden CD zwischen den Punkten C und D. Die Randpunkte C und D gehören zur Strecke [CD].

$$\overline{CD} = \text{Länge der Strecke [CD]}$$

Geraden und Strecken sind Punktmenge.

Beispiele



Zwei Geraden heißen parallel, wenn sie keinen Schnittpunkt haben (g und h sind parallel).

Geometrische Figuren

Drei Punkte A, B und C, die nicht auf einer Geraden liegen, bilden das Dreieck ABC (ΔABC). A, B und C sind die *Ecken*, [AB], [BC] und [CA] die *Seiten* des Dreiecks. Ein Dreieck hat also drei Ecken und drei Seiten. Ein Viereck hat vier Ecken und vier Seiten usw.

Ein *Rechteck* ist ein Viereck, in dem je zwei benachbarte Seiten einen rechten Winkel bilden (senkrecht aufeinander stehen).

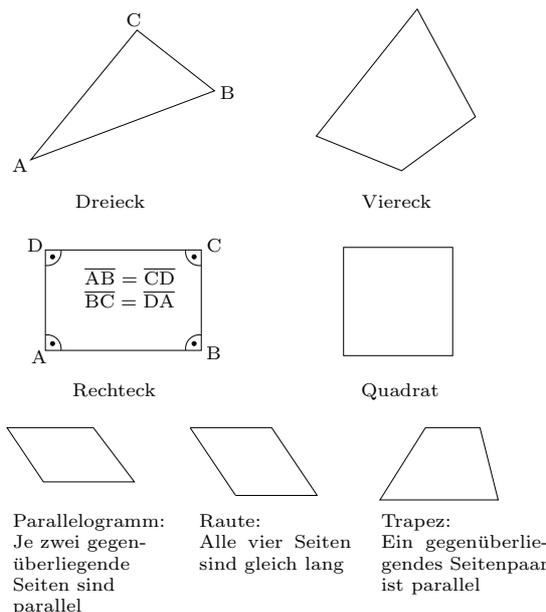
Zwei gegenüberliegende Seiten im Rechteck sind gleich lang.

Ein Rechteck mit vier gleich langen Seiten heißt *Quadrat*.

Ist M_Q die Menge aller Quadrate, M_R die Menge aller Rechtecke und M_V die Menge aller Vierecke, dann gilt

$$M_Q \subseteq M_R \subseteq M_V$$

oder in Worten: Jedes Quadrat ist ein Rechteck und jedes Rechteck ist ein Viereck.



Definitionen und Regeln

Koordinaten

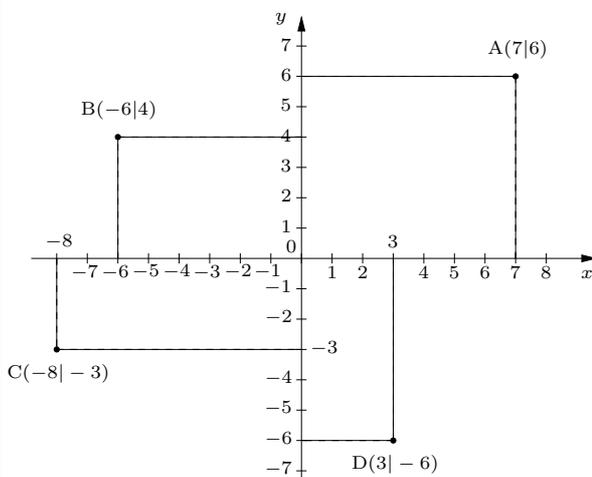
Das (kartesische) *Koordinatensystem* besteht aus zwei zueinander senkrechten Achsen. Die waagrechte Achse heißt *Abszissenachse* oder kurz *Abszisse* (wird oft auch als *x*-Achse bezeichnet), die senkrechte Achse ist die *Ordinatenachse*, kurz *Ordinate* (oder oft *y*-Achse). Der Schnittpunkt der beiden Achsen ist der *Ursprung* des Koordinatensystems. Ein Punkt wird durch seinen Namen und die beiden Koordinaten, die Abszisse und die Ordinate, angegeben:

$$A(\text{Abszisse} | \text{Ordinate})$$

Man findet den Punkt, wenn man vom Ursprung aus um den Wert der Abszisse nach rechts und um den Wert der Ordinate nach oben geht. Die *Einheiten* des Koordinatensystems geben an, wie weit die Eins auf den Achsen vom Ursprung entfernt ist. Die Einheiten auf der Abszisse und der Ordinaten können verschieden sein.

Beispiele

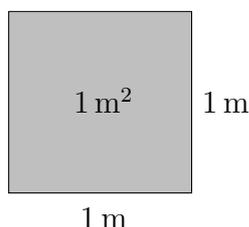
Das folgende Koordinatensystem hat gleiche Einheiten auf beiden Achsen.



Der Punkt A(6|7) hat die Abszisse 7 und die Ordinate 6.

Flächenmaße

Ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 m hat den Flächeninhalt (kurz: „die Fläche“) 1 m².

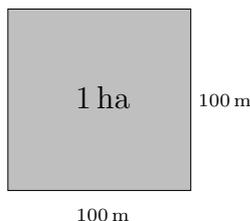
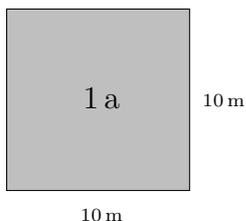


Ein Rechteck mit den Seitenlängen *a* und *b* hat die Fläche

$$A = a \cdot b$$

Ein Quadrat mit der Seitenlänge *a* hat die Fläche

$$A = a^2$$



$$1 \text{ a} = 1 \text{ Ar} = 100 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ ha} = 1 \text{ Hektar} = 100 \text{ a} = 10\,000 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ km}^2 = 100 \text{ ha} = 10\,000 \text{ a} = 10^6 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2 = 10^6 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2 = 10\,000 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ mm}^2 = (1000 \mu)^2 = 10^6 \mu^2$$

$$1 \mu^2 = (1000 \text{ nm})^2 = 10^6 \text{ nm}^2$$

$$1 \text{ nm}^2 = (1000 \text{ pm})^2 = 10^6 \text{ pm}^2$$

$$1,23456789 \text{ km}^2 = 1 \text{ km}^2 23 \text{ ha} 45 \text{ a} 67 \text{ m}^2 89 \text{ dm}^2$$

$$123,456789 \text{ m}^2 = 1 \text{ a} 23 \text{ m}^2 45 \text{ dm}^2 67 \text{ cm}^2 89 \text{ mm}^2$$

$$0,123456789 \text{ m}^2 = 12 \text{ dm}^2 34 \text{ cm}^2 56 \text{ mm}^2 789000 \mu^2$$

$$0,0123456789 \text{ cm}^2 = 1 \text{ mm}^2 234567 \mu^2 890000 \text{ nm}^2$$

$$0, \underbrace{12}_{\text{ha}} \underbrace{34}_{\text{a}} \underbrace{56}_{\text{m}^2} \underbrace{78}_{\text{dm}^2} \underbrace{90}_{\text{cm}^2} \underbrace{12}_{\text{mm}^2} \text{ km}^2$$

$$0, \underbrace{123456}_{\mu^2} \underbrace{789123}_{\text{nm}^2} \underbrace{456789}_{\text{pm}^2} \text{ mm}^2$$

Grundwissen Mathematik – Jahrgangsstufe 6

Zahlen

Definitionen und Regeln

Brüche und Bruchteile

Teilt man die Zahl b in a gleich große Teile, dann hat ein Teil die Größe $a : b$. Diesen Quotienten schreibt man auch in Form eines Bruches:

$$\frac{a}{b} = a : b$$

$$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \text{Wert des Bruches}$$

$$\frac{a}{b} = a : b = (a \cdot 1) : b = a \cdot (1 : b) = a \cdot \frac{1}{b}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a = \frac{1}{b} \text{ von } a$$

$$\frac{a}{b} \text{ von } c = a \cdot \frac{1}{b} \text{ von } c = a \cdot c : b = (a \cdot c) : b = \frac{a \cdot c}{b}$$

$$\frac{a}{b} \text{ von } c = \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$$

Da man durch null nicht teilen darf, darf auch der Nenner eines Bruches niemals null sein!

$$\frac{a}{a} = 1, \quad \frac{a}{1} = a, \quad \frac{0}{a} = 0$$

Wird das Ganze in b gleiche Teile zerlegt, dann bilden a dieser Teile den Bruchteil $\frac{a}{b}$ vom Ganzen (das $\frac{a}{b}$ -fache des Ganzen).

Die Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ (natürliche Zahlen)

$\mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ (ganze Zahlen)

Mit \mathbb{Q} bezeichnet man die Menge aller Brüche, wobei die Zähler eine beliebige ganze Zahl und die Nenner eine ganze Zahl außer null sein dürfen:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0 \right\}$$

\mathbb{Q} heißt auch Menge der **rationalen Zahlen**.

Beispiele

$$1 : 3 = \frac{1}{3}, \quad 5 : 7 = \frac{5}{7}, \quad \frac{18}{6} = 18 : 6 = 3$$

0 1 2



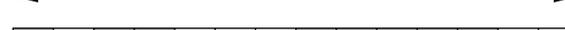
$$\frac{1}{3} = 1 : 3$$

0 2



$$\frac{2}{3} = 2 : 3 = 2 \cdot \frac{1}{3}$$

← 1 →



$$\frac{1}{14}$$

$$\frac{2}{14}$$

$$\frac{5}{14}$$

$$\frac{2}{14} = 2 \cdot \frac{1}{14}, \quad \frac{5}{14} = 5 \cdot \frac{1}{14}$$

$$\frac{3}{7} \text{ von } 28 = 3 \cdot \frac{1}{7} \text{ von } 28 = 3 \cdot \frac{28}{7} = 3 \cdot 4 = 12$$

$$\frac{3}{7} \text{ von } 8 = \frac{3 \cdot 8}{7} = \frac{24}{7}$$

$$\frac{3}{10} \text{ von } 1,5 \text{ m} = \frac{3 \cdot 150 \text{ cm}}{10} = \frac{450 \text{ cm}}{10} = 45 \text{ cm}$$

$$\frac{7}{7} = 1, \quad \frac{8}{1} = 8, \quad \frac{0}{13} = 0$$

← Das Ganze (17 Teile) →



$$\frac{8}{17} \text{ vom Ganzen}$$

$$\frac{0}{1} = 0, \quad \frac{-3}{1} = -3, \quad \frac{16}{-2} = -8, \quad \frac{-12}{-4} = 3$$

Jede ganze Zahl z kann man als Bruch schreiben, z.B. $z = \frac{z}{1}$. Die Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen ist also in der Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen enthalten (\mathbb{Z} ist eine Teilmenge von \mathbb{Q}):

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

Definitionen und Regeln

Erweitern und Vergleichen

Ein Bruch ändert seinen Wert nicht, wenn Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert werden (*Erweitern*):

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

Zwei Brüche heißen *gleichnamig*, wenn sie den gleichen Nenner besitzen. Zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ kann man durch geschicktes Erweitern immer gleichnamig machen:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}, \quad \frac{c}{d} = \frac{c \cdot b}{b \cdot d}$$

$b \cdot d$ ist ein *gemeinsamer Nenner* der Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ (ein gemeinsames Vielfaches der Nenner b und d).

Der *kleinste gemeinsame Nenner (Hauptnenner, HN)* von mehreren Brüchen ist das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) ihrer Nennern.

In diesem Teil über das Vergleichen von Brüchen sind alle Zähler und Nenner positiv!
Für gleichnamige Brüche gilt:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{b} \iff a < c$$

Wenn man 5 kg Zucker auf 7 Kinder verteilt erhält jedes Kind weniger als wenn man 5 kg Zucker auf 6 Kinder verteilt, d.h. $\frac{5}{7} < \frac{5}{6}$.

Für Brüche mit gleichem Zähler gilt:

$$\frac{a}{b} < \frac{a}{c} \iff b > c$$

Kürzen

Ein Bruch ändert seinen Wert nicht, wenn man Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividiert (*Kürzen*):

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$

Zum Kürzen zerlegt man den Zähler und den Nenner in Primfaktoren und streicht die gemeinsamen Faktoren.

Beispiele

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{15}{35} = \frac{3 \cdot (-7)}{7 \cdot (-7)} = \frac{-21}{-49}$$

Um den Bruch $\frac{5}{12}$ auf den Nenner 108 zu bringen, muss er mit $108 : 12 = 9$ erweitert werden:

$$\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 9}{12 \cdot 9} = \frac{45}{108}$$

Gleichnamigmachen von $\frac{3}{7}$ und $\frac{4}{11}$:

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 11}{7 \cdot 11} = \frac{33}{77}, \quad \frac{4}{11} = \frac{4 \cdot 7}{11 \cdot 7} = \frac{28}{77}$$

Gleichnamigmachen von $\frac{19}{36}$, $\frac{13}{24}$ und $\frac{29}{54}$:

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3, \quad 24 = \boxed{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot 3, \quad 54 = 2 \cdot \boxed{3 \cdot 3 \cdot 3}$$

$$HN = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 216$$

Die Erweiterungsfaktoren findet man am schnellsten, wenn man aus der Primfaktorzerlegung des Hauptnenners die Primfaktoren des jeweiligen Nenners streicht.

$$\frac{19}{36} = \frac{19 \cdot 6}{36 \cdot 6} = \frac{114}{216}, \quad \frac{13}{24} = \frac{13 \cdot 9}{24 \cdot 9} = \frac{117}{216}$$

$$\frac{29}{54} = \frac{29 \cdot 4}{54 \cdot 4} = \frac{116}{216}$$

$$\frac{7}{13} < \frac{9}{13}, \text{ weil } 7 < 9, \quad \frac{11}{17} > \frac{11}{19}, \text{ weil } 17 < 19$$

Nichtgleichnamige Brüche vergleicht man, indem man sie gleichnamig macht oder auf den gleichen Zähler bringt (je nachdem, was einfacher ist):

$$\underbrace{\frac{19}{36}} < \underbrace{\frac{29}{54}} < \underbrace{\frac{13}{24}}, \text{ weil } 114 < 116 < 117$$

$$\frac{114}{216} < \frac{116}{216} < \frac{117}{216}$$

$$\underbrace{\frac{37}{24}} < \underbrace{\frac{23}{24}} < \underbrace{\frac{6}{68}}, \text{ weil } 74 > 69 > 68$$

$$\frac{37}{24} < \frac{23}{24} < \frac{6}{68}$$

$$\frac{48}{56} = \frac{48 : 8}{56 : 8} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{84}{112} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{24}{72} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{182}{1001} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 13}{7 \cdot 11 \cdot 13} = \frac{2}{11}$$

Definitionen und Regeln	Beispiele
<p>Ein Bruch heißt <i>vollständig gekürzt</i>, wenn Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Primfaktor mehr enthalten. Die vollständig gekürzte Version eines Bruches ist seine <i>Grundform</i>.</p> <p>Gelingt die Primfaktorenzerlegung nicht, dann bestimmt man den ggT aus Zähler und Nenner mit der Kettendivision:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\frac{a}{b} = \frac{a : \text{ggT}(a, b)}{b : \text{ggT}(a, b)}$ <p style="text-align: center; margin: 0;">vollst. gekürzt</p> </div>	<p>Produkte im Zähler und im Nenner vor dem Kürzen auf keinen Fall ausmultiplizieren, sondern gleich weiter zerlegen:</p> $\frac{34 \cdot 36}{54 \cdot 51} = \frac{2 \cdot 17 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 17} = \frac{4}{9}$ <p>Die Primfaktoren des Zählers und Nenners von $\frac{5063}{5893}$ sind nicht leicht zu finden:</p> <p>5893 : 5063 = 1 R 830 5063 : 830 = 6 R 83 830 : 83 = 10 R 0 \implies ggT(5893, 5063) = 83</p> $\frac{5063}{5893} = \frac{5063 : 83}{5893 : 83} = \frac{61}{71}$ <p>Nebenbei hat man auch die Primfaktoren von Zähler und Nenner gefunden:</p> <p>5063 = 61 · 83, 5893 = 71 · 83</p>
<p>Rechnen mit Brüchen</p> <p>Gleichnamige Brüche, Addition und Subtraktion:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin: 10px 0;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$</div> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0; width: fit-content;"> <p>Ungleichnamige Brüche müssen vor dem Addieren bzw. Subtrahieren gleichnamig gemacht werden!</p> </div> <p>Wenn man den HN nicht findet, nimmt man das Produkt der Nenner als gemeinsamen Nenner:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$ </div>	$\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{3+4}{8} = \frac{7}{8}$ $\frac{3}{11} - \frac{7}{11} = \frac{3-7}{11} = \frac{-4}{11} = -\frac{4}{11}$ $\frac{5}{6} - \frac{11}{15} = \frac{5 \cdot 5 - 11 \cdot 2}{30} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{8} - \frac{1}{7} = \frac{7-8}{56} = -\frac{1}{56}$ $\frac{11}{24} - \frac{11}{16} + \frac{13}{36} = \frac{11 \cdot 6 - 11 \cdot 9 + 13 \cdot 4}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{19}{144}$ $\frac{3}{8} + \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 7 + 2 \cdot 8}{8 \cdot 7} = \frac{37}{56}$
<p>Oft ist es vorteilhaft, vor dem Addieren bzw. Subtrahieren zu kürzen. Wenn die Nenner schon fast gleichnamig sind, ist es besser, nicht zu kürzen.</p>	$\frac{28}{42} - \frac{9}{18} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$ $\frac{49}{56} + \frac{24}{112} = \frac{49 \cdot 2 + 24}{112} = \frac{122}{112} = \frac{61}{56}$
<p>Multiplikation von Brüchen:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin: 10px 0;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$</div> </div> $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a}{b \cdot b} = \frac{a^2}{b^2}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ </div>	$\frac{3}{28} \cdot 7 = \frac{3 \cdot 7}{28} = \frac{3}{4}$ $\frac{3}{8} \cdot \frac{11}{5} = \frac{3 \cdot 11}{8 \cdot 5} = \frac{33}{40}$ $\frac{16}{121} \cdot \frac{33}{24} = \frac{16 \cdot 33}{121 \cdot 24} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11}{11 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2}{11}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$ $\left(-\frac{3}{5}\right)^3 = -\frac{3^3}{5^3} = -\frac{27}{125}$

Definitionen und Regeln	Beispiele
$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \implies \boxed{\frac{b}{a} = 1 : \frac{a}{b}}$ <p>$\frac{b}{a}$ heißt <i>Kehrwert</i> von $\frac{a}{b}$.</p> $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(1 : \frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ <p>Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert:</p> $\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}} \quad \boxed{\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}}$	<p>$\frac{3}{8}$ ist der Kehrwert von $\frac{8}{3}$.</p> <p>$\frac{1}{7}$ ist der Kehrwert von 7.</p> <p>5 ist der Kehrwert von $\frac{1}{5}$.</p> $\frac{11}{8} : \frac{7}{3} = \frac{11}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{33}{56}, \quad \frac{24}{7} : 6 = \frac{24}{7 \cdot 6} = \frac{4}{7}$ $\frac{35}{52} : \frac{77}{78} = \frac{35}{52} \cdot \frac{78}{77} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13}{2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{15}{22}$ $\left(-\frac{1}{3}\right) : \frac{1}{9} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{1} = -\frac{9}{3} = -3$
<h3>Einteilung der positiven Brüche</h3> <p>Stammbrüche: Zähler = 1</p> <p>Echte Brüche: Zähler < Nenner</p> <p>Unechte Brüche: Zähler > Nenner</p> <p>Scheinbrüche: Zähler = $n \cdot$ Nenner mit $n \in \mathbb{N}$</p> <p>Stammbrüche sind echte Brüche. Echte Brüche sind kleiner als 1. Unechte Brüche sind größer als 1. Scheinbrüche sind natürliche Zahlen.</p>	<p>Stammbrüche: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$</p> <p>echte Brüche: $\frac{1}{2}, \frac{7}{8}, \frac{13}{44}, \frac{12}{50}, \dots$</p> <p>unechte Brüche: $\frac{3}{2}, \frac{9}{8}, \frac{133}{44}, \frac{73}{50}, \dots$</p> <p>Scheinbrüche: $\frac{3}{3} = 1, \frac{9}{3} = 3, \frac{56}{7} = 8, \frac{1000}{50} = 20$</p>
<h3>Gemischte Zahlen</h3> <p>Um die Größe eines unechten Bruches besser zu erkennen, schreibt man ihn als <i>gemischte Zahl</i>. Die gemischte Zahl $a\frac{b}{c}$ ist eine Abkürzung für die Summe $a + \frac{b}{c}$.</p> $\boxed{a\frac{b}{c} = a + \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c}}$ $\boxed{z : n = g \text{ R } r \implies \frac{z}{n} = g\frac{r}{n}}$ <p>Beim Addieren und Subtrahieren gemischter Zahlen werden die Ganzen und die Bruchteile getrennt berechnet.</p> <p>Vorsicht: $-a\frac{b}{c}$ ist nicht $-a + \frac{b}{c}$, sondern</p> $\boxed{-a\frac{b}{c} = -\left(a + \frac{b}{c}\right) = -\frac{a \cdot c + b}{c} = -a - \frac{b}{c}}$ <p>Zum Multiplizieren und Dividieren verwandelt man gemischte Zahlen in unechte Brüche.</p>	$5\frac{3}{7} = 5 + \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 7 + 3}{7} = \frac{38}{7}$ <p>$\frac{68}{9}$ soll als gemischte Zahl geschrieben werden:</p> $68 : 9 = 7 \text{ R } 5 \implies 68 = 7 \cdot 9 + 5 \implies$ $\frac{68}{9} = \frac{7 \cdot 9 + 5}{9} = \frac{7 \cdot 9}{9} + \frac{5}{9} = 7 + \frac{5}{9} = 7\frac{5}{9}$ $5\frac{2}{3} + 6\frac{4}{5} = (5 + 6) + \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right) = 11\frac{22}{15} = 12\frac{7}{15}$ $8\frac{4}{5} - 6\frac{3}{4} = (8 - 6) + \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{4}\right) = 2\frac{16 - 15}{20} = 2\frac{1}{20}$ <p>Beachte bei dem folgenden Beispiel den Trick</p> $8\frac{4}{20} = 7 + 1 + \frac{4}{20} = 7 + \frac{20}{20} + \frac{4}{20} = 7\frac{24}{20}$ $8\frac{1}{5} - 4\frac{3}{4} = 8\frac{4}{20} - 4\frac{15}{20} = 7\frac{24}{20} - 4\frac{15}{20} = 3\frac{9}{20}$ $4\frac{2}{7} : 1\frac{17}{28} = \frac{30}{7} : \frac{45}{28} = \frac{30 \cdot 28}{7 \cdot 45} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

Definitionen und Regeln	Beispiele
<p>Doppelbrüche</p> <p>Bei Doppelbrüchen schreibt man den Hauptbruchstrich auf Höhe des Gleichheitszeichens.</p> $\text{Hauptbruchstrich} \longrightarrow \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ <p>Die Zähler der Teilbrüche bleiben auf der gleichen Seite des Hauptbruchstrichs, die Nenner der Teilbrüche springen über den Hauptbruchstrich.</p>	$\frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7}}{\frac{5}{21} \cdot \frac{9}{16}} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 21 \cdot 16}{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9} = \frac{8}{5} = 1,6$ $\frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{6}}{\frac{7}{3} : \frac{49}{8}} = \frac{9 - 10}{7 \cdot 8} = \frac{-1}{8} = -\frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 8} = -\frac{7}{32}$
<p>Dezimalbrüche</p> <p>Definition der Dezimalbrüche</p> <p>Das Komma in einem Dezimalbruch trennt die Einerstelle von der Zehntelstelle.</p> $23,456 = 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1000} =$ $= 23 \frac{456}{1000} = \frac{23456}{1000} = 23 \frac{57}{125} = \frac{2932}{125}$ <p>Schlussnullen nach dem Komma darf man bei einem Dezimalbruch beliebig anhängen oder streichen (Erweitern oder Kürzen).</p>	$0,1 = \frac{1}{10}, \quad 0,01 = \frac{1}{100}, \quad 0,001 = \frac{1}{1000}$ $0,2 = \frac{1}{5}, \quad 0,5 = \frac{1}{2}, \quad 0,25 = \frac{1}{4}, \quad 0,125 = \frac{1}{8}$ $0,75 = \frac{3}{4}, \quad 1,5 = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2}, \quad 1,25 = \frac{5}{4} = 1 \frac{1}{4}$ $0,123 = \frac{123}{1000}, \quad 10,0001 = \frac{100001}{10000}$ $0,1230000 = \frac{1230000}{10000000} = \frac{123}{1000} = 0,123$
<p>Rechnen mit Dezimalbrüchen</p> <p>Zum Addieren und Subtrahieren werden Dezimalbrüche durch das Anhängen von Schlussnullen gleichnamig gemacht.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>Dezimalbruch $\cdot 10^n$: Komma um n Stellen nach rechts</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>Dezimalbruch $: 10^n$: Komma um n Stellen nach links</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>Multiplikation zweier Dezimalbrüche mit d_1 und d_2 Dezimalen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Beide Kommas weglassen • Multiplizieren • Komma so setzen, dass das Ergebnis $d_1 + d_2$ Dezimalen hat </div>	$1,2345 + 2,3 = 1,2345 + 2,3000 = 3,5345$ $1 - 0,987 = 1,000 - 0,987 = 0,013$ $1,2345 \cdot 1000 = 1234,5$ $1,2345 : 1000 = 0,0012345$ $0,000123 \cdot 10^7 = 1230$ $123,45 : 10^6 = 0,00012345$ $0,006 \cdot 2,23 = 6 \cdot 223 : 100000 = 1338 : 100000 =$ $= 0,01338$ $3,64 \cdot 2,5 = 364 \cdot 25 : 1000 = 9100 : 1000 =$ $= 9,100 = 9,1$ $0,0007 \cdot 0,003 = 7 \cdot 3 : 10^7 = 21 : 10^7 =$ $= 0,0000021$

Definitionen und Regeln	Beispiele																																
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> Zur Division zweier Dezimalbrüche verschiebt man das Komma beim Dividenden und beim Divisor um die gleiche Stellenzahl soweit nach rechts, bis der Divisor ganzzahlig ist. </div> <p>Endliche und periodische Dezimalbrüche</p> <p>Jeder Dezimalbruch mit n Dezimalen (Stellen nach dem Komma) lässt sich als Bruch mit dem Nenner $10^n = 2^n \cdot 5^n$ schreiben. Die Grundform (vollständig gekürzte Form) dieses Bruches hat im Nenner nur die Primfaktoren 2 und 5.</p> <p>Ein vollständig gekürzter Bruch, dessen Nenner andere Primfaktoren als 2 oder 5 enthält, ist <i>periodisch unendlich</i> oder kurz <i>periodisch</i>. Die Länge der Periode ist kleiner als der Nenner.</p> <p>Ein periodischer Dezimalbruch heißt <i>reinperiodisch</i>, wenn die Periode direkt nach dem Komma beginnt.</p> <p>Ein periodischer Dezimalbruch heißt <i>gemischtperiodisch</i>, wenn zwischen Komma und Periode noch weitere Ziffern stehen.</p> <p>Einen Bruch verwandelt man in einen Dezimalbruch durch Erweitern auf eine Zehnerpotenz im Nenner oder einfach durch schriftliches Dividieren:</p> $\frac{17}{25} = \frac{17 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{68}{100} = 0,68$	$6,4 : 0,128 = \frac{6,4}{0,128} = \frac{6,4 \cdot 1000}{0,128 \cdot 1000} = \frac{6400}{128} = 50$ $12,5 : 0,0005 = 125000 : 5 = 25000$ $1,001 : 0,13 = 100,1 : 13 = 7,7$ <p>In folgender Tabelle bedeutet PFN „Primfaktoren des Nenners“, e „endlich“, rp „rein periodisch“, gp „gemischt periodisch“ und p die Periodenlänge.</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>Bruch</th> <th>PFN</th> <th>Typ</th> <th>p</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$\frac{1}{250} = 0,004$</td> <td>2, 5</td> <td>e</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>$\frac{1}{3} = 0,\bar{3}$</td> <td>3</td> <td>rp</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$</td> <td>7</td> <td>rp</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>$\frac{1}{33} = 0,0\bar{3}$</td> <td>3, 11</td> <td>rp</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>$\frac{1}{30} = 0,0\bar{3}$</td> <td>3, 2, 5</td> <td>gp</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>$\frac{1}{6} = 0,1\bar{6}$</td> <td>2, 3</td> <td>gp</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>$\frac{611}{4950} = 0,123\bar{4}$</td> <td>2, 3, 5, 11</td> <td>gp</td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table> $0,\overline{12} = 0,121212\dots$ $0,1\overline{2} = 0,122222\dots$ $0,1200\overline{34} = 0,120034034034\dots$	Bruch	PFN	Typ	p	$\frac{1}{250} = 0,004$	2, 5	e	0	$\frac{1}{3} = 0,\bar{3}$	3	rp	1	$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$	7	rp	6	$\frac{1}{33} = 0,0\bar{3}$	3, 11	rp	2	$\frac{1}{30} = 0,0\bar{3}$	3, 2, 5	gp	2	$\frac{1}{6} = 0,1\bar{6}$	2, 3	gp	1	$\frac{611}{4950} = 0,123\bar{4}$	2, 3, 5, 11	gp	2
Bruch	PFN	Typ	p																														
$\frac{1}{250} = 0,004$	2, 5	e	0																														
$\frac{1}{3} = 0,\bar{3}$	3	rp	1																														
$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$	7	rp	6																														
$\frac{1}{33} = 0,0\bar{3}$	3, 11	rp	2																														
$\frac{1}{30} = 0,0\bar{3}$	3, 2, 5	gp	2																														
$\frac{1}{6} = 0,1\bar{6}$	2, 3	gp	1																														
$\frac{611}{4950} = 0,123\bar{4}$	2, 3, 5, 11	gp	2																														
<p>Reinperiodischer Dezimalbruch in Bruch:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: fit-content;"> $0,\underbrace{\text{Periode}}_{\text{Länge } p} = \frac{\text{Periode}}{\underbrace{999\dots 9}_{p \text{ mal die } 9}}$ </div> <p>Gemischtperiodischer Dezimalbruch in Bruch:</p> <p>Ist z die Zahl der Ziffern zwischen Komma und Periode, dann multipliziert man mit 10^z, erhält damit einen reinperiodischen Dezimalbruch, wandelt diesen in einen Bruch um und dividiert anschließend wieder durch 10^z.</p> <p>Zum Rechnen verwandelt man periodische Dezimalbrüche zweckmäßigerweise in Brüche.</p>	$0,\bar{7} = \frac{7}{9}$ $0,\overline{69} = \frac{69}{99} = \frac{23}{33}$ $0,\overline{02439} = \frac{2439}{99999} = \frac{1}{41}$ $0,3\bar{7} = 3,\bar{7} : 10 = 3 \frac{7}{9} : 10 = \frac{34}{9} : 10 = \frac{34}{90} = \frac{17}{45}$ $0,123\overline{456} = 123,\overline{456} : 1000 = 123 \frac{456}{999} : 1000 = \frac{123333}{999} : 1000 = \frac{123333}{999000} = \frac{41111}{333000}$ $0,\overline{12} : 0,\overline{18} = \frac{12}{99} : \frac{18}{99} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ $0,\bar{7} : 0,\overline{07} = \frac{7}{9} : \frac{7}{99} = \frac{99}{9} = 11$																																

Definitionen und Regeln

Prozentrechnung

Brüche in der Prozentschreibweise

Ein Hundertstel nennt man auch ein Prozent, in Zeichen 1 %.

$$x\% = \frac{x}{100}, \quad 1\% = \frac{1}{100}, \quad 100\% = \frac{100}{100} = 1$$

$$x\% \text{ von } g = x\% \cdot g = \frac{x}{100} \cdot g = \frac{x \cdot g}{100}$$

Jede Zahl a kann man in die Prozentschreibweise umwandeln:

$$a = a \cdot 1 = a \cdot 100\% = (a \cdot 100)\%$$

Grundaufgaben der Prozentrechnung

$$\underbrace{\text{Prozentsatz}}_{x\%} \underbrace{\text{vom}}_{\text{mal}} \underbrace{\text{Grundwert}}_g = \underbrace{\text{Prozentwert}}_w$$

$$x\% \cdot g = w$$

Prozentsatz gesucht:

$$x\% = \frac{w}{g} = \frac{w}{g} \cdot 100\%$$

Grundwert gesucht:

$$g = \frac{w}{x\%} = \frac{w \cdot 100}{x}$$

Zu a werden $x\%$ von a addiert (a wird um $x\%$ vergrößert):

$$a + x\% \cdot a = a \cdot (1 + x\%) = a \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)$$

Von a werden $x\%$ von a subtrahiert (a wird um $x\%$ verkleinert):

$$a - x\% \cdot a = a \cdot (1 - x\%) = a \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)$$

Ein Betrag a wird bei einer Bank einbezahlt und jährlich mit $x\%$ verzinst. Nach n Jahren ist der Wert des Kapitals

$$x = a \cdot (1 + x\%)^n$$

Beispiele

$$5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20} = 0,05, \quad 200\% = \frac{200}{100} = 2$$

$$2\% = \frac{1}{50}, \quad 4\% = \frac{1}{25}, \quad 5\% = \frac{1}{20}, \quad 10\% = \frac{1}{10}$$

$$20\% = \frac{1}{5}, \quad 25\% = \frac{1}{4}, \quad 50\% = \frac{1}{2}, \quad 75\% = \frac{3}{4}$$

$$3\% \text{ von } 500 = \frac{3}{100} \cdot 500 = 15$$

$$12,3 = 12,3 \cdot 100\% = 1230\%$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 100\% = \frac{100}{3}\% = 33\frac{1}{3}\%$$

$$0,\bar{7} = 0,\bar{7} \cdot 100\% = 77,\bar{7}\% = 77\frac{7}{9}\%$$

Grundwert: 240, Prozentsatz: 5% \implies

$$\text{Prozentwert: } w = 5\% \cdot 240 = \frac{5 \cdot 240}{100} = 12$$

Wieviel Prozent von 180 sind 30?

$$x\% \cdot 180 = 30 \implies$$

$$x\% = \frac{30}{180} = \frac{30}{180} \cdot \underbrace{100\%}_1 = 16\frac{2}{3}\%$$

15 Prozent eines Betrages sind 42€. Betrag?

$$15\% \cdot x = 42 \text{ €}$$

$$x = \frac{42 \text{ €}}{15\%} = \frac{42 \text{ €}}{\frac{15}{100}} = \frac{4200 \text{ €}}{15} = 280 \text{ €}$$

Preis mit 16% MWSt ist 52,2€. Preis ohne MWSt?

$$x \cdot (1 + 16\%) = x \cdot 1,16 = 52,2 \text{ €}$$

$$x = \frac{52,2 \text{ €}}{1,16} = 45 \text{ €}$$

Ein Flugzeug verliert 30% seiner Höhe und fliegt danach noch 1540 m hoch. Ursprüngliche Höhe?

$$x \cdot (1 - 30\%) = x \cdot 0,7 = 1540 \text{ m}$$

$$x = \frac{1540 \text{ m}}{0,7} = 2200 \text{ m}$$

Ein Betrag x wächst bei 5%-iger Verzinsung in drei Jahren auf 4630,50€ an.

$$x \cdot (1 + 5\%)^3 = x \cdot 1,05^3 = 4630,5 \text{ €}$$

$$x = \frac{4630,5 \text{ €}}{1,05^3} = \frac{4630,5 \text{ €}}{1,157625} = 4000 \text{ €}$$

Definitionen und Regeln

Relative Häufigkeit

Ein Experiment mit verschiedenen möglichen Ergebnissen (z.B. das Werfen eines Würfels) nennt man ein *Zufallsexperiment*. Wird ein Zufallsexperiment n -mal ausgeführt und tritt ein bestimmtes Ergebnis dabei z -mal ein (Trefferzahl), dann nennt man den Quotienten $\frac{z}{n}$ die *relative Häufigkeit* für das Auftreten des Ergebnisses:

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{Zahl der Treffer}}{\text{Gesamtzahl der Versuche}}$$

Beispiele

Ein Würfel wird 200-mal geworfen. In folgender Tabelle bedeuten T die Trefferzahl und rH die relative Häufigkeit:

	1	2	3	4	5	6
T	31	37	33	38	29	32
rH	0,155	0,185	0,165	0,19	0,145	0,16
rH	15,5%	18,5%	16,5%	19%	14,5%	16%

Geometrie

Definitionen und Regeln

Der Quader

Ein Quader wird von sechs Rechtecken begrenzt. Ein Quader hat acht Ecken (A, B, C, ...), zwölf Kanten ([AB], [BC], [CD], ...) und sechs Flächen. Je zwei gegenüberliegende Rechtecke des Quaders sind gleich.

Je vier Kanten des Quaders sind gleich lang:

$$\begin{aligned} a &= \overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF} = \overline{GH} \\ b &= \overline{BC} = \overline{DE} = \overline{FG} = \overline{HE} \\ c &= \overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} \end{aligned}$$

Ein Quader mit lauter gleich langen Kanten heißt *Würfel*.

Ein Würfel wird von sechs gleichen Quadraten begrenzt.

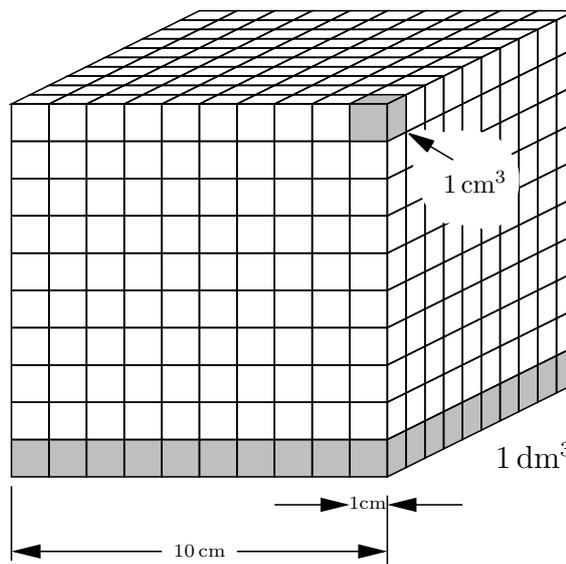
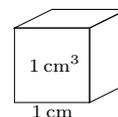
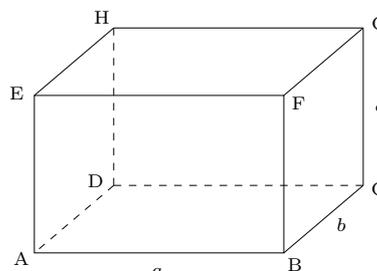
Raummaße

Der Rauminhalt (das Volumen) eines Würfels mit der Kantenlänge 1 cm ist ein *Kubikzentimeter* (cm^3).

Ein Würfel mit der Kantenlänge 10 cm besteht aus $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ Würfeln mit 1 cm Kantenlänge, d.h. $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$.

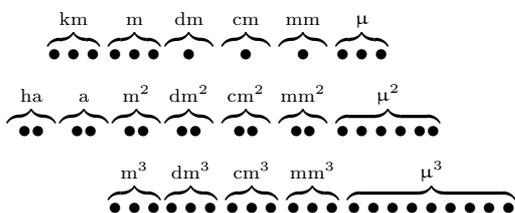
$$\begin{aligned} 1 \text{ km}^3 &= (1000 \text{ m})^3 = 10^9 \text{ m}^3 \\ 1 \text{ m}^3 &= 1000 \text{ dm}^3 = 10^6 \text{ cm}^3 = 10^9 \text{ mm}^3 \\ 1 \text{ dm}^3 &= 1000 \text{ cm}^3 = 10^6 \text{ mm}^3 \\ 1 \text{ cm}^3 &= 1000 \text{ mm}^3 \\ 1 \text{ mm}^3 &= (1000 \mu)^3 = 10^9 \mu^3 \\ 1 \mu^3 &= (1000 \text{ nm})^3 = 10^9 \text{ nm}^3 \\ 1 \text{ nm}^3 &= (1000 \text{ pm})^3 = 10^9 \text{ pm}^3 \end{aligned}$$

Beispiele



Definitionen und Regeln

Einer Stelle bei den Längeneinheiten entsprechen zwei Stellen bei den Flächeneinheiten und drei Stellen bei den Volumeneinheiten.



1 Liter	= 1 l	= 1 dm ³
1 Hektoliter	= 1 hl	= 100 dm ³
1 Milliliter	= 1 ml	= 1 cm ³
1 Zentiliter	= 1 cl	= 10 cm ³

Volumen und Oberfläche des Quaders

Ein Quader mit den Kantenlängen a , b und c hat das Volumen

$$V = a \cdot b \cdot c$$

die Oberfläche

$$A = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$$

und die Gesamtkantenlänge

$$k = 4 \cdot (a + b + c)$$

Ein Würfel mit der Kantenlänge a hat das Volumen

$$V = a^3$$

die Oberfläche

$$A = 6 \cdot a^2$$

und die Gesamtkantenlänge

$$k = 12 \cdot a$$

Beispiele

$$\begin{aligned} \overbrace{123}^{m^3}, \overbrace{456}^{dm^3}, \overbrace{789}^{cm^3}, \overbrace{123}^{mm^3} m^3 &= 123 m^3 456 dm^3 789 cm^3 123 mm^3 = \\ &= 123456,789123 dm^3 = \\ &= 123456789,123 cm^3 = \\ &= 123456789123 mm^3 \end{aligned}$$

$$0,0800031 m^3 = 80 dm^3 3 cm^3 100 mm^3$$

$$0,000 307 mm^3 = 307 000 \mu^3$$

1 m ³	= 1000 l	= 10 hl
1 l	= 100 cl	= 1000 ml
1 cl	= 10 ml	= 10 cm ³
1 ml	= 1 cm ³	= 1000 mm ³

Ein Quader mit den Kantenlängen $a = 3 m$, $b = 7 cm$ und $c = 2 mm$ hat das Volumen

$$V = 3000 mm \cdot 70 mm \cdot 2 mm = 420 000 mm^3 = 420 cm^3,$$

die Oberfläche

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot (3000 mm \cdot 70 mm + 3000 mm \cdot 2 mm + \\ &\quad + 70 mm \cdot 2 mm) = \\ &= 432 280 mm^2 = 43 dm^2 22 cm^2 80 mm^2, \end{aligned}$$

und die Gesamtkantenlänge

$$\begin{aligned} k &= 4 \cdot (3000 mm + 70 mm + 2 mm) = \\ &= 12 288 mm = 12 m 2 dm 8 cm 8 mm. \end{aligned}$$

Ein Würfel hat das Volumen $74 088 cm^3$, wie lang sind seine Kanten?

Primfaktorenzerlegung von 74 088:

$$V = a^3 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3 cm^3 = (2 \cdot 3 \cdot 7 cm)^3 = (42 cm)^3$$

$$\implies a = 42 cm$$

Grundwissen Mathematik – Jahrgangsstufe 7

Algebra

Definitionen und Regeln	Beispiele														
<p>Terme</p> <p>Ein <i>Term</i> ist ein Rechenausdruck. Ein Term besteht aus Zahlen, Rechenzeichen und gegebenenfalls aus Benennungen. Einen Term berechnen heißt, ihn soweit zu vereinfachen, bis nur noch eine Zahl übrig bleibt; diese Zahl ist der <i>Wert des Terms</i>. Die letzte Rechenoperation bei der Berechnung eines Terms gibt dem Term seinen Namen (Summe, Differenz, Produkt, Quotient oder Potenz).</p> <p>Einem Term gibt man oft einen Kurznamen, der meistens aus nur einem Buchstaben besteht und möglichst aussagekräftig ist, z.B. V für ein Volumen.</p>	<p>$T = 2^3 - 3^2 = 8 - 9 = -1$ T ist eine Differenz, deren Minuend und Subtrahend jeweils Potenzen sind.</p> <p>$x = (7 - 2 \cdot 5) : (1 - 2^2) = (-3) : (-3) = 1$ x ist ein Quotient.</p> <p>$a = (16 - 3 \cdot 7)^{(3^2-7)} = (-5)^2 = 25$ a ist eine Potenz.</p> <p>V ist das Volumen eines Quaders mit den Kantenlängen 2 cm, 3 cm und 4 cm:</p> $V = 2 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 24 \text{ cm}^3$														
<p>Variable</p> <p>Eine <i>Variable</i> ist ein Platzhalter für eine Zahl, d.h. statt der Variablen kann man eine beliebige Zahl aus einer vorgegebenen <i>Grundmenge</i> G schreiben (das Wort <i>Variable</i> bedeutet <i>Veränderliche</i>). Kommt die gleiche Variable mehrmals in einem Term vor, muss sie jedes mal mit der gleichen Zahl belegt werden.</p> <p>Einen Term mit dem Namen T, der die Variable x enthält, schreibt man so:</p> $T(x) \text{ (man spricht „}T \text{ von } x\text{“).}$ <p>$T(3)$ bedeutet:</p> <p>Ersetze jedes x im Term $T(x)$ durch 3.</p> <p>Die Werte des Terms $T(x)$ stellt man übersichtlich in Form einer <i>Wertetabelle</i> dar: Ausgewählte x-Werte aus der Grundmenge G schreibt man in die erste Zeile und die entsprechenden Termwerte $T(x)$ in die zweite Zeile.</p> <p>Ein Term $T(x)$ hat eine <i>Nullstelle</i> bei x_1, wenn $T(x_1) = 0$.</p> <p>Den Malpunkt vor einer Variablen oder vor einer Klammer darf man weglassen:</p> $3 \cdot x = 3x, \quad 5 \cdot (3 \cdot a - a \cdot b^2 \cdot y^3) = 5(3a - ab^2y^3)$	<p>$T(x) = x^2 - 3 \cdot x$ $T(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$ $T(-2) = (-2)^2 - 3 \cdot (-2) = 4 + 6 = 10$ $T(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$</p> <p>Wertetabelle für $T(x)$:</p> <table border="1" data-bbox="922 1352 1329 1420"> <tr> <td>x</td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>$T(x)$</td> <td>10</td> <td>4</td> <td>0</td> <td>-2</td> <td>-2</td> <td>0</td> </tr> </table> <p>Wegen $T(0) = 0$ und $T(3) = 0$ hat T bei $x_1 = 0$ und bei $x_2 = 3$ Nullstellen.</p> <p>$f(a, b) = a^3 - \frac{3b}{a}$ $f(2, 1) = 2^3 - \frac{3 \cdot 1}{2} = 8 - 1,5 = 6,5$ $f(-2, 5) = (-2)^3 - \frac{3 \cdot 5}{-2} = -8 + 7,5 = -0,5$ $f(1, 0) = 1^3 - \frac{3 \cdot 0}{1} = 1$ $f(0, x) = 0^3 - \frac{3x}{0}$ nicht definiert, da Division durch 0</p> <p>V ist das Volumen eines Quaders mit den Kantenlängen a, b und c:</p> $V(a, b, c) = abc$	x	-2	-1	0	1	2	3	$T(x)$	10	4	0	-2	-2	0
x	-2	-1	0	1	2	3									
$T(x)$	10	4	0	-2	-2	0									

Definitionen und Regeln

Definitionsmenge eines Terms

Ein Term $T(x)$, der Brüche oder Quotienten enthält, ist für diejenigen Werte von x nicht definiert, für die ein Nenner oder Divisor den Wert null annimmt. Die *Definitionsmenge* D_T eines Terms $T(x)$ ist die Menge aller Zahlen aus der Grundmenge G ohne die Nullstellen der Nenner bzw. Divisoren. Ist nichts anderes angegeben, dann verwenden wir als Grundmenge die Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen.

Beispiele

$$T(x) = \frac{2+x}{4-x} + \frac{2}{2x+5}$$

Nullstellen der Nenner:

$$4-x=0 \implies x=x_1=4$$

$$2x+5=0 \implies x=x_2=-2,5$$

$$D_T = G \setminus \{-2,5; 4\}$$

Wie die Definitionsmenge wirklich aussieht, hängt von der Grundmenge ab:

$$G = \mathbb{Q} \implies D_T = \mathbb{Q} \setminus \{-2,5; 4\}$$

$$G = \mathbb{Z} \implies D_T = \mathbb{Z} \setminus \{4\}$$

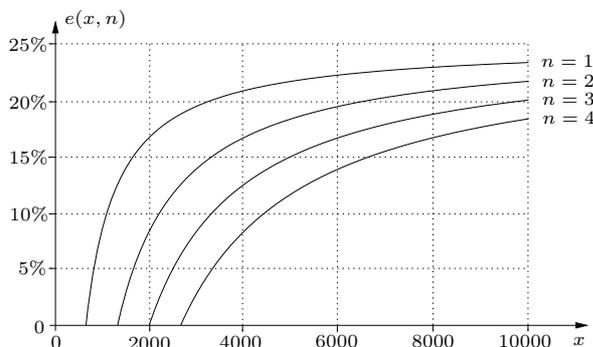
Aufstellen von Termen

Um einen Term zur Berechnung einer bestimmten mathematischen Größe zu finden, stellt man folgende Überlegungen an:

- Welche Variablen braucht man?
- Welche Namen gibt man den Variablen?
- Welche Zahlenbereiche sind für die Variablen sinnvoll?
- Wie berechnet man aus den Variablen die gesuchte Größe?

Wenn man den Term gefunden hat, muss man die Information, die in ihm steckt, verdeutlichen. Dazu erstellt man eine Wertetabelle und veranschaulicht diese Werte in einer Grafik (Balkendiagramm, Koordinatensystem).

Nachfolgende Grafik zeigt den effektiven Steuersatz des nebenstehenden Beispiels für eine, zwei, drei und vier Personen pro Familie:



Das Steuermodell von Kirchhoff (2005)

Vom gesamten Jahreseinkommen einer Familie werden pro Person 8000€ Freibetrag abgezogen, vom Rest sind 25% Steuern zu zahlen. Der effektive Steuersatz gibt an, wieviel Prozent des Einkommens die Steuern ausmachen. Gesucht ist ein Term, der den effektiven Steuersatz aus dem Monatseinkommen berechnet.

- x : Monatseinkommen
- $12x$: Jahreseinkommen
- n : Zahl der Personen in der Familie
- s : zu zahlende Steuern pro Jahr
- e : effektiver Steuersatz

$$s = 25\% \cdot (12x - n \cdot 8000)$$

$$e = \frac{s}{12x} = 25\% \cdot \frac{12x - 8000n}{12x} = 25\% \cdot \left(1 - \frac{2000n}{3x}\right)$$

Diese Formel gilt nur, wenn $12x > 8000n$ ist, für $12x \leq 8000n$ zahlt man keine Steuern:

$$e(x, n) = \begin{cases} 25\% \cdot \left(1 - \frac{8000n}{x}\right) & \text{für } x > \frac{2000n}{3} \\ 0 & \text{für } x \leq \frac{2000n}{3} \end{cases}$$

Die folgende Wertetabelle gibt den effektiven Steuersatz in Prozent an:

x	1000	2000	4000	6000	8000	10000
$n = 1$	8,3	16,7	20,8	22,2	22,9	23,3
$n = 2$	0	8,3	16,7	19,4	20,8	21,7
$n = 3$	0	0	12,5	16,7	18,8	20,0
$n = 4$	0	0	8,3	13,9	16,7	18,3

Definitionen und Regeln	Beispiele
<p>Termumformungen</p> <p>Äquivalente Terme</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Zwei Terme mit Variablen heißen <i>äquivalent</i>, wenn sie für jede Ersetzung der Variablen den gleichen Wert ergeben.</p> </div> <p>$T(x)$ und $F(x)$ sind also äquivalent, wenn für <i>jedes</i> x aus der gemeinsamen Definitionsmenge $T(x) = F(x)$ gilt.</p> <p>Zur Überprüfung der Äquivalenz zweier Terme muss wirklich jedes Element der gemeinsamen Definitionsmenge der beiden Terme eingesetzt werden. Da die Definitionsmenge meistens aus unendlich vielen Elementen besteht, ist diese Art der Überprüfung in der Praxis nicht möglich. In den folgenden Kapiteln lernen wir Methoden kennen, wie man Terme in äquivalente Terme umrechnet (Äquivalenzumformungen).</p>	<p>$T(x) = x^3 - x^2, F(x) = 2x$</p> <p>$T(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 = -1 - 1 = -2$ $F(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$, also $T(-1) = F(-1)$</p> <p>$T(0) = 0^3 - 0^2 = 0$ $F(0) = 2 \cdot 0 = 0$, also $T(0) = F(0)$</p> <p>$T(2) = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$ $F(2) = 2 \cdot 2 = 4$, also $T(2) = F(2)$</p> <p>aber:</p> <p>$T(1) = 1^3 - 1^2 = 1 - 1 = 0$ $F(1) = 2 \cdot 1 = 2$, also $T(1) \neq F(1)$</p> <p>$T(x)$ ist also nicht äquivalent zu $F(x)$.</p> <p>$A(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x + y}, B(x, y) = x - y$</p> <p>$A(2; 1) = \frac{2^2 - 1^2}{2 + 1} = \frac{3}{3} = 1$ $B(2; 1) = 2 - 1 = 1$, also $A(2; 1) = B(2; 1)$</p> <p>Alle weiteren Ersetzungen ergeben ebenfalls $A(x; y) = B(x; y)$, d.h die beiden Terme sind äquivalent (exakter Beweis folgt später).</p>
<p>Zusammenfassen von Termen</p> <p>Zwei Terme heißen <i>gleichartig</i>, wenn sie sich nur in einem Zahlenfaktor (dem <i>Koeffizienten</i>) unterscheiden.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Zwei gleichartige Terme fasst man zusammen, indem man den gemeinsamen Faktor mit Hilfe des Distributivgesetzes (DG) ausklammert.</p> </div> <p>Trick für viele Terme: Den fehlenden Faktor 1 dazuschreiben, z.B.</p> $x^2 = 1 \cdot x^2$	<p>$4x^3, -3x^3$ und x^3 sind gleichartig, die Koeffizienten lauten 4, -3 und 1.</p> <p>Die Terme $2a^2$ und $4a^3$ sind nicht gleichartig.</p> <p>$5x + 2x = (5 + 2)x = 7x$</p> <p>$5a^3 - a^3 = 5 \cdot a^3 - 1 \cdot a^3 = (5 - 1)a^3 = 4a^3$</p> <p>$8x^2 - 12x^2 + x^2 = (8 - 12 + 1)x^2 = (-3)x^2 = -3x^2$</p> <p>$-5z - 4z = (-5)z + (-4)z = [(-5) + (-4)]z = -9z$</p> <p>$4x + 7y - 5x - 3y = (4x - 5x) + (7y - 3y) = -x + 4y$</p> <p>$5a^2x^3 - 4ax^2 + 3a^2x^3 - 3ax^2 = 8a^2x^3 - 7ax^2$</p>
<p>Multiplikation und Division</p> <p>Assoziativgesetz : $abc = (ab)c = a(bc)$</p> <p>Kommutativgesetz : $ab = ba$</p> $a \cdot b : c = \frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = (a : c) \cdot b$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block; margin: 5px 0;">$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block; margin: 5px 0;">$(ab)^n = a^n b^n$</div> $(-1)^n = \begin{cases} +1 & \text{für gerades } n \\ -1 & \text{für ungerades } n \end{cases}$	<p>$3 \cdot 4x = 3 \cdot (4 \cdot x) = (3 \cdot 4) \cdot x = 12x$</p> <p>Vorsicht: $3 \cdot ab \neq 3a \cdot 3b$</p> <p>$3x \cdot 5y = (3 \cdot 5) \cdot (x \cdot y) = 15xy$</p> <p>$4a \cdot 3u \cdot 5a \cdot \frac{1}{10}u^2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 5}{10} \cdot (a \cdot a \cdot u \cdot u^2) = 6a^2u^3$</p> <p>$12a : 4 = (12 : 4)a = 3a$</p> <p>$x^3 \cdot x^5 = x^8$</p> <p>$(2a)^3 = 2^3 a^3 = 8a^3$</p> <p>$2^7 \cdot 5^7 = (2 \cdot 5)^7 = 10^7$</p> <p>$(-1)^9 = -1, (-1)^{24} = 1$</p> <p>$(-2)^9 = [(-1) \cdot 2]^9 = (-1)^9 \cdot 2^9 = -512$</p>

Definitionen und Regeln	Beispiele
<p>Ausmultiplizieren</p> <p>Grundlage für das Ausmultiplizieren sind das Distributivgesetz:</p> $a(b + c) = ab + ac$ <p>und die Vorzeichenregeln</p> $\begin{aligned} (+) \cdot (+) &= (+) \\ (+) \cdot (-) &= (-) \cdot (+) = (-) \\ (-) \cdot (-) &= (+) \end{aligned}$ $\begin{aligned} -a(b - c) &= (-a)(b + (-c)) = \\ &= (-a)b + (-a)(-c) = \\ &= -ab + ac \end{aligned}$	$\begin{aligned} 5(a + 2b) &= 5a + 10b \\ a^2(a^2 - ab + b) &= a^4 - a^3b + a^2b \\ (-3)(5s - 3r) &= (-3) \cdot 5s + (-3) \cdot (-3r) = \\ &= -3(2a - 4b + c - d) = -6a + 12b - 3c + 3d \\ -4x^2(-3xy + 2x^2 - 5x^3y^2) &= 12x^3y - 8x^4 + 20x^5y^2 \\ \frac{3}{4}r^3s^2 \left(\frac{2}{9}rs^2 - \frac{5}{6}r^2s^3 \right) &= \frac{1}{6}r^4s^4 - \frac{5}{8}r^5s^5 \\ -(a - b + c) &= (-1)(a - b + c) = -a + b - c \end{aligned}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>Ein Minuszeichen vor einer Klammer ändert das Vorzeichen jedes Summanden in der Klammer.</p> </div> $u^2v - 2v^2 - (u^2v - v^2) = u^2v - 2v^2 - u^2v + v^2 = -v^2$
<p>Ausmultiplizieren von zwei Summen:</p> $\begin{aligned} (a + b)(c + d) &= (a + b)c + (a + b)d = \\ &= ac + bc + ad + bd \end{aligned}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>Jeder Summand der ersten Klammer wird, unter Berücksichtigung der Vorzeichen, mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert.</p> </div>	$\begin{aligned} (x - 3)(x + 5) &= x^2 - 3x + 5x - 15 = x^2 + 2x - 15 \\ (a - b)(x - y - z) &= ax - bx - ay + by - az + bz \\ (-x - y)(-x - z) &= x^2 + xy + yz + yz \\ \left(\frac{a^2}{2} - \frac{ab}{3} \right) \left(\frac{ab^2}{3} + \frac{a^2b}{2} \right) &= \frac{a^4b}{4} - \frac{a^2b^3}{9} \\ (1 - x)(1 + y)(1 - z) &= (1 - x + y - xy)(1 - z) = \\ &= 1 - x + y - z - xy + xz - yz + xyz \end{aligned}$
<p>Binomische Formeln</p> <p>Ein <i>Binom</i> ist eine Summe mit zwei Summanden, z.B. $a + b$ oder $x - y$.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$ </div>	$\begin{aligned} (2s + 3r)^2 &= 4s^2 + 12sr + 9r^2 \\ (-a - b)^2 &= [(-1)(a + b)]^2 = (-1)^2(a + b)^2 = \\ &= (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3} \right)^2 &= \frac{x^2}{4} - \frac{xy}{3} + \frac{y^2}{9} \\ 2001^2 &= (2000 + 1)^2 = 2000^2 + 2 \cdot 2000 \cdot 1 + 1^2 = \\ &= 4\,000\,000 + 2000 + 1 = 4\,002\,001 \\ 1999^2 &= (2000 - 1)^2 = 2000^2 - 2 \cdot 2000 \cdot 1 + 1^2 = \\ &= 4\,000\,000 - 2000 + 1 = 3\,998\,001 \\ (1 - x)(1 + x) &= 1 - x^2 \end{aligned}$
<p>Ausklammern</p> <p>Das Ausklammern ist eine Anwendung des Distributivgesetzes.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $a - b + c = k \cdot \left(\frac{a}{k} - \frac{b}{k} + \frac{c}{k} \right)$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $a - b + c = \frac{1}{k} \cdot (ka - kb + kc)$ </div>	$\begin{aligned} x^2y + xy^2 - x^2y^2 &= xy(x + y - xy) \\ a^8 + a^7 + a^4 &= a^4(a^4 + a^3 + 1) \\ a^2 - x^2 &= a^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \\ 36x^3 - 48x^2 - 24x &= 12x(3x^2 - 4x - 2) \\ \frac{x}{7} - \frac{xy}{2} + \frac{x^2}{3} &= \frac{x}{42}(6 - 21y + 14x) \end{aligned}$

Definitionen und Regeln

Gleichungen

Eine *Gleichung* für die Variable x besteht aus zwei Termen $T(x)$ und $R(x)$, die durch das Gleichheitszeichen verbunden sind:

$$T(x) = R(x)$$

Von der sprachlichen Struktur her ist eine Gleichung eine Behauptung (Aussage), nämlich die, dass die linke Seite $T(x)$ gleich der rechten Seite $R(x)$ ist. Diese Behauptung kann wahr oder falsch sein, je nachdem, welchen Wert die Variable x annimmt.

Die *Lösungsmenge* L der Gleichung $T(x) = R(x)$ zur *Grundmenge* G besteht aus allen Zahlen $x \in G$, für die $T(x) = R(x)$ eine wahre Aussage ist.

Beispiel: $\underbrace{x^2}_{T(x)} = \underbrace{3x + 10}_{R(x)}, G = \{-2; 0; 1; 2; 5; 6\}$

x	-2	0	1	2	5	6
$T(x)$	4	0	1	4	25	36
$R(x)$	4	10	13	16	25	28

Der Tabelle entnimmt man, dass $T(x) = R(x)$ für $x = -2$ und $x = 5$ eine wahre Aussage ist, für die anderen Werte aus G dagegen nicht \implies

$$L = \{-2; 5\}$$

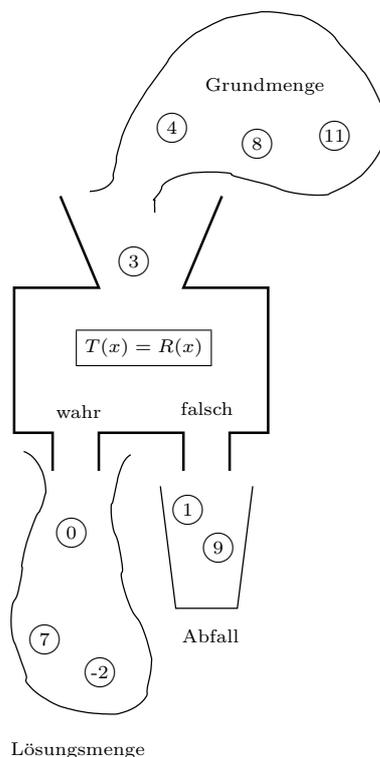
Bei manchen Gleichungen sind die vorkommenden Terme für einige x -Werte nicht definiert (Nullstellen im Nenner). Die Grundmenge ohne diese nichterlaubten Werte heißt *Definitionsmenge* (D) der Gleichung. D ist der Durchschnitt von G und den Definitionsmengen der einzelnen Terme (siehe S. 20).

Ist eine Gleichung für kein x erfüllt, dann ist die Lösungsmenge gleich der leeren Menge.

Ist eine Gleichung für jedes x wahr, dann ist die Lösungsmenge gleich der Definitionsmenge.

Ist bei einer Gleichung keine Grundmenge angegeben, dann nimmt man die größtmögliche Grundmenge an (bei uns \mathbb{Q}).

Beispiele



- $x^2 = x, G = \mathbb{Q} \implies L = \{0; 1\}$
- $x^2 = x, G = \mathbb{N} \implies L = \{1\}$
- $x^2 = x, G = \{2; 4; 7\} \implies L = \{\}$
- $x^2 = -1, G = \mathbb{Q} \implies L = \{\}$
- $x^2 = x \cdot x, G = \mathbb{Z} \implies L = G = \mathbb{Z}$
- $x \cdot 0 = 0, G = \mathbb{Q} \implies L = G = \mathbb{Q}$
- $x \cdot 0 = 7, G = \mathbb{Q} \implies L = \{\}$
- $\frac{x}{x} = 1, G = \mathbb{Q} \implies L = D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
- $\frac{2x - 2}{x - 1} = \frac{2x - 6}{x - 3}, G = \mathbb{Q} \implies L = D = \mathbb{Q} \setminus \{1; 3\}$

A und B seien zwei Aussagen (Aussagesätze, die wahr oder falsch sein können).

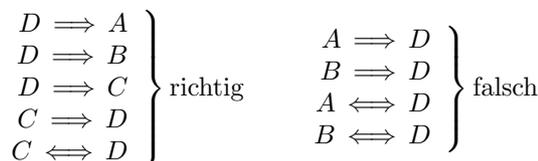
$A \implies B$: „Wenn A , dann B “ oder genauer „Wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr“

$A \longleftarrow B$: „Wenn B , dann A “

$A \iff B$: „ A genau dann wenn B “
 A und B sind gleichwertig
 A ist äquivalent zu B

x sei eine natürliche Zahl.

- A = „2 ist Teiler von x “
- B = „3 ist Teiler von x “
- C = „2 ist Teiler von x und 3 ist Teiler von x “
- D = „6 ist Teiler von x “



Definitionen und Regeln

Äquivalenzumformungen von Gleichungen

Zwei Gleichungen mit gleicher Grundmenge heißen *äquivalent*, wenn sie die gleiche Lösungsmenge besitzen. Eine *Äquivalenzumformung* verwandelt eine Gleichung in eine äquivalente Gleichung. Zwischen äquivalenten Gleichungen schreibt man „ \Leftrightarrow “.

Eine Gleichung geht in eine äquivalente Gleichung über, wenn man auf beiden Seiten den gleichen Term addiert oder von beiden Seiten den gleichen Term subtrahiert:

$$\begin{aligned} T(x) &= R(x) \\ \Leftrightarrow T(x) + S(x) &= R(x) + S(x) \\ \Leftrightarrow T(x) - S(x) &= R(x) - S(x) \end{aligned}$$

Eine Gleichung geht in eine äquivalente Gleichung über, wenn man beide Seiten mit dem gleichen Term ($\neq 0$) multipliziert oder beiden Seiten durch den gleichen Term ($\neq 0$) dividiert. Für $S(x) \neq 0$ gilt also:

$$\begin{aligned} T(x) &= R(x) \\ \Leftrightarrow T(x) \cdot S(x) &= R(x) \cdot S(x) \\ \Leftrightarrow \frac{T(x)}{S(x)} &= \frac{R(x)}{S(x)} \end{aligned}$$

$x + a = b \Leftrightarrow x = b - a$
$x - a = b \Leftrightarrow x = b + a$

Für $a \neq 0$ gilt:

$x \cdot a = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$
$\frac{x}{a} = b \Leftrightarrow x = b \cdot a$

$ax = b, \quad G = \mathbb{Q} \implies D = \mathbb{Q}$		
$a \neq 0$	$a = 0, b \neq 0$	$a = 0, b = 0$
$L = \left\{ \frac{a}{b} \right\}$	$L = \{ \}$	$L = \mathbb{Q}$

Lineare Gleichungen

Eine Gleichung heißt *linear*, wenn die Unbekannte x nur in Termen der Form ax vorkommt. Es dürfen keine Produkte von Termen auftreten, die beide x enthalten, es dürfen keine Potenzen x^n mit $n \geq 2$ dabei sein und x darf nicht in Nennern oder Divisoren stehen.

Beispiele

Jede Gleichung der Form $T(x) = R(x)$ kann in der Form $G(x) = 0$ geschrieben werden, denn

$$\begin{aligned} T(x) = R(x) & \quad | - R(x) \\ \Leftrightarrow T(x) - R(x) &= R(x) - R(x) \\ \Leftrightarrow \underbrace{T(x) - R(x)}_{G(x)} &= 0 \end{aligned}$$

Das *Umstellen* von Gleichungen ist die konsequente Anwendung von Äquivalenzumformungen:

$$\begin{aligned} x + a = b & \quad | - a \\ \Leftrightarrow x + a - a &= b - a \\ \Leftrightarrow x &= b - a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot a = b & \quad | : a \\ \Leftrightarrow x \cdot a : a &= b : a \\ \Leftrightarrow x = b : a &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Für die folgenden Beispiele sei $D = \mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} x + 9 = 7 & \Leftrightarrow x = 7 - 9 = -2 \implies L = \{-2\} \\ x - 3 = -5 & \Leftrightarrow x = -5 + 3 = -2 \implies L = \{-2\} \\ 3x = 18 & \Leftrightarrow x = \frac{18}{3} = 6 \implies L = \{6\} \\ \frac{x}{7} = 3 & \Leftrightarrow x = 3 \cdot 7 = 21 \implies L = \{21\} \end{aligned}$$

Für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt:

$$\frac{a}{x} = b \Leftrightarrow a = b \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{a}{b}$$

$\frac{a}{x} = b, \quad G = \mathbb{Q} \implies D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$			
$a \neq 0, b \neq 0$	$a = 0, b \neq 0$	$a \neq 0, b = 0$	$a = 0, b = 0$
$L = \left\{ \frac{a}{b} \right\}$	$L = \{ \}$	$L = \{ \}$	$L = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

lineare Gleichungen

$$\begin{aligned} 5x &= 3 \\ 11x - 5 - 3x &= 2x - 8 - 3x \\ 5(3 - 7x) &= 9(x - 8) \end{aligned}$$

nichtlineare Gleich.

$$\begin{aligned} x^2 &= 9 \\ \frac{3}{x-1} &= 5x \\ x^5 - x^3 &= 3x - 8 \end{aligned}$$

Definitionen und Regeln	Beispiele												
<p>Strategie zum Lösen linearer Gleichungen</p> <ul style="list-style-type: none"> • Wenn erforderlich, beide Gleichungsseiten vereinfachen (Ausmultiplizieren, Zusammenfassen). • Alle Terme mit der Unbekannten nach links, alle anderen Terme nach rechts. • Zusammenfassen, bis die Form $ax = b$ erreicht ist. <p>Manche nichtlinearen Gleichungen können durch Äquivalenzumformungen auf lineare Gleichungen zurückgeführt werden.</p>	<p>Für die folgenden Beispiele ist $G = \mathbb{Q}$:</p> $\begin{aligned} -8x + 3 &= 1 & -3 \\ \Leftrightarrow -8x &= -2 & : (-8) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$ $\begin{aligned} 5x - 8 - 9x &= 3(2 - 3x) - 4x \\ \Leftrightarrow -4x - 8 &= 6 - 13x & + 13x + 8 \\ \Leftrightarrow 9x &= 14 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{14}{9} \end{aligned}$ $\begin{aligned} (x - 1)(x + 2) &= (x - 3)(x - 4) \\ \Leftrightarrow x^2 + x - 2 &= x^2 - 7x + 12 & - x^2 + 7x + 2 \\ \Leftrightarrow 8x &= 14 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{14}{8} = \frac{7}{4} \end{aligned}$												
<p>Textaufgaben</p> <ul style="list-style-type: none"> • Variablen definieren (hinschreiben, welche Bedeutung die Variablen haben). • Gleichung aufstellen, die dem Angabentext entspricht (noch nichts umstellen oder schon ausrechnen). • Gleichung lösen. • Lösungen interpretieren, Probe. 	<p>Eine Mutter sagt zu ihrer Tochter: „Heute bin ich genau viermal so alt wie du, vor zwei Jahren war ich noch fünfmal so alt wie du es damals warst.“ Wie alt sind Mutter und Tochter heute?</p> <p>Festlegung der Variablen:</p> <p>Alter der Tochter heute : t Alter der Mutter heute : $m = 4t$ Alter der Tochter vor 2 a : $t - 2$ Alter der Mutter vor 2 a : $m - 2 = 4t - 2$</p> $\begin{aligned} 4t - 2 &= 5(t - 2) \\ \Leftrightarrow 4t - 2 &= 5t - 10 & - 4t + 10 \\ \Leftrightarrow t &= 8 \end{aligned}$ <p>Die Tochter ist heute 8 Jahre alt, die Mutter 32. Probe: Vor zwei Jahren: Tochter 6, Mutter 30 $5 \cdot 6 = 30$</p>												
<p>Mittelwerte</p> <p>Das <i>arithmetische Mittel</i> (Durchschnitt) der Größen a_1, a_2, \dots, a_n ist</p> $\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ <p>Besteht eine Ansammlung von Daten aus z_1 mal dem Wert a_1, z_2 mal dem Wert a_2, \dots, z_n mal dem Wert a_n, dann ist das arithmetische Mittel</p> $\bar{a} = \frac{z_1 a_1 + z_2 a_2 + \dots + z_n a_n}{z_1 + z_2 + \dots + z_n}$	<p>Notenverteilung einer Schulaufgabe:</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">5</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">6</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">7</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">8</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">6</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td> </tr> </table> <p>Die Durchschnittsnote ist</p> $\begin{aligned} N &= \frac{1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{1 + 4 + 7 + 8 + 6 + 3} = \\ &= \frac{110}{29} \approx 3,79 \end{aligned}$	1	2	3	4	5	6	1	4	7	8	6	3
1	2	3	4	5	6								
1	4	7	8	6	3								

Geometrie

Definitionen und Regeln

Elemente der Geometrie

Eine *Gerade* ist eine nach beiden Seiten unendlich lange, gerade Linie.

Durch zwei Punkte A und B lässt sich genau eine Gerade $g = AB$ zeichnen.

Die *Halbgerade* $[EF$ besteht aus allen Punkten der Geraden EF, die auf der gleichen Seite von E liegen wie F. Der Randpunkt E gehört zu $[EF$. Sind C und D zwei Punkte, dann ist die *Strecke* $[CD$ der Teil der Geraden CD zwischen den Punkten C und D. Die Randpunkte C und D gehören zur Strecke $[CD$.

$$\overline{CD} = \text{Länge der Strecke } [CD]$$

Geraden und Strecken sind Punktmenge.

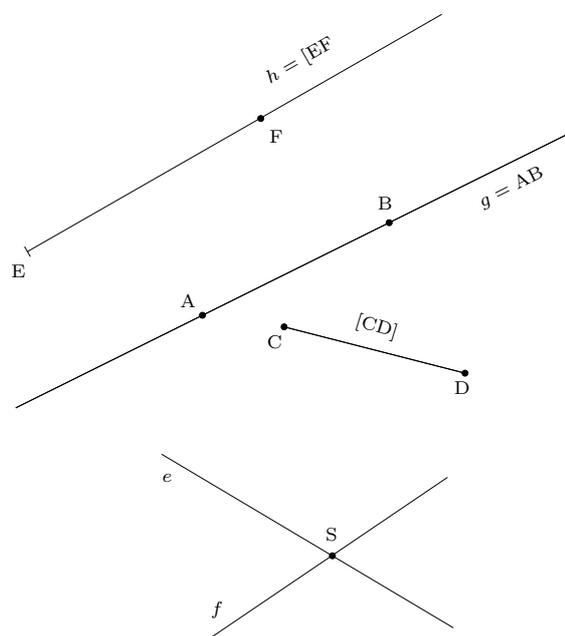
P ist ein Punkt der Geraden g : $P \in g$

Der Schnittpunkt der Geraden e und f ist S:

$$e \cap f = \{S\}$$

$$[CD] = [CD \cap [DC]$$

Beispiele



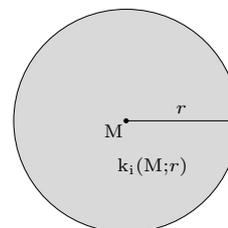
Der Kreis

Der Kreis (die Kreislinie) um den *Mittelpunkt* M mit *Radius* r ist die Menge aller Punkte P mit $\overline{MP} = r$:

$$k(M;r) = \{P \mid \overline{MP} = r\}$$

Kreisinneres : $k_i(M;r) = \{P \mid \overline{MP} < r\}$

Kreisäußeres : $k_a(M;r) = \{P \mid \overline{MP} > r\}$



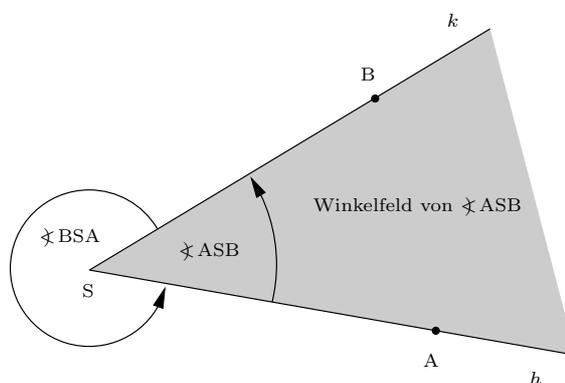
Winkel

Ein *Winkel* ist ein geordnetes Paar von Halbgeraden mit dem gleichen Anfangspunkt. Die Halbgeraden sind die *Schenkel*, der gemeinsame Punkt ist der *Scheitel* des Winkels.

Beispiel: $h = [SA, k = [SB$

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle(h, k), \quad \sphericalangle BSA = \sphericalangle(k, h)$$

Dreht man die erste Halbgerade eines Winkels im *Gegenuhreigersinn* um den Scheitel bis zur zweiten Halbgeraden, dann überstreicht sie das *Winkelfeld* dieses Winkels.



Definitionen und Regeln

Winkelmaße

In der 10. Klasse wird bewiesen: Die Kreislinie mit Radius r hat die Länge

$$U = 2\pi r \quad \text{mit} \quad \pi \approx 3,14159$$

U heißt *Umfang* des Kreises.

Definition: $1^\circ = \frac{\pi}{180}$

$$\implies \pi = 180^\circ, \quad 2\pi = 360^\circ, \quad U = 360^\circ \cdot r$$

Ein Kreis mit dem Radius $r = 1$ (wir verzichten hier auf eine Längeneinheit) heißt *Einheitskreis*.

Der Einheitskreis hat den Umfang

$$U = 2\pi = 360^\circ.$$

Das Winkelfeld eines Winkels schneidet aus dem Einheitskreis um den Scheitel einen Bogen der Länge b heraus. Diese Bogenlänge verwenden wir als Maß des Winkels. Dem vollen Winkel entspricht der ganze Umfang als Bogenlänge, d.h. der volle Winkel hat das Maß 360° .

Winkel werden mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet. Dabei setzt man meistens (etwas schlampig!) den Winkel (das geordnete Paar von Halbgeraden) und das Winkelmaß (eine Zahl) gleich, z.B. $\alpha = \sphericalangle ASB = 40^\circ$.

Winkelname	Bereich
spitzer Winkel	$0 < \alpha < 90^\circ$
rechter Winkel	$\alpha = 90^\circ$
stumpfer Winkel	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$
gestreckter Winkel	$\alpha = 180^\circ$
überstumpfer Winkel	$180^\circ < \alpha < 360^\circ$
voller Winkel	$\alpha = 360^\circ$

Verfeinerung des Winkelmaßes:

Winkelminute: $1' = \frac{1^\circ}{60}$

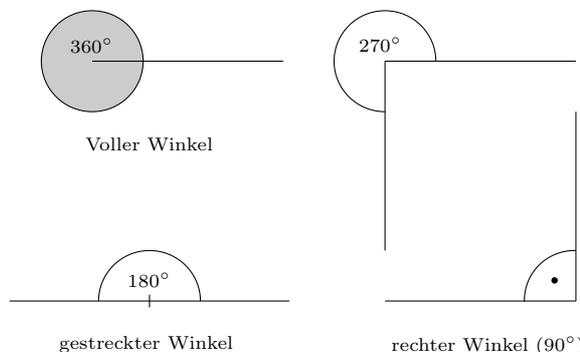
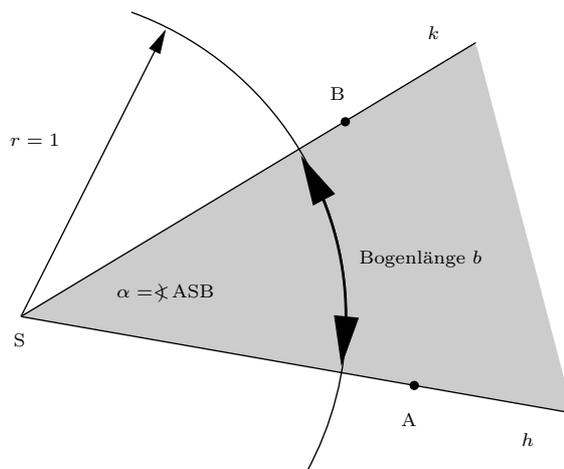
Winkelsekunde: $1'' = \frac{1'}{60} = \frac{1^\circ}{3600}$

$$1^\circ = 60' = 3600''$$

$$28^\circ 48' 36'' = 28^\circ + \frac{48^\circ}{60} + \frac{36^\circ}{3600} = 28,81^\circ$$

$$79,54^\circ = 79^\circ + 0,54 \cdot 60' = 79^\circ + 32,4' = 79^\circ 32' + 0,4 \cdot 60'' = 79^\circ 32' 24''$$

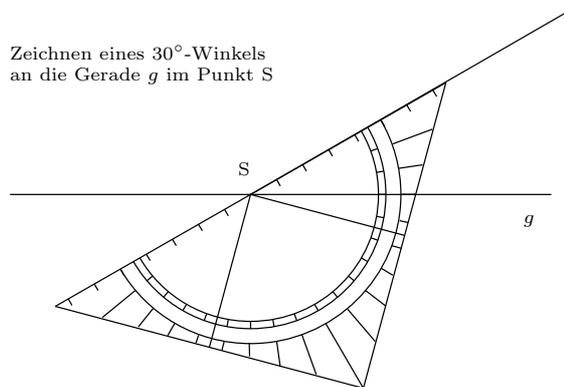
Beispiele



Die wichtigsten griechischen Buchstaben:

α	Alpha	φ	Phi
β	Beta	ψ	Psi
γ	Gamma	π	Pi
δ	Delta	σ	Sigma
ε	Epsilon	ρ	Rho
λ	Lambda	μ	Mu
ω	Omega	ϑ	Theta
η	Eta	τ	Tau

Zeichnen eines 30° -Winkels an die Gerade g im Punkt S



Definitionen und Regeln

Winkel an einer Geradenkreuzung

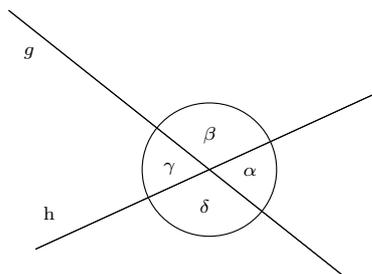
Zwei gegenüberliegende Winkel an einer Geradenkreuzung heißen *Scheitelwinkel*, zwei benachbarte Winkel heißen *Nebenwinkel*. In nebenstehender Abbildung sind die Paare (α, γ) und (β, δ) Scheitelwinkel, die Paare (α, β) , (β, γ) , (γ, δ) und (δ, α) sind Nebenwinkel. Zwei Nebenwinkel bilden zusammen einen gestreckten Winkel:

Nebenwinkel ergänzen sich zu 180° .

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \beta = 180^\circ &\implies \alpha = 180^\circ - \beta \\ \gamma + \beta = 180^\circ &\implies \gamma = 180^\circ - \beta \end{aligned} \right\} \implies \alpha = \gamma$$

Scheitelwinkel sind gleich.

Beispiele



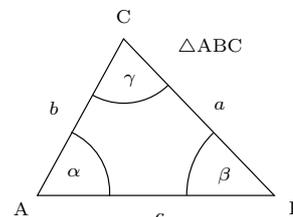
$$\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = \gamma, \quad \beta = \delta$$

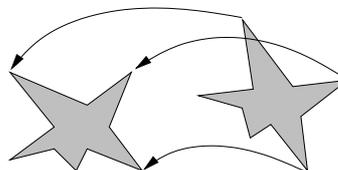
Kongruente Dreiecke

Standardbezeichnungen am Dreieck

Die Ecken werden mit Großbuchstaben, die gegenüberliegenden Seiten mit dem entsprechenden Kleinbuchstaben bezeichnet. Den Winkel (genauer Innenwinkel) an einer Ecke bezeichnet man, wenn möglich, mit dem entsprechenden griechischen Buchstaben.



Zwei kongruente Figuren:



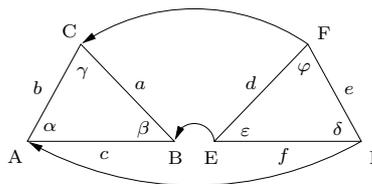
Kongruente Figuren

Zwei Figuren heißen *kongruent* oder *deckungsgleich*, wenn man sie passgenau aufeinander legen kann. Kongruente Figuren kann man durch eine Bewegung ineinander überführen.

Zwischen kongruente Figuren schreibt man das Zeichen „ \cong “. Bei der Schreibweise ist zu beachten, dass einander entsprechende Punkte der kongruenten Figuren an entsprechenden Stellen stehen.

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

bedeutet: $A \hat{=} D, B \hat{=} E, C \hat{=} F$
 $a = d, b = e, c = f$
 $\alpha = \delta, \beta = \varepsilon$ und $\gamma = \varphi$.

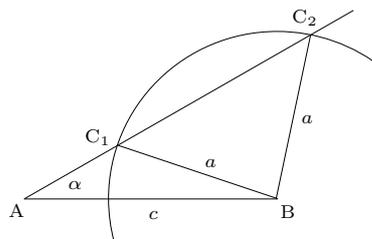


Kongruenzaxiome

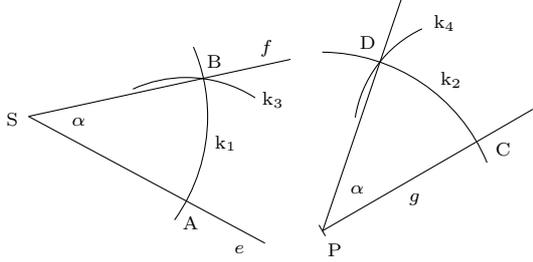
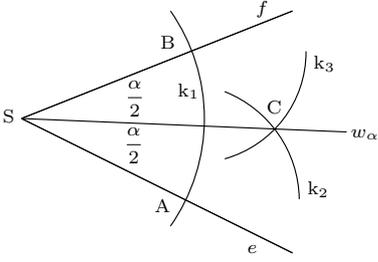
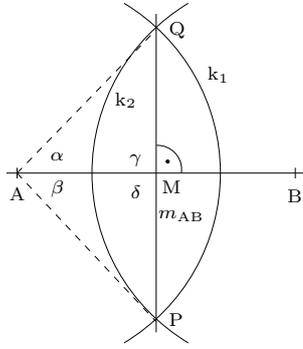
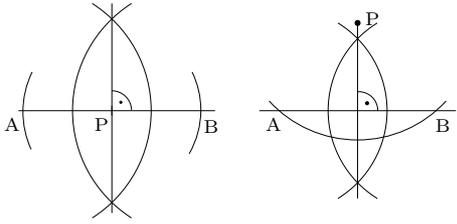
Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in

1. drei Seiten (sss)
2. einer Seite und den anliegenden Winkeln (wsw)
3. zwei Seiten und dem Zwischenwinkel (sws)
4. zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite (ssW)

übereinstimmen.



Die beiden Dreiecke $\triangle ABC_1$ und $\triangle ABC_2$ stimmen in $a = 4\text{ cm}$, $c = 6\text{ cm}$ und in $\alpha = 30^\circ$ überein, sind aber trotzdem nicht kongruent (α ist der Gegenwinkel der *kleineren* Seite, da $a < c$).

Definitionen und Regeln	Beispiele
<p>Konstruktionen</p> <p>Winkelübertragung</p> <p>Gegeben ist der Winkel $\alpha = \sphericalangle(e, f)$ mit dem Scheitel S und die Halbgerade g mit dem Endpunkt P. α soll so an g angetragen werden, dass P der Scheitel und g ein Schenkel des Winkels ist:</p> <p>$k_1 = k(S; r)$ (r beliebig)</p> <p>$\{A\} = e \cap k_1, \{B\} = f \cap k_1$</p> <p>$k_2 = k(P; r), \{C\} = g \cap k_2$</p> <p>$k_3 = k(A; r = \overline{AB}), k_4 = k(C; r = \overline{AB})$</p> <p>$\{D\} = k_2 \cap k_4, [PD \text{ ist der gesuchte Schenkel.}$</p>	<p>Die folgende Konstruktion beruht auf der Kongruenz $\triangle SAB \cong \triangle PCD$ (sss).</p> 
<p>Winkelhalbierende</p> <p>Gegeben ist der Winkel $\alpha = \sphericalangle(e, f)$ mit dem Scheitel S. Gesucht ist eine Gerade w_α durch S, die α in zwei gleiche Winkel zerlegt:</p> <p>$k_1 = k(S; r)$ (r beliebig)</p> <p>$\{A\} = e \cap k_1, \{B\} = f \cap k_1$</p> <p>$k_2 = k(A; r')$ (r' genügend groß)</p> <p>$k_3 = k(B; r') \{C\} = k_2 \cap k_3$</p> <p>$w_\alpha = SC$ ist die gesuchte Winkelhalbierende.</p>	<p>Die folgende Konstruktion beruht auf der Kongruenz $\triangle SAC \cong \triangle SBC$ (sss).</p> 
<p>Lotkonstruktionen</p> <p>Konstruktion der Mittelsenkrechten m_{AB} der Strecke $[AB]$:</p> <p>$k_1 = k(A; r)$ ($r > \frac{\overline{AB}}{2}$, sonst beliebig)</p> <p>$k_2 = k(B; r), k_1 \cap k_2 = \{P, Q\}$</p> <p>$m_{AB} = PQ$</p> <p>$\{M\} = m_{AB} \cap AB$ ist der Mittelpunkt von $[AB]$.</p> <p>Senkrechte auf g in $P \in g$ errichten:</p> <p>Ein Kreis um P mit beliebigem Radius schneidet g in A und in B. Dann Mittelsenkrechte auf $[AB]$.</p> <p>Lot von $P \notin g$ auf g fällen:</p> <p>Ein Kreis um P mit genügend großem Radius schneidet g in A und in B. Dann Mittelsenkrechte auf $[AB]$.</p>	 <p>Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion:</p> <p>$\triangle ABQ \cong \triangle ABP$ (sss) $\implies \alpha = \beta$</p> <p>$\triangle AMQ \cong \triangle AMP$ (sws) $\implies \gamma = \delta$</p> <p>Nebenwinkel: $\gamma + \delta = 2\gamma = 180^\circ, \gamma = 90^\circ$</p> 

Definitionen und Regeln

Parallelen

Winkel an einer Doppelkreuzung

In nebenstehender Abbildung heißen:

Stufenwinkel	α und ε , β und φ γ und μ , δ und σ
Nachbarwinkel	α und σ , β und μ
Wechselwinkel oder Z-Winkel	α und μ , β und σ

Zwei Geraden g und h einer Ebene heißen *parallel*, wenn sie keinen Schnittpunkt haben oder gleich sind.

$$g \parallel h \iff g \cap h = \{\} \text{ oder } g = h$$

Mit den Kongruenzsätzen kann man beweisen:

Werden zwei verschiedene Geraden g und h von einer dritten Geraden geschnitten und sind zwei Stufenwinkel gleich, dann ist g parallel zu h .

Die Umkehrung dieses Satzes ist mit den bisherigen Axiomen nicht beweisbar. Daher postulierte schon EUKLID (365-300v.Chr.) das Axiom:

Werden zwei verschiedene parallele Geraden g und h von einer dritten Geraden geschnitten, dann sind Stufenwinkel gleich. (**Parallelenaxiom**)

Aus dem Parallelenaxiom folgt:

Zu $P \notin g$ gibt es genau eine Gerade h mit
 $h \parallel g$ und $P \in h$

Werden zwei verschiedene Geraden g und h von einer dritten Geraden geschnitten, dann gilt:

g und h sind parallel genau dann, wenn

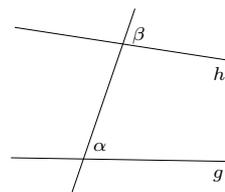
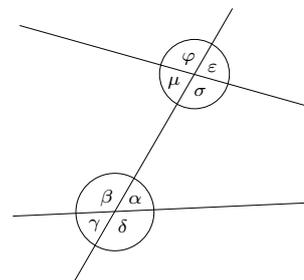
- Stufenwinkel gleich sind
- Z-Winkel (Wechselwinkel) gleich sind
- Nachbarwinkel sich zu 180° ergänzen.

Parallelen konstruiert man durch Winkelübertragung unter Ausnutzung des Z-Winkel- oder Stufenwinkelsatzes.

Spezialfall des Stufenwinkelsatzes:

Zwei Geraden sind parallel, wenn beide auf einer dritten Geraden senkrecht stehen.

Beispiele



Beweisbar:

$$\alpha = \beta \implies g \parallel h$$

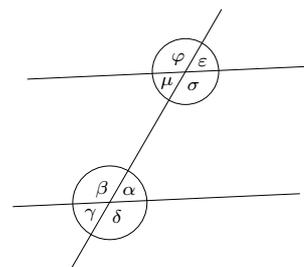
Nicht beweisbar:

$$g \parallel h \implies \alpha = \beta$$

(Parallelenaxiom)

Zusammenfassend:

$$\alpha = \beta \iff g \parallel h$$

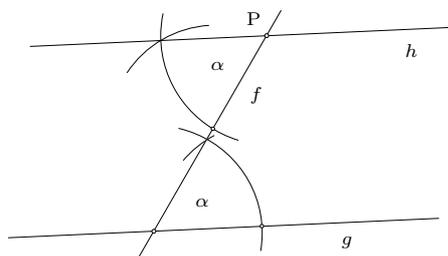


$$g \parallel h \iff \alpha = \varepsilon \text{ oder } \gamma = \mu \text{ oder } \dots$$

$$\iff \alpha = \mu \text{ oder } \beta = \sigma$$

$$\iff \alpha + \sigma = 180^\circ \text{ oder } \beta + \mu = 180^\circ$$

Konstruktion der Parallelen zu g durch P :



Definitionen und Regeln

Dreiecke

Winkelsumme im Dreieck

Aus dem Z-Winkelsatz folgt, dass α , β und γ zusammen einen gestreckten Winkel ergeben:

Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks ist 180° .

Die Nebenwinkel der Innenwinkel eines Dreiecks heißen *Außenwinkel*.

In nebenstehender Abbildung sind α' , β' und γ' Außenwinkel.

Ein Außenwinkel im Dreieck ist gleich der Summe der nichtanliegenden Innenwinkel. (**Außenwinkelsatz**)

$$\alpha' = \beta + \gamma, \quad \beta' = \alpha + \gamma, \quad \gamma' = \alpha + \beta$$

Die Summe der Innenwinkel eines n -Ecks ist $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$.

Kennt man in einem Dreieck eine Seite und zwei beliebige Winkel, dann kennt man wegen der Winkelsumme auch den dritten Winkel. Somit sind die beiden der Seite anliegenden Winkel bekannt. Es gilt also ein weiterer Kongruenzsatz:

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und zwei entsprechenden Winkeln übereinstimmen. (wws)

Besondere Linien im Dreieck

Das Lot von einer Ecke eines Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite heißt *Höhe*. Ist F_C der Fusspunkt des Lotes von C auf AB , dann ist $h_c = [CF_C]$ die zu C gehörende Höhe.

$$h_a = [AF_A], \quad h_b = [BF_B], \quad h_c = [CF_C]$$

Die Höhen (bzw. ihre Verlängerungen) schneiden sich in einem Punkt.

M_A , M_B und M_C sind die Mittelpunkte der Dreiecksseiten. *Seitenhalbierende*:

$$s_a = [AM_A], \quad s_b = [BM_B], \quad s_c = [CM_C]$$

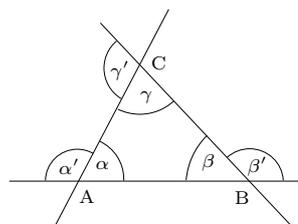
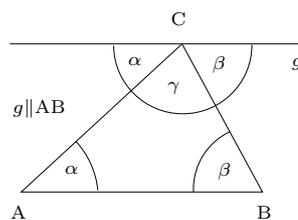
Die Seitenhalbierenden schneiden sich in einem Punkt.

Die Mittelsenkrechten m_a , m_b und m_c schneiden sich in einem Punkt, dem *Umkreismittelpunkt* des Dreiecks.

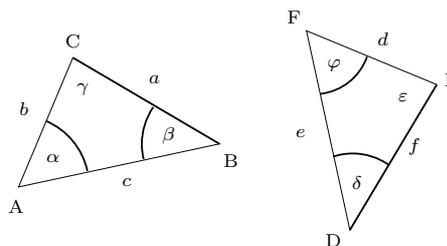
Winkelhalbierende:

$$w_\alpha = [AW_A], \quad w_\beta = [BW_B], \quad w_\gamma = [CW_C]$$

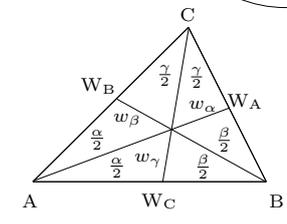
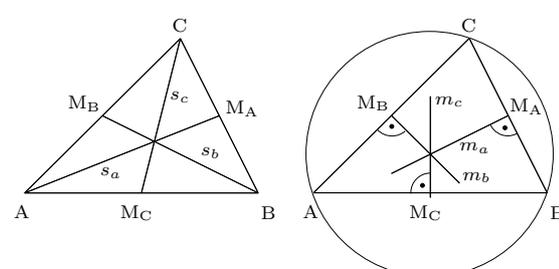
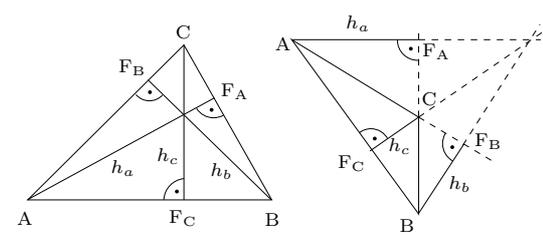
Beispiele



n	3	4	5	12	100
S_n	180°	360°	540°	1800°	17640°



$$\left. \begin{matrix} a = f \\ \alpha = \varphi \\ \beta = \delta \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle FDE$$



Definitionen und Regeln

Das gleichschenklige Dreieck

Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten heißt *gleichschenkelig*. Die beiden gleich langen Seiten sind die *Schenkel*, die dritte Seite ist die *Basis*. Die der Basis gegenüberliegende Ecke heißt *Spitze* des gleichschenkligen Dreiecks.

Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich.

Es gilt auch die Umkehrung:

Ein Dreieck mit zwei gleichen Winkeln ist gleichschenkelig.

Zusammengefasst:

$$a = b \iff \alpha = \beta$$

Das gleichseitige Dreieck

Ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten heißt *gleichseitig*. Im gleichseitigen Dreieck ist jede Seite Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, d.h. je zwei Winkel sind gleich. Somit sind alle drei Winkel gleich.

Im gleichseitigen Dreieck sind alle Innenwinkel gleich 60° .

Im gleichseitigen Dreieck fallen alle entsprechenden Höhen, Seiten- und Winkelhalbierenden zusammen.

Durch Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks kann man einen 60° -Winkel konstruieren. Durch fortgesetzte Winkelhalbierung und Winkelübertragungen ergibt sich:

Jeder Winkel der Form

$$\alpha = \frac{m}{2^n} \cdot 60^\circ$$

mit ganzen Zahlen m und n ist konstruierbar.

Spezialfall: $90^\circ = \frac{3}{2^1} \cdot 60^\circ$

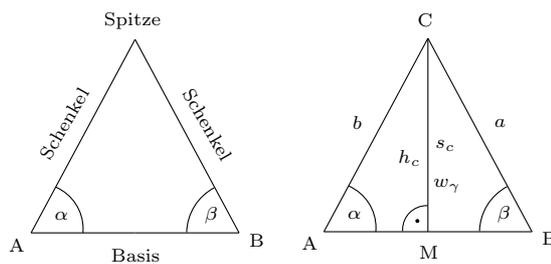
Sind α und β konstruierbar, dann ist auch

$$\gamma = \frac{m}{2^n} \cdot \alpha + \frac{r}{2^s} \cdot \beta$$

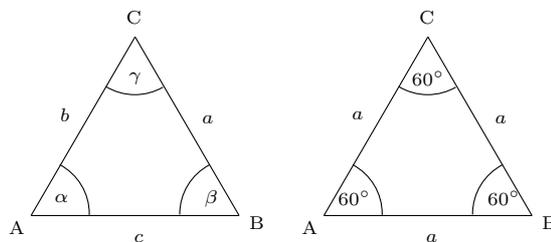
mit ganzen Zahlen m, n, r und s konstruierbar.

Mit Methoden, die wir später kennen lernen, kann man auch den 72° -Winkel und viele andere Winkel konstruieren.

Beispiele



Im gleichschenkligen Dreieck fallen die Höhe zur Basis, die Seitenhalbierende der Basis und die Winkelhalbierende des Winkels an der Spitze zusammen.

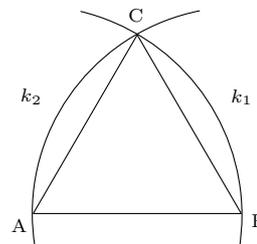
$$a = b \iff h_c = s_c = w_\gamma$$


$$a = b = c \iff \alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$$

Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks $\triangle ABC$, wenn $[AB]$ gegeben ist:

$$k_1 = k(A; r = \overline{AB})$$

$$k_2 = k(B; r = \overline{AB})$$



Beispiele für konstruierbare Winkel:

$$30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ, \quad 15^\circ = \frac{1}{2^2} \cdot 60^\circ, \quad 7,5^\circ = \frac{1}{2^3} \cdot 60^\circ$$

$$75^\circ = 60^\circ + \frac{1}{2^2} \cdot 60^\circ = \frac{5}{2^2} \cdot 60^\circ$$

$$97,5^\circ = 90^\circ + \frac{1}{2^3} \cdot 60^\circ = \frac{13}{2^3} \cdot 60^\circ$$

$$4,5^\circ = \frac{1}{2^4} \cdot 72^\circ$$

$$3^\circ = \frac{1}{2^3} \cdot 60^\circ - \frac{1}{2^4} \cdot 72^\circ$$

Nicht konstruierbar sind z.B. die folgenden Winkel:

$1^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 40^\circ$ und 80° .

Definitionen und Regeln

Lagebeziehungen im Dreieck

In einem Dreieck liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber und umgekehrt.

$$b < c \iff \beta < \gamma$$

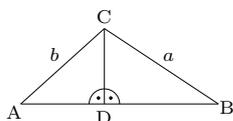
Da im rechtwinkligen Dreieck der rechte Winkel der größte Winkel ist, folgt:

Im rechtwinkligen Dreieck liegt dem rechten Winkel die größte Seite gegenüber.

$$\overline{AD} < b \text{ und } \overline{DB} < a$$

$$c = \overline{AB} = \underbrace{\overline{AD}}_{< b} + \underbrace{\overline{DB}}_{< a}$$

$$\implies c < a + b$$



In einem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite.

In einem Dreieck ist der Betrag der Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte Seite.

Die Strecke [AB] ist die kürzeste Verbindung zwischen A und B.

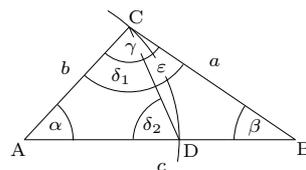
Beispiele

$\triangle ABC$ mit $b < c$:

$$\overline{AD} = b \implies \delta_1 = \delta_2$$

Außenwinkelsatz

$$\implies \delta_2 = \beta + \varepsilon$$



$$\beta = \delta_2 - \varepsilon = \delta_1 - \varepsilon = (\gamma - \varepsilon) - \varepsilon = \gamma - 2\varepsilon < \gamma$$

Damit ist bewiesen: $b < c \implies \beta < \gamma$

Jetzt sei $\beta < \gamma$ gegeben. Es gibt drei Möglichkeiten:

1. $b > c \implies \beta > \gamma$ (Widerspruch)
2. $b = c \implies \beta > \gamma$ (Widerspruch)
3. $b < c \implies \beta < \gamma$ (kein Widerspruch)

Damit ist bewiesen: $\beta < \gamma \implies b < c$

Beispiel: $\triangle ABC$ mit $\alpha = 70^\circ, \beta = 80^\circ, \gamma = 30^\circ$

$$\implies \gamma < \alpha < \beta \implies c < a < b$$

Im $\triangle ABC$ gilt:

$$\left. \begin{aligned} b + c > a &\implies a - b > c \\ a + c > b &\implies a - b > -c \end{aligned} \right\} \implies |a - b| < c$$

Beispiel: Es gibt kein Dreieck $\triangle ABC$ mit $a = 10, b = 7$ und $c = 2$, da $|a - b| = 3 > 2 = c$.

Der Abstand

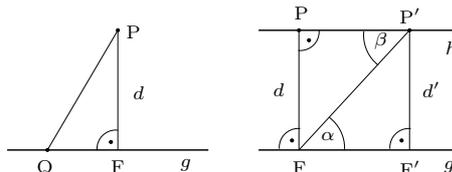
P ist ein Punkt, der nicht auf der Geraden g liegt und F ist der Fußpunkt des Lotes von P auf g . Weiter ist Q ein beliebiger Punkt auf g , der nicht gleich F ist:

$$\implies \overline{PQ} > \overline{PF}$$

Die Länge \overline{PF} des Lotes von P auf g ist die kürzeste Verbindung zwischen P und irgend einem Punkt auf g . \overline{PF} heißt *Abstand* des Punktes P von g :

$$d(P; g) = \overline{PF}$$

Jeder Punkt P einer Geraden h hat zu einer dazu parallelen Geraden g den gleichen Abstand d . d heißt Abstand der parallelen Geraden.



$$\left. \begin{aligned} \overline{FP'} &= \overline{FP} \\ \alpha &= \beta \quad (\text{Z-Winkel}) \\ 90^\circ &= 90^\circ \quad (\text{Abstand}) \end{aligned} \right\} \implies \triangle FP'P \cong \triangle P'FF' \implies d = d'$$

Zum Sprachgebrauch:

Eine *Entfernung* gibt es zwischen zwei Punkten, einen *Abstand* gibt es zwischen einem Punkt und einer Geraden oder zwischen zwei Parallelen.

Definitionen und Regeln

Der Thaleskreis

Ist M der Mittelpunkt der Strecke [AB], dann heißt der Kreis um M mit Radius $r = \frac{AB}{2}$ *Thaleskreis* über [AB]. Mit TK_{AB} bezeichnen wir den Thaleskreis ohne die Endpunkte der Strecke:

$$TK_{AB} = k \left(M; r = \frac{AB}{2} \right) \setminus \{A; B\}$$

Damit gilt der Satz des THALES:

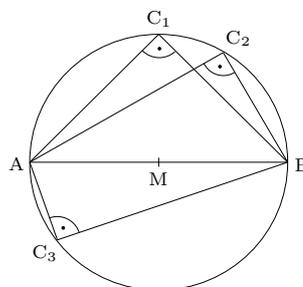
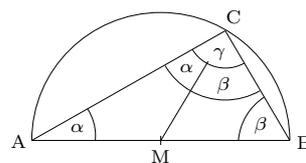
In einem Dreieck $\triangle ABC$ gilt

$$\gamma = 90^\circ \iff C \in TK_{AB}$$

Beispiele

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$$\gamma = \alpha + \beta = 90^\circ$$



Symmetrie

Achsensymmetrie und Achsenspiegelung

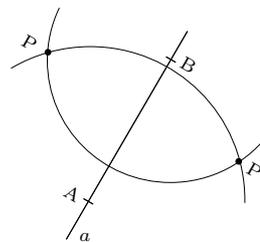
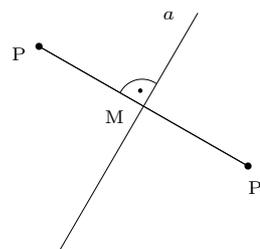
a ist eine Gerade, die *Symmetrieachse*.

P und P' heißen symmetrisch bezüglich der Achse a , wenn a die Mittelsenkrechte auf [PP'] ist.

P geht durch die *Achsenspiegelung* an a in P' über.

P' ist der *Spiegelpunkt* von P bezüglich a und umgekehrt:

$$P \xrightarrow{a} P'$$



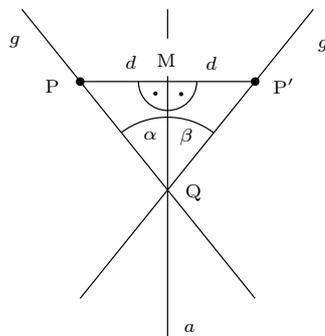
Konstruktion des Spiegelpunktes P' von P:

Man wählt zwei Punkte $A \in a$ und $B \in a$.

$$k_1 = k(A; r = \overline{AP})$$

$$k_2 = k(B; r = \overline{BP})$$

$$k_1 \cap k_2 = \{P, P'\}$$



Achsenpunkte und nur diese sind zu sich selbst symmetrisch (*Fixpunkte*):

$$P \xrightarrow{a} P \iff P \in a$$

Spiegelt man alle Punkte einer Geraden g an einer Achse a , dann bilden die Bildpunkte wieder eine Gerade, die Bildgerade g' . g und g' schneiden a unter dem gleichen Winkel.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{QM} = \overline{QM} \\ \overline{PM} = \overline{MP'} \\ 90^\circ = 90^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{(sWS)} \triangle PMQ \cong \triangle P'MQ \\ \implies \alpha = \beta \end{array}$$

Definitionen und Regeln

Die Strecke $[PQ]$ wird an der Achse a gespiegelt, ihr Bild ist $[P'Q']$.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{MN} = \overline{M'N'} \\ \overline{PM} = \overline{P'M'} \\ 90^\circ = 90^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{(sws)} \triangle PMN \cong \triangle P'M'N' \\ \implies \gamma = \delta \implies \alpha = \beta \\ \text{und } \overline{PN} = \overline{P'N'} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{QN} = \overline{Q'N'} \\ \overline{PN} = \overline{P'N'} \\ \alpha = \beta \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{(sws)} \triangle PNQ \cong \triangle P'N'Q' \\ \implies \overline{PQ} = \overline{P'Q'} \end{array}$$

Damit ist bewiesen:

Die Achsenspiegelung ist *längentreu*, d.h. eine Strecke geht bei der Achsenspiegelung in eine gleich lange Strecke über.

Aus dem Kongruenzsatz (sss) folgt dann:

Bei der Achsenspiegelung geht ein Dreieck in ein dazu kongruentes Dreieck über. Dabei ändert sich der Umlaufsinn.

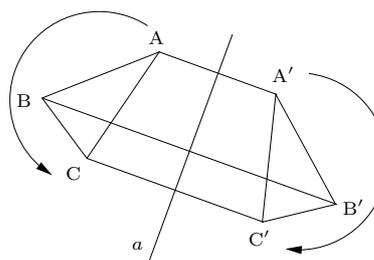
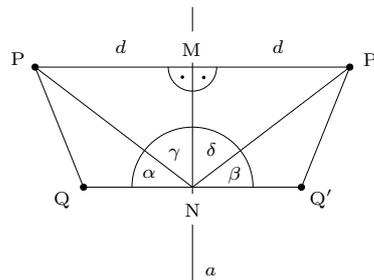
Allgemein gilt:

Bei der Achsenspiegelung geht eine geometrische Figur in eine dazu kongruente Figur über. Die Achsenspiegelung ist daher eine *Kongruenzabbildung*.

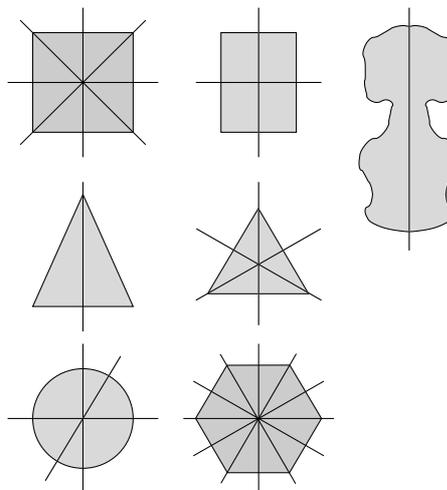
Eine Figur heißt *achsensymmetrisch*, wenn es eine Achsenspiegelung gibt, die die Figur in sich selbst überführt.

Figur	Zahl der Achsen
Rechteck	2
gleichseitiges Dreieck	3
Quadrat	4
regelmäßiges n -Eck	n
Kreis	unendlich viele

Beispiele



Beispiele achsensymmetrischer Figuren mit ihren Symmetrieachsen:



Punktsymmetrie und Punktspiegelung

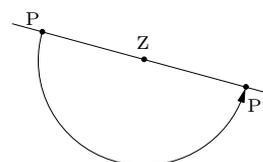
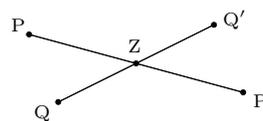
Z ist ein Punkt, das *Symmetriezentrum*.

P und P' heißen symmetrisch bezüglich des Punktes Z , wenn Z der Mittelpunkt der Strecke $[PP']$ ist.

P geht durch die *Punktspiegelung* an Z in P' über. P' ist der *Spiegelpunkt* von P bezüglich Z und umgekehrt:

$$P \xleftrightarrow{Z} P'$$

Die Punktspiegelung an Z ist identisch mit einer Drehung um Z um 180° .



Definitionen und Regeln

Konstruktion des Spiegelpunktes P' von P :

Man zeichnet die Gerade PZ und den Kreis $k = k(Z; r = \overline{ZP})$

$$k \cap PZ = \{P, P'\}$$

Nur das Zentrum ist zu sich selbst symmetrisch (*Fixpunkt*):

$$P \xrightarrow{Z} P \iff P = Z$$

Spiegelt man alle Punkte einer Geraden g an einem Zentrum Z , dann bilden die Bildpunkte wieder eine Gerade, die Bildgerade g' . g und g' sind parallel.

Die Punktspiegelung ist *längentreu*, d.h. eine Strecke geht bei der Punktspiegelung in eine gleich lange Strecke über.

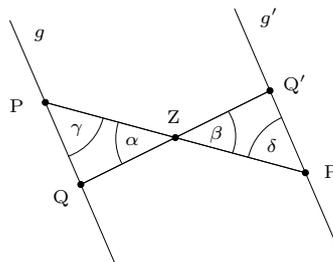
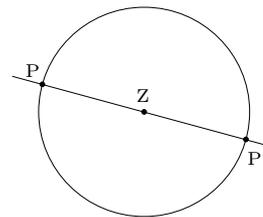
Bei der Punktspiegelung geht eine geometrische Figur in eine dazu kongruente Figur über. Die Punktspiegelung ist daher eine *Kongruenzabbildung*. Der Umlaufsinn bleibt erhalten.

Eine Figur heißt *punktsymmetrisch*, wenn es eine Punktspiegelung gibt, die die Figur in sich selbst überführt.

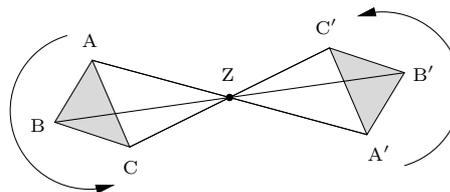
Beispiele punktsymmetrischer Figuren:

- Parallelogramm
- Rechteck
- Quadrat
- Kreis
- regelmäßiges n -Eck, wenn n gerade ist

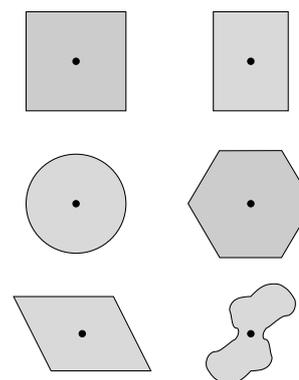
Beispiele



$$\left. \begin{array}{l} \overline{QZ} = \overline{ZQ'} \\ \overline{PZ} = \overline{ZP'} \\ \alpha = \beta \text{ (Z-Winkel)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{(sws)}} \triangle PQZ \cong \triangle P'Q'Z \\ \implies \gamma = \delta \implies g \parallel g' \\ \text{und } \overline{PQ} = \overline{P'Q'} \end{array}$$



Beispiele punktsymmetrischer Figuren mit ihren Symmetriezentren:



Grundwissen Mathematik – Jahrgangsstufe 8

Algebra

Definitionen und Regeln

Funktionen

Relation und Funktion

Unter einem *Zahlenpaar* verstehen wir ein geordnetes Paar von rationalen Zahlen. Geordnet bedeutet, dass z.B. $(1|2) \neq (2|1)$.

Jedes Zahlenpaar $(a|b)$ kann als Punkt $P(a|b)$ in einem Koordinatensystem dargestellt werden.

Eine *Relation* ist eine Menge von Zahlenpaaren.

f sei eine Relation, d.h. eine Menge von Zahlenpaaren. Die Menge aller **linken** (ersten) Zahlen der Elemente von f heißt **Definitionsmenge** D_f der Relation f , die Menge aller **rechten** (zweiten) Zahlen dagegen nennt man die **Wertemenge** W_f .

Die beiden Zahlen eines Wertepaares kann man als Koordinaten eines Punktes deuten (linke Zahl = Rechtswert, x -Wert oder **Abszisse**, rechte Zahl = Hochwert, y -Wert oder **Ordinate**). Die waagrechte Achse eines Koordinatensystems nennt man die **Rechtsachse** oder **Abszissenachse**, die senkrechte Achse heißt **Hochachse** oder **Ordinatenachse**. Zeichnet man alle Punkte einer Relation in ein Koordinatensystem, so erhält man den **Grafen** G_f der Relation. Da die Relation f eine Menge ist, stellt man die Zugehörigkeit eines Wertepaares zu f mit dem Elementzeichen dar: $(x|y) \in f$. Der Graf von f ist die Punktmenge

$$G_f = \{P(x|y) \mid (x|y) \in f\}$$

Eine Relation f heißt *eindeutig*, wenn

$$(x, y_1) \in f \text{ und } (x, y_2) \in f \implies y_1 = y_2$$

d.h. wenn es zu jedem x -Wert nur *einen* y -Wert gibt.

Eine eindeutige Relation heißt *Funktion*.

Eine Funktion mit einer endlichen Definitionsmenge kann man durch Angabe aller Wertepaare hinschreiben. Bei einer Funktion mit einer unendlichen Definitionsmenge ist das nicht möglich. In diesem Fall gibt man den *Funktionsterm* $f(x)$ bzw. die *Funktionsgleichung* $y = f(x)$ an.

Beispiele

Als Beispiel betrachten wir die Relation

$$f = \{(x|y) \mid x = y^2 \text{ und } x \in D_f\}$$

mit der Definitionsmenge $D_f = \{0; 1; 2,25; 4\}$

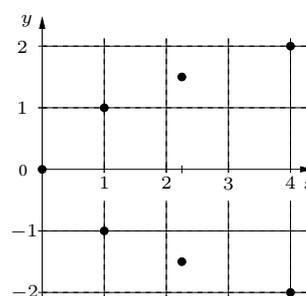
Wertetabelle:

x	0	1	1	2,25	2,25	4	4
y	0	1	-1	1,5	-1,5	2	-2

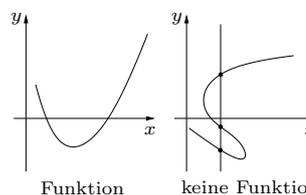
Die Wertemenge ist

$$W_f = \{0; 1; -1; 1,5; -1,5; 2; -2\}$$

Der Graf der Relation f :



Man sieht, dass zu jedem x -Wert (außer 0) zwei y -Werte gehören. f ist also nicht eindeutig und somit keine Funktion.



Schneidet eine Parallele zur y -Achse den Grafen einer Relation f mehr als einmal, dann ist f keine Funktion.

Die Menge aller Zahlenpaare, die man aus rationalen Zahlen bilden kann, nennt man \mathbb{Q}^2 :

$$\mathbb{Q}^2 = \{(x|y) \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}$$

Definitionen und Regeln

Der Funktionsterm $f(x)$ ist eine Rechenvorschrift, mit der man zu jedem $x \in D_f$ den dazugehörigen y -Wert berechnen kann:

$$y = f(x) \iff (x|y) \in f$$

Durch Angabe der Funktionsgleichung $y = f(x)$ und der Definitionsmenge D_f ist eine Funktion f eindeutig bestimmt.

Folgende Schreibweisen sind gleichbedeutend:

$$f = \{(x|y) \mid y = f(x) \text{ und } x \in D_f\}$$

$$f = \{(x|f(x)) \mid x \in D_f\}$$

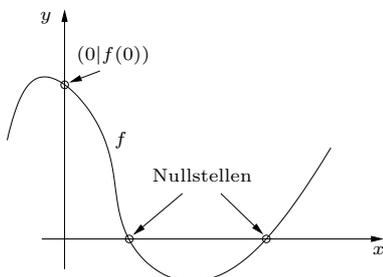
$$G_f = \{P(x|f(x)) \mid x \in D_f\}$$

$$f: x \rightarrow y = f(x), \quad x \in D_f$$

Die letzte Schreibweise liest man so: Die Funktion f ordnet jedem $x \in D_f$ den Wert $y = f(x)$ zu.

Ist $0 \in D_f$, dann hat der Graf von f genau einen Schnittpunkt mit der y -Achse, nämlich $(0, f(0))$.

Die Schnittpunkte des Grafen von f mit der x -Achse heißen *Nullstellen* von f . Die x -Werte der Nullstellen findet man durch das Lösen der Gleichung $f(x) = 0$.



Ist keine Definitionsmenge einer Funktion angegeben, verwendet man die maximal mögliche Definitionsmenge, bei uns also \mathbb{Q} . Einschränkungen der maximalen Definitionsmenge gibt es, wenn der Funktionsterm Brüche enthält, in deren Nennern die Variable x vorkommt. Die maximale Definitionsmenge ist dann \mathbb{Q} ohne die Nullstellen der Nenner:

$$D_{f,\max} = \mathbb{Q} \setminus \{\text{Nullstellen der Nenner}\}$$

Beispiel: $f(x) = \frac{x}{3-x} + 1 + \frac{5x-4}{2x+7}$

Nullstellen der Nenner suchen:

$$3 - x = 0 \implies x_1 = 3$$

$$3x - 5 = 0 \implies x_2 = \frac{5}{3}$$

$$2x + 7 = 0 \implies x_3 = -\frac{7}{2}$$

$$D_{f,\max} = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{7}{2}, \frac{5}{3}, 3\}$$

Beispiele

Für das Anschreiben von Definitions- oder Wertemengen benötigt man oft den Begriff des Intervalls:

Geschlossenes Intervall:

$$[a; b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

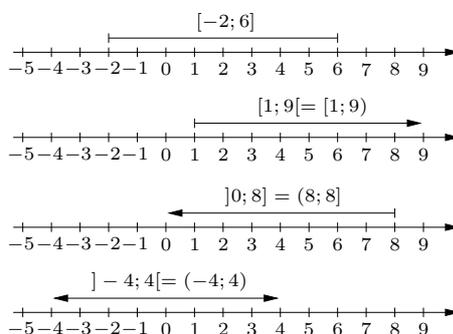
Offenes Intervall:

$$]a; b[= \{x \mid a < x < b\}$$

Halboffene Intervalle:

$$[a; b[= [a; b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

$$]a; b] = (a; b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$



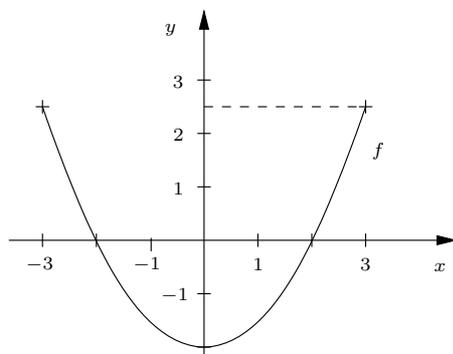
Beispiel:

$$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2, \quad D_f = [-3, 3]$$

Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2,5	0	-1,5	-2	-1,5	0	2,5

Der Wertetabelle entnimmt man die Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$. Der Schnittpunkt des Grafen mit der y -Achse ist $(0 \mid -2)$.



Dem Grafen und der Wertetabelle entnimmt man die Wertemenge $W_f = [-2; 2,5]$.

Definitionen und Regeln

Die lineare (affine) Funktion

Eine Funktion mit dem Term

$$f(x) = ax + b$$

mit Konstanten a und b heißt *lineare* oder *affine* Funktion.

Der Graf der linearen Funktion mit dem Term $f(x) = ax + b$ ist eine Gerade, die die y -Achse wegen $f(0) = b$ im Punkt $(0|b)$ schneidet.

Die *Steigung* einer Geraden ist über das Steigungsdreieck definiert:

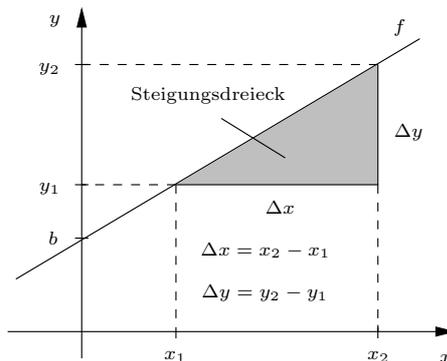
$$\text{Steigung} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Wegen $\Delta y = a \cdot \Delta x$ (siehe rechts) gilt

$$\text{Steigung} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

Der Graf der linearen Funktion mit dem Term $f(x) = ax + b$ ist eine Gerade mit der Steigung a und dem Abschnitt b auf der y -Achse.

Beispiele



Änderung der unabhängigen Variablen x :

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Änderung der Funktionswerte:

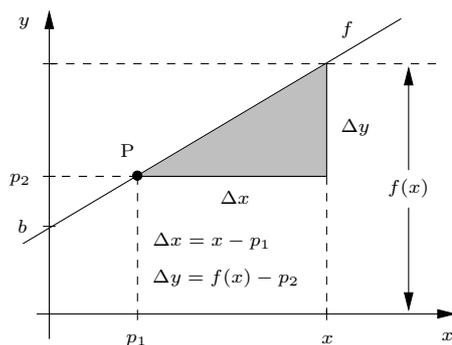
$$\begin{aligned} \Delta y &= y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = \\ &= ax_2 + b - (ax_1 + b) = \\ &= ax_2 + b - ax_1 - b = a(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

$$\Delta y = a \cdot \Delta x$$

Überprüfen, ob der Punkt $P(p_1|p_2)$ auf dem Grafen von f liegt:
Einfach $f(p_1)$ berechnen und mit p_2 vergleichen.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - 3, \quad A(3|4), \quad B(-1|-5) \\ f(3) &= 3 \neq 4 \implies A \notin G_f \\ f(-1) &= -5 \implies B \in G_f \end{aligned}$$

Gerade durch den Punkt $P(p_1|p_2)$ mit der Steigung a :



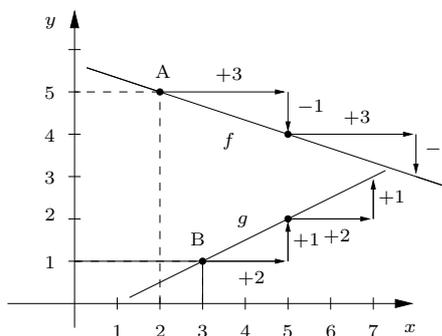
$$f(x) = p_2 + \Delta y = p_2 + a\Delta x = p_2 + a(x - p_1)$$

$$f(x) = p_2 + a(x - p_1) = ax + \underbrace{p_2 - ap_1}_b$$

Alternativ kann man b durch Einsetzen der Koordinaten von P in die Funktionsgleichung berechnen:

$$f(p_1) = ap_1 + b = p_2 \implies b = p_2 - ap_1$$

Der Graf von f geht durch $A(2|5)$ und hat die Steigung $a_f = -\frac{1}{3}$: Zu $\Delta x = 3$ gehört $\Delta y = -1$
Der Graf von g geht durch $B(3|1)$ und hat die Steigung $a_g = \frac{1}{2}$: Zu $\Delta x = 2$ gehört $\Delta y = 1$



$$f(x) = 5 - \frac{1}{3}(x - 2) = -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3}$$

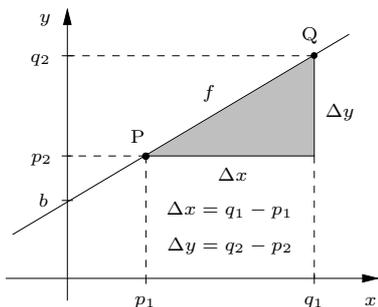
$$g(x) = \frac{1}{2}x + b$$

$$B \in G_f \implies g(3) = \frac{3}{2} + b = 1 \implies b = -\frac{1}{2}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Definitionen und Regeln

Gerade durch die Punkte $P(p_1|p_2)$ und $Q(q_1|q_2)$:

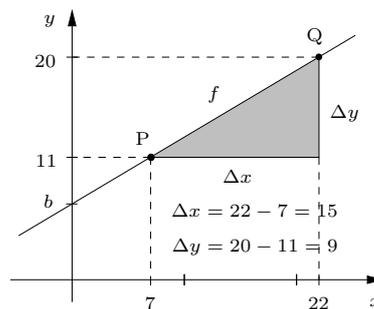


Die Steigung der Geraden ist

$$a = \frac{q_2 - p_2}{q_1 - p_1}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= p_2 + a(x - p_1) = \\ &= p_2 + \frac{q_2 - p_2}{q_1 - p_1} \cdot (x - p_1) \\ &= \frac{q_2 - p_2}{q_1 - p_1} \cdot x + p_2 - \underbrace{\frac{(q_2 - p_2)p_1}{q_1 - p_1}}_b \end{aligned}$$

Beispiele



Gerade durch die Punkte $P(7|11)$ und $Q(22|20)$:

Die Steigung der Geraden ist

$$a = \frac{20 - 11}{22 - 7} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0,6$$

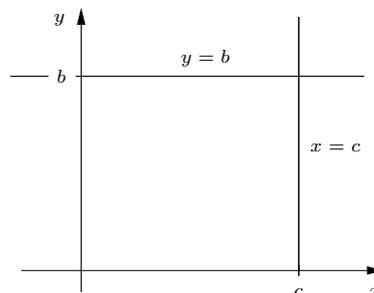
$$\begin{aligned} f(x) &= 11 + \frac{3}{5}(x - 7) = \frac{3}{5}x + \frac{34}{5} \\ f(x) &= 0,6x + 6,8 \end{aligned}$$

Spezielle Geraden:

Der Graf der Funktion $y = f(x) = b$ (Steigung 0) ist eine Parallele zur x -Achse durch den Punkt $(0|b)$.

Eine Parallele zur y -Achse durch den Punkt $(c|0)$ ist kein Graf einer Funktion, sondern der Relation

$$f = \{(x|y) \mid x = c \text{ und } y \text{ beliebig}\}$$



Schnittpunkt von zwei Geraden:

Gesucht ist der Schnittpunkt $S(x_S|y_S)$ der beiden Geraden mit den Gleichungen

$$f(x) = ax + b \text{ und } g(x) = cx + d$$

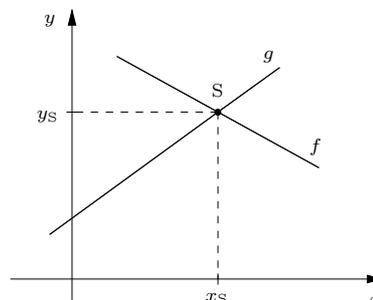
Gleichsetzen der Funktionsterme:

$$f(x_S) = g(x_S) \implies ax_S + b = cx_S + d$$

Für $a \neq c$ folgt

$$x_S = \frac{d - b}{a - c}, \quad y_S = f(x_S) = \frac{ad - bc}{a - c}$$

Kein Schnittpunkt für $a = c$ und $b \neq d$, für $a = c$ und $b = d$ fallen die beiden Geraden zusammen.



Beispiel: $f(x) = 2x - 4$ und $g(x) = -x + 5$

$$2x_S - 4 = -x_S + 5 \implies x_S = 3$$

$$y_S = f(3) = g(3) = 2 \implies S(3|2)$$

Definitionen und Regeln

Die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit

Ein Körper bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v und befindet sich zur Zeit $t = 0$ am Ort x_0 . Dann ist der Ort x des Körpers zur Zeit t eine lineare Funktion der Zeit:

$$x(t) = x_0 + vt$$

Der Graf der Funktion x (das tx -Diagramm) ist eine Gerade mit der Steigung v und dem Abschnitt x_0 auf der x -Achse (Ordinate).

Ist von einer Bewegung die konstante Geschwindigkeit v und der Startort x_1 zur Zeit t_1 bekannt ($x_1 = x(t_1)$), dann ist der Ort zur Zeit t :

$$x(t) = x_1 + v(t - t_1)$$

oder

$$x(t) = \underbrace{x_1 - vt_1}_{x_0} + vt$$

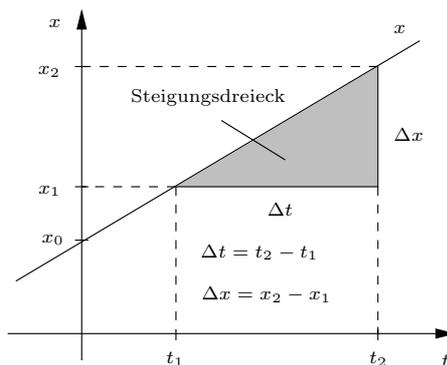
Mit $\Delta t = t_2 - t_1$ und dem dazugehörenden

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_1 = x(t_2) - x(t_1) = \\ &= x_0 + vt_2 - (x_0 + vt_1) = \\ &= v(t_2 - t_1) = v \cdot \Delta t \end{aligned}$$

findet man

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Beispiele



Beispiel: Ein PKW wird auf der Autobahn zur Zeit $t_1 = 5$ h bei $x_1 = 30$ km mit der Geschwindigkeit $v = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ geblitzt. Unter der Annahme einer konstanten Geschwindigkeit ist seine Ortsfunktion:

$$\begin{aligned} x(t) &= 30 \text{ km} + 120 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot (t - 5 \text{ h}) = \\ &= -570 \text{ km} + 120 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t \end{aligned}$$

Zu welcher Zeit t_0 war er am Beginn der Autobahn bei $x_0 = 0$?

$$\begin{aligned} x(t_0) &= -570 \text{ km} + 120 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t_0 = 0 \\ \implies t_0 &= 4,75 \text{ h} \quad \text{d.h. um 04:45:00 Uhr} \end{aligned}$$

Direkte Proportionalität

Zwei Größen y und x heißen *direkt proportional* zueinander ($y \sim x$), wenn der Quotient von zwei zusammengehörenden Werten konstant ist:

$$\frac{y}{x} = k = \text{konstant}$$

k heißt *Proportionalitätskonstante*.

Ist y proportional zu x , dann ist

$$y = f(x) = kx$$

eine lineare Funktion mit der Steigung k und $f(0) = 0$. Der Graf dieser Funktion ist eine Gerade durch den Ursprung.

Eine Wertetabelle zweier Größen prüft man durch Quotientenbildung der Wertepaare auf direkte Proportionalität:

x	-2,3	-1	0	3	5	$\frac{y}{x}$ konstant, d.h. $y \sim x$.
y	-16,1	-7	0	21	35	
$\frac{y}{x}$	7	7	7	7	7	

Für die Funktion $f : x \rightarrow y = f(x)$ sind folgende Aussagen gleichbedeutend:

- f ist eine direkte Proportionalität
- $y = f(x) = kx$ mit einer Konstanten k
- $f(nx) = nf(x)$
- $(x|y) \in f \iff (nx|ny) \in f$
- Dem 2-, 3-, 4-,..., n -fachen von x entspricht das 2-, 3-, 4-,..., n -fache von y

Beispiel: Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v ; der in der Zeitspanne Δt zurückgelegte Weg Δx ist zu Δt direkt proportional, die Proportionalitätskonstante ist v :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$$

Beispiel: Eine Feder wird von der Kraft F um die Strecke x gedehnt. Es gilt $F \sim x$, die Proportionalitätskonstante ist die Federkonstante D :

$$F(x) = D \cdot x, \quad \frac{F}{x} = D = \text{konstant}$$

Definitionen und Regeln

Umfang und Fläche des Kreises

Die Menge aller Punkte P, die von einem festen Punkt M die gleiche Entfernung r haben, ist die Kreislinie $k(M, r)$ mit dem Mittelpunkt M und dem *Radius* r :

$$k(M, r) = \{P \mid \overline{MP} = r\}$$

Der *Durchmesser* des Kreises k ist die Länge einer Strecke $[RS]$ mit $R \in k, S \in k$ und $M \in [RS]$:

$$d = \overline{RS} = 2r$$

Die Länge der Kreislinie heißt *Umfang* U des Kreises. U ist zu r proportional:

$$U = 2\pi r = \pi d$$

mit der Kreiszahl

$$\pi = 3,141592654\dots$$

π ist ein unendlicher, nichtperiodischer Dezimalbruch, also keine rationale Zahl. Eine gute Näherung für π steht dir auf deinem Taschenrechner zur Verfügung.

Der Flächeninhalt des Kreises mit Radius r ist

$$A = r^2\pi$$

Ist A die Fläche eines Kreises mit Radius r und A' die Fläche eines Kreises mit Radius $r' = nr$, dann gilt:

$$A' = (nr)^2\pi = n^2 \cdot r^2\pi = n^2 \cdot A$$

Ändert man den Radius eines Kreises um den Faktor n , dann ändert sich seine Fläche um den Faktor n^2 .

Indirekte Proportionalität

Zwei Größen y und x heißen *indirekt* oder *umgekehrt proportional* zueinander, wenn das Produkt von zwei zusammengehörenden Werten konstant ist:

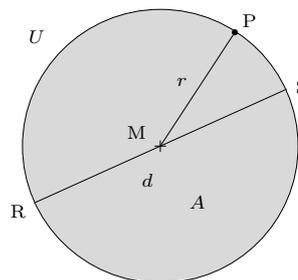
$$x \cdot y = k = \text{konstant}$$

Ist y umgekehrt proportional zu x , dann ist

$$y = f(x) = \frac{k}{x}$$

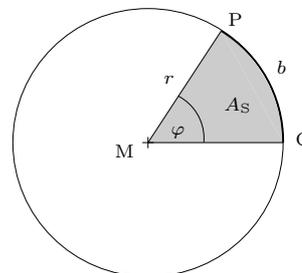
Der Graf dieser Funktion heißt *Hyperbel*.

Beispiele



Beispiel: Der Umfang des Erdäquators ist $U = 40000$ km. Der Radius der Erde ist also

$$R_E = \frac{U}{2\pi} \approx 6366 \text{ km}$$



Das tortenförmige Stück PMQ des Kreises heißt *Kreis Sektor* oder kurz *Sektor*, φ ist der Öffnungswinkel des Sektors. Die Sektorfläche A_S und die *Bogenlänge* b sind zu φ proportional. Die Proportionalitätskonstante findet man wie folgt: Für $\varphi = 360^\circ$ ist A_S die volle Kreisfläche und b ist gleich dem Umfang:

$$\frac{b}{\varphi} = \frac{U}{360^\circ} = \frac{2\pi r}{360^\circ}$$

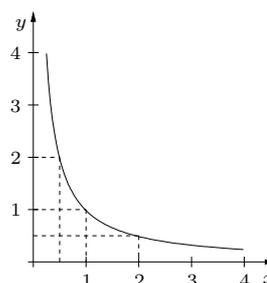
$$\frac{A_S}{\varphi} = \frac{A}{360^\circ} = \frac{\pi r^2}{360^\circ}$$

Beispiel: Die immer gleiche Strecke s wird mit verschiedenen, pro Fahrt aber konstanten Geschwindigkeiten v zurückgelegt; dann ist v umgekehrt proportional zur Fahrzeit t :

$$v \cdot t = s$$

Der Graf der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



Definitionen und Regeln	Beispiele
<p>Lineare Ungleichungen</p> <p>Sind zwei Terme durch eines der Zeichen $<, >, \leq$ oder \geq miteinander verbunden, spricht man von einer Ungleichung. Zwei Ungleichungen mit gleicher Grundmenge heißen <i>äquivalent</i>, wenn sie die gleiche Lösungsmenge besitzen. Äquivalenzumformungen von Ungleichungen sind:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Addieren oder subtrahieren des gleichen Terms auf beiden Seiten • Multiplizieren beider Seiten mit einem positiven Term • Multiplizieren beider Seiten mit einem negativen Term und Umdrehen des Ungleichheitszeichens 	<p>In den folgenden Beispielen ist die Grundmenge $G = \mathbb{Q}$:</p> $\begin{aligned} 0,5x + 4 &\leq 0 & -4 \\ 0,5x &\leq -4 & : 0,5 \\ x &\leq -8 & \implies L =] - \infty; -8] \end{aligned}$ $\begin{aligned} 5x - 3 &< 8x + 6 & -8x + 3 \\ -3x &< 9 & : (-3) \\ x &> -3 & \implies L =] -3; +\infty[\end{aligned}$
<p>Lineare Gleichungssysteme</p> <p>Eine Gleichung mit zwei Unbekannten</p> <p>Die lineare Gleichung</p> $ax + by = c \quad (\text{I})$ <p>kann man für $b \neq 0$ nach y auflösen:</p> $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ <p>Für $b \neq 0$ ist die Lösungsmenge von (I) also die Menge aller Zahlenpaare $(x y)$ mit $x \in \mathbb{Q}$ und $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. L ist also nichts anderes als die Funktion</p> $f : x \rightarrow y$ <p>mit der Gleichung</p> $y = f(x) = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ <p>Für $b = 0$ lautet (I):</p> $ax + 0 \cdot y = c \quad (\text{II})$ <p>Für $a \neq 0$ besteht L aus allen Zahlenpaaren $(x y)$ mit $x = \frac{c}{a}$ und beliebigem y. Für $a = b = 0$ lautet (I):</p> $\underbrace{0 \cdot x + 0 \cdot y}_{=0} = c \quad (\text{III})$ <p>Für $c \neq 0$ gibt es dann überhaupt keine Lösung ($L = \emptyset$) und für $c = 0$ ist jedes beliebige Zahlenpaar $(x y)$ eine Lösung.</p>	<p>$2x - 5y = 3 \quad (1)$</p> <p>$(4 1)$ ist eine Lösung von (1), da tatsächlich</p> $2 \cdot 4 - 5 \cdot 1 = 8 - 5 = 3$ <p>gilt. Weitere Lösungen von (1) sind z.B. die Zahlenpaare $(-1 -1)$, $(1 -0,2)$ und $(1,5 0)$. Die Lösungsmenge L von (1) ist eine Menge von Zahlenpaaren, also eine Relation. L hat sogar unendlich viele Elemente, da man zu jedem $x \in \mathbb{Q}$ ein passendes y finden kann, indem man (1) nach y auflöst:</p> $\begin{aligned} 2x - 5y &= 3 & -2x \\ -5y &= 3 - 2x & : (-5) \\ y &= \frac{2}{5}x - \frac{3}{5} & \implies \end{aligned}$ $L = \left\{ (x y) \mid x \in \mathbb{Q} \text{ und } y = \frac{2}{5}x - \frac{3}{5} \right\}$ <p>L ist also nichts anderes als die Funktion</p> $f : x \rightarrow f(x)$ <p>mit der Gleichung</p> $y = f(x) = \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}$
$L = \begin{cases} \{(x y) \mid y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}\} & \text{für } b \neq 0 \\ \{(\frac{c}{a} y) \mid y \in \mathbb{Q}\} & \text{für } a \neq 0, b = 0 \\ \{(x y) \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\} & \text{für } a = b = c = 0 \\ \{\} = \emptyset & \text{für } a = b = 0, c \neq 0 \end{cases}$	$\begin{aligned} 2x + 0 \cdot y &= 6 & \implies L = \{(3 y) \mid y \in \mathbb{Q}\} \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y &= 0 & \implies L = \mathbb{Q}^2 = \{(x y) \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\} \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y &= 3 & \implies L = \emptyset \end{aligned}$

Definitionen und Regeln

Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten

Wir betrachten das *Gleichungssystem*

$$ax + by = c \quad (1)$$

$$dx + ey = f \quad (2)$$

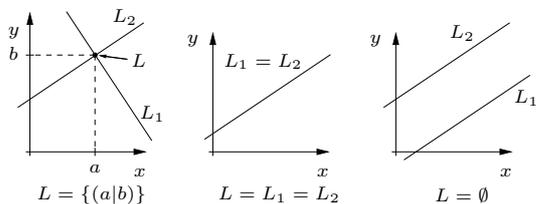
(1) hat die Lösungsmenge L_1 und (2) die Lösungsmenge L_2 . Die Lösungsmenge L des Systems besteht aus allen Zahlenpaaren, die gleichzeitig Lösung von (1) und von (2) sind. L ist also die Schnittmenge von L_1 und L_2 :

$$L = L_1 \cap L_2$$

L_1 ist entweder die leere Menge \emptyset , ganz \mathbb{Q}^2 oder eine Relation g_1 , deren Graf eine Gerade ist. Entsprechendes gilt für L_2 . Einen Überblick über die möglichen Lösungsmengen L des Gleichungssystems zeigt folgende Tabelle:

$L_2 \setminus L_1$	\emptyset	\mathbb{Q}^2	g_1
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
\mathbb{Q}^2	\emptyset	\mathbb{Q}^2	g_1
g_2	\emptyset	g_2	$g_1 \cap g_2$

Für den Fall, dass $L_1 = g_1$ und $L_2 = g_2$, gibt es wieder drei Fälle, wie folgende Abbildung zeigt:



Methoden zum Lösen des Gleichungssystems

$$ax + by = c \quad (1)$$

$$dx + ey = f \quad (2)$$

Gleichsetzungsverfahren:

Wenn $b \neq 0$ und $e \neq 0$ löst man beide Gleichungen nach y auf

$$(1) \implies y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \quad (3)$$

$$(2) \implies y = -\frac{d}{e}x + \frac{f}{e} \quad (4)$$

Da die linken Seiten von (3) und (4) gleich sind, müssen auch die rechten Seiten gleich sein:

$$-\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} = -\frac{d}{e}x + \frac{f}{e}$$

Nach x auflösen und das Ergebnis in (3) oder (4) einsetzen um y zu berechnen.

Beispiele

$$-2x + 5y = 5 \quad (1)$$

$$3x + 0 \cdot y = 15 \quad (2)$$

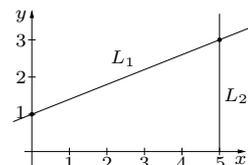
$$L_1 = \left\{ (x|y) \mid y = \frac{2}{5}x + 1 \right\}$$

$$L_2 = \{ (x|y) \mid x = 5, y \in \mathbb{Q} \}$$

$x = 5$ aus L_2 in L_1 eingesetzt ergibt

$$y = \frac{2}{5} \cdot 5 + 1 = 3$$

$$L = L_1 \cap L_2 = \{(5|3)\}$$



Beispiel für das Gleichsetzungsverfahren:

$$-x + 4y = 14 \quad (1)$$

$$x + 2y = 4 \quad (2)$$

$$(1) \implies y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{2} \quad (3)$$

$$(2) \implies y = -\frac{1}{2}x + 2 \quad (4)$$

$$(3) = (4) : \frac{1}{4}x + \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}x + 2 \quad (5)$$

$$\frac{3}{4}x = -\frac{3}{2} \quad (6)$$

$$x = -2 \quad (7)$$

$$(7) \text{ in } (4) : y = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + 2 = 3$$

$$L = \{(-2 | 3)\}$$

Beispiel für das Einsetzverfahren:

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$x - 2y = 0 \quad (2)$$

$$(2) \implies x = 2y \quad (3)$$

$$(3) \text{ in } (1) : \frac{1}{2} \cdot 2y - \frac{1}{3}y = \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3}y = \frac{1}{4} \quad (5)$$

$$y = \frac{3}{8} \quad (6)$$

$$(6) \text{ in } (3) : x = 2y = \frac{3}{4}$$

$$L = \left\{ \left(\frac{3}{4} \mid \frac{3}{8} \right) \right\}$$

Definitionen und Regeln

Einsetzverfahren:

Eine der beiden Gleichungen wird nach einer der Unbekannten aufgelöst und das Ergebnis in die andere Gleichung eingesetzt. Die so erhaltene Gleichung mit einer Unbekannten wird gelöst und das Ergebnis in (1) oder (2) eingesetzt, um die andere Unbekannte zu erhalten.

Additionsverfahren:

Die beiden Gleichungen werden so mit je einer Zahl multipliziert, dass der Koeffizient einer Unbekannten in der einen Gleichung gleich dem Negativen des Koeffizienten derselben Unbekannten in der anderen Gleichung wird. Beim Addieren der so erhaltenen Gleichungen fällt dann eine Unbekannte heraus.

$$\begin{array}{rcl} ax + by = c & (1) & | \cdot e \\ dx + ey = f & (2) & | \cdot (-b) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} aex + bey = ce & (3) \\ -bdx - bey = -bf & (4) \end{array}$$

$$(3) + (4) : (ae - bd)x = ce - bf \quad (5)$$

Für $ae - bd \neq 0$: $x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$

$$(1) \cdot (-d) : -adx - bdy = -cd \quad (6)$$

$$(2) \cdot (-a) : adx + aey = +af \quad (7)$$

$$(6) + (7) : (ae - bd)y = af - cd \quad (8)$$

$$y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

Beispiel für das Additionsverfahren:

$$\begin{array}{rcl} 12x - 18y = 6 & (1) & | : 6 \\ -10x + 15y = -5 & (2) & | : (-5) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x - 3y = 1 & (3) \\ 2x - 3y = 1 & (4) \end{array}$$

$$(3) - (4) : 0 = 0 \quad (5)$$

(3) und (4) sind identisch, d.h. beide Gleichungen haben die gleiche Lösungsmenge:

$$L = L_1 = L_2 = \left\{ (x|y) \mid y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \right\}$$

Beispiele

Beispiel für das Additionsverfahren:

$$\begin{array}{rcl} 3x - 4y = 43 & (1) & | \cdot 2 \\ -2x - 3y = 11 & (2) & | \cdot 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 6x - 8y = 86 & (3) \\ -6x - 9y = 33 & (4) \end{array}$$

$$(3) + (4) : -17y = 119 \quad (5)$$

$$y = -7 \quad (6)$$

$$(6) \text{ in } (2) : -2x - 3 \cdot (-7) = 11$$

$$-2x + 21 = 11$$

$$-2x = -10$$

$$x = \frac{-10}{-2} = 5$$

$$L = \{(5 | -7)\}$$

Beispiel für das Additionsverfahren:

$$\begin{array}{rcl} 18x - 17y = 124 & (1) & | \cdot (-2) \\ 12x + 13y = 34 & (2) & | \cdot 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -36x + 34y = -248 & (3) \\ 36x + 39y = 102 & (4) \end{array}$$

$$(3) + (4) : 73y = -146 \quad (5)$$

$$y = -2 \quad (6)$$

$$(6) \text{ in } (2) : 12x - 26 = 34$$

$$x = 5$$

$$L = \{(5 | -2)\}$$

Beispiel für das Additionsverfahren:

$$\begin{array}{rcl} 12x - 18y = 6 & (1) & | : 6 \\ -10x + 15y = 5 & (2) & | : (-5) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x - 3y = 1 & (3) \\ 2x - 3y = -1 & (4) \end{array}$$

$$(3) - (4) : 0 = 2 \quad (5)$$

(5) ist für kein Wertepaar erfüllbar, d.h.

$$L = \emptyset$$

Die Geraden von L_1 und L_2 sind parallele Geraden, die keinen Punkt gemeinsam haben.

Definitionen und Regeln	Beispiele
<p>Bruchterme</p> <p>Definitionsmenge von Bruchtermen</p> <p>Enthält der Nenner N eines Bruchterms $T = \frac{Z}{N}$ Variable, dann müssen diese so gewählt werden, dass $N \neq 0$ ist. Enthält ein Bruchterm nur eine Variable, z.B. x, dann gilt</p> $T(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ <p>mit dem Zählerterm $Z(x)$ und dem Nennerterm $N(x)$. Die maximale Definitionsmenge von T ist dann \mathbb{Q} ohne die Nullstellen des Nenners:</p> $D_T = \mathbb{Q} \setminus \{x \mid N(x) = 0\}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Ein Produkt ist null, wenn einer der Faktoren null ist.</p> </div> $T_1(x) \cdot T_2(x) \cdot \dots \cdot T_n(x) = 0 \iff T_1(x) = 0 \text{ oder } T_2(x) = 0 \text{ oder } \dots \text{ oder } T_n(x) = 0$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Die maximale Definitionsmenge eines Terms, der mehrere Brüche enthält, ist \mathbb{Q} ohne die Menge der Nullstellen aller vorkommenden Nenner.</p> </div>	$T(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{x^2 - 3x}{5x - 2}$ $N(x) = 2x - 5 = 0 \implies x = \frac{2}{5}$ <hr/> <p>Max. Definitionsmenge von T: $D_T = \mathbb{Q} \setminus \left\{ \frac{2}{5} \right\}$</p> <hr/> $T(x, y) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{x + y}{x - y}$ $N(x) = x - y = 0 \implies y = x$ $D_T = \{(x y) \mid y \neq x\} = \mathbb{Q}^2 \setminus \{(x y) \mid y = x\}$ <p>Der Graf von D_T (nicht von der Funktion $T(x, y)$) ist also die ganze Ebene \mathbb{Q}^2 ohne der Geraden mit der Gleichung $y = x$.</p> <hr/> $T(x) = \frac{x}{3x + 5} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{(x - 3)(x + 1)}$ $3x + 5 = 0 \implies x = -\frac{5}{3}$ $x^2 = 0 \implies x = 0$ $(x - 3)(x + 1) = 0 \implies x = 3 \text{ oder } x = -1$ $D_T = \mathbb{Q} \setminus \left\{ -\frac{5}{3}, -1, 0, 3 \right\}$ <hr/> <p>Die Terme $\frac{2x}{x - 3}$ und $\frac{2x(x + 5)}{(x - 3)(x + 5)}$ sind äquivalent für $x \in \mathbb{Q} \setminus \{-5, 3\}$.</p> <hr/> $\frac{36a^5b^7}{27a^8b^3} = \frac{4b^4}{3a^3}$ <hr/> $\frac{48xy - 72y^2}{22x - 33y} = \frac{24y(2x - 3y)}{11(2x - 3y)} = \frac{24y}{11}$ <hr/> $\frac{a - x}{x - a} = \frac{-1 \cdot (x - a)}{1 \cdot (x - a)} = -1$ <hr/> $\frac{ac + bc - ad - bd}{ad - bd - ac + bc} = \frac{(a + b)c - (a + b)d}{(a - b)d - (a - b)c} = \frac{(a + b)(c - d)}{(a - b)(d - c)} = \frac{(a + b)(c - d)}{-(a - b)(c - d)} = \frac{a + b}{-a + b} = \frac{b + a}{b - a}$
<p>Erweitern und Kürzen</p> <p>Ein Bruchterm geht bei geeignet gewählter Definitionsmenge D in einen äquivalenten Term über, wenn Zähler und Nenner mit dem gleichen Term multipliziert werden (<i>Erweitern</i>):</p> $\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{Z(x) \cdot A(x)}{N(x) \cdot A(x)}$ <p>Ein Bruchterm geht bei geeignet gewählter Definitionsmenge D in einen äquivalenten Term über, wenn Zähler und Nenner durch den gleichen Term dividiert werden bzw. wenn man im Zähler und im Nenner den gleichen <i>Faktor</i> weglässt (<i>Kürzen</i>):</p> $\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{Z(x) : A(x)}{N(x) : A(x)}$ $\frac{Z(x) \cdot A(x)}{N(x) \cdot A(x)} = \frac{Z(x)}{N(x)}$	

Definitionen und Regeln

Gleichnamigmachen

Zwei oder mehr Bruchterme heißen *gleichnamig*, wenn sie den gleichen Nenner haben. Durch geschicktes Erweitern kann man Bruchterme immer gleichnamig machen.

Das Produkt aller Nenner mehrerer Bruchterme ist ein gemeinsamer Nenner dieser Terme. Der kleinste gemeinsame Nenner mehrerer Brüche ist ihr *Hauptnenner* (HN). Der Hauptnenner ist das kgV der einzelnen Nenner.

Rechnen mit Bruchtermen

Wiederholung der Rechenregeln (siehe S. 12):

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a \cdot c}{b}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$$

$$1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a}$$

Doppelbrüche vereinfacht man durch Erweiterung des Hauptbruches mit dem Hauptnenner sämtlicher Teilbrüche.

Bestehen Zähler und Nenner des Hauptbruches nur aus Produkten von Teilbrüchen, dann gilt für die Zähler und Nenner der Teilbrüche die einfache Regel:

Zähler bleiben, Nenner springen (über den Hauptbruchstrich).

$$\frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}}{\frac{e}{f} \cdot \frac{g}{h}} = \frac{acfh}{egbd}$$

Beispiele

$$T_1 = \frac{x}{36a^2b}, \quad T_2 = \frac{y}{48b^7c^3}, \quad T_3 = \frac{z}{64a^4b^2c^5}$$

Hauptnenner: HN = $576a^4b^7c^5$

Erweiterungsfaktoren: $16a^2b^6c^5, 12a^4c^2, 9b^4$

Gleichnamig gemacht:

$$T_1 = \frac{16xa^2b^6c^5}{576a^4b^7c^5}, \quad T_2 = \frac{12ya^4c^2}{576a^4b^7c^5}, \quad T_3 = \frac{9zb^4}{576a^4b^7c^5}$$

$$\frac{a}{x} - \frac{x}{a} = \frac{a^2}{ax} - \frac{x^2}{ax} = \frac{a^2 - x^2}{ax}$$

$$1 - \frac{1}{x} = \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$\frac{x-b}{x+b} - 1 = \frac{x-b}{x+b} - \frac{x+b}{x+b} = \frac{x-b-(x+b)}{x+b} = \frac{-2b}{x+b}$$

$$\frac{(a-b)^2}{18xy} \cdot \frac{24x}{y(b-a)} = \frac{4 \cdot 6x(a-b)^2}{-3 \cdot 6xy^2(a-b)} = -\frac{4(a-b)}{3y^2}$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot \frac{1}{x} - \frac{13x}{4} : x^2 + \frac{x}{3} : \frac{x^2}{4} &= \\ = \frac{3}{x} - \frac{13x}{4x^2} + \frac{4x}{3x^2} &= \frac{3}{x} - \frac{13}{4x} + \frac{4}{3x} = \\ = \frac{3 \cdot 12 - 13 \cdot 3 + 4 \cdot 4}{12x} &= \frac{36 - 39 + 16}{12x} = \frac{13}{12x} \end{aligned}$$

Erweitern mit abc :

$$\frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{bc}{ac + ab} = \frac{bc}{a(b+c)}$$

Erweitern mit $x(x-2)$:

$$1 - \frac{1}{x-2} = \frac{x(x-2) - x}{x(x-2) - (x-2)} = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 2}$$

Vorsicht, hier kann nicht gekürzt werden!!

$$\frac{\frac{a}{3} \cdot \frac{12}{x} \cdot \frac{3y}{8}}{\frac{a^2}{y} \cdot \frac{x}{4a}} = \frac{a \cdot 12 \cdot 3y \cdot y \cdot 4a}{a^2x \cdot 3 \cdot 8x} = \frac{6y^2}{x^2}$$

Definitionen und Regeln

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Siehe auch S.3 und S.6.

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Q}$ definiert man

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

Für $n \geq 2$ gilt

$$a^n : a = a^{n-1} \quad (\text{I})$$

Wir definieren a^p für ganze Exponenten p ($p \in \mathbb{Z}$) so, dass die Regel (I) weiterhin gilt:

$$(I) \implies \left. \begin{array}{l} a^1 : a = a^{1-1} = a^0 \\ a^1 : a = a : a = 1 \end{array} \right\} \implies a^0 = 1$$

$$a^{-1} = a^{0-1} = a^0 : a = \frac{1}{a} = \frac{1}{a^1}$$

$$a^{-2} = a^{-1-1} = a^{-1} : a = \frac{1}{a} : a = \frac{1}{a^2}$$

$$a^{-3} = a^{-2-1} = a^{-2} : a = \frac{1}{a^2} : a = \frac{1}{a^3}$$

Aufgrund dieser Ergebnisse definiert man für $n \in \mathbb{N}$ und $a \neq 0$:

$$a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Spezialfälle:

$$a^1 = a \quad a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

Vorsicht: 0^0 ist nicht definiert!

Für $a \neq 0, b \neq 0$ und $p, q \in \mathbb{Z}$ gelten die **Potenzgesetze**:

$$\begin{array}{l} a^p \cdot b^p = (ab)^p \quad ; \quad \frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p \\ a^p \cdot a^q = a^{p+q} \quad ; \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \\ (a^p)^q = a^{pq} \end{array}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Beachte folgende Reihenfolge bei der Berechnung:

$$a^{p^q} = a^{(p^q)}$$

Beispiele

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$2^3 \cdot 2^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 2^5 = 2^{3+2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

$$2^5 : 2 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2} = 2^4 = 2^{5-1}$$

$$2^5 : 2^3 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^2 = 2^{5-3}$$

$$2^3 : 2^5 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2} = 2^{3-5}$$

$$2^3 \cdot 2^{-5} = 2^3 : 2^5 = \frac{1}{2^2} = 2^{-2} = 2^{3-5}$$

$$(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^6 = 2^{3 \cdot 2}$$

$$(2^{-3})^2 = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6} = 2^{(-3) \cdot 2}$$

$$3^{-5} \cdot 2^{-5} = \frac{1}{3^5} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{3^5 \cdot 2^5} = \frac{1}{(3 \cdot 2)^5} = (3 \cdot 2)^{-5}$$

Zehnerpotenzen:

$$0,1^n = \left(\frac{1}{10}\right)^n = 10^{-n}$$

mal 10^n : Komma um n Stellen nach rechts

mal 10^{-n} : Komma um n Stellen nach links

$$340\,000\,000 = 3,4 \cdot 10^8$$

$$0,000\,034 = 3,4 \cdot 10^{-5}$$

Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge $a = 3 \cdot 10^{-15}$ m (Atomkern):

$$V = (3 \cdot 10^{-15} \text{ m})^3 = 9 \cdot 10^{-45} \text{ m}^3$$

Schreibweise von Benennungen:

$$a = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,81 \text{ ms}^{-2}$$

$$(a^3 b^{-4} c^2)^{-2} = a^{-6} b^8 c^{-4}$$

$$x^{3n} y^n : \left(\frac{x^2}{y^3}\right)^n = x^{3n} y^n \cdot \frac{y^{3n}}{x^{2n}} = x^n y^{4n}$$

$$\begin{aligned} (a-b)^3 \cdot (2b-2a)^{-7} &= (a-b)^3 \cdot [(-2)(a-b)]^{-7} = \\ &= (a-b)^3 \cdot (-2)^{-7} \cdot (a-b)^{-7} = -\frac{1}{128(a-b)^4} \end{aligned}$$

$$(3^3)^3 = 3^{3 \cdot 3} = 3^9 = 19\,683$$

$$3^{3^3} = 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987$$

Definitionen und Regeln

Bruchgleichungen

Eine Gleichung, die die Unbekannte im Nenner eines Bruches enthält, heißt *Bruchgleichung*. Ist N_0 die Menge der Nullstellen aller in der Gleichung auftretenden Nenner, dann ist $D = \mathbb{Q} \setminus N_0$ die Definitionsmenge der Gleichung.

Beim Umformen einer Bruchgleichung müssen beide Gleichungsseiten mit Termen multipliziert werden, die die Unbekannte enthalten. Daher kann die umgeformte Gleichung eine andere Definitionsmenge haben als die ursprüngliche Gleichung. Es kann also Lösungen der umgeformten Gleichung geben, die keine Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind.

Die gefundenen Lösungen einer Bruchgleichung müssen auf Zugehörigkeit zur Definitionsmenge überprüft werden. Dies kann durch Einsetzen der Lösungen in die Ursprungsgleichung geschehen.

Strategien zum Lösen von Bruchgleichungen:

Eine Bruchgleichung hat immer die Form

$$\frac{Z_1(x)}{N_1(x)} + \frac{Z_2(x)}{N_2(x)} + \dots + \frac{Z_n(x)}{N_n(x)} = 0$$

Um die Nenner zu beseitigen, multipliziert man die Gleichung mit dem Hauptnenner.

Spezialfall: Über Kreuz Multiplizieren:

$$\frac{Z_1(x)}{N_1(x)} = \frac{Z_2(x)}{N_2(x)} \quad \Big| \cdot N_1(x)N_2(x)$$

$$Z_1(x) \cdot N_2(x) = Z_2(x) \cdot N_1(x)$$

Beispiel:

R ist der Gesamtwiderstand von zwei parallel geschalteten Widerständen R_1 und R_2 :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Auflösen nach R :

$$\frac{1}{R} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \quad \implies \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Auflösen nach R_1 :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 - R}{R \cdot R_2}$$

$$\implies \quad R_1 = \frac{R R_2}{R_2 - R}$$

Beispiele

$$\frac{a}{x} = b, \quad a \neq 0 \text{ und } b \neq 0$$

$$\implies a = bx \implies x = \frac{a}{b}$$

Für die anderen Fälle siehe S.24.

$$\frac{2}{x-3} = \frac{3}{x-2}, \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{2; 3\}$$

$$2(x-2) = 3(x-3)$$

$$2x-4 = 3x-9$$

$$x = 5 \in D \implies L = \{5\}$$

$$\frac{2}{x-3} = \frac{5}{x-3}, \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$$

$$2(x-3) = 5(x-3)$$

$$2x-6 = 5x-15$$

$$9 = 3x$$

$$x = 3 \notin D \implies L = \emptyset$$

$$\frac{11}{(2x-6)(3x+9)} + \frac{2x+3}{6x-18} - \frac{x+1}{3x+9} = 0$$

$$\frac{11}{6(x-3)(x+3)} + \frac{2x+3}{6(x-3)} - \frac{x+1}{3(x+3)} = 0$$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{-3; 3\}$. Multiplizieren der Gleichung mit dem Hauptnenner $HN = 6(x-3)(x+3)$:

$$11 + (2x+3)(x+3) - 2(x+1)(x-3) = 0$$

$$11 + 2x^2 + 9x + 9 - 2x^2 + 4x + 6 = 0$$

$$13x = -26$$

$$x = -2 \in D$$

$$\implies L = \{-2\}$$

$$\frac{4}{(x-3)(x+3)} + \frac{2x+3}{6x-18} - \frac{x+1}{3x+9} = 0$$

$$\frac{4}{(x-3)(x+3)} + \frac{2x+3}{6(x-3)} - \frac{x+1}{3(x+3)} = 0$$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{-3; 3\}$. Multiplizieren der Gleichung mit dem Hauptnenner $HN = 6(x-3)(x+3)$:

$$24 + (2x+3)(x+3) - 2(x+1)(x-3) = 0$$

$$24 + 2x^2 + 9x + 9 - 2x^2 + 4x + 6 = 0$$

$$13x = -39$$

$$x = -3 \notin D$$

$$\implies L = \emptyset$$

Definitionen und Regeln

Gebrochen rationale Funktionen

Ein Term der Form

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

mit $a_n \neq 0$ heißt *Polynom* n -ten Grades.

Eine Funktion, deren Funktionsterm ein Polynom n -ten Grades ist, heißt *ganzrationale* Funktion n -ten Grades.

Lineare (affine) Funktionen sind ganzrationale Funktionen ersten Grades.

Eine Funktion, deren Funktionsterm ein Quotient zweier Polynome ist, heißt *gebrochen rationale* Funktion:

$$g : x \rightarrow g(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

mit dem Zählerpolynom $Z(x)$ und dem Nennerpolynom $N(x)$.

Die maximale Definitionsmenge von g ist

$$D_g = \mathbb{Q} \setminus \{\text{Nullstellen von } N\}$$

Die Nullstellen von g ($g(x) = 0$) sind die Nullstellen des Zählerpolynoms Z , die in D_g liegen.

$Z(x)$ und $N(x)$ können auch Produkte von Polynomen sein, da ein Produkt von Polynomen wieder ein Polynom ist.

x_0 sei eine Nullstelle des Nenners, nicht aber des Zählers: $N(x_0) = 0$ und $Z(x_0) \neq 0$. Für ein x ganz in der Nähe von x_0 ist $|N(x)|$ sehr klein und damit $|g(x)| = \left| \frac{Z(x)}{N(x)} \right|$ sehr groß. Je näher x an x_0 heranrückt, um so größer wird $|g(x)|$. Der Graf von g nähert sich immer mehr an die Gerade $x = x_0$ an, wenn sich x an x_0 annähert. Die zur y -Achse parallele Gerade mit der Gleichung $x = x_0$ ist eine senkrechte *Asymptote* von g , g hat bei x_0 eine *Polstelle* oder kurz einen *Pol*.

Verhalten von $g(x)$, wenn $|x|$ immer größer wird ($|x| \rightarrow \infty$):

Grad(Z) < Grad(N): Waagrechte Asymptote $y = 0$.

Grad(Z) > Grad(N): $|g(x)|$ wird immer größer.

Grad(Z) = Grad(N):

$$g(x) = \frac{a_nx^n + \dots + a_0}{b_nx^n + \dots + b_0} = \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \dots + \frac{b_0}{x^n}}$$

Die Teilbrüche werden immer kleiner, $g(x)$ nähert sich an $\frac{a_n}{b_n}$ an (waagrechte Asymptote).

Beispiele

Beispiele von Polynomen:

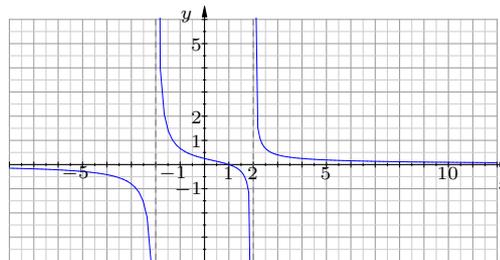
Grad	Polynom
0	3
1	$3 - x$
2	$5x^2 - 3x + 4$
3	$x^3 - 7$

$$g(x) = \frac{(x - 2)(2x + 3)}{(3x - 9)(2x + 5)} = \frac{2x^2 - x - 6}{6x^2 - 3x - 45}$$

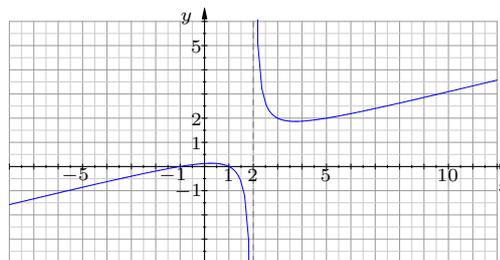
$$D_g = \mathbb{Q} \setminus \left\{ -\frac{5}{2}, 3 \right\}$$

Nullstellen: $x_1 = 2, x_2 = -\frac{3}{2}$

$$g(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 4}, \quad D_g = \mathbb{Q} \setminus \{-2; 2\}$$

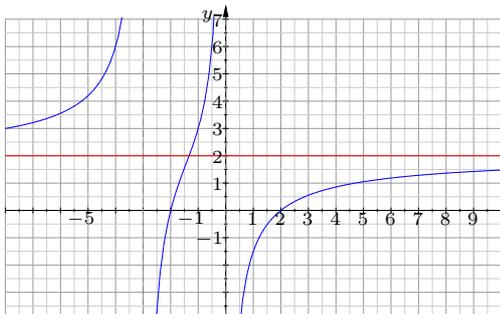


$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{4x - 8} = \frac{x^2 - 1}{4(x - 2)}, \quad D_g = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$$



$$g(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2 + 3x} = \frac{2(x^2 - 4)}{x(x + 3)}$$

$$D_g = \mathbb{Q} \setminus \{-3; 0\}$$



Wahrscheinlichkeit

Definitionen und Regeln

Der Ergebnisraum

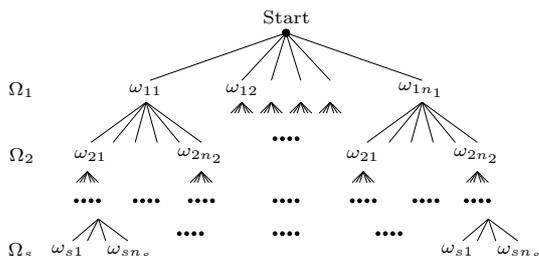
Die Menge Ω aller Ergebnisse eines Zufallsexperiments ZE heißt *Ergebnismenge* oder *Ergebnisraum* des Zufallsexperiments. Die Anzahl n der Ergebnisse ist die Mächtigkeit von Ω :

$$n = |\Omega|$$

Ein mehrstufiges Zufallsexperiment (z.B. mehrmaliges Würfeln) besteht aus s Experimenten mit den Ergebnisräumen $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_s$ und ihren Mächtigkeiten $n_1 = |\Omega_1|$ bis $n_s = |\Omega_s|$.

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{\omega_{11}, \omega_{12}, \dots, \omega_{1n_1}\} \\ \Omega_2 &= \{\omega_{21}, \omega_{22}, \dots, \omega_{2n_2}\} \\ &\dots \\ \Omega_s &= \{\omega_{s1}, \omega_{s2}, \dots, \omega_{sn_s}\} \end{aligned}$$

Baumdiagramm eines Zufallsexperiments:



Der Ergebnisraum des s -stufigen Zufallsexperiments ist Ω . Jedes Element $\omega \in \Omega$ besteht aus s Ergebnissen der Einzelexperimente:

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s)$$

mit

$$\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2, \dots, \omega_s \in \Omega_s$$

$$|\Omega| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_2| \cdot \dots \cdot |\Omega_s| = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_s$$

Ereignisse

ZE ist ein Zufallsexperiment mit dem Ergebnisraum Ω .

Jede Teilmenge von Ω heißt *Ereignis*.

$E \subset \Omega$ ist ein Ereignis. Das ZE wird einmal ausgeführt, das Ergebnis ist ω .

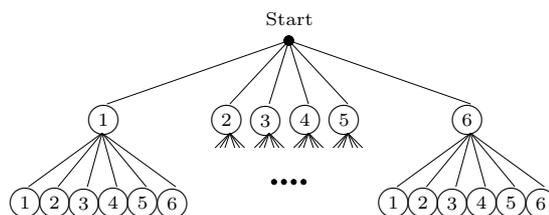
Das Ereignis E ist eingetreten, wenn $\omega \in E$.

Ereignisse nicht der Mächtigkeit eins heißen *Elementarereignisse*. Zu Ω gibt es genau $n = |\Omega|$ Elementarereignisse.

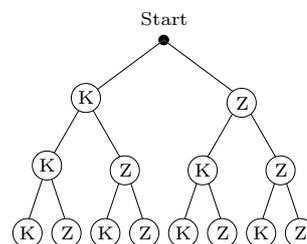
Beispiele

ZE: „Einmal Würfeln“ $\implies \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $n = |\Omega| = 6$

ZE: „Zweimal Würfeln“ \implies
 $\Omega = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, \dots, 64, 65, 66\}$
 23 z.B. bedeutet: Beim ersten Wurf 2, beim zweiten Wurf 3.
 $n = |\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$



ZE: „Drei Münzen werden geworfen“ \implies
 $\Omega = \{KKK, KKZ, KZK, KZZ, ZKK, ZKZ, ZZK, ZZZ\}$
 $|\Omega| = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$



ZE: „Zehn Münzen werden geworfen“ \implies
 $\Omega = \{KKKKKKKKKK, KKKKKKKKKZ, \dots, ZZZZZZZZZK, ZZZZZZZZZZ\}$
 $|\Omega| = 2^{10} = 1024$

ZE: „Einmal Würfeln“
 E : „Die gewürfelte Zahl ist gerade.“
 $E = \{2, 4, 6\}$

ZE: „Zweimal Würfeln“
 E : „Die Augensumme ist 7.“
 $E = \{16, 25, 34, 43, 52, 61\}$

ZE: „Einmal Würfeln“
 Die Elementarereignisse sind $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ und $\{6\}$.

Definitionen und Regeln

Ist E ein Ereignis eines Zufallsexperiments mit dem Ergebnisraum Ω , dann nennt man

$$\bar{E} = \Omega \setminus E = \{\omega \mid \omega \in \Omega \text{ und } \omega \notin E\}$$

das *Gegenereignis* von E . \bar{E} besteht also aus allen Ergebnissen, die nicht in E liegen.

Eine Menge $\mathcal{Z} = \{E_1, E_2, \dots, E_r\}$ von Ereignissen heißt *Zerlegung* von Ω , wenn

$$E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_r = \Omega$$

und der Durchschnitt von zwei beliebigen Mengen aus \mathcal{Z} immer leer ist:

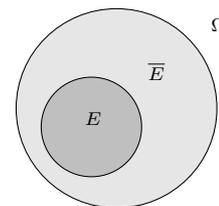
$$E_i \cap E_k = \emptyset$$

Beispiele: Ist $E \neq \emptyset$ ein beliebiges Ereignis, dann ist $\mathcal{Z} = \{E, \bar{E}\}$ eine Zerlegung von Ω .

Die Menge aller Elementarereignisse von Ω ist eine Zerlegung von Ω .

Beispiele

Ereignis und Gegenereignis im Mengendiagramm.



ZE: „Einmal Würfeln“

E : „Die gewürfelte Zahl ist gerade.“

\bar{E} : „Die gewürfelte Zahl ist ungerade.“

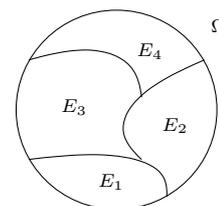
Eine Zerlegung von Ω in vier Ereignisse:

$$\Omega = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$$

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset, E_1 \cap E_3 = \emptyset$$

$$E_1 \cap E_4 = \emptyset, E_2 \cap E_3 = \emptyset$$

$$E_2 \cap E_4 = \emptyset, E_3 \cap E_4 = \emptyset$$



Beim Amerikanischen Roulette besteht der Ergebnisraum aus den Zahlen von null bis 36 und der Doppelnull: $\Omega = \{00, 0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$ mit $|\Omega| = 38$. Eine mögliche Zerlegung von Ω ist

$$\mathcal{Z} = \{\{00, 0\}, \{x \mid 1 \leq x \leq 18\}, \{x \mid 19 \leq x \leq 36\}\}$$

Die Potenzmenge

Die leere Menge \emptyset ist Teilmenge von jeder Menge und somit bei jedem Zufallsexperiment ein Ereignis. Da die leere Menge kein Element enthält, kann das Ereignis \emptyset niemals eintreten:

\emptyset heißt das *unmögliche Ereignis*.

Da jede Menge eine Teilmenge von sich selbst ist, ist auch Ω ein Ereignis. Da jedes mögliche Ergebnis ein Element von Ω ist, tritt Ω immer ein:

Ω heißt das *sichere Ereignis*.

Die Menge aller Teilmengen einer Menge A heißt *Potenzmenge* von A :

$$\mathcal{P}(A) = \{T \mid T \subset A\}$$

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

Die Menge aller Ereignisse eines Zufallsexperiments mit dem Ergebnisraum Ω ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ mit der Mächtigkeit

$$|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$$

$$A = \{1, 2\}, |A| = 2$$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

$$|\mathcal{P}(A)| = 4 = 2^2 = 2^{|A|}$$

$$B = \{1, 2, 3\}, |B| = 3$$

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$$|\mathcal{P}(B)| = 8 = 2^3 = 2^{|B|}$$

Beim Europäischen Roulette besteht der Ergebnisraum aus den Zahlen von null bis 36:

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 36\}$$

mit $|\Omega| = 37$. In den Spielregeln sind einige Ereignisse definiert, auf die man sein Geld setzen kann, wie z.B. „alle geraden Zahlen“, „alle ungeraden Zahlen“, „erstes Dutzend“, usw. Das Spiel ist aber noch fast beliebig erweiterbar, denn es gibt

$$|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{37} = 137\,438\,953\,472$$

verschiedene Ereignisse.

Definitionen und Regeln

Relative Häufigkeit

Ein Zufallsexperiment wird N -mal durchgeführt. Tritt das Ereignis E dabei $H(E)$ mal ein, dann heißt $H(E)$ die absolute Häufigkeit von E und

$$h(E) = \frac{H(E)}{N}$$

die relative Häufigkeit von E .

$$0 \leq H \leq N \implies 0 \leq h \leq 1$$

$$H(\emptyset) = 0 \implies h(\emptyset) = 0$$

$$H(\Omega) = N \implies h(\Omega) = 1$$

Die absolute bzw. relative Häufigkeit eines Ergebnisses ω ist gleich der Häufigkeit des Elementarereignisses $\{\omega\}$ (vereinfachte Schreibweise):

$$H(\omega) = H(\{\omega\}), \quad h(\omega) = h(\{\omega\})$$

Ist $\mathcal{Z} = \{E_1, E_2, \dots, E_r\}$ eine Zerlegung von Ω , dann gilt (Zerlegungssatz)

$$H(E_1) + H(E_2) + \dots + H(E_r) = N$$

$$h(E_1) + h(E_2) + \dots + h(E_r) = 1$$

Die absolute bzw. relative Häufigkeit eines Ereignisses $E = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}$ ist gleich der Summe der Häufigkeiten der Elementarereignisse von E :

$$H(E) = H(\omega_1) + H(\omega_2) + \dots + H(\omega_r)$$

$$h(E) = h(\omega_1) + h(\omega_2) + \dots + h(\omega_r)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} h(E) &= \frac{H(E)}{N} = \frac{H(\omega_1) + \dots + H(\omega_r)}{N} = \\ &= \frac{H(\omega_1)}{N} + \frac{H(\omega_2)}{N} + \dots + \frac{H(\omega_r)}{N} = \\ &= h(\omega_1) + h(\omega_2) + \dots + h(\omega_r) \end{aligned}$$

Für sehr große Versuchszahlen ($N \rightarrow \infty$) stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten eines Ereignisses E um einen festen Wert, die Breite des Intervalls, in dem z.B. 90% der relativen Häufigkeiten liegen, wird immer kleiner (*Gesetz der großen Zahlen*). Den Stabilisierungswert der relativen Häufigkeit von E nennt man die *Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses E .

Beispiele

ZE: „Werfen eines Würfels“, $N = 600$

E_1 : „Werfen einer geraden Zahl“

E_2 : „Werfen einer ungeraden Zahl“

	1	2	3	4	5	6
H	91	89	110	115	97	98
h in %	15,2	14,8	18,3	19,2	16,2	16,3

$$H(E_1) = 89 + 115 + 98 = 302$$

$$H(E_2) = 91 + 110 + 97 = 298$$

$$h(E_1) = \frac{302}{600} = 50,3\% = h(2) + h(4) + h(6)$$

$$h(E_2) = \frac{298}{600} = 49,7\% = h(1) + h(3) + h(5)$$

$$H(1) + H(2) + H(3) + H(4) + H(5) + H(6) = 600$$

$$h(1) + h(2) + h(3) + h(4) + h(5) + h(6) = 1 = 100\%$$

Spezialfälle des Zerlegungssatzes:

$$\begin{aligned} \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} &\implies \\ H(\Omega) = H(\omega_1) + H(\omega_2) + \dots + H(\omega_n) &= N \\ h(\Omega) = h(\omega_1) + h(\omega_2) + \dots + h(\omega_n) &= 1 \end{aligned}$$

$$h(E) + h(\bar{E}) = 1$$

Ein Beispiel für die Stabilisierung der relativen Häufigkeit:

ZE: „Werfen einer Münze“

Das ZE wird 100, 10 000 und 1 000 000 mal durchgeführt, der erwartete Wert für die relativen Häufigkeiten ist $0,5 = 50\%$. Die relative Abweichung vom erwarteten Wert ist δ_{rel} :

N		K	Z
100	H	44	56
	h	44 %	56 %
	δ_{rel}	-12 %	+12 %
10^4	H	5041	4959
	h	50,41 %	49,59 %
	δ_{rel}	+0,82 %	-0,82 %
10^6	H	500620	499380
	h	50,062 %	49,938 %
	δ_{rel}	+0,124 %	-0,124 %

Die *Wahrscheinlichkeit* $P(E)$ eines Ereignisses E ist der Stabilisierungswert von $h(E)$ mit $N \rightarrow \infty$.

In der Realität können Wahrscheinlichkeiten nur näherungsweise bestimmt werden, indem man ein Zufallsexperiment sehr oft wiederholt!

Definitionen und Regeln

Vierfeldertafel

Oft wird eine Menge, z.B. ein Ergebnisraum Ω , nach zwei Kriterien zerlegt:

$$\Omega = A \cup \bar{A} = B \cup \bar{B}$$

Die Mächtigkeiten der Teilmengen schreibt man übersichtlich in einer *Vierfeldertafel* zusammen:

Ω	A	\bar{A}	
B	$ A \cap B $	$ \bar{A} \cap B $	$ B $
\bar{B}	$ A \cap \bar{B} $	$ \bar{A} \cap \bar{B} $	$ \bar{B} $
	$ A $	$ \bar{A} $	$ \Omega $

Dabei gelten die Summenregeln:

$$\begin{aligned}
 |A \cap B| + |\bar{A} \cap B| &= |B| \\
 |A \cap \bar{B}| + |\bar{A} \cap \bar{B}| &= |\bar{B}| \\
 |A| + |\bar{A}| &= |\Omega| \\
 |A \cap B| + |A \cap \bar{B}| &= |A| \\
 |\bar{A} \cap B| + |\bar{A} \cap \bar{B}| &= |\bar{A}| \\
 |B| + |\bar{B}| &= |\Omega|
 \end{aligned}$$

Dividiert man jeden Eintrag in der Vierfeldertafel für Mächtigkeiten durch $|\Omega|$, dann erhält man die Vierfeldertafel für *Anteile* bzw. relative Häufigkeiten:

Ω	A	\bar{A}	
B	a	b	$a + b$
\bar{B}	c	d	$c + d$
	$a + c$	$b + d$	$a + b + c + d = 1$

Die Wahrscheinlichkeit

Jedem Ereignis E eines Zufallsexperiments mit dem Ergebnisraum Ω ist eine Wahrscheinlichkeit $P(E)$ zugeordnet, die folgenden Regeln genügt:

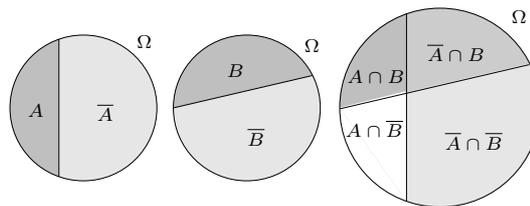
$$\boxed{P(\emptyset) = 0} \quad \boxed{P(\Omega) = 1} \quad \boxed{0 \leq P(E) \leq 1}$$

Wahrscheinlichkeiten liegen immer im Intervall von 0 bis 1 bzw. von 0 bis 100%.

Ist $\mathcal{Z} = \{E_1, E_2, \dots, E_r\}$ eine Zerlegung von Ω , dann gilt (Zerlegungssatz)

$$P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_r) = 1$$

Beispiele



In einer Klasse mit Buben (B) und Mädchen (\bar{B}) gibt es Sportler (S) und Nichtsportler (\bar{S}). Ein Fünftel der Klasse sind sportliche Buben, 30% der Klasse unsportliche Mädchen. Insgesamt sind 70% unsportliche Kinder in der Klasse und drei sporttreibende Mädchen.

Vierfeldertafel der Anteile (relativen Häufigkeiten), das fett Gedruckte sind die gegebenen Werte (rechts unten muss 100% stehen), die anderen Werte folgen aus den Summenregeln:

Ω	B	\bar{B}	
S	20 %	10 %	30 %
\bar{S}	40 %	30 %	70 %
	60 %	40 %	100 %

Vierfeldertafel der Mächtigkeiten (absoluten Häufigkeiten):

$$10\% \cdot \text{Gesamtzahl} = 3 \implies \text{Gesamtzahl} = 30$$

Ω	B	\bar{B}	
S	6	3	9
\bar{S}	12	9	21
	18	12	30

In Anlehnung an die Regeln für relative Häufigkeiten definiert man die Wahrscheinlichkeit axiomatisch, d.h. durch die Vorgabe von nicht beweisbaren Fundamentalsätzen (Axiomen). Allerdings können wir an dieser Stelle noch kein vollständiges und minimales Axiomensystem einführen.

Auch für Wahrscheinlichkeiten verwenden wir die vereinfachte Schreibweise

$$P(\{\omega\}) = P(\omega)$$

Die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses ω ist also gleich der Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses $\{\omega\}$.

Definitionen und Regeln

Spezialfälle des Zerlegungssatzes:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} \implies P(\Omega) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n) = 1$$

$$P(E) + P(\bar{E}) = 1$$

oder

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $E = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}$ ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse von E :

$$P(E) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_r)$$

Laplace-Experimente

Ein Zufallsexperiment, bei dem jedes Ergebnis (Elementarereignis) die gleiche Wahrscheinlichkeit p besitzt, heißt *Laplace-Experiment*.

Für ein Ergebnis ω eines Laplace-Experiments mit $n = |\Omega|$ folgt aus dem Zerlegungssatz

$$\underbrace{P(\omega_1)}_p + \underbrace{P(\omega_2)}_p + \dots + \underbrace{P(\omega_n)}_p = 1$$

$n \cdot p$

$$p = P(\omega) = \frac{1}{n} = \frac{1}{|\Omega|}$$

Für ein Ereignis $E = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}$ eines Laplace-Experiments folgt dann

$$P(E) = \frac{r}{n} = \frac{|E|}{|\Omega|} = p \cdot |E|$$

Bei einem Zufallsexperiment ist $n = |\Omega|$ die Zahl der *möglichen* und $|E|$ die Zahl der für das Eintreten von E *günstigen* Ergebnisse. Für ein Laplace-Experiment gilt also

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\text{„Zahl der Günstigen“}}{\text{„Zahl der Möglichen“}}$$

Beispiele

Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit und Experiment:

Wird ein Zufallsexperiment N -mal durchgeführt, dann ist die relative Häufigkeit des Eintretens eines Ereignisses E ungefähr gleich der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses:

$$h(E) = \frac{H(E)}{N} \approx P(E)$$

Für die absolute Häufigkeit gilt also

$$H(E) \approx N \cdot P(E)$$

$N \cdot P(E)$ nennt man den *Erwartungswert* der absoluten Häufigkeit von E .

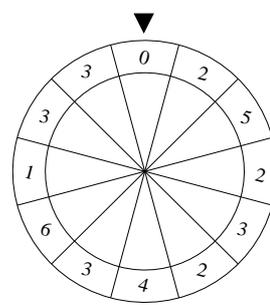
Die relative Abweichung

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{h(E) - P(E)}{P(E)} = \frac{H(E) - N \cdot P(E)}{N \cdot P(E)}$$

ist umso kleiner, je größer N ist.

Ein Würfel, bei dem jede Zahl mit der gleichen Wahrscheinlichkeit geworfen wird, heißt *Laplace-Würfel* oder kurz *L-Würfel*. Beim Laplace-Würfel ist die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses $p = \frac{1}{6}$. Wird ein Laplace-Würfel z.B. $N = 600$ mal geworfen, erwartet man, dass jede Zahl $Np = 100$ mal erscheint.

Wird das abgebildete Glücksrad einmal gedreht, bleibt es bei jedem Kreissektor mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p stehen. Da es 12 Sektoren sind, ist $p = \frac{1}{12}$.



E_s : „Die Zahl s erscheint.“

Da die 3 viermal und die 2 dreimal vorkommt, ist $|E_3| = 4$ und ist $|E_2| = 3$:

$$P(E_2) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}, \quad P(E_3) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P(E_0) = P(E_1) = P(E_4) = P(E_5) = P(E_6) = \frac{1}{12}$$

Probe (Zerlegungssatz):

$$P(E_0) + P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) + P(E_6) = 5 \cdot \frac{1}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = 1$$

Definitionen und Regeln

Berechnung von Mächtigkeiten

Um Laplace-Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, muss man die Mächtigkeiten vom Ergebnisraum Ω und von Ereignissen bestimmen.

Aus s Mengen A_1, A_2, \dots, A_s wird je ein Element gewählt und geordnet nebeneinander gestellt: Man bildet ein *geordnetes s -Tupel*

$$(a_1, a_2, \dots, a_s)$$

Geordnet bedeutet, dass das erste Element aus A_1 ($a_1 \in A_1$), das zweite aus A_2 ist usw.

Mit den Elementen aus den s Mengen A_1, A_2, \dots, A_s kann man genau

$$|A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_s|$$

verschiedene s -Tupel bilden (*Zählprinzip*).

Verteilen sich n Personen auf n nummerierte Plätze, dann hat die erste Person n Plätze zur Auswahl, die zweite noch $n - 1$ Plätze (einer ist schon besetzt) usw. Nach dem Zählprinzip gibt es dann $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1$ verschiedene Anordnungen.

n unterscheidbare Objekte lassen sich auf

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$$

verschiedene Arten auf n Plätze verteilen.

$n!$ spricht man „ n Fakultät“.

- $0! = 1$
- $1! = 1$
- $2! = 1 \cdot 2 = 2$
- $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
- $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

Eine Urne enthält n Kugeln, die mit den Zahlen von 1 bis n bedruckt sind.

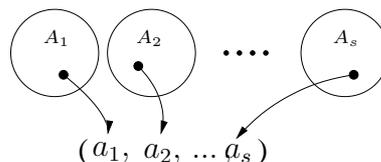
Aus der Urne zieht man der Reihe nach s Kugeln, notiert die Zahl und legt sie jedesmal wieder zurück (Ziehen mit Zurücklegen). Da man bei jedem Ziehen n Möglichkeiten hat, geht das auf n^s Arten.

Aus der Urne zieht man der Reihe nach s Kugeln, ohne sie wieder zurück zu legen (Ziehen ohne Zurücklegen). Das geht auf

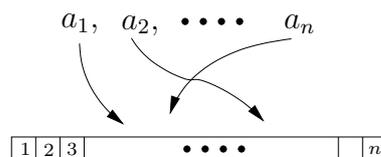
$$n(n - 1)(n - 2) \dots (n - s + 1)$$

Arten.

Beispiele



Bildung eines s -Tupels.



Verteilung von n verschiedenen Objekten auf n Plätze.

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

Aus einer Urne mit 49 Kugeln werden 6 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Das geht auf

$$m = 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = 10\,068\,347\,520$$

Arten. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer bestimmten Zahlenreihenfolge ist also $p = \frac{1}{m}$. Beim Lotto ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Zahlen gezogen werden. Für jede gezogene Zahlenmenge (z.B. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) gibt es 6! verschiedene Möglichkeiten, wie sie gezogen werden kann. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer bestimmten Zahlenmenge (Ereignis E) ist also

$$P(E) = \frac{6!}{10\,068\,347\,520} = \frac{1}{13\,983\,816}$$

Damit gibt es 13 983 816 verschiedene Arten, einen Lottoschein auszufüllen.

Eine andere Formulierung der Urnenregeln:

Aus den Elementen einer Menge der Mächtigkeit n kann man n^s geordnete s -Tupel mit Wiederholung bilden.

„Mit Wiederholung“ bedeutet, dass das gleiche Element mehrmals vorkommen darf.

Aus den Elementen einer Menge der Mächtigkeit n kann man

$$n(n - 1)(n - 2) \dots (n - s + 1)$$

geordnete s -Tupel ohne Wiederholung bilden.

Geometrie

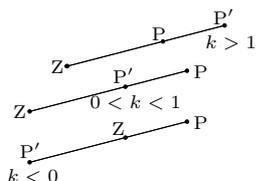
Definitionen und Regeln

Ähnlichkeit

Die zentrische Streckung

Eine *zentrische Streckung* $(Z|k)$ mit dem Zentrum Z und dem Streckungsfaktor $k \neq 0$ ordnet jedem Punkt P der Ebene einen Bildpunkt P' nach folgenden Regeln zu:

- $P' \in ZP$
- $\overline{ZP'} = k \cdot \overline{ZP}$
- $P' \in [ZP$ für $k > 0$
- $P' \notin [ZP$ für $k < 0$



Eine zentrische Streckung bildet eine Gerade g auf eine dazu parallele Gerade g' ab, d.h. die Bildpunkte aller Punkte einer Geraden g bilden wieder eine Gerade g' , die zu g parallel ist.

Eine zentrische Streckung $(Z|k)$ bildet eine Strecke $[AB]$ auf eine dazu parallele Strecke $[A'B']$ mit $\overline{A'B'} = |k| \cdot \overline{AB}$ ab.

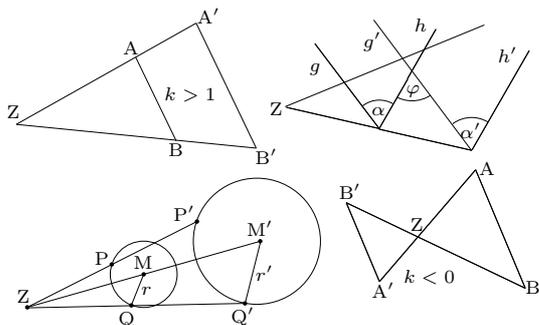
Eine zentrische Streckung $(Z|k)$ bildet einen Kreis $k(M|r)$ auf einen Kreis $k'(M'|r')$ mit $r' = |k| \cdot r$ ab.

Eine zentrische Streckung $(Z|k)$ bildet eine Figur mit der Fläche A auf eine Figur mit der Fläche $A' = k^2 A$ ab.

Eine zentrische Streckung ist *winkeltreu*, d.h. eine Figur wird auf eine Bildfigur mit gleichen Winkeln abgebildet.

Eine zentrische Streckung $(Z|k)$ mit $k = -1$ ist eine Punktspiegelung an Z .

Zur Punktspiegelung siehe S. 35.

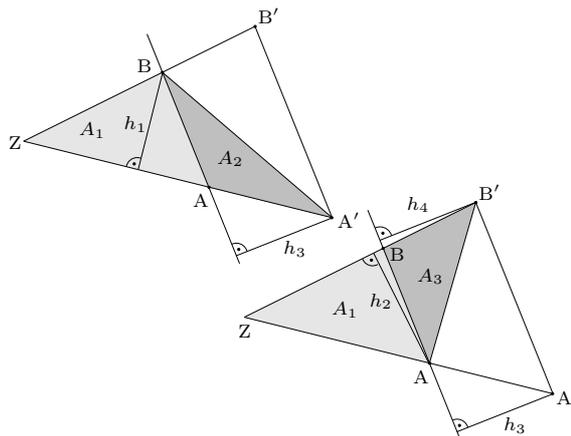


$$g \parallel g' \text{ und } h \parallel h' \implies \alpha' = \varphi = \alpha$$

Beispiele

Die wichtigsten Beweise für die links stehenden Sätze:

Die zentrische Streckung $(Z|k)$ bildet A auf A' und B auf B' ab, d.h. $\overline{ZA'} = k \cdot \overline{ZA}$ und $\overline{ZB'} = k \cdot \overline{ZB}$. Für die Dreiecksflächen gilt:



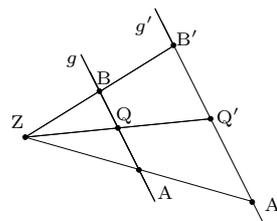
$$A_1 + A_2 = A_{ZA'B'} = \frac{1}{2} \overline{ZA'} h_1 = k \cdot \frac{1}{2} \overline{ZA} h_1 = k A_1$$

$$A_1 + A_3 = A_{ZB'A} = \frac{1}{2} \overline{ZB'} h_2 = k \cdot \frac{1}{2} \overline{ZB} h_2 = k A_1$$

$$\implies A_2 = A_3 \implies \frac{1}{2} \overline{AB} h_3 = \frac{1}{2} \overline{AB} h_4$$

$$\implies h_3 = h_4 \implies AB \parallel A'B'$$

$A \xrightarrow{(Z|k)} A', B \xrightarrow{(Z|k)} B'$
 $g = AB, g' = A'B'$
 $Q \in g, Q \xrightarrow{(Z|k)} Q'$
 $A'Q' \parallel AQ \parallel AB \parallel A'B'$
 $\implies Q' \in g'$

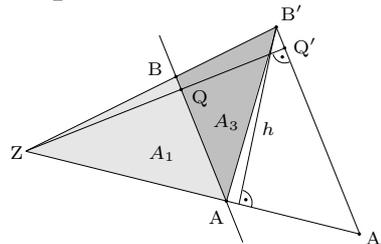


$$A_{ZA'B'} = \frac{1}{2} \overline{ZA'} h = k \cdot \frac{1}{2} \overline{ZA} h = k \cdot A_{ZAB'} = k^2 A_1$$

$$A_{ZA'B'} = \frac{1}{2} \overline{A'B'} \cdot \overline{ZQ'} = k \cdot \frac{1}{2} \overline{A'B'} \cdot \overline{ZQ} \implies$$

$$k^2 \cdot \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{ZQ} = k \cdot \frac{1}{2} \overline{A'B'} \cdot \overline{ZQ} \implies$$

$$\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$$



Definitionen und Regeln

Die Strahlensätze

Zwei sich in Z schneidende Geraden g und h werden von mehreren parallelen Geraden geschnitten (AB || CD || EF):

Die Streckenlängen auf g verhalten sich wie die entsprechenden Streckenlängen auf h:

$$\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZA'}}, \quad \frac{\overline{ZA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{A'B'}}, \quad \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZC}} = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZC'}}$$

Die Verhältnisse einer Strecke auf g zu einer entsprechenden Strecke auf h sind alle gleich:

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{ZC}}{\overline{ZC'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Die Längen der Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich wie die entsprechenden Strecken von Z zu den Parallelen:

$$\frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZA'}}, \quad \frac{\overline{CC'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZC}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZC'}}{\overline{ZA'}}$$

Beweis der Strahlensätze:

Die zentrische Streckung (Z|k) bildet A auf B ab, d.h. $k = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZA}}$. Das Bild von A' unter dieser Streckung sei B''. Da $BB'' \parallel AA'$ (Streckung) und $BB' \parallel AA'$ (Voraussetzung), ist $B'' = B'$. Aus den Eigenschaften der zentrischen Streckung folgt dann

$$k = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}}$$

$$\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZA'}} \implies \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}} = \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}}$$

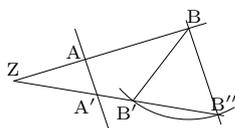
$$\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZA'}} \implies \frac{a+b}{a} = \frac{a'+b'}{a'}$$

$$\implies 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b'}{a'} \implies \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$$

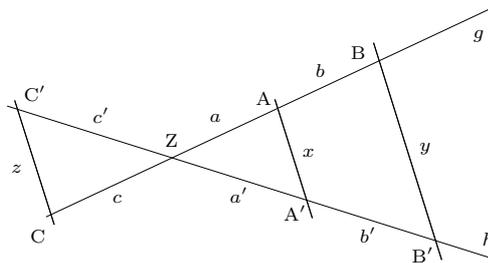
Eine Umkehrung der Strahlensätze (folgt direkt aus den Eigenschaften der zentrischen Streckung):

$Z = g \cap h, A \in g, A' \in [ZA, B \in h, B' \in [ZB$
 Wenn $\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZA'}}$, dann ist $AB \parallel A'B'$.

Nicht jede Umkehrung der Strahlensätze ist richtig: Aus $\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}}$ folgt nicht $AB \parallel A'B'$!

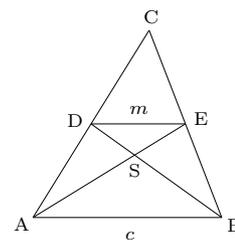


Beispiele



Anwendungen der Strahlensätze:

Im ΔABC ist D der Mittelpunkt von [AC] und E der Mittelpunkt von [BC]. S ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden [AE] und [BD]. Aus den Strahlensätzen folgt: $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CD}} = \frac{1}{2}$



Die Mittellinie [DE] in einem Dreieck ist parallel zur Grundlinie [AB] und $DE = \frac{1}{2} \cdot AB$.

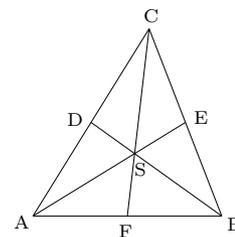
$$\frac{\overline{SD}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SE}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$$

$$\implies \overline{AS} = 2 \cdot \overline{SE} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AE}$$

Ist T den Schnittpunkt T von AE und EF, dann folgt genauso:

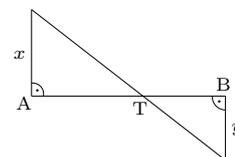
$$\overline{AT} = 2 \cdot \overline{TE} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AF}$$

Also ist $T = S$.



Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem *Schwerpunkt* S, der die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1 teilt.

Nebenstehende Abbildung zeigt, wie man eine Strecke [AB] durch Konstruktion im Verhältnis $x : y$ teilt:



$$\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \frac{x}{y}$$

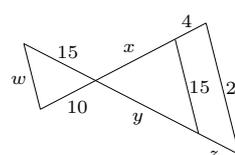
$$\frac{x+4}{x} = 1 + \frac{4}{x} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{x} = \frac{1}{3} \implies x = 12$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y}{12} = \frac{15}{10} \implies y = 18$$

$$\frac{z}{4} = \frac{y}{x} = \frac{18}{12} \implies x = 6$$

$$\frac{w}{10} = \frac{15}{x} = \frac{15}{12} \implies x = 12,5$$



Definitionen und Regeln

Die Ähnlichkeit

Zwei Figuren F und F' heißen *ähnlich* zueinander ($F \sim F'$), wenn es eine zentrische Streckung $(Z|k)$ gibt, die F in eine zu F' kongruente Figur F'' abbildet.

Zwischen ähnliche Figuren schreibt man das Zeichen \sim .

In ähnlichen Figuren sind entsprechende Winkel und entsprechende Streckenverhältnisse gleich.

Ähnlichkeitssätze für Dreiecke:

Zwei Dreiecke sind bereits ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen (ww).

$\alpha = \varepsilon, \beta = \varphi \implies$
 $\triangle ABC \sim \triangle EFD \implies$
 $\frac{a}{e} = \frac{b}{f} = \frac{c}{d}$

Zwei Dreiecke sind bereits ähnlich, wenn die drei Seitenverhältnisse gleich sind (sss).

$\frac{f}{a} = \frac{d}{b} = \frac{e}{c} = 1,5 \implies$
 $\triangle ABC \sim \triangle FDE \implies$
 $\alpha = \varphi, \beta = \delta, \gamma = \varepsilon$

Zwei Dreiecke sind bereits ähnlich, wenn sie in einem Winkel und den Verhältnissen der anliegenden Seiten übereinstimmen (sws).

$\frac{a}{d} = \frac{b}{f} = \frac{4}{3}, \gamma = \varphi \implies$
 $\triangle ABC \sim \triangle DFE \implies$
 $\alpha = \delta, \beta = \varphi, \gamma = \varepsilon = 90^\circ$

Zwei Dreiecke sind bereits ähnlich, wenn sie in zwei Seitenverhältnissen und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen (ssW).

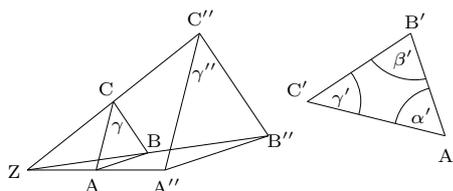
$\frac{b}{f} = \frac{c}{e} = 3, \beta = \varphi \implies$
 $\triangle ABC \sim \triangle DFE \implies$
 $\alpha = \delta, \beta = \varphi, \gamma = \varepsilon$

Beispiele

$F \sim F'$, es gibt $F'' \cong F'$ mit
 $\alpha = \alpha' = \alpha'', \delta = \delta' = \delta''$ usw.
 $\overline{A'B'} = \overline{A''B''} = k \cdot \overline{AB}$ usw.
 $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{D'A'}}{\overline{DA}} = k$

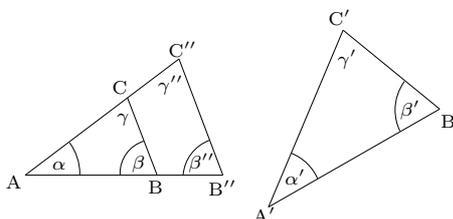
Wir betrachten $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ mit

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} = k$$



Eine Streckung $(Z|k)$ bildet $\triangle ABC$ auf $\triangle A''B''C''$ mit $\overline{A''B''} = k\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{B''C''} = k\overline{BC} = \overline{B'C'}$ und $\overline{C''A''} = k\overline{CA} = \overline{C'A'}$ ab. Nach dem sss-Satz ist $\triangle A''B''C'' \cong \triangle A'B'C'$ und damit nach Definition $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Wir betrachten $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ mit $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$.



$\triangle A'B'C'$ wird durch Drehung und Verschiebung in $\triangle A''B''C''$ überführt ($\triangle A''B''C'' \cong \triangle A'B'C'$) mit $B'' \in [AB]$ und $C'' \in [AC]$. Wegen $\beta'' = \beta$ ist $B''C'' \parallel BC$. Die zentrische Streckung $(A|k)$ mit $k = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ führt also $\triangle ABC$ in $\triangle A''B''C''$ über, d.h. $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

Grundwissen Mathematik – Jahrgangsstufe 9

Algebra

Definitionen und Regeln

Binomische Formeln

Binomische Formeln:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Die binomischen Formeln verwendet man hauptsächlich zum Faktorisieren von Summen. Beispiele:

$$x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x - 1)(x + 1)$$

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 - 12x + 9}{8x^2 - 18} &= \frac{(2x)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2x + 3^2}{2((2x)^2 - 3^2)} = \\ &= \frac{(2x - 3)^2}{2(2x - 3)(2x + 3)} = \frac{2x - 3}{2(2x + 3)} \end{aligned}$$

Rationale Zahlen

Die Menge der rationalen Zahlen:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

Zählt man die endlichen Dezimalbrüche zu den periodischen Dezimalbrüchen (z.B. wegen $0,123 = 0,123\bar{0} = 0,122\bar{9}$), dann gilt:

$$\mathbb{Q} = \{\text{aller periodischen Dezimalbrüche}\}$$

Zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen liegen noch unendlich viele weitere rationale Zahlen (die rationalen Zahlen liegen *dicht* auf der Zahlengeraden).

$$q \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \implies q^2 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$$

Wegen $1^2 = 1 < 2$ und $2^2 = 4 > 2$ hat die Gleichung $x^2 = 2$ keine ganze Lösung. Wenn $x \in \mathbb{Q}$, dann muss also $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ sein. Damit ist aber auch $x^2 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, d.h. $x^2 \neq 2$. Es gibt also weder eine ganze noch eine nichtganze rationale Zahl, deren Quadrat 2 ist. Die Menge der rationalen Zahlen ist *unvollständig*.

Beispiele

$$(x + 2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$$

$$\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 = a^2 - ab + \frac{b^2}{4}$$

$$98^2 = (100 - 2)^2 = 100^2 - 2 \cdot 2 \cdot 100 + 2^2 = 9604$$

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$$

$$\begin{aligned} 9x^2 - 3xa + \frac{a^2}{4} &= (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot \frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \\ &= \left(3x - \frac{a}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 - 1 &= (x^2)^2 - 1^2 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = \\ &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) \end{aligned}$$

Logische Zeichen: \wedge : „und“, \vee : „oder“

In der folgenden Formel stehen z_1 bis z_n für Ziffern (siehe auch S.15):

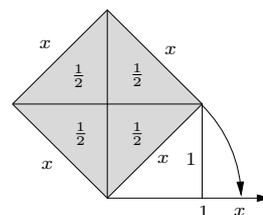
$$0,\overline{z_1 \dots z_n} = \frac{z_1 \dots z_n}{10^n - 1}$$

$$0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1, \quad 0,\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \quad 0,\overline{123} = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$$

$$\begin{aligned} 0,023\overline{45} &= \frac{23 + 0,\overline{45}}{1000} = \frac{23 + \frac{45}{99}}{1000} = \frac{2345 - 23}{99000} = \\ &= \frac{2322}{99000} = \frac{129}{5500} \end{aligned}$$

$$x^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

Es gibt also einen Punkt x auf der Zahlengeraden mit



$$x^2 = 2$$

$$x^2 = 2 \implies x \notin \mathbb{Q}$$

$$x \notin \mathbb{Z} \text{ und } x^2 \in \mathbb{Z} \implies x \notin \mathbb{Q}$$

Definitionen und Regeln

Reelle Zahlen

Ein unendlicher, nichtperiodischer Dezimalbruch heißt *irrational*.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{aller irrationalen Zahlen}\}$$

$$\mathbb{R} = \{\text{aller Dezimalbrüche}\}$$

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{\text{aller irrationalen Zahlen}\}$$

\mathbb{R} ist vollständig, d.h. jeder reellen Zahl entspricht ein Punkt auf der Zahlengeraden und umgekehrt.

Durch eine *Intervallschachtelung* kann man für jeden Punkt auf der Zahlengeraden den dazugehörigen Dezimalbruch konstruieren.

Die Quadratwurzel

Definition und grundlegende Eigenschaften

Für $a \geq 0$ heißt die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^2 = a$ die *Quadratwurzel* (kurz *Wurzel*) aus a , a heißt *Radikand*.

$$a \geq 0 : x = \sqrt{a} \iff x^2 = a \wedge x \geq 0$$

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

$$x^2 = a \implies L = \begin{cases} \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\} & \text{für } a > 0 \\ \{0\} & \text{für } a = 0 \\ \{\} = \emptyset & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Für $a \geq 0$ gilt:

$$x^2 = a \iff |x| = \sqrt{a} \iff x = \pm\sqrt{a}$$

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Unter die Wurzel ziehen:

$$a = \begin{cases} \sqrt{a^2} & \text{für } a \geq 0 \\ -\sqrt{a^2} & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

$$a = \text{sgn}(a)\sqrt{a^2}$$

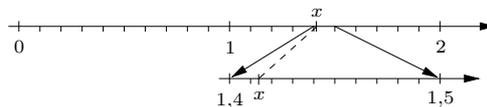
$$|x| = x \cdot \text{sgn}(x)$$

Beispiele

$r = 0,101001000100001\dots$ ist nichtperiodisch, also irrational.

Es gibt einen Punkt $x > 0$ auf der Zahlengeraden mit $x^2 = 2$. Da $x \notin \mathbb{Q}$, ist x irrational.

Intervallschachtelung für x mit $x^2 = 2$:



$$\begin{aligned} 1^2 = 1 < 2 < 4 = 2^2 &\implies 1 < x < 2 \\ \underbrace{1,4^2}_{1,96} < 2 < \underbrace{1,5^2}_{2,25} &\implies 1,4 < x < 1,5 \\ \underbrace{1,41^2}_{1,9881} < 2 < \underbrace{1,42^2}_{2,0164} &\implies 1,41 < x < 1,42 \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

$$\sqrt{4} = 2, \quad \sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{4}{9}, \quad \sqrt{10^6} = 10^3$$

$\sqrt{-9}$ nicht definiert

„Wurzel ziehen“ heißt auch *radizieren*.

Die Wurzel aus einer natürlichen Zahl ist entweder natürlich oder irrational.

$$2^2 < 7 \text{ und } 3^2 > 7 \implies \sqrt{7} \notin \mathbb{N}$$

$\sqrt{7}$ ist also irrational.

$$x^2 = 9 \implies L = \{-3, 3\} \text{ oder kurz } x = \pm 3$$

$$x^2 = 0 \implies L = \{0\}$$

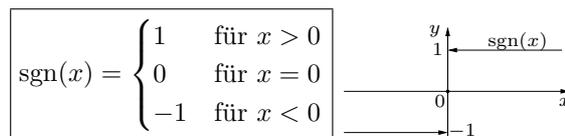
$$x^2 = -4 \implies L = \{\} = \emptyset$$

$$\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5, \quad \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$$

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x - 2)^2} = |x - 2|$$

$$3 = \sqrt{3^2}, \quad -7 = -\sqrt{(-7)^2}$$

Die Signumfunktion (Vorzeichenfunktion):



$$x\sqrt{\frac{1}{x^2}} = \text{sgn}(x)\sqrt{\frac{x^2}{x^2}} = \text{sgn}(x)$$

$$x^2 = \sqrt{x^4}, \quad x^3 = \text{sgn}(x^3)\sqrt{x^6} = \text{sgn}(x)\sqrt{x^6}$$

Definitionen und Regeln

Numerische Wurzelberechnung

x_1 sei ein Näherungswert für \sqrt{a} . Wir suchen einen besseren Wert $x_2 = x_1 + \Delta x$:

$$x_2^2 = (x_1 + \Delta x)^2 = x_1^2 + 2x_1\Delta x + \Delta x^2 = a$$

Wenn x_1 schon ein einigermaßen guter Näherungswert ist, dann gilt $|\Delta x| \ll x_1$ und damit auch $\Delta x^2 \ll |2x_1\Delta x|$. In obiger Summe kann man also Δx^2 vernachlässigen:

$$x_1^2 + 2x_1\Delta x = a \implies \Delta x = \frac{a}{2x_1} - \frac{x_1}{2}$$

$$\implies x_2 = x_1 + \Delta x = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{a}{x_1} \right)$$

Den besseren Wert x_2 kann man mit der gleichen Formel wieder verbessern usw. (*Rekursion*).

Rekursionsformel zur Berechnung von $x = \sqrt{a}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

(Newtonverfahren)

Beim Newtonverfahren verdoppelt sich die Zahl der geltenden Ziffern bei jedem Schritt.

Für $a \approx 1$, d.h. $a = 1 + h$ mit $|h| \ll 1$ folgt mit dem Newtonverfahren und Startwert $x_1 = 1$:

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1+h}{1} \right) = 1 + \frac{h}{2}$$

$$\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2} \text{ für } |h| \ll 1$$

(Lineare Näherung)

Mit dem Ansatz $\sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} + bh^2$ kann man die lineare Näherung verbessern:

$$\left(1 + \frac{h}{2} + bh^2 \right)^2 = 1 + h$$

Unter Vernachlässigung der Terme mit h^3 und h^4 folgt $b = -\frac{1}{8}$, d.h.

$$\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} \text{ für } |h| \ll 1$$

(Quadratische Näherung)

Mit der quadratischen Näherung kann man den relativen Fehler der linearen Näherung abschätzen:

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{1 + \frac{h}{2} - \sqrt{1+h}}{\sqrt{1+h}} \approx \frac{h^2}{8}$$

Beispiele

$x = \sqrt{7}$ mit Startwert $x_1 = 2$:

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_1 + \frac{7}{x_1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{7}{2} \right) = 2,75$$

$$2,75^2 = 7,5625$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_2 + \frac{7}{x_2} \right) = 2,647727273$$

$$x_3^2 = 7,010459711$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_3 + \frac{7}{x_3} \right) = 2,645752048$$

$$x_4^2 = 7,000003902$$

$$x_5 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_4 + \frac{7}{x_4} \right) = 2,645751311$$

$$x_5^2 = 7,000000000$$

$$\implies \sqrt{7} \approx 2,645751311$$

$$\sqrt{1,1} = \sqrt{1+0,1} \approx 1 + \frac{0,1}{2} = 1,05$$

TR: $\sqrt{1,1} = 1,04880885$

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{1,05 - 1,04880885}{1,04880885} = 1,14 \cdot 10^{-3}$$

Mit der quadratischen Näherung:

$$\sqrt{1,1} \approx 1 + \frac{0,1}{2} - \frac{0,1^2}{8} = 1,04875$$

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{1,04875 - 1,04880885}{1,04880885} = -5,6 \cdot 10^{-5}$$

$$\sqrt{1,001} = \sqrt{1+0,001} \approx 1 + \frac{0,001}{2} = 1,0005$$

TR: $\sqrt{1,001} = 1,000499875$

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{1,0005 - 1,000499875}{1,000499875} = 1,25 \cdot 10^{-7}$$

Für sehr kleine h liefert die lineare Näherung bessere Werte als der Taschenrechner.

Beispiel: Bewegt sich eine Uhr U' ($\Delta t'$) mit der Geschwindigkeit v an relativ zueinander ruhenden Uhren (Δt) vorbei, dann gilt nach Einstein für die angezeigten Zeitspannen

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

($c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist die Lichtgeschwindigkeit). Mit $\Delta t = 3600 \text{ s}$ und $v = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist $\beta = 10^{-7}$ und $\beta^2 = 10^{-14}$. Mit dem Taschenrechner ergibt sich

$$\delta t = \Delta t - \Delta t' = \Delta t(1 - \sqrt{1 - \beta^2}) = 0,$$

mit der linearen Näherung

$$\delta t \approx \Delta t \left(1 - \left(1 - \frac{\beta^2}{2} \right) \right) = \Delta t \cdot \frac{\beta^2}{2} = 1,8 \cdot 10^{-11} \text{ s}$$

Definitionen und Regeln

Rechenregeln für Wurzeln

Für $a \geq 0$ und $b \geq 0$ gilt:

$$\boxed{\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}$$

Für $a \geq 0$ und $b > 0$ gilt:

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$$

Im Allgemeinen ist

$$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

und

$$\sqrt{a - b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

Für $n \in \mathbb{Z}$ (und $a \neq 0$, wenn $n < 0$) gilt:

$$\boxed{\sqrt{a^{2n}} = \sqrt{(a^n)^2} = |a^n|}$$

Für n gerade ist $|a^n| = a^n$.

Beispiele

$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$, aber:

$$\underbrace{\sqrt{(-4) \cdot (-9)}}_{\sqrt{36}=6} \neq \underbrace{\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9}}_{\text{nicht def.}}$$

$$\sqrt{8100} = \sqrt{81 \cdot 100} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{100} = 9 \cdot 10 = 90$$

$$\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}$$

$$\sqrt{0,0049} = \sqrt{\frac{49}{10000}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{10000}} = \frac{7}{100}$$

$$\underbrace{\sqrt{9 + 16}}_{\sqrt{25}=5} \neq \underbrace{\sqrt{9} + \sqrt{16}}_{3+4=7}$$

$$\underbrace{\sqrt{169 - 144}}_{\sqrt{25}=5} \neq \underbrace{\sqrt{169} - \sqrt{144}}_{13-12=1}$$

$$\sqrt{3^{14}} = 3^7, \quad \sqrt{(-3)^{14}} = |(-3)^7| = 3^7$$

$$\sqrt{a^{22}} = |a^{11}|, \quad \sqrt{a^{24}} = |a^{12}| = a^{12}, \text{ da 12 gerade}$$

$$\sqrt{0,00000625} = \sqrt{625 \cdot 10^{-8}} = 25 \cdot 10^{-4}$$

$$\sqrt{9 \cdot 10^{149}} = \sqrt{90 \cdot 10^{148}} = \sqrt{90} \cdot 10^{74}$$

Umformen von Wurzeltermen

Beim Umformen eines Wurzelterms

$$T = \sqrt{R(a, b, \dots)}$$

muss man peinlich auf die Definitionsmenge D_T des Terms achten, die aus der Bedingung $R(a, b, \dots) \geq 0$ folgt.

Beispiel: $T = \sqrt{a^3 b^4 c^2}$

$$\underbrace{a^3 b^4 c^2}_{\geq 0} \geq 0 \implies a \geq 0, b, c \text{ beliebig}$$

$$T = \sqrt{a \cdot a^2 b^4 c^2} = ab^2 |c| \sqrt{a}$$

Unnötige Betragsstriche im Ergebnis vermeiden!

Nenner rational machen

Der Nenner eines Bruches heißt *rational*, wenn er keine Bruchterme enthält.

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad \text{für } a > 0$$

Auch bei Computern sparen rationale Nenner bei langwierigen Berechnungen viel Rechenzeit!

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

für $a \geq 0, b \geq 0$ und $a \neq b$.

Teilweises Radizieren:

$$\sqrt{90} = \sqrt{9 \cdot 10} = 3\sqrt{10}$$

$$\sqrt{42336} = \sqrt{2^5 \cdot 3^3 \cdot 7^2} = 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \sqrt{6} = 84\sqrt{6}$$

Beispiel: $T = \sqrt{a^3 b^5}$

$$a^3 b^5 = ab \underbrace{a^2 b^4}_{\geq 0} \geq 0 \implies ab \geq 0$$

$$\implies (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$$

$$T = \sqrt{a^3 b^5} = |a| b^2 \sqrt{ab}$$

$$f(x) = \sqrt{(x+1)(x^2-1)} = \sqrt{(x+1)^2(x-1)}$$

$$R(x) = \underbrace{(x+1)^2(x-1)}_{\geq 0} \geq 0 \implies x \geq 1$$

In $D_f = [1, +\infty[$ ist auch $x+1 \geq 0$, d.h.

$$f(x) = |x+1| \sqrt{x-1} = (x+1) \sqrt{x-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} &= \frac{(\sqrt{x})^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 1} = \\ &= \sqrt{x} + 1 \quad \text{für } x \geq 0 \text{ und } x \neq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} &= \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})} = \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{2} + 2}{1 - 2} = -3 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Definitionen und Regeln

Potenzen mit rationalen Exponenten

Definition

Potenzen mit rationalen Exponenten werden so definiert, dass die bekannten Potenzgesetze für ganze Exponenten weiterhin richtig bleiben (siehe S.48).

Für $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert man:

$$x = a^{\frac{1}{n}} \iff x^n = a \text{ und } x \geq 0$$

$$x^n = a \implies L = \begin{cases} \{\pm a^{\frac{1}{n}}\} & \text{f. } a \geq 0 \wedge n \text{ ger.} \\ \emptyset = \{\} & \text{f. } a < 0 \wedge n \text{ ger.} \\ \{a^{\frac{1}{n}}\} & \text{f. } a \geq 0 \wedge n \text{ unger.} \\ \{-|a|^{\frac{1}{n}}\} & \text{f. } a < 0 \wedge n \text{ unger.} \end{cases}$$

Für $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ definiert man:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

Für $a > 0$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $m \in \mathbb{Z}$ definiert man:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\left|\frac{m}{n}\right|}\right)^{\text{sgn}\left(\frac{m}{n}\right)} = \begin{cases} a^{\frac{m}{n}} & \text{für } \frac{m}{n} \geq 0 \\ a^{-\frac{1}{\left|\frac{m}{n}\right|}} & \text{für } \frac{m}{n} < 0 \end{cases}$$

Damit ist a^q für $a > 0$ und $q \in \mathbb{Q}$ definiert.

Warum Potenzen mit rationalen Exponenten und negativen Basen nicht definiert sind:

$$\begin{aligned} (-8)^{\frac{5}{3}} &= ((-2)^3)^{\frac{5}{3}} = (-2)^5 = -32 \\ (-8)^{\frac{5}{6}} &= (-8)^{\frac{10}{6}} = ((-2)^{30})^{\frac{1}{6}} = (2^{30})^{\frac{1}{6}} = 32 \end{aligned}$$

Widerspruch!

Für $a > 0$ und $p, q \in \mathbb{Q}$ gelten die Potenzgesetze:

$$\begin{aligned} a^p \cdot b^p &= (ab)^p & ; & \quad \frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p \\ a^p \cdot a^q &= a^{p+q} & ; & \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \\ (a^p)^q &= a^{pq} \end{aligned}$$

Für $a > 0$ und $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gilt:

$$x^q = a \implies x = a^{\frac{1}{q}}$$

Beispiele

Gilt das Potenzgesetz $(a^p)^q = a^{pq}$ auch für rationale Exponenten, dann ist

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a$$

$$8^{\frac{1}{3}} = 2, \text{ da } 2^3 = 8$$

$$16^{\frac{1}{4}} = 2, \text{ da } 2^4 = 16 \text{ und } 2 > 0$$

$$16^{\frac{1}{4}} \neq -2, \text{ obwohl } (-2)^4 = 16 \text{ aber } -2 < 0$$

$$(-8)^{\frac{1}{3}} \text{ nicht def., obwohl } (-2)^3 = -8 \text{ } (-8 < 0)$$

$$x^4 = 16 \implies L = \{-2, 2\}$$

$$x^4 = -16 \implies L = \{\}$$

$$x^3 = 8 \implies L = \{2\}$$

$$x^3 = -8 \implies L = \{-2\}$$

Beachte: $-|-8|^{\frac{1}{3}} = -8^{\frac{1}{3}} = -2$

$$8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2^2 = 4, \quad 16^{\frac{3}{4}} = \left(16^{\frac{1}{4}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$64^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{\left(64^{\frac{1}{6}}\right)^5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

$$5^{\frac{1}{3}} \cdot 25^{\frac{1}{3}} = (5 \cdot 25)^{\frac{1}{3}} = 125^{\frac{1}{3}} = 5$$

$$\frac{729^{\frac{3}{4}}}{9^{\frac{3}{4}}} = \left(\frac{729}{9}\right)^{\frac{3}{4}} = 81^{\frac{3}{4}} = \left(81^{\frac{1}{4}}\right)^3 = 3^3 = 27$$

$$3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{12}} = 3^{\frac{1}{4} + \frac{1}{12}} = 3^{\frac{1}{3}}$$

In den folgenden Beispielen ist $a > 0$:

$$\frac{a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}} = a^{\frac{16}{15}}$$

$$\left(\frac{32}{a^{\frac{8}{3}}}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{a^{\frac{8}{3}}}{32}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{(2 \cdot 2^4)^{\frac{1}{4}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{2 \cdot 2^{\frac{1}{4}}}$$

$$\begin{aligned} x^3 = 74088 &\implies x = 74088^{\frac{1}{3}} = (2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3)^{\frac{1}{3}} = \\ (2^3)^{\frac{1}{3}} \cdot (3^3)^{\frac{1}{3}} \cdot (7^3)^{\frac{1}{3}} &= 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42 \end{aligned}$$

$$x^{\frac{1}{5}} = \frac{2}{3} \implies x = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$

$$x^{-\frac{2}{3}} = 9 \implies x = 9^{-\frac{1}{3}} = 9^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{9^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{27}$$

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} &\implies \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{6}} = 2 \\ &\implies x = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} \end{aligned}$$

Definitionen und Regeln

Wurzelschreibweise

$$a \geq 0, n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Spezialfall: $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$$a > 0, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} : \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Allgemein gilt für $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$:

$$\sqrt[n]{x^m} = \begin{cases} |x|^{\frac{m}{n}}, & m \text{ ger.}, m \geq 0, D = \mathbb{R} \\ |x|^{\frac{m}{n}}, & |m| \text{ ger.}, m < 0, D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x^{\frac{m}{n}}, & m \text{ unger.}, m > 0, D = \mathbb{R}_0^+ \\ x^{\frac{m}{n}}, & |m| \text{ unger.}, m < 0, D = \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Vereinfachung von Wurzeltermen auf dem Umweg über die Potenzschreibweise und Anwendung der Potenzgesetze!

Numerische Berechnung der n -ten Wurzel

Ausgangspunkt zur Herleitung einer Iterationsformel ist die Beziehung

$$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \iff x^n = a$$

x_k ist ein Näherungswert für x , d.h.

$$x = x_k + \varepsilon \quad \text{mit} \quad |\varepsilon| \ll 1$$

Es gilt die Näherungsformel

$$(1 + h)^n \approx 1 + nh \quad \text{mit} \quad |h| \ll 1$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} a &= x^n = (x_k + \varepsilon)^n = \left[x_k \left(1 + \frac{\varepsilon}{x_k} \right) \right]^n \approx \\ &\approx x_k^n \left(1 + \frac{n\varepsilon}{x_k} \right) = x_k^n + nx_k^{n-1}\varepsilon \\ \varepsilon &\approx \frac{a - x_k^n}{nx_k^{n-1}} = \frac{a}{nx_k^{n-1}} - \frac{x_k}{n} \end{aligned}$$

Besserer Näherungswert für x :

$$x_{k+1} = x_k + \frac{a}{nx_k^{n-1}} - \frac{x_k}{n}$$

oder

$$x_{k+1} = \frac{1}{n} \left[(n-1)x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}} \right]$$

Beispiele

$$\sqrt[3]{(-2)^6} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = (-2)^2 = (-2)^{\frac{6}{3}}, \frac{6}{3} \in \mathbb{N}!!$$

aber: $(\sqrt[3]{-2})^6$ nicht definiert!

$$\sqrt[3]{(-2)^8} = \sqrt[3]{2^8} = 2^{\frac{8}{3}} \neq \underbrace{(-2)^{\frac{8}{3}}}_{\text{nicht def.}}$$

$$\sqrt[5]{x^4} = |x|^{\frac{4}{5}} \text{ in } D = \mathbb{R}, \quad \sqrt[4]{x^5} = x^{\frac{5}{4}} \text{ in } D = \mathbb{R}_0^+$$

$$\sqrt[4]{x^6} = |x|^{\frac{3}{2}} \text{ in } D = \mathbb{R}, \quad \sqrt[4]{x^8} = x^2 \text{ in } D = \mathbb{R}$$

$$\sqrt[4]{x^{-5}} = x^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}} \text{ in } D = \mathbb{R}^+$$

$$\sqrt[5]{x^{-6}} = |x|^{-\frac{6}{5}} = \frac{1}{|x|^{\frac{6}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^6}} \text{ in } D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$a > 0 : \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a}$$

Ist V das Volumen und A die Oberfläche eines Würfels der Kantenlänge a , dann gilt

$$V = a^3 \implies a = V^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{V}$$

$$A = 6a^2 = 6 \cdot (V^{\frac{1}{3}})^2 = 6V^{\frac{2}{3}} = 6\sqrt[3]{V^2}$$

$$V^{\frac{2}{3}} = \frac{A}{6} \implies V = \left(\frac{A}{6} \right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{A^3}{216}} = \frac{A}{6} \sqrt{\frac{A}{6}}$$

Test der Näherungsformel $(1 + h)^n \approx 1 + nh$ für $n = 5$.

Der relative Fehler der Näherung ist

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{1 + 5h - (1 + h)^5}{(1 + h)^5}$$

h	$(1 + h)^5$	$1 + 5h$	δ_{rel}
0,1	1,61051	1,5	6,9 %
0,01	1,05101	1,05	0,096 %
0,001	1,00501001	1,005	0,001 %

Berechnung von $x = \sqrt[5]{3}$:

$$x_{k+1} = \frac{1}{5} \left[4x_k + \frac{3}{x_k^4} \right], \quad x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{5} \left[4 + \frac{3}{1^4} \right] = 1,4$$

$$x_3 = \frac{1}{5} \left[4 \cdot 1,4 + \frac{3}{1,4^4} \right] = 1,276184923$$

$$x_4 = \frac{1}{5} \left[4x_3 + \frac{3}{x_3^4} \right] = 1,247150132$$

$$x_5 = \frac{1}{5} \left[4x_4 + \frac{3}{x_4^4} \right] = 1,245734166$$

$$x_6 = \frac{1}{5} \left[4x_5 + \frac{3}{x_5^4} \right] = 1,245730940$$

Probe: $(x_6)^5 = 3,000\,000\,005$

Definitionen und Regeln

Quadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{I})$$

mit $a \neq 0$ heißt *quadratische Gleichung*.

Normierte Form der Gleichung:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Quadratische Ergänzung:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Anwendung der binomischen Formel:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{D}{4a^2}$$

mit $D = b^2 - 4ac$. Da $4a^2 > 0$, ist

$$L = \begin{cases} \{\} & \text{für } D < 0 \\ \left\{-\frac{b}{2a}\right\} & \text{für } D = 0 \\ \left\{-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\} & \text{für } D > 0 \end{cases}$$

Für $D > 0$ hat (I) also die beiden Lösungen

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{und} \\ x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die Lösungen der normalisierten Gleichung

$$x^2 + bx + c = 0 \quad (\text{II})$$

($a = 1$) sind für $b^2 - 4c > 0$:

$$x_1 = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad \text{und} \\ x_2 = -\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Daraus folgt der Satz von VIETA:

Hat die Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ zwei Lösungen x_1 und x_2 , dann gilt

$$x_1 + x_2 = -b \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = c \\ x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$$

Einfache Lösung von (I), wenn $c = 0$:

$$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0 \\ \implies x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

Beispiele

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{5}{2}$$

$$x - \frac{1}{2} = \pm \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -2$$

$$L = \{-2; 3\}$$

$$3x^2 - 5x - 7 = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{7}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{109}{36}$$

$$x = \frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{109}}{6}$$

$$L = \left\{\frac{5 + \sqrt{109}}{6}; \frac{5 - \sqrt{109}}{6}\right\}$$

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

Wegen $5 + 7 = -(-12)$ und $5 \cdot 7 = 35$ ist

$$x_1 = 5 \quad \text{und} \quad x_2 = 7$$

und es gilt

$$x^2 - 12x + 35 = (x - 5)(x - 7)$$

Biquadratische Gleichung:

$$x^4 - 14x^2 + 45 = 0$$

$$\text{Substitution: } x^2 = y \implies$$

$$y^2 - 14y + 45 = 0$$

$$y^2 - 2 \cdot 7y + 7^2 = -45 + 49 = 4$$

$$y = 7 \pm 2$$

$$y_1 = x_1^2 = 9 \implies x_{11} = 3, \quad x_{12} = -3$$

$$y_2 = x_2^2 = 5 \implies x_{21} = \sqrt{5}, \quad x_{22} = -\sqrt{5}$$

$$L = \{-3, 3, -\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$$

Definitionen und Regeln

Wurzelgleichungen

L_1 sei die Lösungsmenge der Gleichung

$$f(x) = g(x) \quad (1)$$

und L_2 sei die Lösungsmenge der quadrierten Gleichung

$$f(x)^2 = g(x)^2 \quad (2)$$

Es gilt $L_1 \subseteq L_2$, d.h. jede Lösung von (1) ist auch Lösung von (2), aber nicht unbedingt umgekehrt. Eine Wurzelgleichung enthält die Unbekannte im Radikanden einer Wurzel. Zum Beseitigen der Wurzeln muss die Gleichung nach geeigneten Umstellungen quadriert werden. Die quadrierte Gleichung kann Lösungen enthalten, die keine Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind. Diese „falschen“ Lösungen können durchaus in der Definitionsmenge der ursprünglichen Gleichung liegen. Zur Bestimmung der Lösungsmenge muss mit den gefundenen Lösungen der quadrierten Gleichung also unbedingt die Probe gemacht werden!

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - 1, \quad D = [1, \infty[$$

$$1 = x - \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} = x - 1 \quad |^2$$

$$x = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 3x = -1$$

$$x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -1 + \frac{9}{4} = \frac{5}{4}$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Wegen $\sqrt{5} > 2$ ist $x_2 < 1$, d.h. $x_2 \notin D$.

Probe für x_1 :

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1} &= \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{1 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{(1 + \sqrt{5})^2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{LS} &= \frac{1}{\sqrt{x_1}} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \\ &= \frac{2(1 - \sqrt{5})}{1 - 5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{RS} = \sqrt{x_1} - 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$L = \left\{ \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

Beispiele

$$x - 1 = 3 \quad \implies \quad L_1 = \{4\}$$

$$(x - 1)^2 = 3^2 \quad \implies \quad L_2 = \{4; -2\}, \quad L_1 \subseteq L_2$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 1} = x - 2, \quad D &=] - \infty, -1] \cup [1, \infty[\\ x^2 - 1 &= x^2 - 4x + 4 \end{aligned}$$

$$x = \frac{5}{4} \in D$$

$$\text{Probe: LS} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{RS} = \frac{5}{4} - 2 = -\frac{3}{4} \neq \text{RS} \quad \implies$$

$$L = \{\}$$

Die Gleichung $\sqrt{x^2 - 1} = 2 - x$ führt auf dieselbe quadrierte Gleichung und somit auch auf $x = \frac{5}{4}$. Hier passt die Probe und es ist $L = \left\{ \frac{5}{4} \right\}$.

$$\sqrt{x + 2} = x + 1, \quad D = [-1, \infty[$$

$$x + 2 = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + x = 1$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Wegen $\sqrt{5} > 1$ ist $x_2 < -1$, d.h. $x_2 \notin D$.

Probe für x_1 :

$$\begin{aligned} \text{LS} &= \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} + 2 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{1 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{(1 + \sqrt{5})^2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{RS} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$L = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

Definitionen und Regeln

Die quadratische Funktion

Die Normalparabel

Eine Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{mit } a \neq 0$$

heißt *quadratische Funktion*. Der Graf einer quadratischen Funktion heißt *Parabel*.

Die einfachste quadratische Funktion hat die Gleichung

$$f(x) = x^2$$

Ihr Graf ist die *Normalparabel*. Der Punkt $S(0|0)$ heißt *Scheitel* der Normalparabel.

Ist G_f der Graf der Funktion f , dann erhält man den Grafen der Funktion g mit der Gleichung

$$g(x) = f(x + d) + e$$

durch Verschiebung von G_f um den Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -d \\ e \end{pmatrix},$$

d.h. um d nach links und um e nach oben.

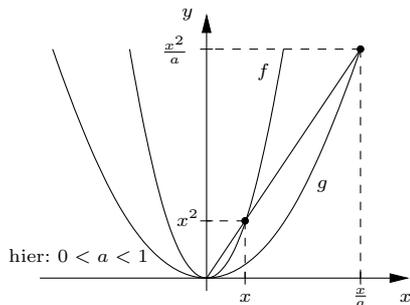
Der Graf der quadratischen Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = (x + d)^2 + e$$

ist die um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -d \\ e \end{pmatrix}$ verschobene Normalparabel. Ihr Scheitel ist $S(-d|e)$.

Der Graf der Funktion g mit der Gleichung $g(x) = ax^2$ geht aus der Normalparabel durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum $O(0|0)$ und dem Faktor $k = \frac{1}{a}$ hervor.

Beweis: $f(x) = x^2, \quad g(x) = ax^2$



$$g\left(\frac{1}{a} \cdot x\right) = a \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2 = \frac{x^2}{a} = \frac{1}{a} \cdot f(x)$$

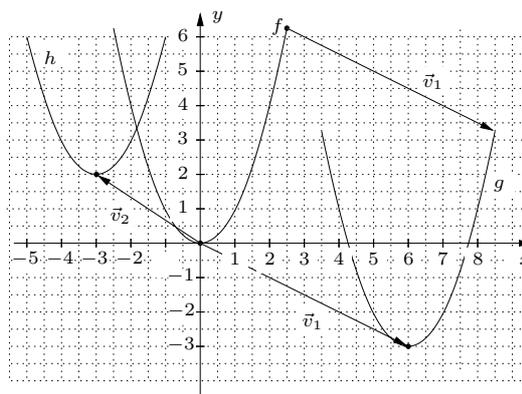
Beispiele

Die Normalparabel f und die um $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ verschobene Normalparabel mit der Gleichung

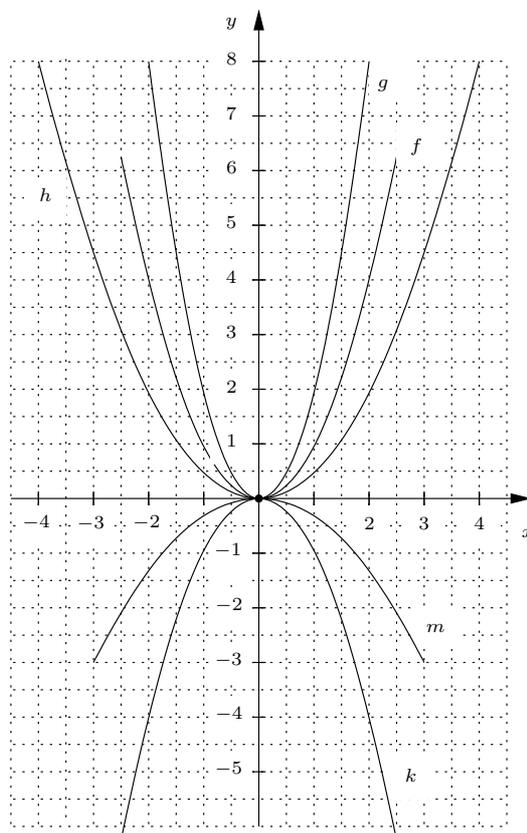
$$g(x) = (x - 6)^2 - 3$$

und die um $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ verschobene Normalparabel mit der Gleichung

$$h(x) = (x + 3)^2 + 2$$



Die Grafen der Funktionen $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$, $h(x) = \frac{1}{2}x^2$, $k(x) = -x^2$ und $m(x) = -\frac{1}{3}x^2$:



Definitionen und Regeln

Die allgemeine quadratische Funktion

Umformen der Gleichung der quadratischen Funktion (quadratische Ergänzung):

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^2 + bx + c = \\
 &= a \left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \right] + c = \\
 &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right] + c = \\
 &= a \cdot \underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}}_{\text{Scheitelform}}
 \end{aligned}$$

Der Graf der Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

ist eine Parabel mit dem Scheitel bei

$$S \left(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a} \right)$$

Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben, für $a < 0$ nach unten geöffnet.

Die Nullstellen von f sind

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -\frac{b}{2a} - \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac} \\
 x_2 &= -\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}
 \end{aligned}$$

Wegen

$$a(x_1 + x_2) = -b$$

und

$$ax_1x_2 = c$$

folgt

$$\begin{aligned}
 a(x - x_1)(x - x_2) &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 = \\
 &= ax^2 + bx + c
 \end{aligned}$$

Für die quadratische Funktion f mit

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

lautet die Scheitelform

$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

und die Produktform

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

mit den Nullstellen x_1 und x_2 von f .

Beispiele

Beispiel:

$$f(x) = \frac{2}{5}x^2 + 4x + \frac{32}{5}$$

Scheitelform:

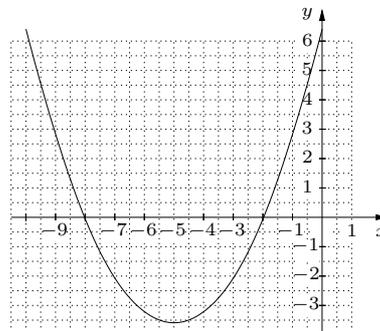
$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{2}{5} [x^2 + 10x + 16] = \\
 &= \frac{2}{5} [x^2 + 2 \cdot 5x + 5^2 - 25 + 16] = \\
 &= \frac{2}{5} [(x + 5)^2 - 9] = \\
 &= \frac{2}{5} (x + 5)^2 - \frac{18}{5} \\
 \implies S &\left(-5 \mid -\frac{18}{5} \right) = S(-5 \mid -3,6)
 \end{aligned}$$

Nullstellenberechnung mit der Scheitelform:

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{5}(x + 5)^2 - \frac{18}{5} &= 0 \\
 (x + 5)^2 &= 9 \implies x = -5 \pm 3 \\
 x_1 &= -8, \quad x_2 = -2
 \end{aligned}$$

Produktform (faktorierte Darstellung):

$$f(x) = \frac{2}{5}(x + 8)(x + 2)$$



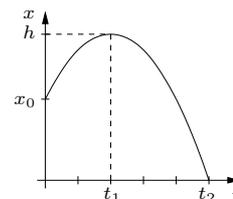
Beispiel aus der Physik:

Ein Körper, der zur Zeit $t_0 = 0$ in der Höhe x_0 mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen wird, befindet sich zur Zeit t in der Höhe

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0t + x_0$$

Maximale Höhe

$$h = \frac{v_0^2}{2g} + x_0$$



zur Zeit $t_1 = \frac{v_0}{g}$.

$$x(t_2) = 0 \quad \text{mit} \quad t_2 = \frac{v_0}{g} + \frac{1}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gx_0}$$

Definitionen und Regeln

Parabel durch gegebene Punkte

Durch zwei Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ mit $x_1 \neq x_2$ kann man genau eine verschobene Normalparabel zeichnen. Gleichung der verschobenen Normalparabel:

$$f(x) = (x - d)^2 + e$$

$$P_1 \in G_f \iff (x_1|y_1) \in f \iff f(x_1) = y_1$$

$$P_1 \in G_f \implies f(x_1) = (x_1 - d)^2 + e = y_1 \quad (1)$$

$$P_2 \in G_f \implies f(x_2) = (x_2 - d)^2 + e = y_2 \quad (2)$$

Auflösen des Gleichungssystems liefert die Unbekannten d und e .

Durch drei Punkte $P_1(x_1|y_1)$, $P_2(x_2|y_2)$ und $P_3(x_3|y_3)$, die nicht auf einer Geraden liegen und mit drei verschiedenen x -Koordinaten, kann man genau eine Parabel zeichnen.

Gleichung der Parabel:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - d)^2 + e$$

$$P_1 \in G_f \implies ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \quad (1)$$

$$P_2 \in G_f \implies ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \quad (2)$$

$$P_3 \in G_f \implies ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \quad (3)$$

Auflösen des Gleichungssystems liefert die Unbekannten a , b und c .

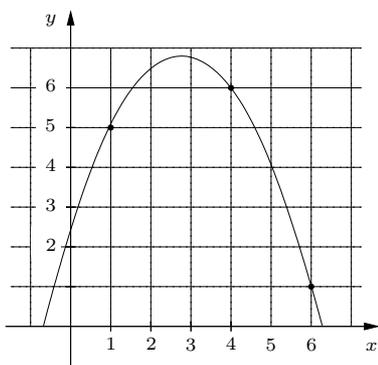
Oder:

$$P_1 \in G_f \implies a(x_1 - d)^2 + e = y_1 \quad (1)$$

$$P_2 \in G_f \implies a(x_2 - d)^2 + e = y_2 \quad (2)$$

$$P_3 \in G_f \implies a(x_3 - d)^2 + e = y_3 \quad (3)$$

Auflösen des Gleichungssystems liefert die Unbekannten a , d und e .



Beispiele

Gesucht ist eine verschobene Normalparabel durch die Punkte $P_1(1|1)$ und $P_2(2|5)$.

$$(1 - d)^2 + e = 1 \quad (1)$$

$$(2 - d)^2 + e = 5 \quad (2)$$

$$1 - 2d + d^2 + e = 1 \quad (3)$$

$$4 - 4d + d^2 + e = 5 \quad (4)$$

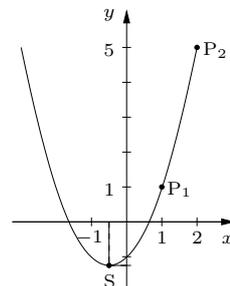
$$(4) - (3):$$

$$3 - 2d = 4$$

$$d = -\frac{1}{2}$$

$$(1) \implies e = 1 - \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 = -\frac{5}{4}$$

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$



Gesucht ist eine Parabel durch die Punkte $P_1(1|5)$, $P_2(4|6)$ und $P_3(6|1)$.

Gleichung der Parabel:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$P_1 \in G_f \implies a + b + c = 5 \quad (1)$$

$$P_2 \in G_f \implies 16a + 4b + c = 6 \quad (2)$$

$$P_3 \in G_f \implies 36a + 6b + c = 1 \quad (3)$$

$$(2) - (1): \quad 15a + 3b = 1 \quad (4)$$

$$(3) - (2): \quad 20a + 2b = -5 \quad (5)$$

$$(4) \cdot (-2): \quad -30a - 6b = -2 \quad (6)$$

$$(5) \cdot 3: \quad 60a + 6b = -15 \quad (7)$$

$$(4) + (5): \quad 30a = -17 \quad (8)$$

$$a = -\frac{17}{30} \quad (9)$$

$$(9) \text{ in } (5): \quad b = -\frac{5}{2} + \frac{17}{3} = \frac{19}{6} \quad (10)$$

$$(1) \implies c = 5 + \frac{17}{30} - \frac{19}{6} = \frac{12}{5} \quad (11)$$

Damit lautet die Parabelgleichung:

$$f(x) = -\frac{17}{30}x^2 + \frac{19}{6}x + \frac{12}{5}$$

mit dem Scheitel

$$S\left(\frac{95}{34} \mid \frac{13921}{2040}\right) \approx S(2,79 \mid 6,82)$$

Wahrscheinlichkeit

Definitionen und Regeln

Produkte von Wahrscheinlichkeiten (1. Pfadregel)

Wir betrachten zwei Zufallsexperimente mit den Ergebnisräumen $\Omega_1 = \{\omega_{11}, \omega_{12}, \dots, \omega_{1n}\}$ und $\Omega_2 = \{\omega_{21}, \omega_{22}, \dots, \omega_{2m}\}$ und den Mächtigkeiten $|\Omega_1| = n$ und $|\Omega_2| = m$. Werden beide Experimente hintereinander ausgeführt, entsteht ein zweistufiges Zufallsexperiment (siehe S. 51) mit dem Ergebnisraum

$$\Omega = \{\omega_{11}\omega_{21}, \omega_{11}\omega_{22}, \dots, \omega_{1n}\omega_{2m}\}$$

und der Mächtigkeit $|\Omega| = n \cdot m$. Wird das zusammengesetzte Experiment N -mal ausgeführt, erwartet man für Häufigkeit des Ergebnisses ω_{1x} beim ersten Experiment

$$H_{1x} = P(\omega_{1x}) \cdot N.$$

Für die Häufigkeit des Ergebnisses $\omega_{1x}\omega_{2y}$ im zusammengesetzten Experiment erwartet man dann

$$H_{1x,2y} = P(\omega_{2y}) \cdot H_{1x} = P(\omega_{1x})P(\omega_{2y})N.$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von $\omega_{1x}\omega_{2y}$ im zusammengesetzten Experiment ist also

$$P(\omega_{1x}\omega_{2y}) = \frac{H_{1x,2y}}{N} = P(\omega_{1x})P(\omega_{2y})$$

$$P(\omega_{1x}\omega_{2y}) = P(\omega_{1x})P(\omega_{2y})$$

Die angestellten Überlegungen lassen sich leicht auf mehr als zweistufige Zufallsexperimente verallgemeinern:

In einem s -stufigen Zufallsexperiment ist die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses das Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des entsprechenden Pfades im Baumdiagramm (1. Pfadregel):

$$P(\omega_{1x}\omega_{2y}\dots\omega_{sz}) = P(\omega_{1x})P(\omega_{2y})\dots P(\omega_{sz})$$

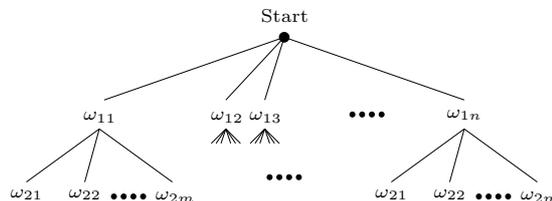
Eine *Urne* ist ein Behältnis für Kugeln, die nach Farbe, aufgedruckten Zahlen oder Ähnlichem unterschieden werden.

Beim Ziehen *mit* Zurücklegen ist der Urneninhalt und damit die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ergebnis bei jedem Zug gleich.

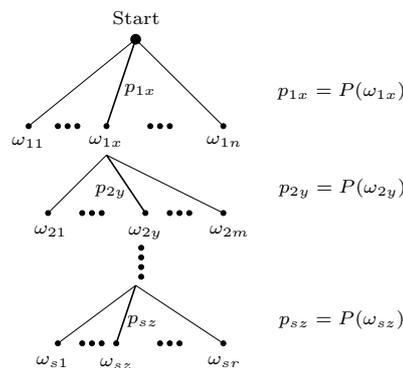
Beim Ziehen *ohne* Zurücklegen ändert sich der Urneninhalt und damit die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ergebnis bei jedem Zug.

Beispiele

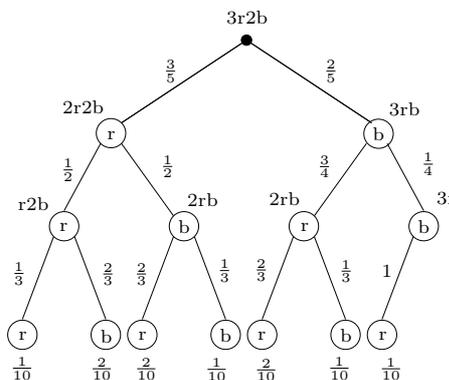
Baumdiagramm eines zweistufigen Experiments:



Baumdiagramm eines s -stufigen Experiments:



Beispiel: Eine Urne enthält drei rote und zwei blaue Kugel. Es werden *ohne* Zurücklegen 3 Kugeln gezogen.



$$P(rrr) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}, \quad P(rrb) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{10}$$

$$P(rbr) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{10}, \quad P(rbb) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$$

$$P(brr) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{10}, \quad P(brb) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$$

$$P(bbr) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{10}$$

Wird *mit* Zurücklegen gezogen, gilt z.B.

$$P(rrr) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}, \quad P(rbb) = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{12}{125}$$

Definitionen und Regeln

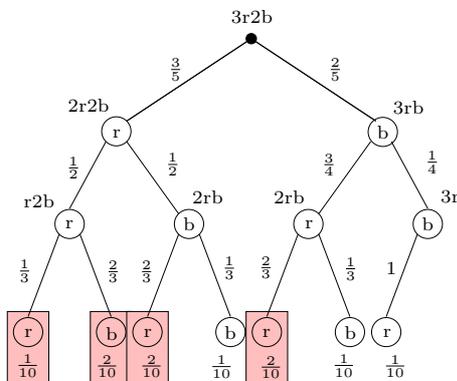
**Summen von Wahrscheinlichkeiten
(2. Pfadregel)**

Nach dem Zerlegungssatz (siehe S. 54) ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten seiner Elementarereignisse (siehe S. 55). Angewandt auf ein mehrstufiges Zufallsexperiment folgt:

In einem mehrstufigen Zufallsexperiment ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die zu diesem Ereignis führen (2. Pfadregel).

Beispiele

Beispiel: Eine Urne enthält drei rote und zwei blaue Kugel. Es werden *ohne* Zurücklegen 3 Kugeln gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens zwei rote Kugeln zu ziehen?



$$E = \text{„mindestens 2 rote“} = \{rrr, rrb, rbr, brr\}$$

$$P(E) = P(rrr) + P(rrb) + P(rbr) + P(brr) = \\ = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10} = 70\%$$

Beispielaufgabe:

Der Girgl und der Fex sind leidenschaftliche Wilderer. Der Girgl trifft eine Gams mit der Wahrscheinlichkeit 60 %, der Fex mit 80 %. Die beiden Freunde gehen gemeinsam auf die Jagd, der Girgl hat drei, der Fex zwei Patronen dabei. Als sie einen Gamsbock sehen, beginnen sie abwechselnd auf ihn zu schießen, der Girgl beginnt. Nach einem Treffer ist die Gams tot und das Schießen beendet.

1. Erstelle ein Baumdiagramm für das Zufallsexperiment „Gamsschießen“. Verwende die Symbole g, f, \bar{g} und \bar{f} für das Treffen bzw. Nichttreffen des jeweiligen Schützen und schreibe den kompletten Ergebnisraum Ω hin. Gib auch die Mächtigkeit von Ω an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_0 überlebt die Gams?
2. Schreibe das Ereignis F : „Die Gams wird vom Fex erlegt.“ in der Mengenschreibweise hin und berechne seine Wahrscheinlichkeit. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_g wird die Gams dann vom Girgl geschossen?

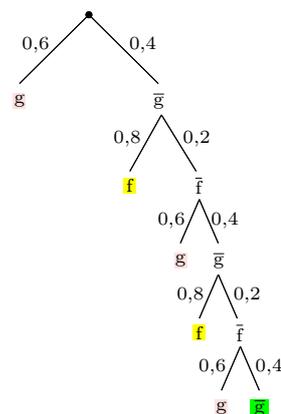
Lösung:

1.

$$\Omega = \{g, \bar{g}f, \bar{g}\bar{f}g, \bar{g}\bar{f}\bar{g}f, \bar{g}\bar{f}\bar{g}\bar{f}g, \bar{g}\bar{f}\bar{g}\bar{f}\bar{g}\}$$

$$|\Omega| = 6$$

$$p_0 = P(\bar{g}\bar{f}\bar{g}\bar{f}\bar{g}) = \\ = 0,4^3 \cdot 0,2^2 = \\ = 0,00256 = \\ = 0,256 \%$$



2. $F =$ „Die Gams wird vom Fex erlegt.“
 $G =$ „Die Gams wird vom Girgl erlegt.“
 $N =$ „Die Gams wird nicht erlegt.“

$$F = \{\bar{g}f, \bar{g}\bar{f}\bar{g}f\}$$

$$P(F) = 0,4 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,8 = \\ = 0,32 \cdot (1 + 0,08) = 34,56 \%$$

$\{F, G, N\}$ ist eine Zerlegung von $\Omega \implies$

$$p_g = P(G) = 1 - P(F) - P(N) = \\ = 1 - P(F) - p_0 = \\ = 1 - 0,3456 - 0,00256 = 65,184 \%$$

Geometrie

Definitionen und Regeln

Der Satz des Pythagoras

Herleitung

Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit $\gamma = 90^\circ$ ist D der Fußpunkt der Höhe von C auf AB. Die den rechten Winkel bildenden Seiten ($[AC]$ und $[BC]$) heißen *Katheten*, die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite ist die *Hypotenuse*. Aus der Ähnlichkeit

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$$

folgt

$$\frac{h}{p} = \frac{q}{h} \implies \boxed{h^2 = pq} \quad (\text{Höhensatz})$$

$$\frac{q}{a} = \frac{a}{c} \implies \boxed{a^2 = qc} \quad (\text{Kathetensatz})$$

$$\frac{p}{b} = \frac{b}{c} \implies \boxed{b^2 = pc} \quad (\text{Kathetensatz})$$

Aus den Kathetensätzen folgt

$$a^2 + b^2 = qc + pc = \underbrace{(q + p)c}_c = c^2$$

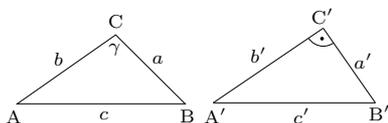
In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt (Pythagoras):

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Umkehrung des Satzes von Pythagoras:

Gilt im Dreieck $\triangle ABC$ die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$, dann ist das Dreieck rechtwinklig ($\gamma = 90^\circ$).

Beweis:

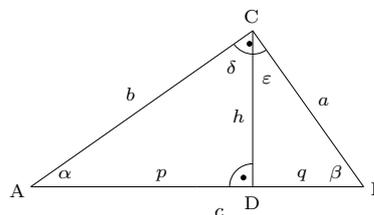


Wir betrachten zusätzlich das Dreieck $\triangle A'B'C'$ mit $a' = a$, $b' = b$ und $\gamma' = 90^\circ$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$c'^2 = a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 = c^2 \implies c' = c$$

Damit gilt $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (sss) und damit auch $\gamma = \gamma' = 90^\circ$. q.e.d.

Beispiele



$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 90^\circ \\ \alpha + \delta = 90^\circ \\ \beta + \epsilon = 90^\circ \end{array} \right\} \implies \delta = \beta, \epsilon = \alpha$$

Struktur eines mathematischen Satzes

Eine *Aussage* ist ein sprachliches Gebilde, dem man einen Wahrheitswert (*wahr* oder *falsch*) zuordnen kann. „Die Sonne scheint.“ ist eine Aussage, „Scheint die Sonne?“ ist keine Aussage. Das Gegenteil oder die *Negation* einer Aussage A bezeichnet man mit $\neg A$ (nicht A oder non A).
 A = „Die Sonne scheint.“
 $\neg A$ = „Die Sonne scheint nicht.“
 B = „ $x = 3$ “, $\neg B$ = „ $x \neq 3$ “
 Ein mathematischer Satz verknüpft zwei Aussagen A und B:

$$A \implies B$$

Wenn A, dann B.

Wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr.

A ist die *Voraussetzung*, B die *Behauptung*. Vertauscht man Voraussetzung und Behauptung, dann erhält man die *Umkehrung* des Satzes.

$$\underbrace{A \implies B}_{\text{Satz}}, \quad \underbrace{B \implies A}_{\text{Umkehrung}}$$

Wenn ein Satz wahr ist, muss die Umkehrung nicht wahr sein.

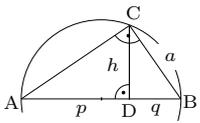
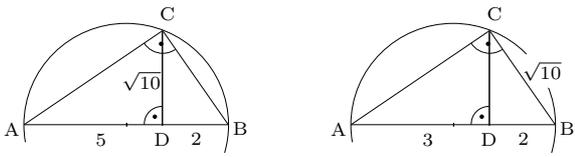
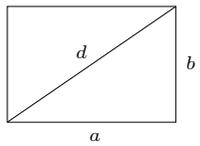
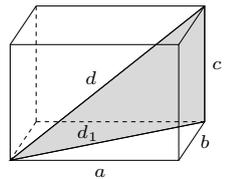
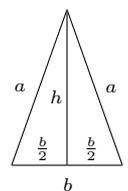
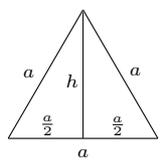
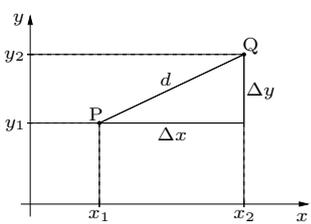
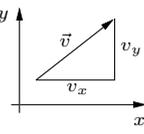
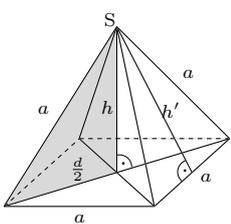
Wenn der Satz und die Umkehrung wahr sind, schreibt man

$$A \iff B$$

Allgemein gilt aber:

$$\boxed{(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)}$$

Man kann den Satz $A \implies B$ also beweisen, indem man $\neg B \implies \neg A$ beweist (*Widerspruchsbeweis*).

Definitionen und Regeln	Beispiele
<p>Konstruktion einer Streckenlänge \sqrt{x}: Mit Höhensatz: $pq = x = h^2$ Mit Kathetensatz: $cq = x = a^2$ A, D, B zeichnen, C liegt auf dem Lot auf AB in D und auf dem Thaleskreis über [AB].</p> 	<p>Konstruktion einer Strecke mit der Länge $\sqrt{10}$:</p>  <p>$h^2 = 5 \cdot 2 = 10$ $a^2 = (3 + 2) \cdot 2 = 10$</p>
<p>Diagonale im Rechteck</p> $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ <p>Im Quadrat mit $a = b$:</p> $d = a\sqrt{2}$ 	<p>Diagonale im Quader</p> $d_1^2 = a^2 + b^2$ $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ <p>Im Würfel mit $a = b = c$:</p> $d = a\sqrt{3}$ 
<p>Höhe im gleichschenkligen Dreieck</p> $a^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ $h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$ 	<p>Höhe im gleichseitigen Dreieck</p> $a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ $h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ <p>Fläche: $A = \frac{1}{2}ah = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$</p> 
<p>Die Entfernung zweier Punkte $P(x_1 y_1)$ und $Q(x_2 y_2)$ im Koordinatensystem:</p>  $d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ <p>In 3D: $P(x_1 y_1 z_1), Q(x_2 y_2 z_2)$:</p> $d = \overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ <p>Der Betrag eines Vektors, z.B. der Geschwindigkeit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$:</p>  $v = \vec{v} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ <p>oder in 3D: $v = \vec{v} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$</p> <p>Beispiel: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{pmatrix} \implies$</p> $v = \sqrt{3^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 4^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	<p>Ist $\triangle ABC$ mit $A(1 2)$, $B(7 -2)$ und $C(3 5)$ rechtwinklig?</p> $a^2 = \overline{BC}^2 = (7 - 3)^2 + (-2 - 5)^2 = 65$ $b^2 = \overline{AC}^2 = (3 - 1)^2 + (5 - 2)^2 = 13$ $c^2 = \overline{AB}^2 = (7 - 1)^2 + (-2 - 2)^2 = 52$ $\implies b^2 + c^2 = a^2 \implies \alpha = 90^\circ$ <hr/> <p>Ein quadratische, gerade Pyramide (Grundfläche ist ein Quadrat mit der Kantenlänge a, die Spitze S befindet sich senkrecht über dem Mittelpunkt des Quadrats) hat die schräge Kante a. Berechne die Höhe h und die Oberfläche A.</p> <p>Diagonale des Quadrats: $d = a\sqrt{2}$</p> $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ <p>Die Seitenflächen sind gleichseitige Dreiecke mit der Höhe $h' = \frac{a}{2}\sqrt{3} \implies$</p> $A = 4 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + a^2 = a^2(1 + \sqrt{3})$ 

Definitionen und Regeln

Trigonometrie

Definition der Winkelfunktionen

Zwei rechtwinklige Dreiecke, die in einem weiteren Winkel φ übereinstimmen, sind ähnlich. Es gilt also (siehe Abb.)

$$\frac{g_1}{h_1} = \frac{g_2}{h_2}, \quad \frac{a_1}{h_1} = \frac{a_2}{h_2}, \quad \frac{g_1}{a_1} = \frac{g_2}{a_2}$$

Diese nicht von der Größe des Dreiecks abhängigen Verhältnisse werden häufig gebraucht und erhalten eigene Namen:

$$\sin \varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{g}{h} \quad (\text{Sinus})$$

$$\cos \varphi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{h} \quad (\text{Kosinus})$$

$$\tan \varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{g}{a} \quad (\text{Tangens})$$

$$\tan \varphi = \frac{g}{a} = \frac{\frac{g}{h}}{\frac{a}{h}} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

Da die Ankathete von φ gleich der Gegenkathete von $90^\circ - \varphi$ ist, gilt

$$\cos \varphi = \sin(90^\circ - \varphi)$$

Zur Schreibweise:

$$\sin^2 \varphi = (\sin \varphi)^2$$

Mit dem Pythagoras folgt:

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = \frac{g^2}{h^2} + \frac{a^2}{h^2} = \frac{g^2 + a^2}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} = 1$$

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

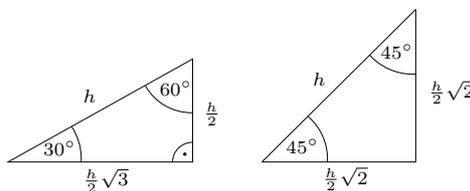
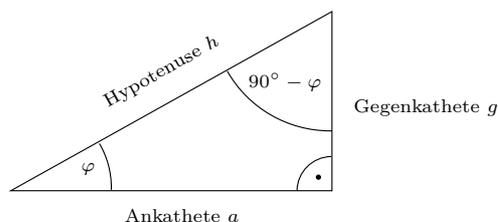
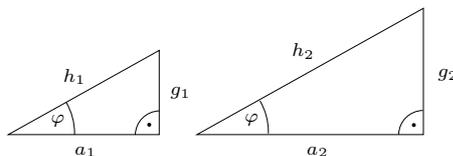
Ein paar exakte Werte:

φ	0	30°	45°	60°	90°
$\sin \varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos \varphi$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \varphi$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Zum einfachen Merken:

φ	0	30°	45°	60°	90°
$\sin \varphi$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\cos \varphi$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$

Beispiele



$$0 \leq \varphi \leq 90^\circ \implies 0 \leq \sin \varphi \leq 1$$

$$0 \leq \cos \varphi \leq 1, \quad 0 \leq \tan \varphi \leq +\infty$$

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{2} = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\frac{h}{2}\sqrt{3}}{h} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{h}{2}\sqrt{3}}{h} = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos 60^\circ = \frac{\frac{h}{2}}{h} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\frac{h}{2}\sqrt{2}}{h} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Achtung! Den Taschenrechner mit MODE auf DEG (Gradmaß, Degree) einstellen!

$$\sin 50^\circ = 0,7660, \quad \cos 50^\circ = 0,6428$$

$$\cos 40^\circ = \sin(90^\circ - 40^\circ) = \sin 50^\circ = 0,7660$$

$$\cos 50^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 50^\circ} = \sqrt{1 - 0,7662^2} = 0,6428$$

$$\tan 89^\circ = 57,29$$

Ist der Wert einer Winkelfunktion gegeben, findet man den Winkel mit den Tasten \sin^{-1} , \cos^{-1} und \tan^{-1} , auf den meisten Rechnern erreichbar mit SHIFT sin usw.

$$\sin \alpha = 0,3 \implies \alpha = 17,4576^\circ = 17^\circ 27' 27''$$

$$\tan \varphi = 100 \implies \varphi = 89,42706^\circ = 89^\circ 25' 37,4''$$

Definitionen und Regeln

Die Steigung

Eine Gerade (z.B. eine Straße) steigt auf der waagrechten Länge Δx um die Höhe Δy , der Steigungswinkel φ ist der Winkel gegen die Waagrechte. Die *Steigung* m ist definiert durch

$$m = \tan \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

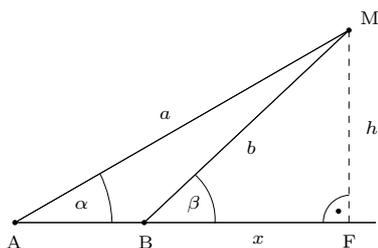
Die Steigung wird oft in Prozent angegeben.

Vorsicht: Die Steigung $m = 100\%$ entspricht *nicht* der Senkrechten!

$$100\% = 1 = \tan \varphi \implies \varphi = 45^\circ$$

Ein Beispiel aus der Astronomie:

Von zwei Punkten A und B auf der Erde mit $\overline{AB} = 3000,00 \text{ km}$ wird ein Punkt M auf dem Mond anvisiert. Dabei werden die Winkel $\alpha = 60^\circ 0' 0''$ und $\beta = 60^\circ 23' 21''$ gemessen. Gesucht sind die Streckenlängen $a = \overline{AM}$ und $b = \overline{BM}$.



Der Fußpunkt des Lotes von M auf AB sei F, $h = \overline{FM}$ und $x = \overline{BF}$. Dann gilt

$$h = (\overline{AB} + x) \tan \alpha = x \tan \beta$$

Mit $\beta = 60^\circ + \frac{23^\circ}{60} + \frac{21^\circ}{3600} = 60,38917^\circ$ folgt

$$x = \frac{\overline{AB} \tan \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha} = 1,890 \cdot 10^5 \text{ km}$$

und $\overline{AF} = \overline{AB} + x = 1,920 \cdot 10^5 \text{ km}$.

$$a = \frac{\overline{AF}}{\cos \alpha} = 3,840 \cdot 10^5 \text{ km}$$

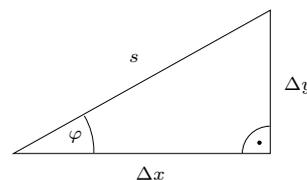
$$b = \frac{c}{\cos \beta} = 3,825 \cdot 10^5 \text{ km}$$

Der Taschenrechner berechnet $\sin \varphi$ mit

$$x = \frac{\varphi \cdot \pi}{180^\circ} \text{ und dann}$$

$$\sin \varphi = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Beispiele

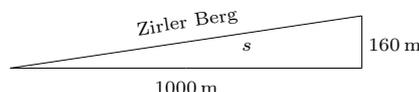


Der Zirler Berg hat die Steigung 16%. Für den Steigungswinkel φ gilt

$$\tan \varphi = 16\% = 0,16 \implies \varphi = 9,09^\circ$$

Auf die waagrechte Länge $\Delta x = 1 \text{ km}$ steigt die Straße um

$$\Delta y = \Delta x \tan \varphi = 0,16 \cdot 1000 \text{ m} = 160 \text{ m}$$



Für die Länge s der Straße auf 160 m Höhenunterschied gilt

$$\sin \varphi = \frac{\Delta y}{s} \implies s = \frac{\Delta y}{\sin \varphi} = 1013 \text{ m}$$

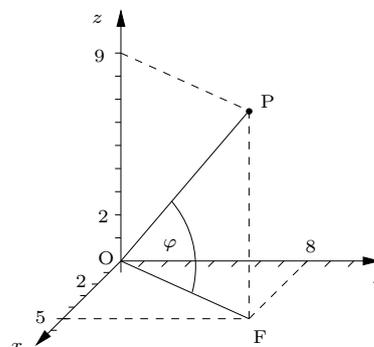
Oder:

$$\cos \varphi = \frac{\Delta x}{s} \implies s = \frac{\Delta x}{\cos \varphi} = 1013 \text{ m}$$

Oder:

$$s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 1013 \text{ m}$$

Gegeben ist der Punkt P (5|8|9). Wir suchen den Winkel φ , den die Gerade OP mit der xy -Ebene einschließt.



Der Fußpunkt des Lotes von P auf die xy -Ebene ist F (5|8|0), $\overline{OF} = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89}$.

$$\tan \varphi = \frac{\overline{PF}}{\overline{OF}} = \frac{9}{\sqrt{89}} \implies \varphi = 43,65^\circ$$

Definitionen und Regeln

Raumgeometrie

Schrägbilder

Dreidimensionales (räumliches) Koordinatensystem:

- Die drei Achsen stehen paarweise senkrecht aufeinander
- Orientierung der Achsen (rechte Hand):
 x -Achse: Daumen, y -Achse: Zeigefinger, z -Achse: Mittelfinger
- Die x -Achse schließt mit der negativen y -Achse einen 45° -Winkel ein.
- Einheit auf der x -Achse: $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 (Diagonale eines Kästchens)

Der Punkt $P(x|y|z)$ hat vom Ursprung $O(0|0|0)$ (siehe S. 74) die Entfernung

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Geraden und Ebenen

Siehe S. 26.

Das Lot g von $P \notin E$ auf die Ebene E steht senkrecht auf jeder Geraden $h \subset E$ durch den Fußpunkt F .

\overline{PF} ist die kürzeste Verbindung von P zur Ebene E und heißt *Abstand* von P zu E :

$$d(P, E) = \overline{PF}$$

Den Winkel φ zwischen einer Geraden g und einer Ebene E findet man auf folgende Weise:

$P \in g$ und $P \notin E$, F ist der Fußpunkt des Lotes von P auf E , S ist der Schnittpunkt von g mit E . Dann ist $\varphi = \sphericalangle FSP$.

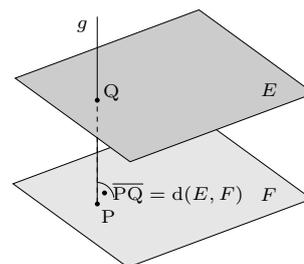
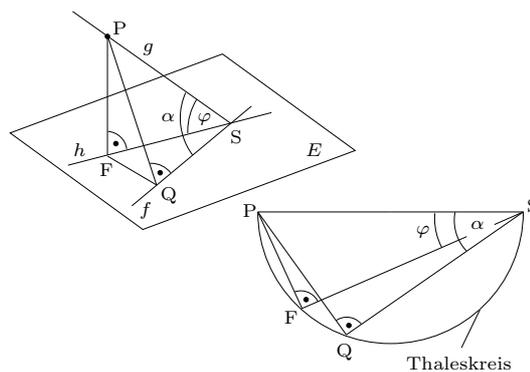
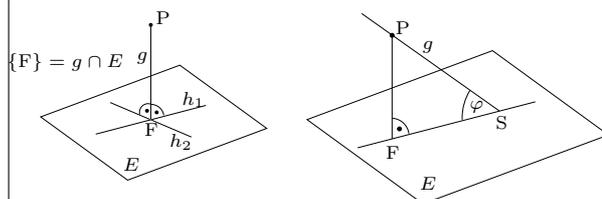
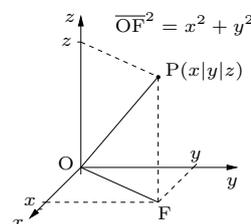
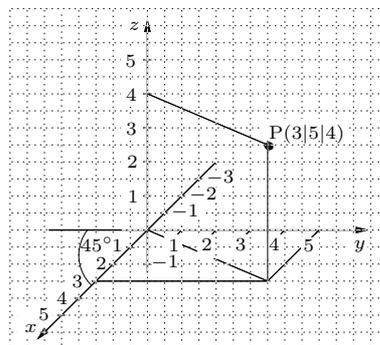
Der so definierte Winkel φ ist der kleinste Winkel, den g mit einer beliebigen Geraden $f \subset E$ durch S einschließen kann.

Beweis: Es sei $h = FS$, $f \neq h$, Q der Fußpunkt des Lotes von P auf f und $\alpha = \sphericalangle QSP$. Wegen $\sphericalangle QFP = 90^\circ$ ist $\overline{PQ} > \overline{PF}$. Zeichnet man $\triangle FSP$ und $\triangle QSP$ in einer Ebene, dann erkennt man, dass tatsächlich $\alpha > \varphi$ gilt.

Zwei Ebenen E und F , die keinen gemeinsamen Punkt besitzen, heißen *parallel*. Ist $P \in E$, g das Lot auf E in P und $Q = g \cap F$, dann ist \overline{PQ} der *Abstand* von E und F : $\overline{PQ} = d(E, F)$.

Beispiele

Koordinatensystem für Schrägbilder:



Definitionen und Regeln

Beispiele

Geometrische Körper

Das Prisma

Grund- und Deckfläche eines *Prismas* sind parallelverschobene Vielecke (also kongruente, nicht verdrehte Vielecke in parallelen Ebenen E und F). Der Abstand h der Ebenen E und F ist die *Höhe* des Prismas. Ist G der Inhalt der Grund- bzw. Deckfläche, dann hat das Prisma das Volumen

$$V = Gh$$

Die Verbindungsstrecken entsprechender Punkte der Grund- und Deckfläche heißen *Seitenkanten* des Prismas. Alle Seitenkanten haben die gleiche Länge s .

Ein Prisma heißt *gerade*, wenn die Seitenkanten senkrecht auf der Grundfläche stehen. Im geraden Prisma gilt $h = s$.

Das Prinzip von Cavalieri

Zwei Körper haben das gleiche Volumen, wenn sie in gleicher Höhe die gleiche Querschnittsfläche besitzen:

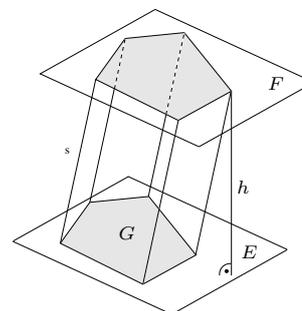
$$A_1(h) = A_2(h) \quad \text{für alle } h$$

Die Pyramide

Rezept zum Bau einer Pyramide:

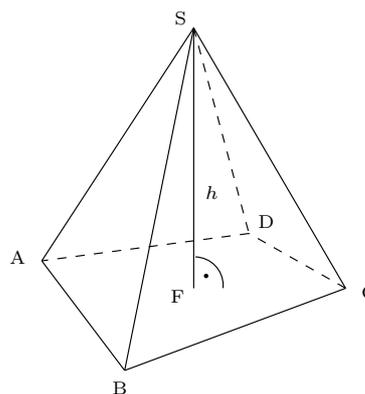
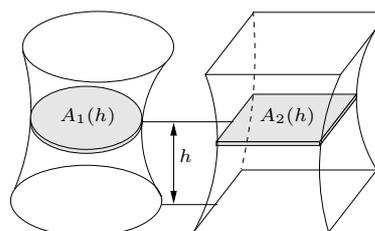
Man nehme ein Vieleck $ABC\dots$ in einer Ebene E und einen Punkt $S \notin E$. Die vom Vieleck in der Ebene E eingeschlossene Fläche nennen wir die *Grundfläche* G der Pyramide, die Seiten des Vielecks heißen *Grundkanten* und S *Spitze*. Dann verbindet man S mit allen Ecken des Vielecks und erhält so die *Seitenkanten* der Pyramide. Die aus je einer Grundkante und den dazugehörigen Seitenkanten gebildeten Dreiecke schließen die *Seitenflächen* der Pyramide ein, alle Seitenflächen zusammen bilden die *Mantelfläche* A_M . Die *Oberfläche* der Pyramide ist $A_O = A_M + G$. Die *Höhe* h der Pyramide ist der Abstand der Spitze S von der Ebene E .

Eine Pyramide heißt *gerade*, wenn alle Seitenkanten die gleiche Länge s haben. In einer geraden Pyramide hat jede Ecke der Grundfläche vom Höhenfußpunkt F die gleiche Entfernung $\sqrt{s^2 - h^2}$, d.h. die Ecken der Grundfläche liegen auf einem Kreis um F (Umkreis).



Alle Seitenflächen eines Prismas bilden seine *Mantelfläche*.

Ein Quader ist ein gerades, vierseitiges Prisma. Das in optischen Geräten verwendete Prisma ist ein gerades, dreiseitiges Prisma.



Eine vierseitige Pyramide mit der Spitze S , den Grundkanten $[AB], [BC], [CD]$ und $[DA]$, den Seitenkanten $[AS], [BS], [CS]$ und $[DS]$ und der Höhe $h = SF$.

Die ägyptischen Pyramiden sind quadratische gerade Pyramiden (die Grundfläche ist ein Quadrat).

Definitionen und Regeln

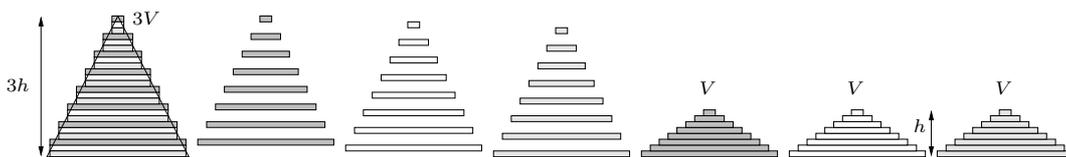
Wir betrachten zwei Pyramiden mit gleich großen Grundflächen ($G = G'$) und gleicher Höhe h , deren Grundflächen in einer Ebene liegen. Aus einer zur Grundebene parallelen Ebene E schneiden die Pyramiden die Flächen A und A' aus. Damit haben die Spitzen S und S' von E den gleichen Abstand x und es folgt aus dem Strahlensatz

$$\frac{A}{G} = \frac{x^2}{h^2} = \frac{A'}{G'} = \frac{A'}{G} \implies A = A'$$

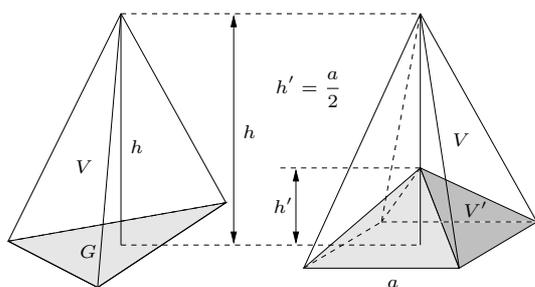
Aus dem Prinzip von Cavalieri folgt:

Zwei Pyramiden mit gleicher Höhe und gleicher Grundfläche haben das gleiche Volumen.

Beispiel zu nebenstehendem Satz:
 Zerlegung einer Pyramide mit Grundfläche G , Volumen $3V$ und Höhe $3h$ in drei Pyramiden mit Grundfläche G , Volumen V und Höhe h :



Jetzt können wir das Volumen V einer beliebigen Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe h berechnen. Man betrachtet eine zweite Pyramide (gerade und quadratisch) mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe, d.h. $a^2 = G$:



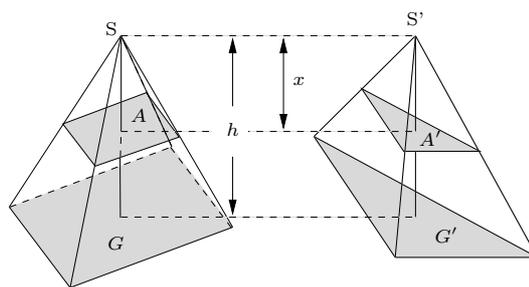
Aus der Abbildung und den schon bewiesenen Sätzen (siehe auch rechts) folgt:

$$V = \frac{h}{h'} V' = \frac{h}{\frac{a}{2}} \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{1}{3} a^2 h = \frac{1}{3} Gh$$

Eine Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhen h hat das Volumen

$$V = \frac{1}{3} Gh$$

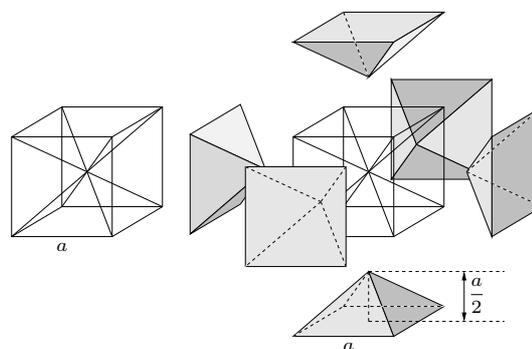
Beispiele



Für zwei Pyramiden mit gleicher Grundfläche G und den Höhen h bzw. h' gilt:

$$\frac{V}{V'} = \frac{h}{h'}$$

Zerlegung eines Würfels der Kantenlänge a durch seine Raumdiagonalen in sechs kongruente Pyramiden der Grundfläche a^2 :



Eine quadratische gerade Pyramide mit der Grundfläche a^2 und der Höhe $\frac{a}{2}$ hat das Volumen

$$V' = \frac{a^3}{6}$$

Die Cheopspyramide hat die Grundkantenlänge $a = 230$ m und die Höhe $h = 146$ m. Ihr Volumen ist also

$$V = \frac{1}{3} \cdot (230 \text{ m})^2 \cdot 146 \text{ m} = 2,57 \cdot 10^6 \text{ m}^3$$

Definitionen und Regeln

Der Zylinder

Ein *Zylinder* ist ein „gerades Prisma“ mit einem Kreis (Radius r) als Grund- und Deckfläche und der Höhe h .

Die *Abwicklung* eines Körpers erhält man, wenn man seine Oberfläche, falls möglich, in einer Ebene ausbreitet. Die zwischen Grund- und Deckfläche liegende *Mantelfläche* eines Zylinders kann man einfach in eine Ebene abrollen und erhält damit ein Rechteck mit den Seiten h und $2r\pi$. Der Inhalt der Mantelfläche ist also

$$A_M = 2r\pi h$$

und die Oberfläche ist

$$A_O = 2r\pi h + 2r^2\pi = 2r\pi(h + r)$$

Das Volumen des Zylinders ist (Grundfläche mal Höhe)

$$V = r^2\pi h$$

Der Kegel

Ein *Kegel* (genauer ein *gerader Kreiskegel*) ist eine „gerade Pyramide“ mit einem Kreis (Radius r) als Grundfläche und der Höhe h . Eine *Seitenkante* des Kegels ist die Strecke von der Spitze S zu einem Punkt auf dem Grundkreis. Für die Länge s der Seitenkante gilt

$$s = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Das Volumen des Kegels ist

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi h$$

Die Abwicklung der Mantelfläche des Kegels ist ein Kreissektor mit dem Radius s und der Bogenlänge $b = 2r\pi$. Der Inhalt der Mantelfläche ist also

$$A_M = \frac{b}{2\pi s} \cdot s^2\pi = rs\pi$$

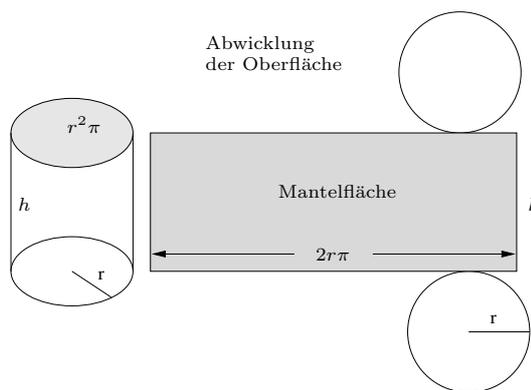
und die Oberfläche ist

$$A_O = rs\pi + r^2\pi = r\pi(s + r)$$

Für den Öffnungswinkel φ der abgewickelten Mantelfläche gilt

$$\varphi = \frac{r}{s} \cdot 360^\circ = \frac{2r\pi}{s}$$

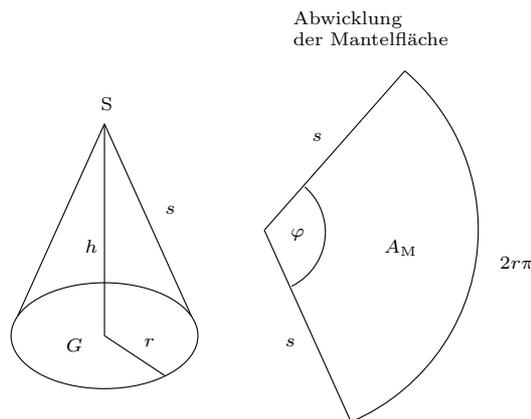
Beispiele



Beispiel: Welchen Radius und welche Höhe hat eine Getränkedose mit $V = 0,33 \text{ cm}^3$ und $h = 3r$?

$$V = r^2\pi h = 3r^3\pi \implies r = \sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}} = 3,27 \text{ cm}$$

$$h = 3r = 9,81 \text{ cm}$$



Beispiel: Aus einem halbkreisförmigen Blatt Papier mit Radius s wird die Mantelfläche eines Kegels gebogen.

$$\varphi = \frac{r}{s} \cdot 360^\circ = 180^\circ \implies r = \frac{s}{2}$$

Die Mantelfläche ist

$$A_M = \frac{s^2\pi}{2},$$

die Oberfläche

$$A_O = \frac{s^2\pi}{2} + r^2\pi = \frac{3s^2\pi}{4}$$

Das Volumen des Kegels ist

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi h = \frac{s^2\pi}{12} \sqrt{s^2 - \frac{s^2}{4}} = \frac{s^3\pi}{24} \sqrt{3}$$

Grundwissen Mathematik – Jahrgangsstufe 10

Geometrie

Definitionen und Regeln

Kreisfläche und Umfang

π -Berechnung (Streifenmethode)

Der Einheitskreis (Radius $r = 1$) hat die Fläche π . Es wird näherungsweise die Fläche des viertelten Einheitskreises berechnet und mit 4 multipliziert. Dazu zerlegt man den Viertelkreis in n Streifen der Breite $\Delta x = \frac{1}{n}$. Die Höhe der Streifen ist der Funktionswert in der Mitte des jeweiligen Intervalls:

$$x_1 = \frac{1}{2n}, x_2 = \frac{3}{2n}, \dots, x_n = \frac{2n-1}{2n}$$

Die Fläche des Streifens mit der Nummer k ist dann

$$A_k = \Delta x \cdot f(x_k) = \frac{1}{n} \sqrt{1 - x_k^2}$$

Den mit dieser Methode berechneten Näherungswert für π nennen wir p_n :

$$p_n = \frac{4}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)] = \frac{4}{n} \left[\sqrt{1 - x_1^2} + \dots + \sqrt{1 - x_n^2} \right]$$

p_n ist um so genauer, je größer n gewählt wird:

n	p_n	δ_{rel}	Rechenzeit in s
5	3,172	0,0097	0,005
10	3,1524	0,0034	0,010
100	3,14194	$1,1 \cdot 10^{-4}$	0,100
1000	3,14160	$3,5 \cdot 10^{-6}$	1,0
10000	3,1415930	$1,1 \cdot 10^{-7}$	10
100000	3,141592664	$3,5 \cdot 10^{-9}$	100

Man braucht die 100-fache Rechenzeit, um das Ergebnis um drei Dezimalen zu verbessern ($\delta_{\text{rel}} = 10^{-s}$ entspricht s Dezimalen an Genauigkeit). Ist t_4 die Rechenzeit für 4 Dezimalen, dann ist die Rechenzeit für s Dezimalen

$$t_s = t_4 \cdot 10^{\frac{2(s-4)}{3}}$$

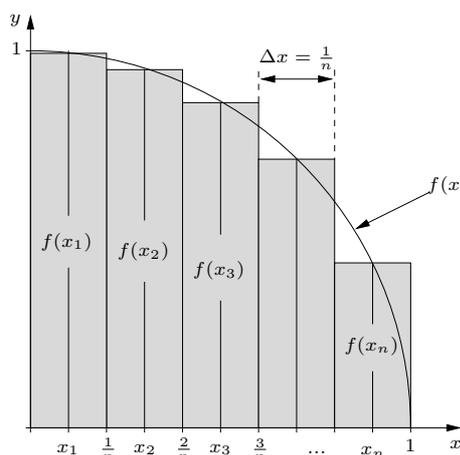
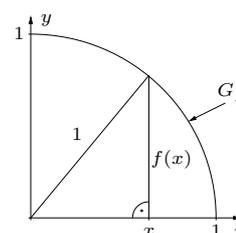
Die Rechenzeit steigt exponentiell mit der Stellenzahl!

Beispiele

Die Funktionsgleichung der Kreislinie: Aus dem Pythagoras folgt

$$x^2 + f(x)^2 = 1^2$$

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$



$$p_5 = \frac{4}{5} \left[\sqrt{1 - 0,1^2} + \sqrt{1 - 0,3^2} + \sqrt{1 - 0,5^2} + \sqrt{1 - 0,7^2} + \sqrt{1 - 0,9^2} \right] = 3,172$$

Mit $\pi = 3,141592654\dots$ folgt für den relativen Fehler unseres Näherungswertes

$$\delta_{\text{rel}} = \frac{p_5 - \pi}{\pi} = 0,0097 = 0,97\%$$

Für 22 Dezimalen von π braucht man also

$$t_{22} = t_4 \cdot 10^{\frac{2 \cdot 18}{3}} \text{ s} = 10^{11} \text{ s} \approx 3 \cdot 10^3 \text{ a.}$$

Für die Berechnung einer größeren Stellenzahl von π ist die Streifenmethode also völlig ungeeignet.

Definitionen und Regeln

π -Berechnung nach Archimedes

Wir nähern den Umfang $U = 2\pi$ des Einheitskreises durch die Umfänge ein- und umbeschriebener regulärer n -Ecke an. Unser erstes Vieleck ($k = 1$) ist das Quadrat ($n = 4$). Dann verdoppeln wir bei jedem Schritt die Eckenzahl, d.h. $n = 2^{k+1}$. Die Seitenlänge des einbeschriebenen n -Ecks ist s_k , die des umbeschriebenen s'_k . Der Umfang des einbeschriebenen n -Ecks ist U_k , die des umbeschriebenen U'_k :

$$U_k = ns_k = 2^{k+1}s_k, \quad U'_k = ns'_k = 2^{k+1}s'_k$$

Aus dem Strahlensatz folgt

$$\frac{s'_k}{s_k} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{s_k^2}{4}}} \implies s'_k = \frac{s_k}{\sqrt{1 - \frac{s_k^2}{4}}}$$

$$\frac{U_k}{2} < \pi < \frac{U'_k}{2} \implies$$

$$\boxed{\underbrace{2^k s_k}_{p_k} < \pi < \underbrace{2^k s'_k}_{p'_k}}$$

Wir berechnen jetzt s_{k+1} aus s_k .

Mit $x = 1 - \sqrt{1 - \frac{s_k^2}{4}}$ folgt

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= \sqrt{\left(\frac{s_k}{2}\right)^2 + x^2} = \\ &= \sqrt{\frac{s_k^2}{4} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{s_k^2}{4}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{s_k^2}{4} + 1 - 2\sqrt{1 - \frac{s_k^2}{4}} + 1 - \frac{s_k^2}{4}} \end{aligned}$$

Rekursionsformel zur Berechnung von s_k :

$$\boxed{s_{k+1} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{s_k^2}{4}}}}$$

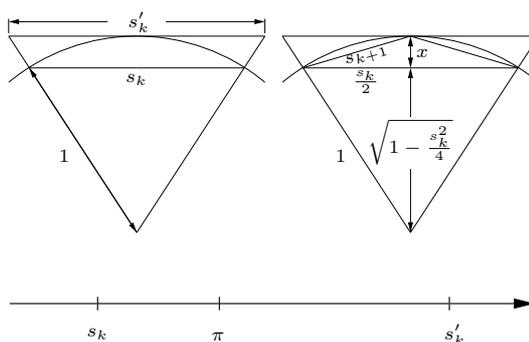
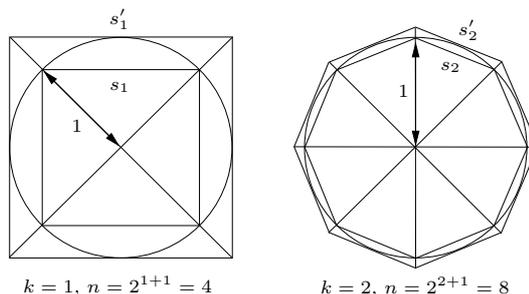
Beginnend mit dem Quadrat ($k = 1$) folgt

$$s_1 = \sqrt{2}, \quad s'_1 = 2 \implies 2\sqrt{2} < \pi < 4$$

k	p_k	p'_k	δ_k
1	2,828	4,000	0,586
2	3,0615	3,31371	0,1261
10	3,1415914	3,1415951	$1,8 \cdot 10^{-6}$
20	3,141592653589	3,141592653592	$1,8 \cdot 10^{-12}$

k	$\pi_k = \frac{p_k + p'_k}{2}$	$\delta_{\text{echt}} = \pi - \pi_k$
1	3,414	0,087
20	3,14159265359038	$5,9 \cdot 10^{-13}$
30	3,14159265358979323902	$5,6 \cdot 10^{-19}$

Beispiele



Nimmt man den Mittelwert

$$\pi_k = \frac{p_k + p'_k}{2}$$

als Näherungswert für π , dann ist der Fehler sicher kleiner als

$$\begin{aligned} \delta_k &= \frac{p'_k - p_k}{2} = 2^k \frac{s'_k - s_k}{2} = \\ &= 2^{k-1} s_k \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{s_k^2}{4}}}{\sqrt{1 - \frac{s_k^2}{4}}} \end{aligned}$$

Beachtet man $s_k \ll 1$ für größere k (für $k = 20$ ist $s_k \approx \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{2^k} = \frac{\pi}{2^{20}} = 3 \cdot 10^{-6}$), dann folgt mit $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$ (siehe S. 62)

$$\delta_k \approx 2^{k-1} \frac{\pi}{2^k} \frac{1 - \left(1 - \frac{s_k^2}{8}\right)}{\underbrace{1 - \frac{s_k^2}{8}}_{\approx 1}} \approx \frac{\pi^3}{2^{2k+4}}$$

$$k = 20 \implies \delta_{20} \approx 1,8 \cdot 10^{-12}$$

Mit 20 Schritten erhält man also eine Genauigkeit von 12 Stellen, d.h. ungefähr 0,6 Stellen Verbesserung pro Schritt. Ist t_1 die Rechenzeit für einen Schritt, dann braucht man für s Dezimalen Genauigkeit die Rechenzeit $t_s = \frac{t_1}{0,6} \cdot s$, die nur noch linear mit der Stellenzahl wächst. (Berücksichtigt man noch, dass die Rechenoperationen von Zahlen mit vielen Ziffern länger dauern, ist t_s proportional zu $s \lg s$.)

Definitionen und Regeln

Kreisektor, Bogenmaß

A_S ist die Fläche und b die Bogenlänge eines Kreisektors mit Radius r und Öffnungswinkel φ . A ist die Fläche des ganzen Kreises und $U = 2r\pi$ der Kreisumfang. Aus dem Verhältnis

$$\frac{A_S}{A} = \frac{b}{U} = \frac{b}{2r\pi} = \frac{\varphi}{360^\circ}$$

folgt

$$A_S = \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot A \quad \text{und} \quad b = \frac{\varphi \cdot 2r\pi}{360^\circ} = \frac{\varphi r\pi}{180^\circ}$$

Da b proportional zu φ ist, kann b als Maß für den Winkel verwendet werden. Man definiert das *Bogenmaß* des Winkels φ als Bogenlänge eines Kreisektors mit Radius 1 und Öffnungswinkel φ :

$$\varphi = \frac{\varphi\pi}{180^\circ} \implies 180^\circ = \pi$$

Zur Messung von Winkeln verwendet man das Gradmaß und das Bogenmaß. Zur Umrechnung muss man sich nur eine Formel merken:

$$180^\circ = \pi$$

$$180^\circ = \pi, \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180}, \quad 1 = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

Mit den neuen Formeln vereinfachen sich Ausdrücke für Bogenlänge und Fläche eines Kreisektors (Radius r):

$$b = r\varphi$$

$$A_S = \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot A = \frac{\varphi}{2\pi} \cdot r^2\pi = \frac{1}{2}r^2\varphi$$

$$A_S = \frac{1}{2}r^2\varphi = \frac{1}{2}br$$

(Zum leichten Merken: Wie Dreiecksfläche mit Grundlinie b und Höhe r .)

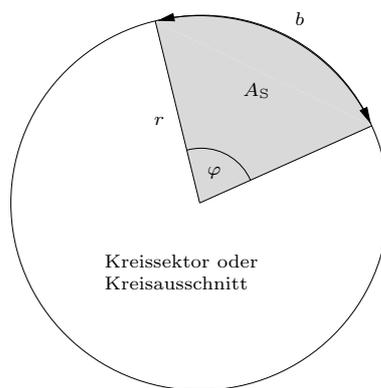
Kreissegment (Kreisabschnitt)

Länge der *Sehne*: $s = r \sin \frac{\varphi}{2}$

Höhe des Segments: $h = r - r \cos \frac{\varphi}{2}$

$$\begin{aligned} A_{\text{Seg}} &= A_{\text{Sektor}} - A_{\text{Dreieck}} = \\ &= \frac{1}{2}r^2\varphi - \frac{1}{2}s(r-h) = \\ &= \frac{rb - s(r-h)}{2} \end{aligned}$$

Beispiele



$$30^\circ = 30 \cdot 1^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

$$1 = \frac{180^\circ}{\pi} = 57,296^\circ$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

φ	360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°
φ	2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Achtung!
Es heißt wirklich $180^\circ = \pi$ und *nicht* $180^\circ \hat{=} \pi$.

Zwei Orte auf dem Äquator (West- und Ostküste von Afrika) haben die Längen $\lambda_1 = 9^\circ$ und $\lambda_2 = 43^\circ$. Mit dem Erdradius $R = 6380$ km ist ihre Entfernung

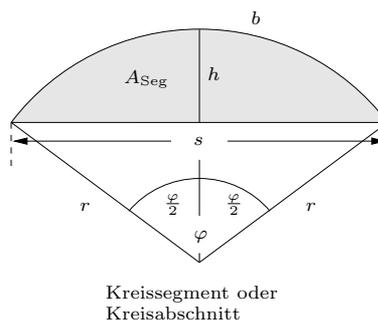
$$x = R(\lambda_2 - \lambda_1) = R \cdot 34^\circ = R \cdot \frac{34\pi}{180} = 3786 \text{ km}$$

Die Rechnung

$$x = 6380 \text{ km} \cdot 34^\circ = 216920 \text{ km}^\circ$$

ist zwar auch richtig, nur muss die ungewohnte Längeneinheit km° noch umgerechnet werden:

$$x = 216920 \text{ km}^\circ = 216920 \text{ km} \cdot \frac{\pi}{180} = 3786 \text{ km}$$



Definitionen und Regeln

Die Kugel

Definition der Kugel

Die Kugeloberfläche K ist die Menge aller Punkte P , die von einem festen Punkt M (dem Mittelpunkt) die gleiche Entfernung r (Radius) haben:

$$K = \{ P \mid \overline{MP} = r \}$$

Ist M der Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems, dann folgt aus dem dreidimensionalen Pythagoras (siehe S. 77)

$$P(x|y|z) \in K \iff x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Das Kugelvolumen

Alle Punkte der Kugeloberfläche haben vom Mittelpunkt die gleiche Entfernung r (Radius). Um das Volumen V einer Kugel mit Radius r zu berechnen, betrachtet man als Vergleichskörper einen Zylinder mit Radius r und Höhe $h = 2r$, von dem oben und unten ein Kegel herausgefräst wurde (wie ein Vulkankrater). Eine Ebene parallel zur Grundfläche des Zylinders schneidet aus dem angebohrten Zylinder die Fläche A_1 (Kreising) und aus der Kugel die Fläche A_2 (Kreis) aus. Wegen $x = y$ (45° -Winkel) gilt:

$$A_1 = r^2\pi - x^2\pi = (r^2 - y^2)\pi = R^2\pi = A_2$$

Aus dem Prinzip von Cavalieri (siehe S. 78) folgt dann, dass das Kugelvolumen V gleich dem Volumen des angebohrten Zylinders ist:

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{Zylinder}} - 2V_{\text{Kegel}} = \\ &= r^2\pi \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3}r^2 \cdot r = \\ &= 2r^3\pi - \frac{2}{3}r^3\pi = \frac{4}{3}r^3\pi \end{aligned}$$

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3$$

Welchen Radius hat eine Kugel mit dem Volumen $V = 1 \text{ m}^3$?

$$\frac{4\pi}{3} r^3 = V \implies r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 0,620 \text{ m}$$

Beispiele

Beispiel:

Welcher Punkt $A(3|4|z)$ liegt auf der Kugel um den Ursprung mit Radius $r = 13$?

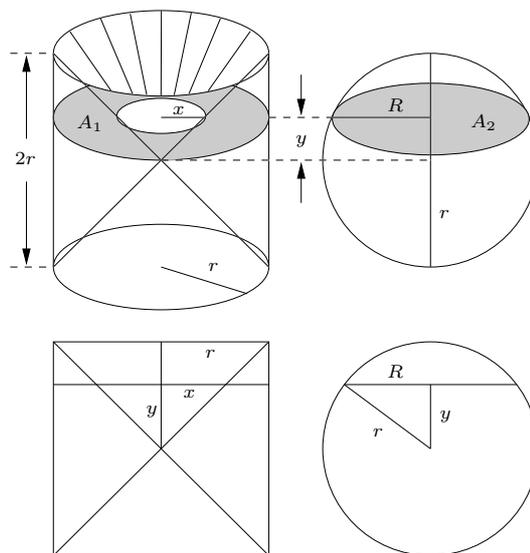
$$3^2 + 4^2 + z^2 = 13^2 \implies z = \pm\sqrt{144} = \pm 12$$

$$A(3|4|12) \quad \text{oder} \quad A(3|4|-12)$$

Eine Ebene E schneidet eine Kugel K in einem Kreis k :

$$E \cap K = k$$

Liegt der Kugelmittelpunkt in E , nennt man k einen *Großkreis*. Großkreise haben den gleichen Radius wie die Kugel.



Beispiele:

Der Erdradius ist $R = 6380 \text{ km}$, das Volumen der Erde also

$$V_{\text{Erd}} = \frac{4\pi}{3} R^3 = 1,09 \cdot 10^{12} \text{ km}^3$$

Welche Kantenlänge a hat ein Würfel mit dem gleichen Volumen wie eine Kugel mit Radius r ?

$$a^3 = \frac{4\pi}{3} r^3 \implies a = \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}} r = 1,612 r$$

Definitionen und Regeln

Die Kugeloberfläche

Zur Berechnung der Kugeloberfläche stellen wir uns einen kugelförmigen Wüstenplaneten vor. Ein Geländefahrzeug (Sandbuggy) mit der Spurbreite x (Abstand der Räder auf einer Achse) umrundet den Nordpol auf einem Breitenkreis. Wegen (siehe nebenstehende Abbildung) $\varphi' = 90^\circ - \varepsilon = \varphi$ folgt (ähnliche Dreiecke)

$$\frac{z}{r} = \frac{\Delta y}{x} \implies z = \frac{r\Delta y}{x}$$

Die von den Reifenspuren eingeschlossene Fläche ΔA ist in sehr guter Näherung (die „Wölbung“ der Fläche kann wegen $x \ll r$ praktisch vernachlässigt werden)

$$\Delta A \approx 2z\pi \cdot x = 2 \cdot \frac{r\Delta y}{x} \pi x = 2r\pi\Delta y \quad (1)$$

ΔA ist *nicht* von der Spurbreite x , sondern nur von der Dicke Δy in Richtung der Kugelachse abhängig! Die Mantelfläche einer Kugelschicht der Dicke h setzen wir aus n dünnen Scheiben der Dicke Δy zusammen ($n\Delta y = h$). Verwendet man immer dünnere und dafür immer mehr Scheiben, wird aus dem \approx -Zeichen in (1) das Gleichheitszeichen:

$$A_h = n \cdot \Delta A = \underbrace{n\Delta y}_h 2r\pi = 2r\pi h$$

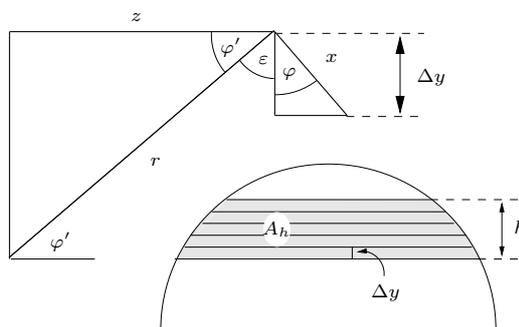
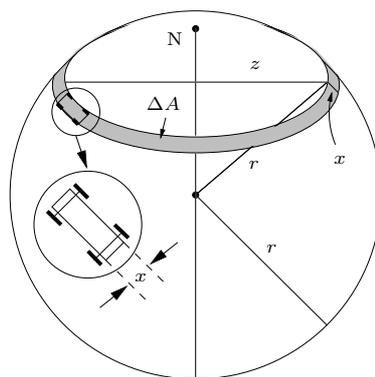
Die Mantelfläche einer Kugelschicht der Dicke h mit dem Kugelradius r ist

$$A_h = 2r\pi h$$

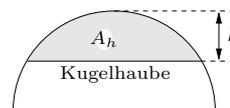
Für $h = 2r$ erhält man die gesamte Oberfläche der Kugel

$$A = 4\pi r^2$$

Beispiele



Ein Spezialfall der Kugelschicht ist die *Kugelhaube* oder das *Kugelsegment*. Für den zur Kugelhaube gehörenden Teil der Kugeloberfläche gilt dann auch



$$A = 2r\pi h$$

Definitionen und Regeln

Beispiele

Trigonometrie

Winkelfunktionen für beliebige Winkel

k ist der Einheitskreis ($r = 1$) mit dem Koordinatenursprung O als Mittelpunkt. $P(x|y)$ ist ein beliebiger Punkt auf der Kreislinie ($P \in k$), $E(1|0)$. $\varphi = \sphericalangle POE$ ist der Winkel zwischen $[OP$ und der x -Achse, im Gegenuhrzeigersinn positiv gezählt.

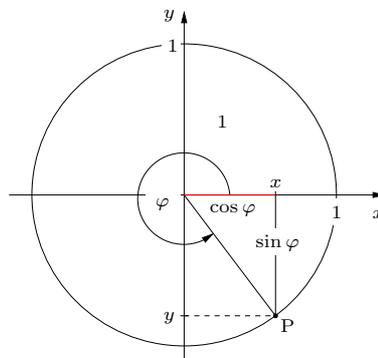
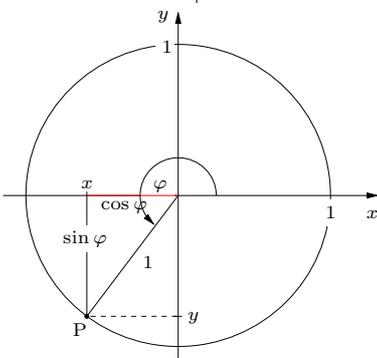
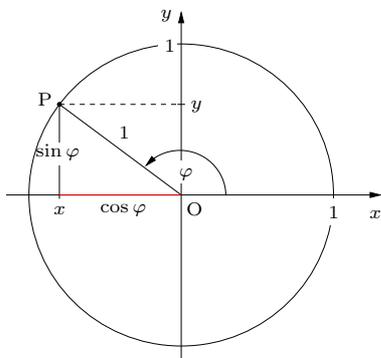
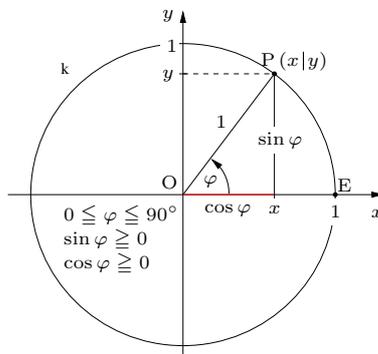
Definition:

$$P(x|y) \in k \implies \sin \varphi = y, \quad \cos \varphi = x$$

$$-1 \leq \sin \varphi \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \varphi \leq 1$$

$$-\infty \leq \tan \varphi \leq +\infty$$



$90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$
 $\sin \varphi \geq 0$
 $\cos \varphi < 0$

$180^\circ < \varphi \leq 270^\circ$
 $\sin \varphi < 0$
 $\cos \varphi \leq 0$

$270^\circ < \varphi \leq 360^\circ$
 $\sin \varphi < 0$
 $\cos \varphi > 0$

φ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$
$\sin \varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\cos \varphi$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$

φ	270°	300°	315°	330°	360°	450°	540°	630°	720°	-30°	-60°
φ	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$
$\sin \varphi$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	-1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\cos \varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1	0	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$