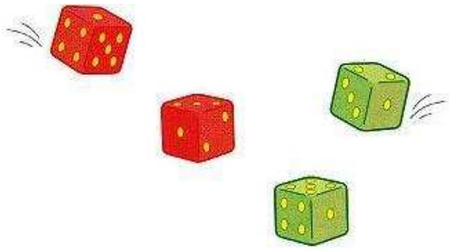
Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit

1. **Würfeltest**



Mit welchem Würfel würfelt man am häufigsten eine 6? Findet heraus, wer von euch den „besten“ 6er Würfel hat. Dabei sollt ihr wie folgt vorgehen.

(a) Jeder würfelt mit seinem Würfel, der sich in einem Würfelbecher befinden sollte.

(b) Das Ergebnis eines jeden Wurfes wird in die unten abgebildete Protokolltabelle bei der entsprechenden Wurfnummer eingetragen.

(c) Wer zuerst bei 60 Würfen angelangt ist, ruft laut STOP; alle anderen hören dann sofort mit Würfeln auf.

(d) In die Tabellen unter der Protokolltabelle sind die (sogenannten absoluten) Häufigkeiten für die einzelnen Augenzahlen zu notieren.

(e) Wenn ihr mit allem fertig seid, vergleicht zunächst eure Ergebnisse mit denen eurer Nachbarn. Gib es zwischen den einzelnen Würfeln unterschiede? Begründe warum oder warum nicht!

(f) Was könnte mit dem Begriff „relative Häufigkeit“ gemeint sein?

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	1
21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.	31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	3
41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.	51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	5

Anzahl der Versuche:

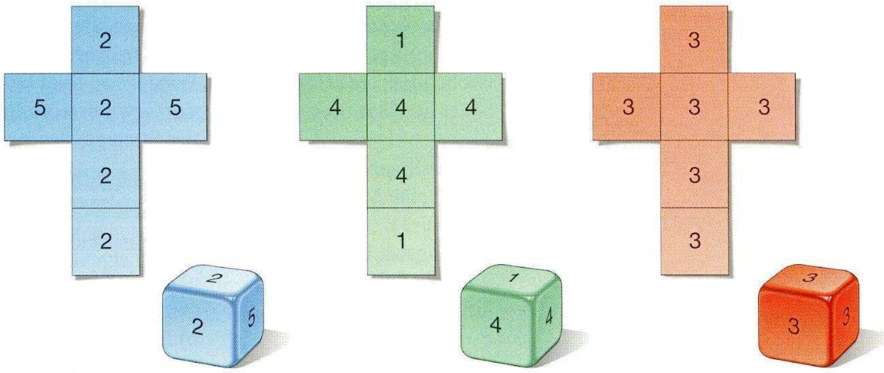
Augenzahl	1	2	3	4	5	6
absolute Häufigkeit						
relative Häufigkeit						

Variationen:

Würfel des Herrn Efron oder getarnte Würfel

2. **Würfel des Herrn Efron**

Die sechs Seiten eines Würfels müssen nicht unbedingt mit den Zahlen von eins bis sechs beschriftet sei, sie können ganz unterschiedliche Beschriftung haben.
Für ein einfaches, aber im Ergebnis recht verblüffendes Würfelspiel kann man die unten abgebildeten „Würfel des Herrn Efron" verwenden. Es handelt sich dabei um drei verschiedenfarbige und unterschiedlich beschriftete Würfel. Ihr könnt sie leicht herstellen, indem ihr auf herkömmliche Würfel kleine Papierstreifen (Würfelnetze) klebt und diese entsprechend beschriftet.



Spielregel (für zwei Spieler):

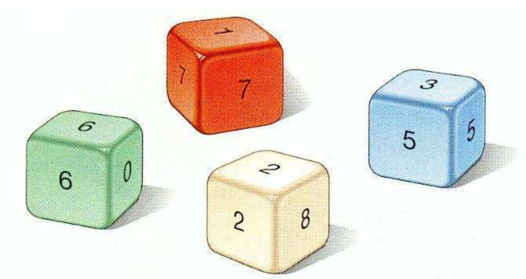
- Jeder Spieler erhält sechs Münzen.
- Der erste Spieler wählt einen der drei Würfel.
- Der zweite Spieler wählt einen anderen Würfel.
- Beide Spieler würfeln. Wer die höhere Augenzahl erreicht, gewinnt und erhält vom Verlierer eine Münze.
- Die Schritte $1 - 4$ werden wiederholt bis ein Spieler keine Münzen mehr hat.

(a) Welchen Würfel sollte der zweite Spieler wählen, wenn der erste Spieler den blauen Würfel $(5, 5, 2, 2, 2, 2)$ gewählt hat?

(b) Gibt es einen besonders günstigen Würfel?

(c) Die Spielregeln sollen geändert werden: die Höhe der Ergebnisse soll berücksichtigt werden. Wer die größere Zahl würfelt, erhält so viele Münzen wie die Differenz der Augenzahlen ausmacht.
Ist das Spiel nun fair und wenn ja warum?

(d) Überlegt euch ein eigenes möglichst faires Glücksspiel mit von euch beschrifteten Würfeln (auch Zahlen über 6 sind möglich!).



Quelle: Mathe Live 8, S. 57f.

Variationen:

(a) Zusätzliche Behandlung des Erwartungswertes (man spricht von Efron-Würfeln, wenn alle den gleichen Erwartungswert haben)

(b) Angenommen, es sind drei Spieler, die mit allen drei Würfeln spielen. Wer gewinnt jetzt?

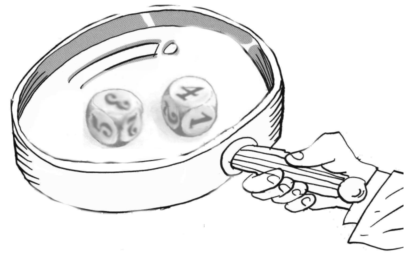
Lösung: (a) Am besten wählt man den roten Würfel, da dieser mit 66% Wahrscheinlichkeit gegen den blauen Würfel gewinnt.

(b) Wenn man die erste Wahl hat, ist man immer benachteiligt, da der zweite Spieler immer einen auf den ersten abgestimmten „besseren“ Würfel wählen kann.
$B \to R \quad R \to G \quad G \to B$ [B, R, G: Blauer, roter und grüner Würfel]

(c) Jetzt ist das Spiel fair. Begründung beispielsweise über identische Augensummen

3. **Getarnte Würfel**

Im Gegensatz zu einem klassischen 6er Würfel sollt ihr in Partnerarbeit einen sechsseitigen Würfel herstellen, auf dem Zahlen aus der Menge $1, 2, 3, 4, 5, 6$ einfach, mehrfach oder gar nicht vorkommen.



Dafür klebt ihr auf die sechs Seiten eines herkömmlichen Würfels kleine Papierschnipsel auf denen eure Zahlen stehen. Wenn ihr damit fertig seid, sucht ihr euch eine andere 2er-Gruppe und würfelt so, dass diese Schüler euren Würfel nicht sehen können. Lediglich das Ergebnis wird mitgeteilt und in die folgende Tabelle eingetragen:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl (absolute Häufigkeit)						

(a) Wie könnte die Beschriftung des Würfels aussehen?

(b) Wie oft muss man werfen, um eine möglichst sichere Aussage über die Beschriftung des Würfels machen zu können? Begründe!

(c) Was könnte der Grund dafür sein, dass eine Zahl häufiger gewürfelt wird als eine andere, die genauso oft auf dem Würfel ist?

4. **Lego-Steine**

Statt mit einem normalen Spielwürfel kann man auch mit einem Lego-Stein „würfeln“. Nimm einen „Achter“ und beschrifte ihn wie hier gezeigt. Wie bei einem richtigen Spielwürfel haben gegenüberliegende Seiten zusammen die Augenzahl 7. Beim Würfeln sollte ein Würfelbecher benutzt werden. Als Ergebnis notiert man die Augenzahl.

Anne, Gisa und Simon haben vor ihrem Würfeln mit dem Lego-Stein die Chancen für die Augenzahlen 1 bis 6 geschätzt.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Schätzung Anne	2%	10%	31%	45%	10%	2%
Schätzung Peter	1%	7%	40%	36%	12%	4%
Schätzung Gisa	0%	5%	40%	50%	5%	0%
Schätzung Simon	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

(a) Welcher Schätzung würdest du am ehesten zustimmen? Begründe deine Antwort!

(b) Gib selbst eine Schätzung ab und überprüfe die Schätzungen, indem du 100*mal* mit dem Lego-Stein würfelst. Stelle die absolute und die relative Häufigkeit in einer Tabelle zusammen. Gib nach diesem Versuch eine (möglicherweise verbesserte) Schätzung ab.

(c) Wolfgang behauptet, die Chance für das Würfeln einer Augenzahl hängt vom Flächeninhalt der zugehörigen Seite ab. Berechne die Flächeninhalte, wobei du die Flächen mit 3 und 4 als eben annehmen kannst. Gib den Anteil jedes einzelnen Flächeninhalts an der gesamten Oberfläche an. Vergleich mit den Angaben aus (a).

Quelle: Lambacher Schweizer 8, S. 156

Variation:

Riemer-Würfel statt Lego-Steine

Lösung: (a) Die Schätzung von Simon ist nicht gut, da sie den unterschiedlichen Seiten gleiche Chancen zuordnet.
Gisas Schätzung ist auch nicht gut. Obwohl 1 und 6 kleine Chancen haben, ist die Schätzung 0% nicht gerechtfertigt.
Annes Schätzung ist am besten. Die Chance der Landung auf den größten Flächen ist am größten, und die Chance der Landung auf den kleinsten Flächen ist am kleinsten, aber nicht 0%.

(b) individuelle Lösung

(c)

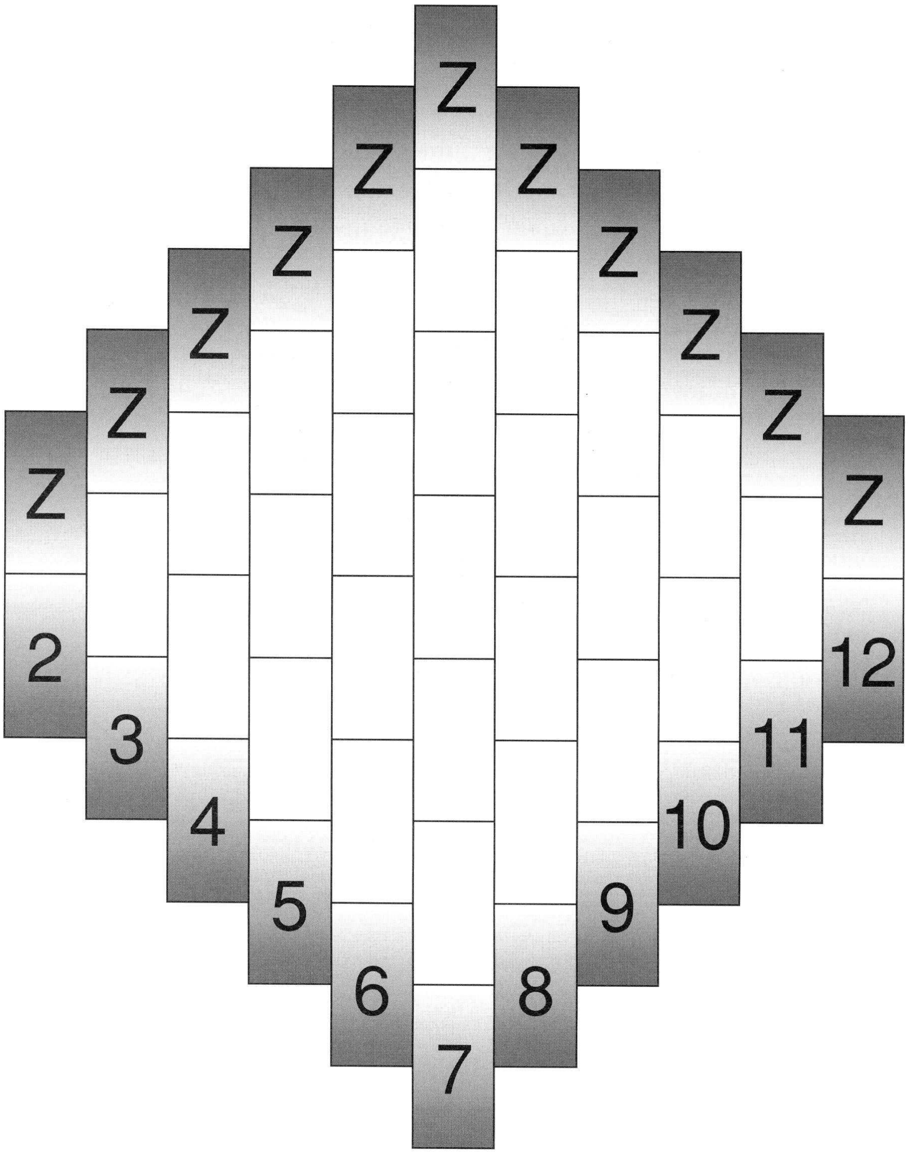
Zahl	Fläche	Anteil an der Gesamtfläche
1 und 6	$1,4\,\mathrm{cm}^2$	$7,4\%$
2 und 5	$2,9\,\mathrm{cm}^2$	$15,4\%$
3 und 4	$5,1\,\mathrm{cm}^2$	$27,1\%$

Gesamtfläche $18,8\,\mathrm{cm}^2$.
Wolfgangs Behauptung spiegelt die Tendenz von Annes Schätzung aus Aufgabe (a) wider. Allerdings ist bei ihm die Wahrscheinlichkeit für die großen Flächen zu klein und die Wahrscheinlichkeit für die kleinen und mittleren Flächen zu groß.

5. **Spiel „Der schnellste Weg"**

Zu Beginn des Spieles wird von jedem Mitspieler ein Spielstein auf eine Startzahl zwischen 2 und 12 gesetzt. Anschließend wird mit zwei Würfeln gewürfelt und die Augensumme gebildet. Stimmt die Augensumme mit der besetzten Startzahl überein, darf man ein Feld vorrücken und nochmals würfeln. Stimmen Augensumme und Startzahl nicht überein, ist der nächste Spieler dran. Wer mit seinem Spielstein auf ein Zielfeld (Z) kommt, hat einen Gewinnpunkt gemacht und darf seinen Stein wieder auf eine beliebige Startzahl setzen.
Gewonnen hat derjenige, der zuerst 3 Gewinnpunkte hat.

Spielplan „Der schnellste Weg..."



(a) Spielt das Spiel in Dreier-Gruppen. Die Mehrfachbelegungen eines Startfeldes ist nicht erlaubt!

(b) Notiert in der folgenden Strichliste wie oft eine Startzahl gewürfelt wurde.

Startzahl	Absolute Häufigkeit
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

(c) Notiert in der folgenden Strichliste wie oft eine Startzahl zum Erwerb eines Gewinnpunktes geführt hat.

Startzahl	Gewinnpunkte
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

(d) Wie viele Möglichkeiten / Kombinationen gibt es, eine Startzahl zu werfen?

Startzahl	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Anzahl der Möglichkeiten											

(e) Überlegt euch Variationen des Spiels um es (noch) spannender zu machen (z.B. drei Würfel einsetzen und die geeignete Kombination aus zweien auswählen, mehrere Startfelder besetzen etc.).

Variationen der Aufgabe:

(a) mehrere Spielsteine pro Person

(b) mehrere Würfel pro Person

(c) Personenzahl variieren

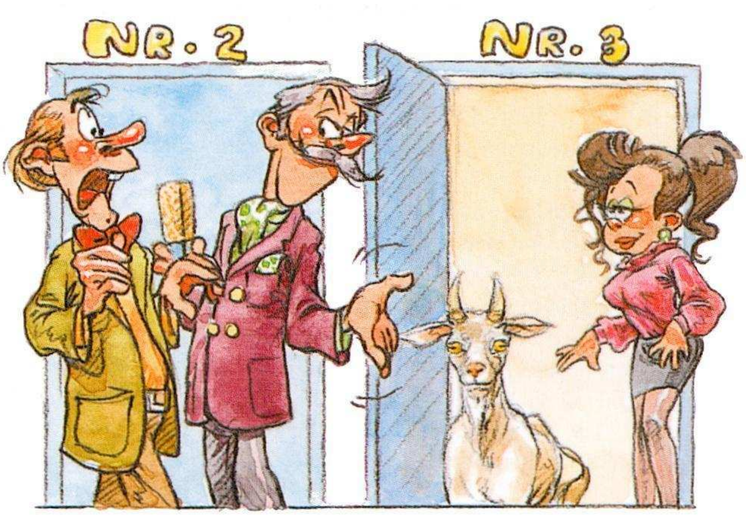
(d) eigenes Spielfeld entwerfen

(e) zusätzliche Würfelbedingungen einführen

(f) Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Startzahl berechnen

6. **Das „3-Türen-Problem“**

   In der amerikanischen Fernsehshow „Let’s make a deal“ ist ein Auto ein Hauptpreis. Um ihn zu gewinnen, muss sich der Kandidat schließlich für die richtige von drei verschlossenen Türen entscheiden. Hinter einer befindet sich das Auto, hinter den beiden anderen jeweils eine Ziege. Wenn sich der Kandidat für eine der drei Türen entschieden hat, zum Beispiel für Tür 1, öffnet der Moderator, der weiß, was sich hinter den Türen befindet, mit den Worten „Soll ich Ihnen ’mal ’was zeigen?“ eine der beiden anderen Türen, zum Beispiel Tür 3, und eine Zeige schaut ins Publikum, denn der Moderator öffnet niemals die Tür, hinter der das Auto steht.



   Der Kandidat hat nun noch die Möglichkeit, sich für die andere verschlossene Tür (hier Tür 2) zu entscheiden oder bei seiner ursprünglichen Wahl zu bleiben(hier Tür 1). Was soll der Kandidat machen? Diese Frage wurde der Journalistin *Marilyn vos Savant*, die angeblich der Mensch mit dem höchsten Intelligenzquotienten ist, von einem Leser der Zeitschrift „Parade“ gestellt. In ihrer Kolumne „Ask Marylin“ antwortete sie, dass der Kandidat auf jeden Fall wechseln sollte. Dieses Vorgehen würde seine Gewinnwahrscheinlichkeit verdoppeln, nämlich von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{2}{3}$. Daraufhin erhielt sie etwa zehntausend Leserbriefe, die diese Strategie für falsch hielten.

   Argumentation von Marylin vos Savant
   Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter Tür 1 befindet, ist $\frac{1}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter einer der beiden anderen Türen befindet, ist somit $\frac{2}{3}$. Mindestens hinter einer dieser beiden Türen steht eine Ziege.
   Öffnet der Moderator eine dieser Türen, so steht die Tür fest, hinter welcher das Auto mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ steht. Also empfiehlt es sich, die gewählte Tür zu wechseln. Die Chance auf den Hauptgewinn verdoppelt sich.

   Argumentation der meisten Leser
   Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter Tür 1 befindet, ist $\frac{1}{3}$, genauso wie für jede der beiden anderen Türen.
   Öffnet der Moderator eine der beiden anderen Türen, zum Beispiel Tür 3, so scheidet

diese Tür als mögliche Auto-Tür aus. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter Tür 1 befindet, beträgt jetzt $\frac{1}{2}$, genauso wie für Tür 2. Es gibt also keinen Grund die Tür zu wechseln. Die Gewinnchance ist für beide Türen gleich.

(a) Diskutiert die beiden unterschiedlichen Argumentationen zu zweit.

(b) Wenn du als Kandidat entscheiden müsstest, würdest du die Tür wechseln oder nicht? Begründe deine Überlegung!

(c) Überprüft eure Überlegungen an einem Experiment, das dem „3-Türen-Problem“ entspricht (z.B. drei Würfelbecher und eine Münze als Gewinn).

Quelle: Zahlen und Größen 8, S. 159

Variationen:

(a) Schüler schreiben ihre eigene Argumentation

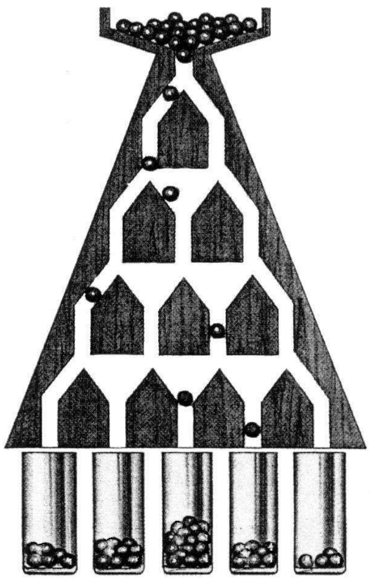
(b) 1000 Türen, von denen der Moderator 98 öffnet

(c) Simulation im Internet nutzen: www.zufallsgeneratoren.de

Lösung: Auch wenn es immer noch nicht alle glauben, hat Marylin vos Savant recht.

7. **Galton-Brett**

Francis Galton (1822 – 1911) erfand das neben stehende Galton-Brett. Auf diesem sind mehrere Reihen gleichgeformter Plättchen auf Lücken befestigt. Hindurchfallende Kugeln treffen auf die Spitze des ersten Plättchens und werden dort jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $0,5$ nach rechts oder nach links abgelenkt. Dieser Vorgang setzt sich von Reihe zu Reihe fort. Die Kugeln werden unter jedem Ausgang zur Auszählung aufgefangen.



Sollte euch kein Galton-Brett zur Verfügung stehen, könnt ihr trotzdem ausprobieren, wie sich die Kugeln verteilen. Simuliert den Versuch und entscheidet bei jeder Plättchenspitze mit Hilfe einer Münze, welchen Weg (rechts oder links) die Kugel nimmt.

(a) Macht in Partnerarbeit 100 Durchgänge und zählt die Zahl der Kugeln in jedem Behälter. Tragt die Anzahl in einem Säulendiagramm auf.

(b) Wie viele verschiedene Wege kann eine Kugel nehmen?

(c) Stellt die Situation in einem Ergebnisbaum dar und bestimmt zu jedem Weg die Wahrscheinlichkeit.

(d) Am Boden des Galton-Bretts fällt jede Kugel in eine der fünf Kammern. Mit welcher Wahrscheinlichkeit endet der Weg in Kammer 1 [bzw. $2, 3, 4, 5$]?

Lösung: (a) Experiment

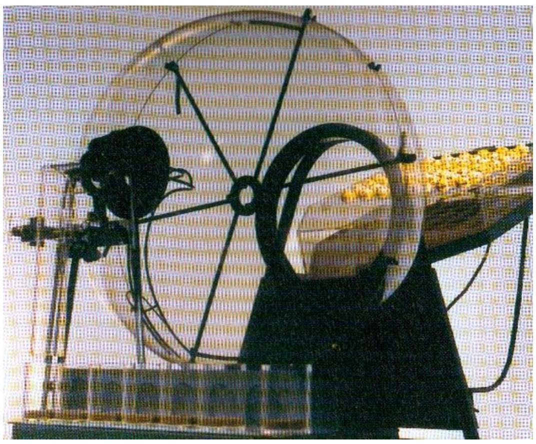
(b) Es gibt $2^4 = 16$ Wege.

(c) Jeder Weg ist gleichwahrscheinlich also $\frac{1}{16}$.

(d) Kammer 1 und 5: jeweils $\frac{1}{16}$
Kammer 2 und 4: jeweils $\frac{4}{16}$
Kammer 3: $\frac{6}{16}$

8. **Lotto „3 aus 9“**

Anstelle des bekannten Lottos „6 aus 49“ sollt ihr den kleinen Ableger davon „3 aus 9“ spielen. Dafür müsst ihr zunächst 9 Papierschnipsel mit den Zahlen $1-9$ beschriften und dann in einen undurchsichtigen Behälter füllen.



Jeder aus der Klasse tippt eine Dreierkombination aus der Menge $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ (z.B. $3-6-7$). Es darf dabei keine Zahl doppelt vorkommen. Im Anschluss daran zieht der Lehrer drei Schnipsel aus dem Behälter.

(a) Nachdem an der Tafel die Ergebnisse aller Schüler notiert wurden (absolute Häufigkeit), berechne die relative Häufigkeit der einzelnen Zahlen.

(b) Wie groß war rein rechnerisch die Wahrscheinlichkeit, $0, 1, 2$ oder 3 „Richtige“ zu haben.

(c) Vergleiche das Ergebnis aus Teil (b) mit dem aus (a). Was könnte die Ursache für die Differenzen sein?

Variationen:

Die Anzahl der gezogenen und die Gesamtzahl der Kugeln können variiert werden.

Lösung: $P(0Richtige) = \frac{5}{21} \approx 23,8\%$
$P(1Richtige) = \frac{15}{28} \approx 53,5\%$
$P(2Richtige) = \frac{3}{14} \approx 21,5\%$
$P(3Richtige) = \frac{1}{84} \approx 1,2\%$

9. **Laplace**

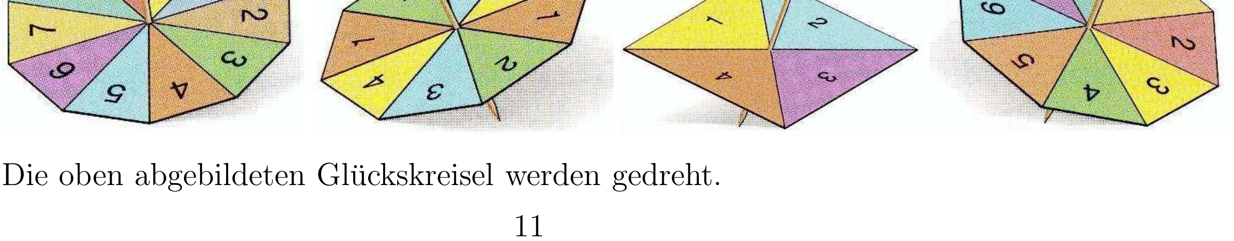
Lege die möglichen Ergebnisse fest und entscheide und begründe, ob es sich bei den folgenden Experimenten um ein Laplace-Experiment (Zufallsexperiment, bei dem alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind) handelt oder nicht.

(a) Eine Geldmünze wird geworfen.
(b) Ein Elfmeter wird geschossen.
(c) Ein Marmeladenbrot fällt vom Tisch.
(d) Ein Dartpfeil wird auf die Dartscheibe geworfen.

Überlege dir drei Experimente, die ein Laplace-Experiment darstellen und drei, die dies nicht tun!

Lösung: (a) Laplace-Experiment (wobei in der Natur kein wirkliches Laplace-Experiment existiert)
(b) kein Laplace-Experiment
(c) Laplace-Experiment
(d) kein Laplace-Experiment

10. **Glückskreisel**



Die oben abgebildeten Glückskreisel werden gedreht.

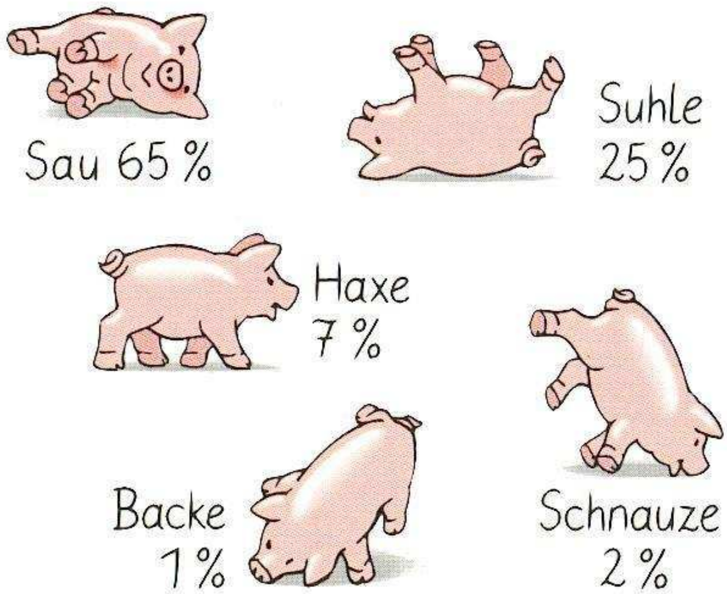
(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie im Feld „2“ liegen bleiben?
(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie auf einer geraden Zahl liegen bleiben?
(c) Für welche Glückskreisel ist das Spiel „Du gewinnst, wenn eine Primzahl kommt“ fair?
(d) Finde andere faire bzw. unfaire Spielregeln für die einzelnen Glückskreisel. Finde ggf. einen Kreisel bei dem das Spiel fair wäre.

Lösung: (a) $0,1 \quad 0,25 \quad 0,25 \quad 0,125$
(b) jeweils $0,5$

11. **Schweinerei**

Bei dem Spiel „Schweinerei“ werden Schweine geworfen. Dabei gibt es fünf Möglichkeiten, wie das Schweinchen fallen kann.

- Sau - Seitenlänge
- Suhle - Rückenlage
- Haxe - stehend
- Schnauze - auf der Schnauze
- Backe - wie Schnauze, jedoch seitlich auf einer Backe



Die Wahrscheinlichkeit für jede Lage kannst du der Abbildung entnehmen.

(a) Gib einige mögliche Ergebnisse an, wenn zwei Schweinchen geworfen werden?
(b) Bestimme für die Ergebnisse die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Lösung: Sau - Suhle $32,5\%$
Haxe - Schnauze $0,28\%$
Sau - Haxe $9,1\%$
Backe - Haxe $0,14\%$
Schnauze - Backe $0,04\%$
Sau - Sau 25%

12. **Mensch ärgere dich nicht**

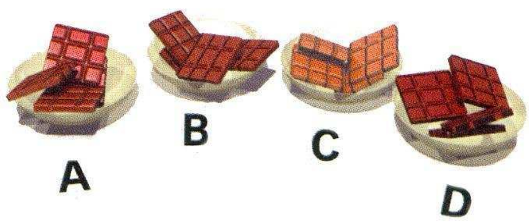
    Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der gelbe Stein beim nächsten Wurf

    (a) den grünen [bzw. den roten] Stein schlägt?
    (b) in sein Haus gelangt?
    (c) weder einen Stein schlägt noch in sein Haus gelangt?

Lösung: (a) $\frac{1}{6}$ $[\frac{1}{6}]$
(b) $\frac{1}{3}$
(c) $\frac{1}{3}$

13. **Schokolade**

    Eine Klasse führt einen Geschmackstest zur Untersuchung zweier Sorten Vollmilchschokolade durch. Dazu werden vier zufällig bestimmte Proben A, B, C und D bereitgestellt.



    (a) Zeichne ein Baumdiagramm.
    (b) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jemand zufällig mindestens drei Treffer erzielt.

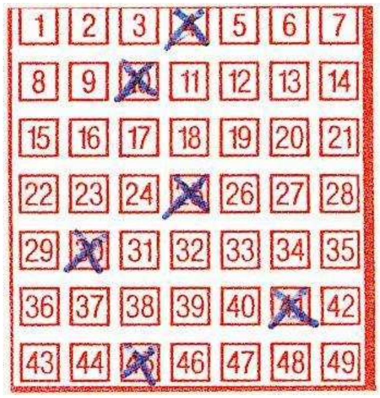
(c) Entscheide und begründe, wann man bei diesem Test von einem „guten Schmecker“ sprechen kann.

Lösung: (a) Grafik

(b) $\sim 5\%$

14. **Lotto**

Peters Lieblingszahl ist die Zahl 25. Peter schaut bei der Wochenziehung des Lottospiels 6 aus 49 zu. Dabei werden nacheinander 6 Kugeln aus einer Urne mit 49 nummerierten Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.



(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die 25 als erste Kugel der Wochenziehung gezogen wird?

(b) Begründe, warum die Wahrscheinlichkeit, dass die 25 als zweite [als dritte; als vierte,...] gezogen wird $\frac{1}{49}$ beträgt.

Lösung: (a) $\frac{1}{49}$

(b) als zweite: $\frac{48}{49}$ (nicht die 25) $\cdot \frac{1}{48}$ (als zweite die 25) $= \frac{1}{49}$

15. **Basketball**

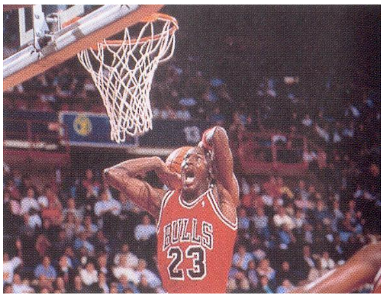
In der amerikanischen Basketball-Liga NBA wird der Meister nach der Regel „best of five“ ermittelt. Das bedeutet, wer zuerst drei von fünf Spielen gewonnen hat, ist Meister. In einem Computerspiel kommt es (leider ohne Beteiligung des Computerspieler, der ist vorher ausgeschieden) zu einem Endspiel zwischen den *Chicago Bulls* und den *Utah Jazz*. Die Bulls gewinnen, aufgrund der vorher vom Spieler eingestellten Teamstärke, dabei mit durchschnittlich 2 zu 1 jedes einzelne Spiel, d.h. von drei Spielen gewinnen die Bulls durchschnittlich zwei Spiele.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnen die Bulls den Titel? Nutze für deine Überlegungen die Möglichkeiten eines Baumdiagramms.

(b) Wie ändern sich die Chancen für die Bulls, wenn man einstellt, dass sie jedes einzelne Spiel nur noch mit der Chance 4 zu 3 gewinnen?

(c) Wie kann man die Eintragungen im Baumdiagramm überprüfen?

(d) Gib eine Regel an, mit der du mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit für den Sieg berechnen kannst.



Lösung: (a) 79%
(b) 71%

16. **Spielautomat**

Bei dem abgebildeten Spielautomaten beträgt der Einsatz pro Spiel 1 €. Gewonnen hat man bei: dreimal Eins (111): 30 €
drei gleiche Zahlen (außer 111): 10 €
Berechne den Erwartungswert. Lohnt sich das Spiel?
(Laut Gesetz müssen mindestens 60% aller Einsätze wieder ausgespielt werden.)

Lösung: 60 Cent pro Spiel

17. **Streichhölzer**

Eine Streichholzfirma stellt täglich 3.000.000 Streichholzschachteln her. Eine Stichprobe von 5000 Schachteln ergab folgende Verteilung:

Inhalt der Schachteln	36	37	38	39	40	41	42	43
Anzahl der Schachteln	12	28	238	765	2517	936	342	162

(a) Wie viele Schachteln mit der entsprechenden Anzahl Streichhölzer sind täglich zu erwarten?

(b) Wie viele Streichhölzer kann man beim Kauf von 20 Schachteln erwarten?

(c) Wie viel Prozent der Päckchen enthalten demnach mindestens 39 Streichhölzer?

(d) Wie viel Prozent der Päckchen enthalten mehr als 39, aber weniger als 42 Streichhölzer?

Lösung: (a)

Inhalt	Anzahl
36	7200
37	16800
38	142800
39	459000
40	1510200
41	561600
42	205200
43	97200

(b) 803 Streichhölzer

(c) etwa 94%

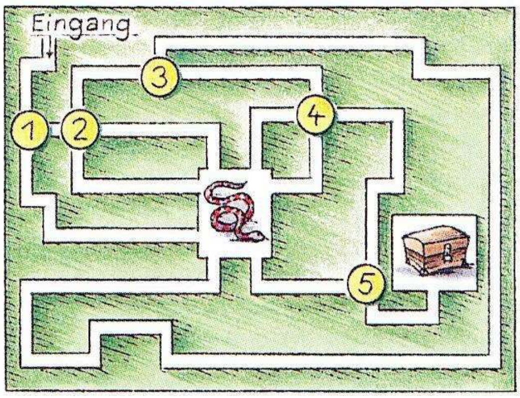
(d) etwa 69%

18. **Gefährliche Schatzsuche**

In einem Labyrinth wird ein wertvoller Schatz aufbewahrt, der durch eine Grube voller Schlangen gesichert wird. Ihr Biss ist für jeden Schatzjäger absolut tödlich.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Schlangen zu entkommen und den Schatz zu finden? Die Zahlen stehen dabei für die Kreuzungen.

(b) Entwirf ein eigenes Labyrinth mit eigenen Fallen und bestimme die Wahrscheinlichkeit den Schatz zu finden.



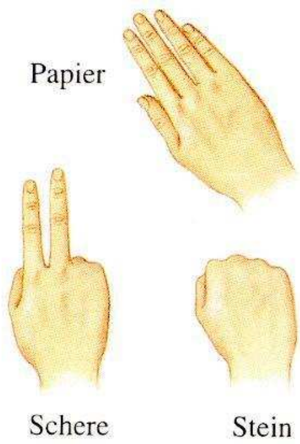
Lösung: (a) $\sim 1,4\%$

19. **Stein-Schere-Papier**

Bei dem Spiel „Stein-Schere-Papier“ knobeln Jean und Ben gegeneinander. Es gilt: Schere schlägt Papier, Stein schlägt Schere, Papier schlägt Stein. Gleiche Ergebnisse zählen nicht. Wer zuerst seinen Gegner dreimal schlägt, hat gewonnen.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ben gewinnt?

(b) Nach der ersten Schritt liegt Jean in Führung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ben noch gewinnt?



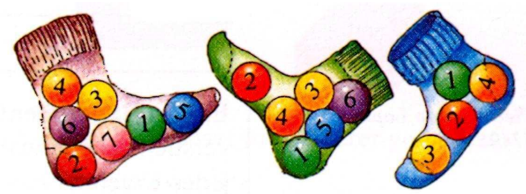
Lösung: (a) 50%

(b) $100\% - 68,75\%$ [Jean] $= 31,25\%$ [Ben]

20. **Urnenziehung: Zahlen**

(a) Welche Wahrscheinlichkeit hat die Zahl „3“ bei den Urnen in der Abbildung?

(b) Lina zieht 75-mal aus der Urne 1, dabei wird jede gezogene Kugel vor dem nächsten Zug zurückgelegt. Wie oft wird sie etwa in den 75 Versuchen die „3“ erwischen?



Lösung: (a) $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{4}$

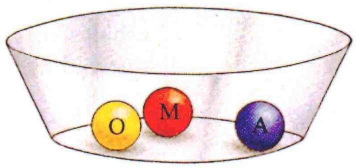
(b) ca. 11-mal

21. **Urnenziehung: Buchstaben**

In einer Urne liegen drei Kugeln mit Buchstaben, sie werden nacheinander gezogen und hintereinander gelegt.

(a) Schreibe alle „Wörter“ auf, die dabei entstehen können.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit entsteht das Wort OMA?



Lösung: (a) 6 verschiedene

(b) $\frac{1}{6}$

22. **Schaltjahr-Geborene**

Bestimme mit einer Laplace-Annahme die Wahrscheinlichkeit, dass jemand, der nicht in einem Schaltjahr geboren ist,

(a) am 12. Januar

(b) am 24. Dezember

(c) am 29. Februar

(d) im April

(e) an einem Monatsersten

(f) an einem Datum deiner Wahl

Geburtstag hat.

Lösung: (a) $\frac{1}{365}$

(b) $\frac{1}{365}$

(c) 0

(d) 0

23. **Laplace: ja oder nein?**

Welche der folgenden Laplace-Annahmen sind gerechtfertigt, welche sind nur annähernd gerechtfertigt, welche sind eindeutig falsch?

(a) Es gibt 12 Monate, also ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand im Januar Geburtstag hat, $\frac{1}{12} \approx 8,3\%$.

(b) Es gibt 7 Wochentage, also ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig herausgegriffene Person in diesem Jahr an einem Sonntag Geburtstag hat, $\frac{1}{7} \approx 14,3\%$.

(c) Es gibt 7 Wochentage, also ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Advent dieses Jahr auf einen Montag fällt, $\frac{1}{7} \approx 14,3\%$.

(d) Jeder Knopf hat zwei Seiten. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass er auf die Oberseite fällt, 50%.

Lösung: (a) naja
(b) ja
(c) nein
(d) nein

24. **Warten auf die Sechs**

Beim Mensch-ärgere-Dich-nicht darf man bei einer Sechs starten. Man hat bis zu drei Versuche. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Start gelingt?

Lösung: $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \approx 42,1\%$

25. **Pasch-Wahrscheinlichkeit**

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Würfeln mit zwei Würfeln einen Pasch zu bekommen?

Lösung: $\frac{1}{6}$

26. **Treffer-Wahrscheinlichkeit**

Beim Basketball trifft Mag mit Wahrscheinlichkeit 40%, Wim mit 70%. Sie werfen nacheinander. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie zusammen $0, 1$ oder 2 Treffer erhalten?

Lösung: $0 : 0,6 \cdot 0,3 = 0,18$
$1 : 0,6 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,3 = 0,54$
$2 : 0,4 \cdot 0,7 = 0,28$

27. **Siedler von Cartan**

Beim Spiel „Die Siedler von Catan“ muss man seine Siedlungen an besonders ertragreiche Felder bauen. Die Felder sind von 2 bis 12 durchnummeriert und die Auszahlung des Rohstoffs wird fällig, wenn die Summe eines Wurfes mit zwei Würfeln gleich der Feldnummer ist. An welche Felder sollte man bauen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe gleich $1, 2, 3, ..., 11, 12$ ist?

Quellen: MatheNetz 8 (2000), MatheLive 8 (2001), Lambacher Schweitzer 8 (1996), Schnittpunkt 8 (1994), Mathematik heute 8 (1995), Zahlen und Größen 8 (2000), Mathematik 8 (1994), Die Welt der Zahl (1994), Elemente der Mathematik 8 (1994), Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sek. I (2001).

Lösung: Klar, je nach der Anzahl der Möglichkeiten diese Augensumme zu erzielen

28. **Kniffel**

Kniffel ist ein geschicktes Kombinationsspiel mit 5 Würfeln. Jeder Spieler, der an der Reihe ist, gibt zunächst alle 5 Würfel in den Würfelbecher, schüttelt ihn und rollt die Würfel heraus. Je nach Ausfall dieses ersten Wurfes entscheidet der Spieler, ob er alle Würfel oder nur einen Teil wieder aufnimmt und erneut würfelt. So kann ein ungünstiger erster Wurf mit Glück beim zweiten oder maximal dritten Würfeln zu einem optimalen Ergebnis führen.

Kniffel
Gewinnkarte

Schmidt International

Name ________________________

		1. SPIEL	2. SPIEL	3. SPIEL	4. SPIEL	5. SPIEL	6. SPIEL
1er	nur Einser zählen						
2er	nur Zweier zählen						
3er	nur Dreier zählen						
4er	nur Vierer zählen						
5er	nur Fünfer zählen						
6er	nur Sechser zählen						
gesamt	→						
Bonus bei 63 oder mehr	plus 35						
gesamt oberer Teil	→						
Dreierpasch	alle Augen zählen						
Viererpasch	alle Augen zählen						
Full-House	25 Punkte						
Kleine Straße	30 Punkte						
Große Straße	40 Punkte						
Kniffel	50 Punkte						
Chance	alle Augen zählen						
gesamt unterer Teil	→						
gesamt oberer Teil	→						
Endsumme	→						

SCHMIDT SPIEL + FREIZEIT GMBH

Die Zählliste enthält dreizehn Rubriken (siehe nebenstehende Abbildung). In der oberen Abteilung können die Einser, ..., bis zu den Sechsern eingetragen werden. In der unteren Abteilung gibt es den Dreier- und Viererpasch (drei bzw. vier gleiche Zahlen), Full House (bestehend aus einem Dreier- und einem Zweierpasch), der kleinen und großen Straße (Folge von vier bzw. fünf Würfeln mit aufeinanderfolgender Augenzahl), dem Kniffel (Fünferpasch) und der Chance (hier werden keinerlei

Bedingungen an den Wurf geknüpft).
Spielziel ist es, das höchste Punktergebnis von allen Mitspielern zu erreichen.
Zunächst wird nur der erste Wurf aus 5 Würfeln betrachtet. Bestimmt die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten folgender Ereignisse:

(a) Dreierpasch aus „Zweien"

(b) Beliebiger Dreierpasch

(c) Viererpasch

(d) Kniffel

(e) Große Straße

(f) Kleine Straße

Lösung: Jeweils „Günstige durch Mögliche", wobei die Anzahl der Möglichen $6^5 = 7776$ beträgt

(a) Anzahl der „Günstigen": $\binom{5}{3} \cdot 5 \cdot 4 = 200$, also Gewinnwahrscheinlichkeit $\approx 0,026$
wobei:$\cdot 5 \cdot 4$ nur bei versch. Augenzahlen
$+5$ falls auch identische Augenzahlen (also Full House)
$\cdot 6 \cdot 6$ falls auch Vierer-/Fünferpasch/Full House erlaubt

(b) Anz. „Günstige": $6 \cdot 200 = 1200$ also Gewinnwahrscheinlichkeit $\approx 0,154$
wobei: siehe Bemerkungen zu Teilaufgabe (a)

(c) Anz. „Günstige": $6 \cdot \binom{5}{4} \cdot 5 = 150$ also Gewinnwahrscheinlichkeit $\approx 0,019$
wobei: $\cdot 6$, wenn auch 5er-Pasch erlaubt ist

(d) Anz. „Günstige": 6 also: Gewinnwahrscheinlichkeit $\approx 0,001$

(e) Anz. „Günstige": $5! \cdot 2 = 240$ also Gewinnwahrscheinlichkeit $\approx 0,031$

(f) Anzahl „Günstige": $4! \cdot 4 + 4! \cdot 5 = 336$ also Gewinnwahrscheinlichkeit $\approx 0,043$
wobei Anzahl „Günstige" gleich $4! \cdot 6 \cdot 3$, wenn auch große Straße erlaubt

29. **Würfeln**

Wirf einen Würfel, bis sich eines der sechs möglichen Ereignisse wiederholt.
Notiere die Anzahl der notwendigen Würfe bis zur ersten Wiederholung.
Welcher Mittelwert für die Anzahl der notwendigen Würfe ergibt sich bei 50 Versuchsserien?

Quelle: Elemente 12/13 (2000)

30. **Platonische Körper**

Wirf einen regulären Oktaeder (Dodekaeder, Ikosaeder), bis sich eines der $8(12, 20)$ möglichen Ereignisse wiederholt.
Welcher Mittelwert für die Anzahl der notwendigen Versuchsdurchführungen bis zur ersten Wiederholung eines Ergebnisses ergibt sich bei 50 Versuchsserien?

31. **Das Geburtstagsproblem**

23 Personen werden zufällig ausgewählt. Lohnt es sich darauf zu wetten, dass unter diesen mindestens zwei sind, die am gleichen Tag Geburtstag haben?

(a) Schätzt zunächst, ob sich eine solche Wette lohnt.

(b) Was könnte diese Aufgabe mit den obigen beiden Aufgaben zu tun haben? Versucht diesen Zusammenhang zu erläutern.

(c) Versucht zu begründen, warum die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei der 23 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben, gleich $1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 343}{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 365}$ ist.

32. **Entenfeier**

Im Hause der Familie Duck halten sich n Enten zu einer Familienfeier auf. Eine muss trotz des scheußlichen Regens hinaus und den Erbonkel Dagobert mit dem Schirm abholen. Donald Duck hält n Streichhölzer in der Hand, eins davon ist gekürzt. Wer dieses zieht, muss hinaus in den Regen.

(a) Soll Trick als erster ziehen, als letzter oder mehr so in der Mitte? Berechnet die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten und nehmt dann Stellung zu Daisys Aussage: „Die ersten und die letzten, die ziehen, haben die besten Chancen, nicht hinaus zu müssen, denn zu Beginn sind noch alle langen Hölzchen da, und bis zum Ende wird wohl kaum gezogen werden, da schon vorher jemand das kurze Streichholz gezogen haben wird. Die in der Mitte sind am schlechtesten dran, weil nur noch etwa die Hälfte der langen Hölzchen da sind und dadurch die Chancen zu verlieren viel größer sind.“

(b) Wenn nur noch Trick und Track im Raum sind, weil alle anderen damit beschäftigt sind, den mit Wasser vollaufenden Keller zu entleeren, wird folgendes Verfahren vereinbart: Trick und Track ziehen abwechselnd eines der n Streichhölzer. Wer zuerst das kurze zieht, muss hinaus in den Regen. Soll Trick jetzt anfangen oder lieber Track den Vortritt lassen?

Hinweis: Macht euch den Sachverhalt zunächst anhand von konkreten Zahlenbeispielen für n klar.

33. **Glücksspirale**

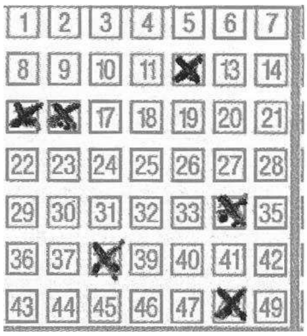
Zur teilweisen Finanzierung der Olympischen Spiele 1972 in München wurde eine Lotterie eingeführt: die Glücksspirale. Die 7-ziffrigen Glückszahlen wurden dabei wie folgt ermittelt: In einer Trommel befanden sich 70 Kugeln; auf 7 Kugeln stand die 0, auf 7 Kugeln die 1, ..., auf 7 Kugeln die 9. Aus dieser Trommel wurden 7 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und in der Reihenfolge des Ziehens zur jeweiligen Glückszahl angeordnet.

(a) Geben Sie den Ergebnisraum an. Wie viele Glückszahlen sind in ihm enthalten?

(b) Nach der ersten Ziehung gab es in der Presse Kritik, daß durch dieses Verfahren nicht alle 7-ziffrigen Glückszahlen die gleiche Gewinnchance gehabt hätten. Bestätigen oder widerlegen Sie diese Kritik. Machen Sie gegebenenfalls (falls die Kritik zutrifft) einen Vorschlag zur Verbesserung des Ziehungsverfahrens und begründen Sie Ihren Vorschlag in Form eines Briefes an die Geschäftsführung der Glücksspirale.

34. **Lottostrategie**

Zahlen unter 32 werden (wegen der Geburtstage der Tipper) beim Lottospiel 6 aus 49 häufiger angekreuzt als andere Zahlen. Im allgemeinen ist deshalb die Zahl der Gewinner um so größer, je mehr Zahlen unter 32 ausgelost werden. Sollte man also nur noch Zahlen über 32 tippen?



35. **Gezinkte Würfel**

Walter zinkt Würfel so, dass äußerlich keine Veränderung zu erkennen ist, die Wahrscheinlichkeit für „6“ aber $0,25$ beträgt. Seine Frau Trude testet die Würfel folgendermaßen: Sie würfelt zwölfmal mit jedem Würfel. Wirft Sie mit einem Würfel mehr als dreimal eine „6“, so legt sie ihn zu den gezinkten, sonst zu den idealen.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein idealer Würfel zu den gezinkten gelegt wird?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein gezinkter Würfel zu den idealen gelegt wird?

(c) Wie könnte Trude die Fehlerquote verringern?

36. **Roulette**

Beim Roulette ist in den vergangenen zehn Spielen jedesmal eine rote Zahl gezogen worden. Auf welche Farbe würdest du im elften Spiel setzen? Begründe!

37. **Froschgeschichten**

Ein Ko-Frosch sitzt auf einem Gitterpunkt eines Koordinatensystems und kann jeweils nur zum nächsten Gitterpunkt nach oben oder nach rechts springen und zwar jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$.
Beispiel: Befindet sich der Ko-Frosch auf dem Gitterpunkt $(4|3)$, dann kann er nur nach $(4|4)$ oder $(5|3)$ springen.

(a) Der Ko-Frosch sitzt auf dem Gitterpunkt $(0|0)$.

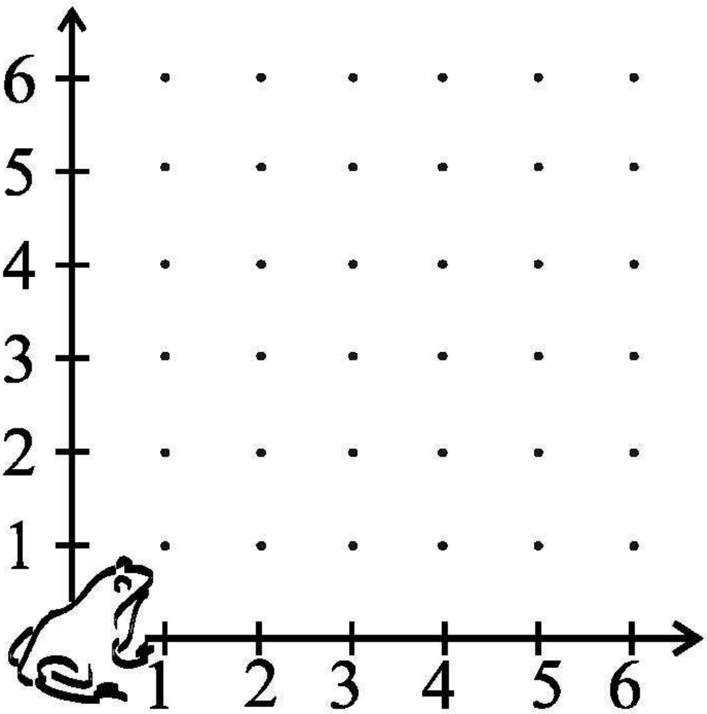
   i. Auf welchen Gitterpunkten kann er sich nach 5 Sprüngen befinden?
   ii. Wie viele Sprünge benötigt er, um den Gitterpunkt $(18|17)$ zu erreichen?
   iii. Denk dir weitere zwei weitere Fragen aus und beantworte sie.

(b) Der Ko-Frosch sitzt auf dem Gitterpunkt $(0|0)$ des Koordinatensystems und kann jeweils nur zum nächsten Gitterpunkt nach oben oder nach rechts springen und zwar jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$

   i. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht er den Gitterpunkt $(4|0)$, den Gitterpunkt $(8|1)$, den Gitterpunkt $(2|2)$?

   ii. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzt er nach 20 Sprüngen nicht auf einer Koordinatenachse?

   iii. Denk dir weitere zwei weitere Fragen aus und beantworte sie.

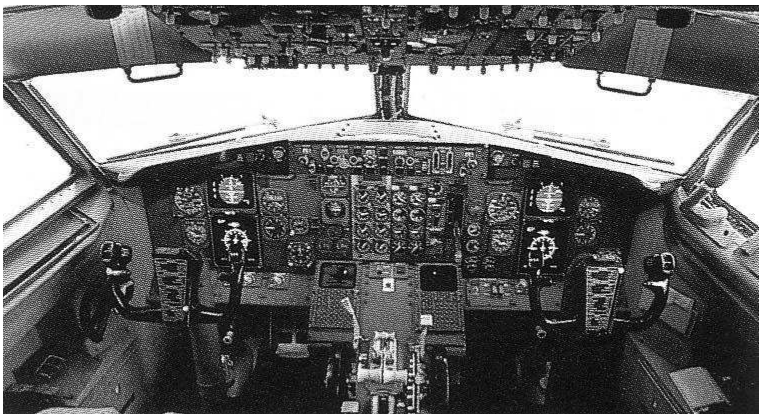


38. **Arme Ritter**

Die Ritter Kunibald, Georgius und Ottokar sind bei einer Schlacht gefangen genommen und anschließend zum Tode verurteilt worden. Der Herrscher beschließt, einen der drei per Losverfahren zu begnadigen. Der Name des Glücklichen wird streng geheim gehalten. Kunibald sagt sich: „Die Wahrscheinlichkeit, dass ich es bin, beträgt $\frac{1}{3}$.„ Er sagt dem Wärter: „Einer der beiden anderen wird sicher hingerichtet werden. Du wirst mir also nichts verraten, wenn du mir einen Mann nennst, Georgius oder Ottokar, der hingerichtet wird.“ Darauf sagt der Wärter, „Ottokar wird hingerichtet.“ Die Antwort hat Kunibald ermutigt, denn damit wird er oder aber Georgius sicher nicht hingerichtet. Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass er selbst überlebt, $\frac{1}{2}$. Hat Kunibald Recht?

39. **Falscher Alarm?**

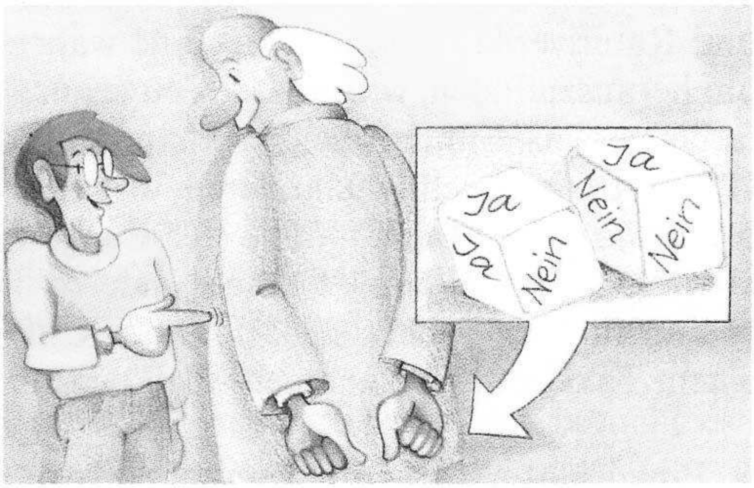
Moderne Düsenverkehrsflugzeuge verfügen über Bodenannäherungswarnanlagen, die den Piloten akustisch und optisch warnen, wenn sich das Flugzeug ungeplant dem Boden nähert. Aus langjährigen Studien haben sich ergeben:
Wenn in einer Flugminute tatsächlich eine ungeplante Bodenannäherung vorliegt, dann schlägt das System mit einer Wahrscheinlichkeit von $99,9\%$ Alarm. Wenn dagegen in einer Flugminute tatsächlich ungeplante Bodenannäherung vorliegt, so gibt das System mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,002\%$ einen falschen Alarm. Eine ungeplante Bodenannäherung ist aufgrund der hohen navigatorischen und technischen Zuverlässigkeit der Verkehrsluftfahrt sehr selten. Durchschnittlich nur in einer von zwei Millionen Flugminuten ist eine solche Bodenannäherung zu erwarten.
Wenn das System Alarm gibt, wie wahrscheinlich ist es dann, dass sich das Flugzeug tatsächlich ungeplant dem Boden nähert? Was bedeutet das Ergebnis psychologisch für den Piloten, der jederzeit über die Möglichkeit verfügt das Warnsystem auszuschalten?



40. **Ratespiel mit Würfeln**

Der Lehrer bringt zwei faire Würfel mit. Auf dem ersten Würfel sind fünf Flächen mit „Ja“ überschrieben, auf dem anderen Würfel nur zwei Flächen. Auf den restlichen Flächen steht „Nein“. Nachdem der Lehrer diese Würfel gezeigt hat, nimmt

er sie verdeckt jeweils in die eine oder die andere Hand. Peter muss nun blind nach Zufall einen Würfel auswählen, den er dann - für die Klasse verdeckt - vom Lehrer erhält.
Peter würfelt mit diesem Würfel dreimal - weiterhin für die Klasse verdeckt - und nennt als Ergebnisse: „Ja, Ja, Nein.“
Die übrige Klasse soll nun wetten, ob Peter den ersten Würfel oder den zweiten Würfel erhielt.



(a) Was tippst du? Bestimme für die beiden Würfel die Wahrscheinlichkeiten!

(b) Baut euch selber Würfel (auch mit anderen Beschriftungen) und überprüft eure vorher (!) erstellten Berechnungen!