

Trigonometrische Beziehungen

1. Vermessungen

Auf einem Hügel namens Ffynnon Garw in Wales; um die Jahrhundertwende; zwei Vermessungstechniker bei der Arbeit, zahlreiche Dorfbewohner warten gespannt auf das Ergebnis.

Pfarrer: Nun, wie hoch ist er?

Vermessungstechniker: Bitte, bitte vor uns liegen noch stundenlange Berechnungen.

2. Vermessungstechniker: Ich fürchte, Sie werden noch etwas Geduld aufbringen müssen, doch heute Abend wissen wir's. [...]

Dorftrottel: Später wissen Sie's dann. Wie denn?

2. Vermessungstechniker: Nun, wir haben Messungen vorgenommen in Bezug auf die beiden Hügel da, die Höhe [...] kennen wir schon.

Dorftrottel: Wie wurden die denn gemessen?

2. Vermessungstechniker: Auf dieselbe Art, im Vergleich zu anderen Hügeln.

Dorftrottel: Und wer hat die gemessen?

Pfarrer: Gott, mein Junge, Gott!!!?



Zitiert aus dem Film: „Der Engländer, der auf einen Hügel stieg und von einem Berg herunterkam“:

In diesem Film spielt Hugh Grant einen freundlichen Kartographen, der bei einer Landvermessung im Sommer 1917 ungewollt eine ganze walisische Kleinstadt gegen sich aufbringt. Er erklärt den Berg, auf den die Bürger so stolz sind, kurzerhand zum Hügel. Der Wirt des Ortes reagiert prompt: Der übergenaue Engländer wird gefangen gesetzt, bis der Hügel von den Bürgern um die fehlenden fünf Meter, und somit amtlich, zum 'Berg' erhöht wurde ...

Wie könnten die beiden Vermessungstechniker die Höhe des Berges gemessen haben?

Quelle: Mathematische Unterrichtspraxis 21 (2000)

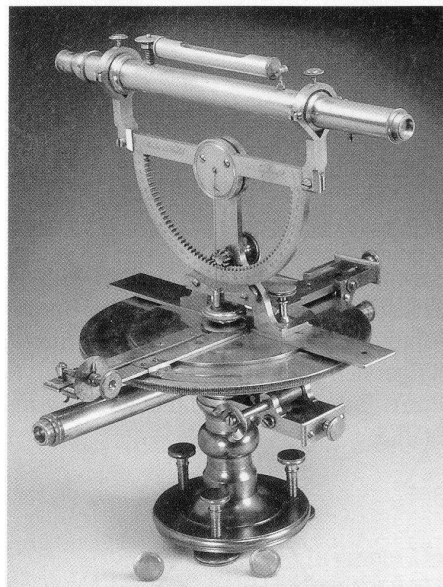
2. Historisches zum Theodolit

Seit dem 16. Jahrhundert ermöglicht die Erfindung des Theodoliten, größere Distanzen und Flächen in der Vermessungstechnik auf völlig neue Art zu bestimmen.

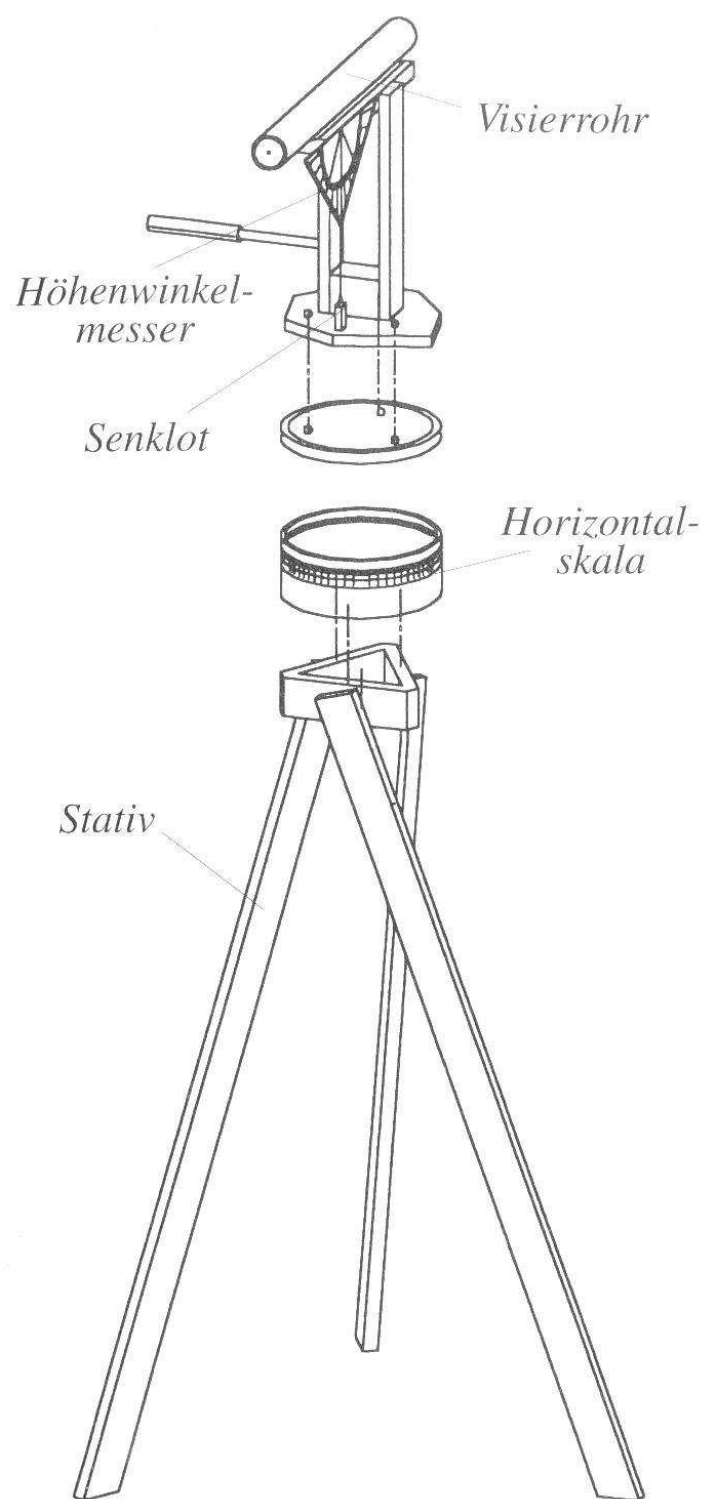
In seiner einfachen Form besteht der Theodolit aus einem Fernrohr, das man um zwei Achsen (vertikal und horizontal) drehen kann. Teilkreise mit Skalen gestatten, die Horizontalwinkel und Vertikalwinkel (Höhenwinkel) zu messen.

Zwischen Theodolit und dem Gegenstand, dessen Höhe gemessen werden soll, besteht Sichtverbindung. Mit Hilfe des Visierrohrs wird die Spitze des Objekts angepeilt. Wenn das Fadenkreuz genau auf die Spitze zeigt, kann der richtige Winkel am Höhenmesser abgelesen werden.

In den letzten Jahren wirkte sich die rasche Entwicklung der Mikroelektronik revolutionierend auf die Entwicklung der Vermessungsverfahren und Instrumente aus. Moderne Theodoliten können nicht nur vertikale und horizontale Winkel, sondern mit Hilfe von Infrarotstrahlen auch Entfernungen bis 3 km auf 2 mm genau messen. Die Messdaten werden dann per Computer ausgewertet.



- (a) Fertige zunächst eine Zeichnung an, die die Höhenmessung mithilfe eines Theodolits darstellt. Schreibe im Anschluss daran eine Gebrauchsanleitung, die einem Laien die (mathematische) Funktionsweise des Theodolits erklärt.
- (b) Baut mithilfe der nebenstehenden Skizze und der folgenden Materialliste den unten abgebildeten einfachen Theodoliten und misst die Höhe des Schulgebäudes.

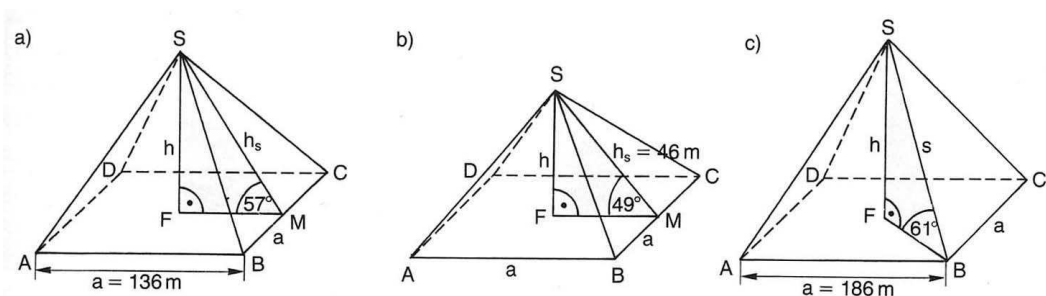




Quelle: Einblicke Mathematik 10 (2001), Klett

3. Aufgaben zur Anwendung

Berechne das Volumen und die Oberfläche der unten abgebildeten Pyramiden.

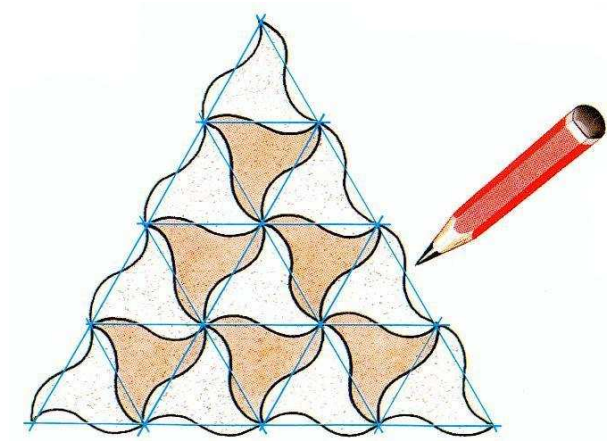


Lösung: (a) Volumen = $645577,1 \text{ m}^3$, Oberfläche = $52456,1 \text{ m}^2$
 (b) Volumen = $42157,8 \text{ m}^3$, Oberfläche = $9195,9 \text{ m}^2$
 (c) Volumen = $2736217,5 \text{ m}^3$, Oberfläche = $129399,6 \text{ m}^2$

4. Aufgaben zur Anwendung

Mit den nebenstehenden Parkettsteinen (helle und dunkle) kann man z.B. einen Fußboden lückenlos auslegen. Skizziere zunächst das Parkett mit freier Hand. Versuche nun eine Konstruktionsbeschreibung für das Parkett bzw. die Parkettsteine zu finden.

Wodurch könnte man das Aussehen der Parkettsteine verändern?



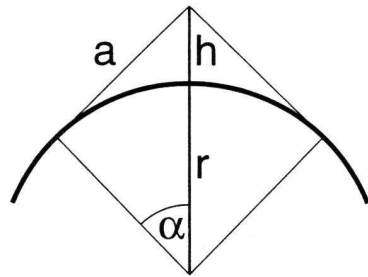
Lösung: Durch Streckung oder Stauchung der verwendeten Sinus- bzw. Cosinusfunktion.

5. Die aufgehängte Erdkugel

Stell dir vor, du hättest eine Schnur, die genau 1 m länger als der Erdumfang ist. Die Schnur werde dann so gespannt, dass sie überall den gleichen Abstand von der Erdkugel hat. Könnte eine Maus unter der Schnur hindurchkriechen?

Die um 1 m längere Schnur wird wieder um die Erde herumgelegt, diesmal aber an einer Stelle soweit wie möglich von der Erdoberfläche abgezogen. Wie weit kann man die Schnur abheben?

In der Literatur finden sich verschiedene Lösungen. Vergleiche und bewerte!



Gegeben $u = 40.000.000 \text{ m}$ somit $r = 6.366.197,7 \text{ m}$. Gesucht: h .

Lösung:

$$(1) h + r = \frac{r}{\cos \alpha} \Leftrightarrow h = \frac{r}{\cos \alpha} - r$$

Ermitteln von α

$$(2) \tan \alpha = \frac{a}{r}$$

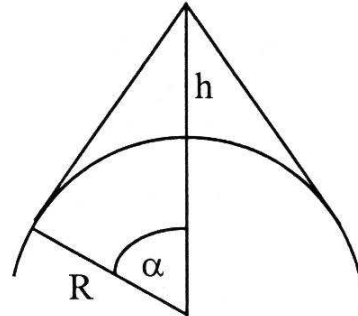
$$(3) a = r \cdot \alpha + 0,5 \text{ m}$$

Aus (2) und (3) folgt:

$$(4) \tan \alpha = \frac{r \cdot \alpha + 0,5 \text{ m}}{r} \Leftrightarrow \tan \alpha - \alpha = \frac{0,5 \text{ m}}{r}$$

Mit Hilfe des Befehls SOLVE liefert der TI92 mehrere Lösungen dieser Gleichung (Periodizität der Tangensfunktion!). Es kommt aber nur der Wert $\alpha = 0,006167$ in Frage, da weder negative Lösungen noch solche, die größer als π sind, für die Aufgabe relevant werden.

(5) Aus (1) und (4) folgt: $h = 121,4144 \text{ m}$. [...] Diese Ergebnis dürfte den Schülerinnen und Schülern ziemlich unglaublich erscheinen. (Auch ich selbst war zunächst sehr im Zweifel.) [...]



$$U = 2\pi R + 1$$

$$U = 2(\pi - \alpha) \cdot R + 2R \cdot \tan \alpha$$

Eliminiert man hieraus U , dann ergibt sich die Gleichung:

$$1 = 2R \cdot (\tan \alpha - \alpha)$$

Für die Bestimmung einer Näherungslösung dieser Gleichung kann man in der 10. Klasse dann das Computeralgebrasystem verwenden. Aus α lässt sich anschließend leicht die Höhe h bestimmen:

$$\cos \alpha = \frac{R}{R+h} \Leftrightarrow h = \frac{R}{\cos \alpha} - R$$

Es ergibt sich als Lösung übrigens eine Höhe von ca. 12 m. Die in Schüleraugen verblüffend große Höhe muss nun im Nachhinein begründet werden [...].

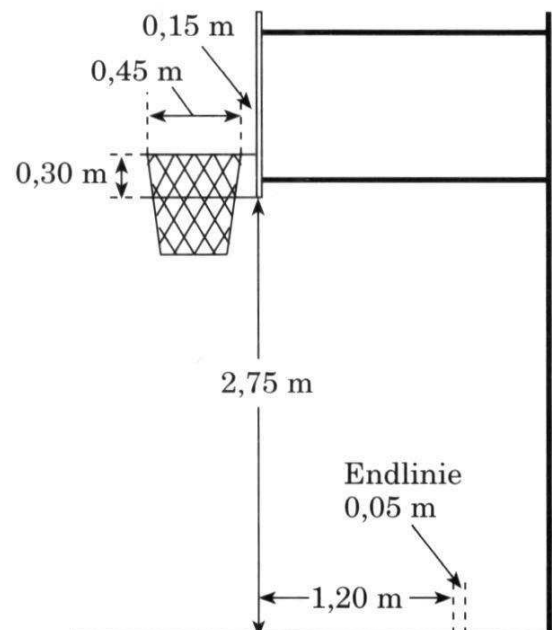
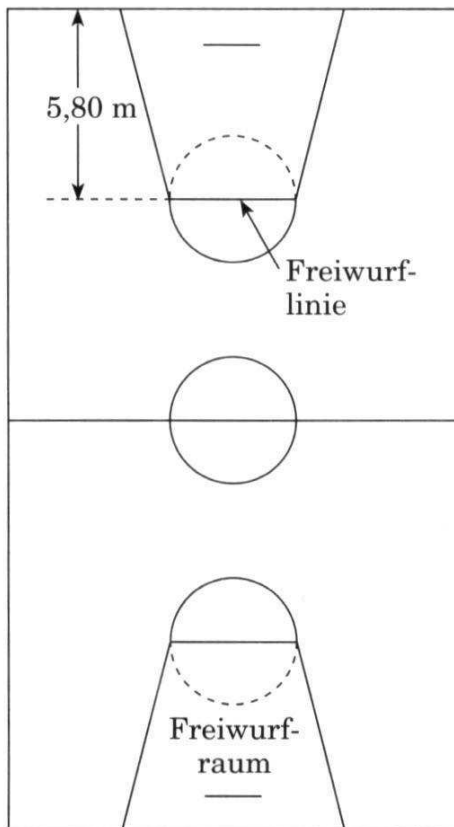
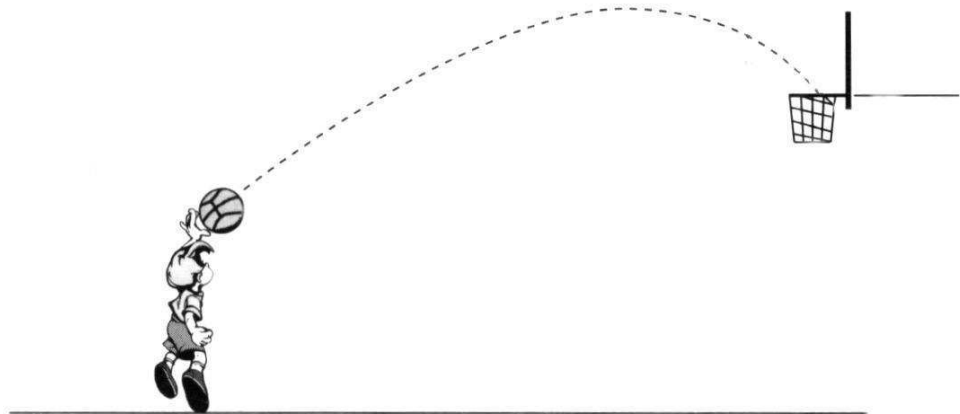
Quellen: Math. Unterrichtspraxis (2000), H. 1, S. 31-35; Istron Bd. 6 (2000), S. 14-24

Lösung: Die Rechnung in der linken Spalte ist korrekt, die in der rechten Spalte ein schönes Beispiel für den unreflektierten Einsatz eines Computeralgebrasystems: $(\tan \alpha - \alpha = \frac{1}{2R})$ ist viel zu klein, um daraus α einigermaßen genau zu bestimmen.

6. Basketball

„Wie muss man den Basketball beim Freiwurf werfen, damit er im Korb landet?“ Um sich darüber Klarheit zu verschaffen, ist es hilfreich, folgende Fragen zu beantworten:

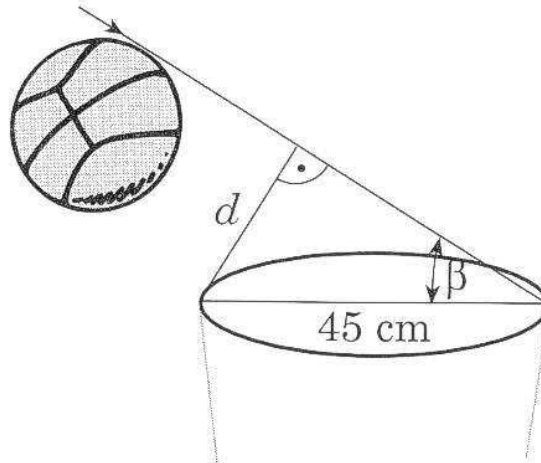
- (a) Wie groß muss der Einfallswinkel beim Korbwurf mindestens sein, damit der Ball ungestört (ohne Berührung des Korbringes) und auf direktem Wege (ohne Verwendung des Spielbretts) ins Netz fallen kann?
- (b) Bei einem erfolgreichen Korbwurf geht idealerweise der Mittelpunkt des Balles durch den Mittelpunkt des Korbringes. Aber auch bei Abweichung von der Ideallinie ist ein erfolgreicher Wurf möglich. Wie groß darf die Abweichung sein?
- (c) Wie groß darf die seitliche Winkelabweichung? (d.h. nach links oder rechts) sein?



Daten gemäß den offiziellen Basketballregeln

- Der innere Durchmesser des Korbrings beträgt 45 cm, maximal 45,7 cm (kleine Unterschiede je nach Hersteller).
- Der Umfang des Balls darf nicht weniger als 75 cm und nicht mehr als 78 cm betragen.

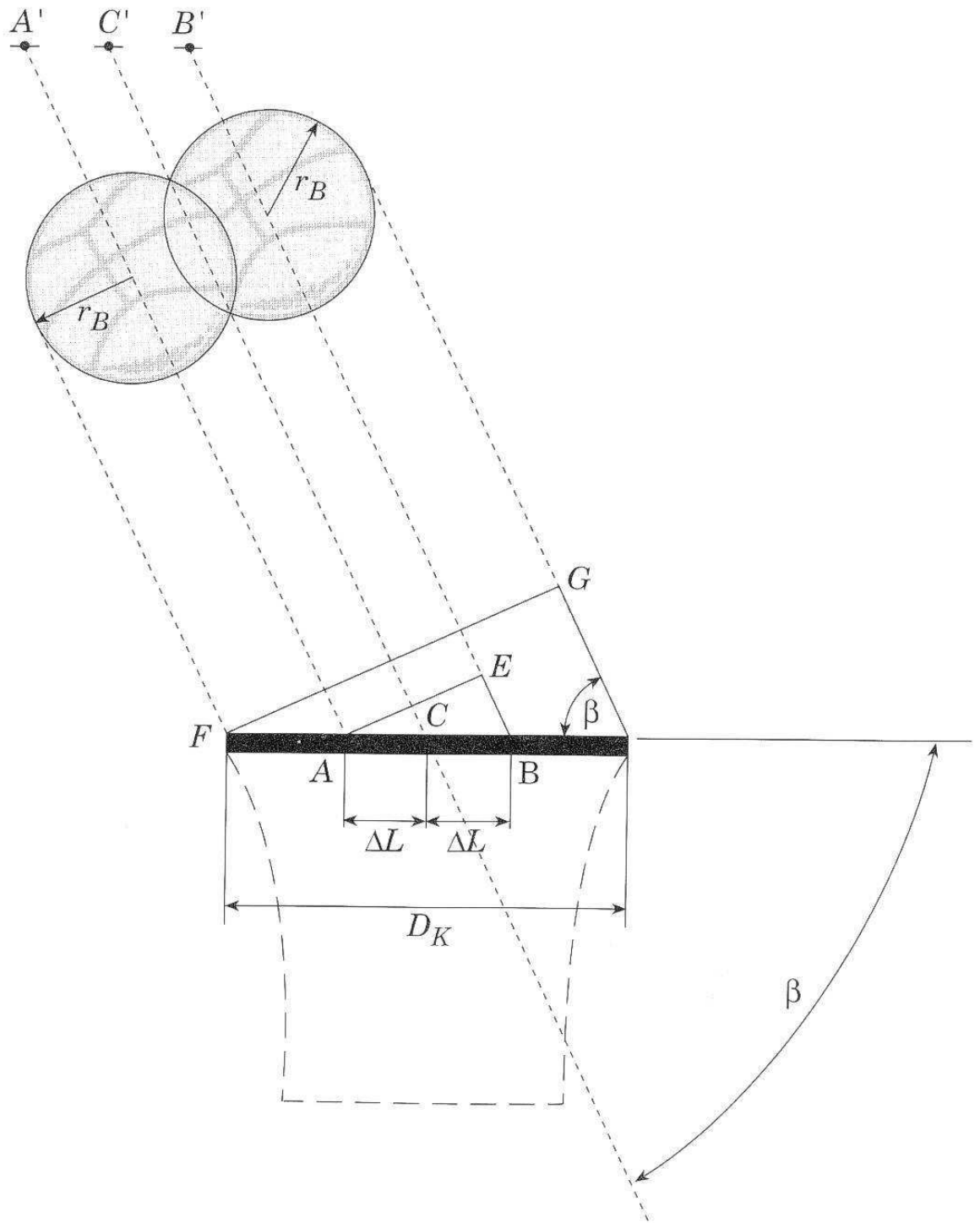
- Lösung:* (a) Das Maß des Einfallswinkels nennen wir β . Den Durchmesser des Balles nennen wir D_B . Wir lassen D_B zunächst variabel. Nach der nebenstehenden Abbildung gilt dann: $\sin \beta = \frac{d}{45 \text{ cm}}$. Wegen $d \geq D_B$ muss also gelten: $\sin \beta \geq \frac{D_B}{45 \text{ cm}}$. Nach den offiziellen Basketballregeln gilt für den Umfang U_B des Balles: $75 \text{ cm} \leq U_B \leq 78 \text{ cm}$. Daraus ergibt sich für D_B : $\frac{75 \text{ cm}}{\pi} \leq D_B \leq \frac{78 \text{ cm}}{\pi}$, also $23,8 \dots \text{ cm} \leq D_B \leq 24,8 \dots \text{ cm}$. Für einen Ball mit dem kleinstmöglichen Umfang erhalten wir demnach: $\beta \geq 32,0^\circ$ ($\beta \leq 90^\circ$). Für einen Ball mit dem größtmöglichen Umfang ergibt sich: $\beta \geq 33,5^\circ$ ($\beta \leq 90^\circ$).



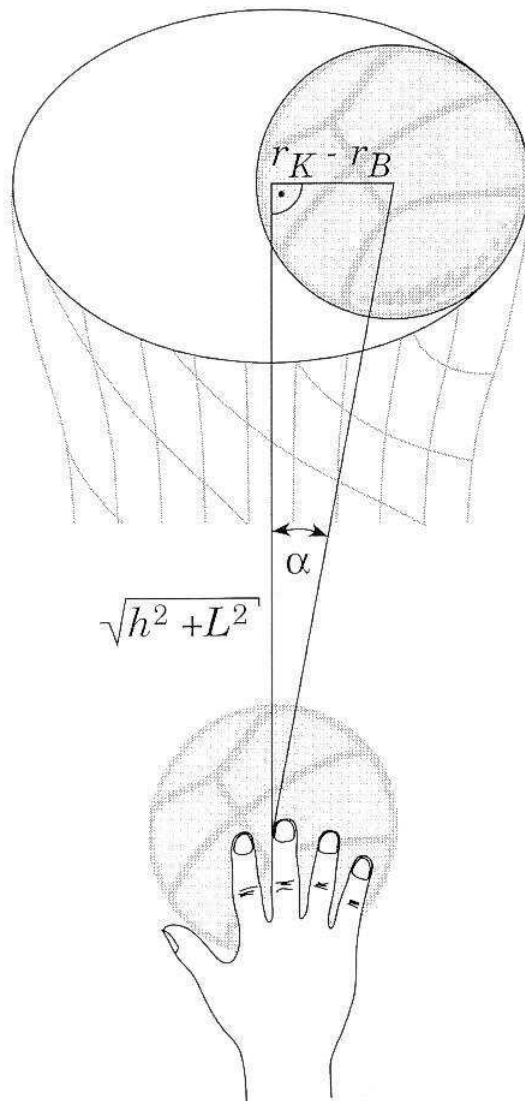
- (b) $\triangle L$ (siehe Skizze) ist vom Einfallswinkel β abhängig. Es gilt (D_K ist der innere Durchmesser des Korbringes: $\sin \beta = \frac{|FG|}{D_K} = \frac{|AE|}{2 \cdot \triangle L}$ und $|AE| = |FG| - 2r_B$. Daraus ergibt sich: $2 \cdot \triangle L = \frac{|AE|}{\sin \beta} = \frac{|FG| - 2r_B}{\sin \beta} = \frac{D_K \cdot \sin \beta - D_B}{\sin \beta} = D_K - \frac{D_B}{\sin \beta}$ also
- (1) $\triangle L = \frac{1}{2}(D_K - \frac{D_B}{\sin \beta})$. Wir argumentieren: Je größer β , desto größer $\sin \beta$, desto kleiner $\frac{1}{\sin \beta}$, desto kleiner $\frac{D_B}{\sin \beta}$, desto größer $D_K - \frac{D_B}{\sin \beta}$, also auch desto größer $\triangle L$. $\triangle L$ ist am größten, wenn β am größten ist, nämlich wenn $\beta = 90^\circ$ beträgt. Dann gilt: $\triangle L = \frac{1}{2}(D_K - D_B) = r_K - r_B$.
- Im Folgenden legen wir für D_K das arithmetische Mittel von 75 cm und 78 cm zugrunde (also 76,5 cm) und verwenden $D_B = 24,4 \text{ cm}$. Unter dieser Annahme berechnen wir für $\triangle L$ die verschiedenen Werte von β :

β	$\triangle L$
45°	5,2 cm
60°	8,4 cm
75°	9,9 cm
90°	10,3 cm

Indem wir in der Gleichung (1) $\triangle L = 0$ setzen und den zugehörigen Winkel β geeignet interpretieren, erhalten wir natürlich auch eine Antwort auf die erste Problemstellung: $D_K - \frac{D_B}{\sin \beta}$ führt zu $\sin \beta = \frac{D_B}{D_K}$.



- (c) Das Maß des Winkels der maximal möglichen seitlichen Abweichung bezeichnen wir mit α . Es gilt: $r_K - r_B = 22,5 \text{ cm} - 12,2 \text{ cm} = 10,3 \text{ cm}$. Gemäß der nebenstehenden Abbildung ergibt sich: $\tan \beta = \frac{10,3 \text{ cm}}{\sqrt{h^2 + L^2}}$.

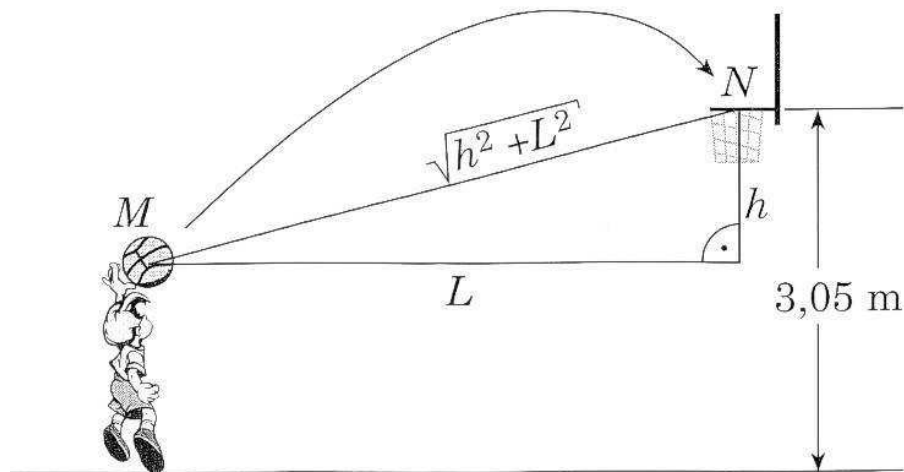


Ansicht von vorne oben

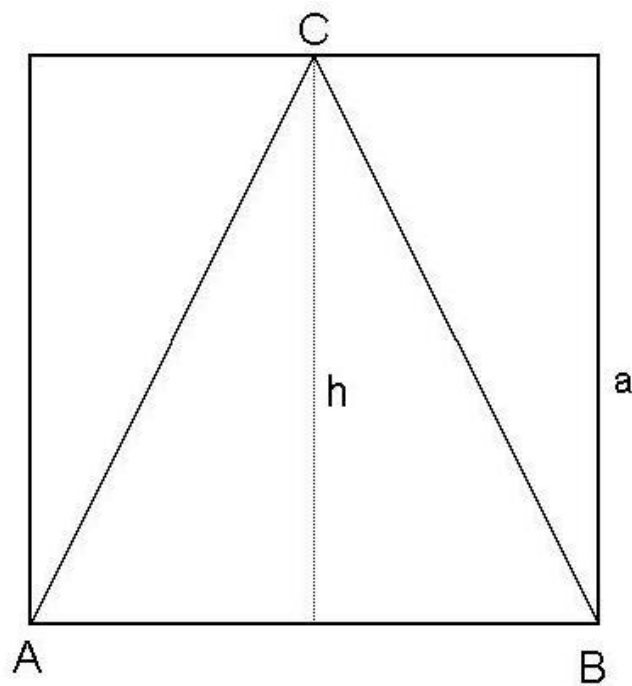
Lassen wir L konstant, so gilt: Je größer ein Basketballspieler ist, desto kleiner ist h , desto größer ist $\tan \alpha$.

Lassen wir h konstant, so gilt: Je weiter ein Basketballspieler vom Korb entfernt ist, das heißt je größer L ist, desto kleiner ist $\tan \alpha$ und damit auch α . Wir berechnen einige Werte von α :

h	L	α
70 cm	423 cm Freiwurf	1,38°
90 cm	423 cm	1,36°
130 cm	423 cm	1,33°
90 cm	200 cm	2,69°
90 cm	600 cm	0,97°



7. Dreiecke im Quadrat



Oben abgebildet siehst du ein Dreieck, dass in ein Quadrat „eingepasst“ wurde.

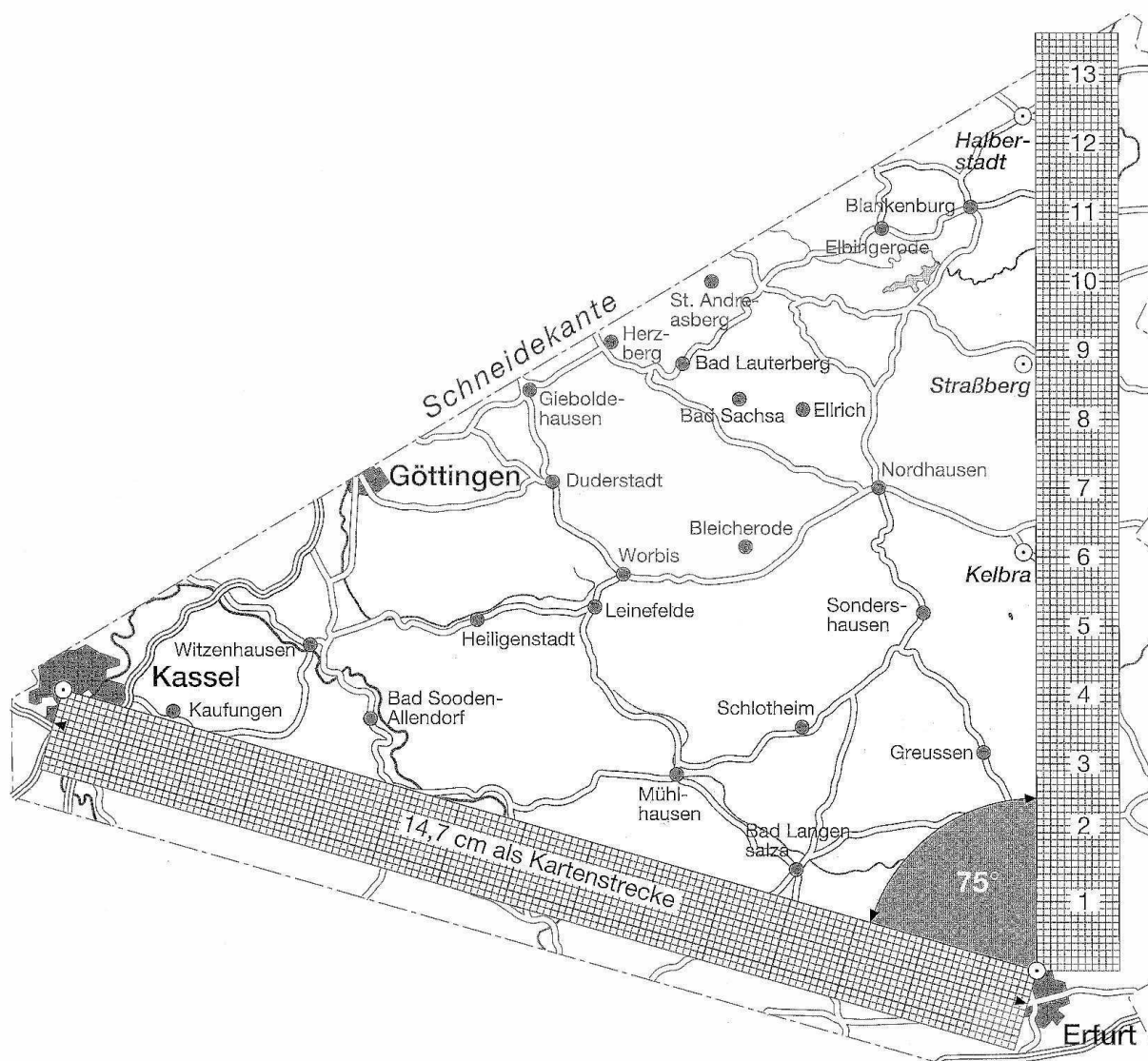
- Mache möglichst viele (mindestens 5) mathematische Aussagen über die Figuren (z.B. über Flächeninhalte, Winkel, ...).
- Verschiebe den Punkt C auf der Höhenlinie h so, dass das entstehende Dreieck $\triangle ABC'$ gleichseitig ist. Wie groß ist dann h' ? Beantworte die Frage mit und ohne Trigonometrie!
- Wie viel Prozent der Gesamtfläche nimmt das neue Dreieck ein?

- Lösung:*
- Das Dreieck ist gleichseitig, also sind alle Winkel 60° und es gilt $\tan 60^\circ = \frac{2h'}{a}$. Wegen $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ folgt: $h' = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.
 - Eine weitere Lösungsmöglichkeit: Die Kantenlänge des Quadrats ist a . Dann soll für das Dreieck laut Pythagoras gelten: $(\frac{1}{2}a)^2 + h'^2 = a^2$. Daraus folgt dann die Lösung für h' und somit kann das gleichseitige Dreieck gezeichnet werden.

8. Entfernungsberechnung

Klebe die folgende Karte auf ein Stück Pappe und schneide die Kerben (auf der rechten Seite und bei Kassel) ein.

Spanne dann ein Gummiband durch die Kerbe bei Kassel und einer Kerbe auf der rechten Seite



Berechne die Luftlinienentfernung von der Stadt Kassel zu einigen anderen Städten!

- (a) Bestimme die reale Entfernung von Kassel nach Erfurt.
- (b) Bestimme die Entfernung zu 3 weiteren Städten, indem du das Gummi auf der rechten Seite in die Kerben einspannst.
- (c) Beurteile das Verfahren.

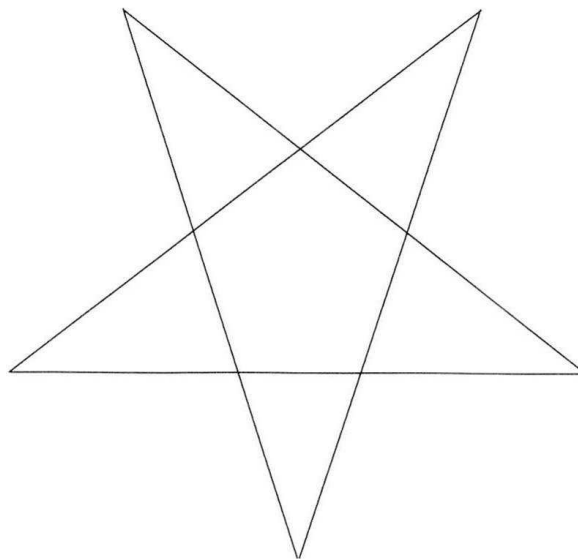
Quelle: Trigonometrie, 10. Schuljahr (1999), Cornelsen

9. Stern

Ein fünfzackiger Stern, wie abgebildet, soll völlig symmetrisch sein (alle fünf Linien sind gleich lang und alle gleichartigen Innenwinkel gleich groß).

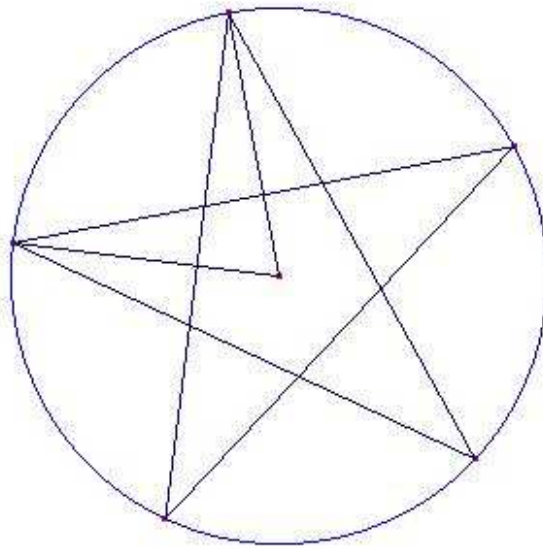
Die Gesamtlänge der Linien sei 1000 mm, d.h. dass bei der Zeichnung des Sterns ein Bleistift ohne das Papier zu verlassen 1000 mm zurückgelegt hat.

Wie groß ist der Abstand von einer Sternspitze bis zum Mittelpunkt des Sterns?



Quelle: Fich, O.: Mathelogik

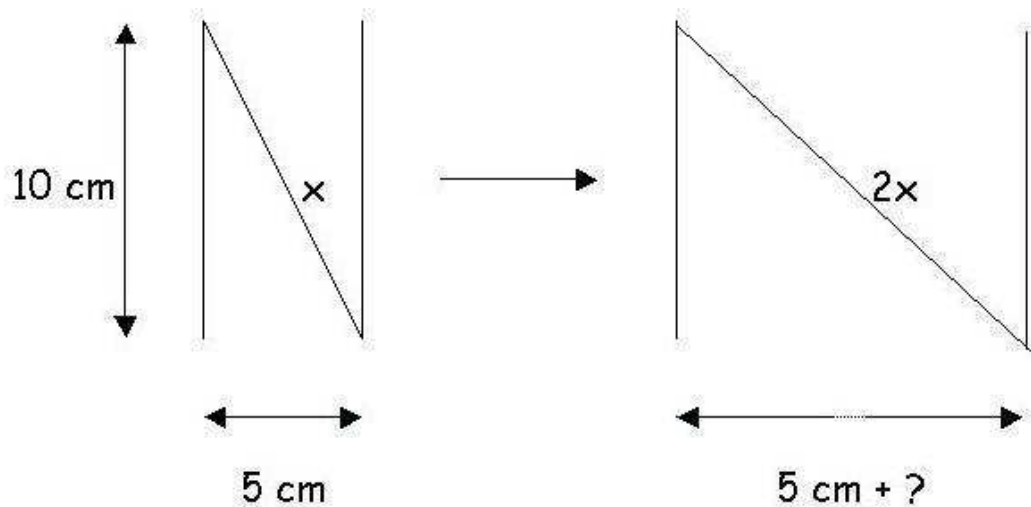
Lösung: Von jeder Sternspitze gehen zwei Linien aus. Wenn man sich vorstellt, dass der Stern von einem Kreis umgeben ist, bei dem die fünf Sternspitzen genau auf dem Kreisrand liegen, wird deutlich, dass der Winkel zwischen den beiden Linien der Sternspitze 36 Grad betragen muss (Umfangswinkelsatz oder Winkelsumme). Zeichnet man eine Linie von einer Sternspitze zum Mittelpunkt des Sterns und eine Linie vom Zentrum des Sterns rechtwinklig zu einer der beiden Linien von der Sternspitze, erhält man ein rechtwinkliges Dreieck, bei dem man den Abstand von einer Sternspitze zum Mittelpunkt folgendermaßen berechnen kann: $s = \frac{1000 \text{ mm}}{\cos 18^\circ} = 105 \text{ mm}$.



10. Buchstaben-Geometrie

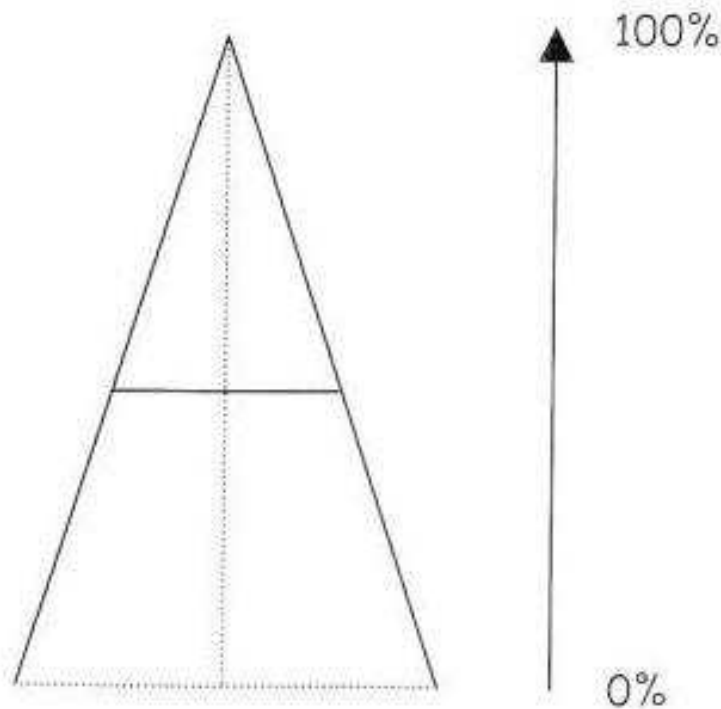
Einige Buchstaben sind hervorragende Repräsentanten für die Geometrie. Schauen wir uns z.B. den Buchstaben N an - er besteht aus zwei senkrechten Linien und einer schrägen Linie. Der Buchstabe ist ca. doppelt so hoch wie breit. Wir nehmen eine Breite von 5 cm an. Damit beträgt die Höhe 10 cm.

- (a) Wenn wir uns vorstellen, dass die linke senkrechte Linie sich nicht bewegt, während sich die rechte senkrechte Linie von der feststehenden Linie fortbewegt - wie weit muss diese Linie verschoben werden, damit sich die Länge der schrägen Linie (siehe Abbildung) verdoppelt?



- (b) Wenn wir die senkrechte Linie weiter parallel verschieben, so dass sich die Länge der schrägen Linie wiederum verdoppelt (d.h. eine Vervielfachung im

Vergleich zur ursprünglichen Linie) - muss die Linie dann im Vergleich zur ersten Verschiebung um mehr oder um weniger verschoben werden?



Schauen wir uns jetzt einmal den Buchstaben A an - er besteht aus zwei schrägen Linien und einem Querstrich. Wir nehmen an, dass der Winkel zwischen den beiden Schräglinien 30° beträgt. Wenn wir uns jetzt vorstellen, dass die beiden „losen“ Enden der beiden Schräglinien mit einer geraden Linie verbunden werden, so bilden diese ein Dreieck (siehe Abbildung). Der Querstrich des Buchstaben A teilt das Dreieck in zwei Bereiche. Wir zeichnen eine Hilfslinie in Form einer Senkrechten vom höchsten Punkt zur Grundlinie.

- (c) Wenn wir den unteren Punkt der Hilfslinie mit 0% bezeichnen und den obersten Punkt mit 100%, bei welchem Prozentsatz muss dann der Querstrich die Hilfslinie schneiden, wenn die beiden Flächen (geteilt durch den Querstrich des A's) gleich groß sein sollen?
- (d) Wie lang ist der Querstrich in diesem Fall?

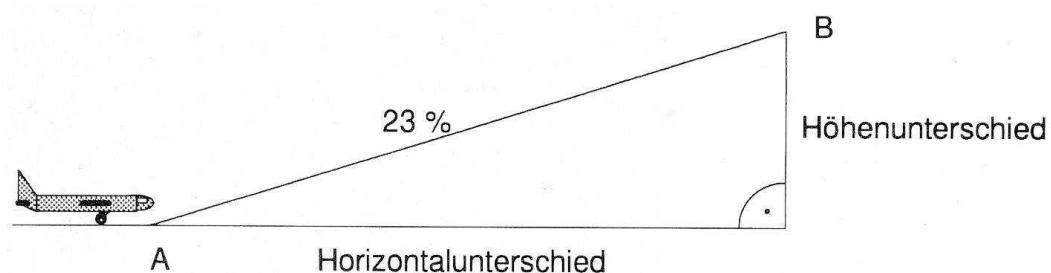
Quelle: Fich, O.: Mathelogik

- Lösung:*
- (a) Ausgehend vom Satz des Pythagoras muss die Länge der Diagonalen $\sqrt{125}$ cm betragen. Das Doppelte hiervon ist $\sqrt{500}$ cm. Die Länge der senkrechten Linie ist unverändert 10 cm und damit 100, wenn sie quadriert wird. Die Breite zum Quadrat muss daher 400 sein, wenn die Summe 500 betragen soll. Die Quadratwurzel aus 400 ist 20, d.h. die neue Breite ist also 15 cm größer als vorher.
 - (b) Die Verdopplung entspricht in diesem Fall einer schrägen Linie mit der Länge $\sqrt{2000}$ cm, und da die Länge der senkrechten Linie unverändert ist, muss die Breite des Buchstabens $\sqrt{900}$ cm = 30 cm sein, was einer Vergrößerung um ca. 20 cm entspricht.

- (c) Wenn wir die Länge der senkrechten Linie als 1 definieren, muss die Fläche des großen Dreiecks (das ganze A) sein: A (großes Dreieck) $= \frac{1}{2} \cdot \tan 15^\circ \cdot 1 \cdot 2 = \tan 15^\circ$. Der Querstrich soll nun entsprechend der Hälfte der Fläche des As platziert werden. Wenn wir die Länge der Linie, die von der Spitze des As rechtwinklig zum Querstrich verläuft, b nennen, ist die Fläche des Dreiecks über dem Querstrich: A (kleines Dreieck) $= \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot \tan 15^\circ \cdot 2 = b^2 \tan 15^\circ$. Dies soll gleich $\frac{1}{2} \cdot \tan 15^\circ$ sein, weshalb $b = \sqrt{0,5} \approx 0,707$ entsprechend 70,7% ist, oder 29,3%, von unten nach oben gemessen.
- (d) Die Länge der Querlinie beträgt: $L = 2 \cdot \sqrt{0,5} \cdot \tan 15^\circ \approx 0,379$.

11. Über den Wolken ...

Doris Trump ist Pilotin eines Passagierflugzeuges. Sie ist dafür verantwortlich, dass sich ihre Gäste während des Fluges wohlfühlen. Vor allem beim Start hat sie darauf zu achten, dass nach dem Abheben vom Boden eine Steigung von 23% nicht überschritten wird.



Die Steigung von $23\% = 0,23$ wird aus dem Quotienten von Höhen- und Horizontalunterschied ermittelt: $Steigung = \frac{Höhenunterschied}{Horizontalunterschied}$.



Unsere Pilotin Doris Trump hat es da einfacher - ganz ohne Rechnerei. Sie schaut nur auf das Steigungsmessgerät im Cockpit ihres Flugzeuges. Dieses zeigt nämlich den Winkel an, den die Flugstrecke mit der Horizontalstrecke bilden soll. Man nennt diesen Winkel Anstellwinkel, d.h. dieser Winkel wird von der Pilotin eingestellt, der tatsächliche Anstiegswinkel ist aber ein anderer. Dabei ist die Differenz vom tatsächlichen Anstieg- und dem theoretischen Anstellwinkel u.a. von Richtung und Stärke des Windes sowie vom Luftdruck abhängig.



Doris Trump hebt mit ihrer Maschine Richtung London ab. Vom Steigungsmessgerät liest sie einen Steigungswinkel von 16° ab.

- (a) Wie groß ist die Steigung des Flugzeuges in Prozent?
- (b) Gib die tatsächlich geflogene Steigung in Prozent an, wenn wir annehmen, dass der Anstiegswinkel der Boeing 747 – 400 um 3° kleiner ist als der Anstellwinkel.

Quelle: RAAbits Reihe 5 Material S. 5

Lösung: (a) $\approx 28,67\%$
 (b) $\tan 13^\circ \approx 23,09\%$

12. Wasserglas

Auf einem runden Tisch in einem Flugzeug steht ein zylindrisches Glas, das bis zum Rand mit Wasser gefüllt ist. Das Glas ist 12 cm hoch und hat einen Durchmesser von 8 cm. Wir nehmen an, dass das Glas so dünn ist, dass wir im Folgenden von der Dicke des Glases absehen können. Außerdem sehen wir von besonderen physikalischen Eigenschaften wie der Oberflächenspannung des Wassers ab.

Wenn sich das Flugzeug beim Hochsteigen um 20 Grad im Verhältnis zur Erdoberfläche neigt, wie viel Wasser läuft aus dem Glas? Wie viel Prozent des ursprünglichen Inhalts sind dies?



Lösung: Klar: Das verbliebene Wasser steht bis zu einer unbekannten Höhe h . Kippt man das Glas, ist der Flüssigkeitspegel an dieser Stelle höher als h , sagen wir $h + x$. Auf der anderen Seite des Glases ist dann der Pegel natürlich gerade $h - x$ (Strahlensatz). Also müssen wir den Abstand bis zum oberen Rand ($2x$) bestimmen, wenn es auf der gegenüberliegenden Seite gerade am Rand ist. Dazu denken wir uns ein rechtwinkliges Dreieck in das Glas gelegt, bei dem eine Kathete der (obere) Durchmesser des Glases ist, die Hypotenuse auf der Wasseroberfläche entlangläuft und die andere Kathete gleich der gesuchten Länge $y = 2x$ ist. In diesem Dreieck gilt für die gesuchte Länge offenbar: $y = \tan(20^\circ) \cdot 8 \text{ cm}$. Also ist das verschüttete Volumen: $V = \frac{1}{2} \cdot (4 \text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot 8 \text{ cm} \cdot \tan(20^\circ) \approx 73 \text{ cm}^3$ und dies sind ca. 12% des ursprünglichen Inhalts.

13. Hofmathematik

Stell dir vor, du bist Hofmathematiker am Hofe König Rudolfs II, der in Prag residiert. Wir schreiben das Jahr 1610 nach Christi Geburt. In dieser Zeit ist es üblich, dass gelehrte Damen und Herren der Mathematik, Astronomie und Physik miteinander in Briefen kommunizieren, einander neue Entdeckungen mitteilen und Probleme miteinander diskutieren.

Als berühmter Mathematiker erhältst du des Öfteren Post von dir unbekannten Leuten, die dir ihre (manchmal vermeintlichen) Entdeckungen mitteilen und dich um Stellungnahme bitten.

Einen ebensolchen Brief hast du soeben von dem Sohn eines reichen Gutsbesitzers und Handelsherren, Bartholomäus Schobinger aus St. Gallen, erhalten, der ein antikes, weltberühmtes Problem gelöst haben will. Es geht um die konstruktive Dreiteilung eines Winkels allein mit Zirkel und Lineal. Dieses bis dahin ungelöste Problem wurde von dem Griechen einige Jahrhunderte vor Christus gestellt. Viele berühmte Mathematiker haben sich schon die Zähne an diesem Problem ausgebissen, und nun schreibt dieser Schobinger, er habe eine Lösung gefunden.

St. Gallen, 3. Februar 1610

Hochgeehrter Mathematiker, Freund der Wissenschaften und der bildenden Künste, königlicher Würdenträger, Entdecker vieler Wahrheiten Gottes,

ich getraue mich kaum, an einen Mann solchen Ruhmes und solcher Geisteskraft mein bescheidenes Wort zu richten. Doch die Resultate meiner Arbeiten sind so unfasslich, dass ich sie nicht mehr weiter nur für mich behalten kann. Ich glaube, mit Gottes Hilfe das alte Problem der Winkeldreiteilung gelöst zu haben, und bitte nun um Ihren werten Kommentar. Ich beschreibe im Folgenden das Verfahren, mit dem es mir gelungen ist, jeden beliebigen Winkel allein mit Zirkel und Lineal zu dritteln.

Um den Scheitel des Winkels ziehe ich einen Kreisbogen beliebiger Größe. Dieser schneide die Schenkel des Winkels in den Punkten A und B. Im Punkt A errichte ich ein Lot zur Sehne AB und trage auf ihr die doppelte Länge des Radius des Kreisbogens ab und erhalte den Punkt C. Verbinde ich den Scheitel mit diesem Punkt C und über ihn hinaus, erhalte ich den Strahl, welcher den ursprünglichen Winkel drittelt.

Ich habe diese Konstruktion an männiglich vielen Winkeln ausprobiert, speziell an den Winkeln 15° , 30° , 60° und 90° und beim Nachmessen die Drittelung des Winkels feststellen können.

Ich wage es nicht, Sie zur Eile zu drängen, warte aber in höchster Ungeduld auf Ihre Antwort. Möge der allmächtige und barmherzige Gott Sie beschützen und leiten.

Bartholomäus Schobinger

Quelle: mathematik lehren (1997) H. 83, S. 68f

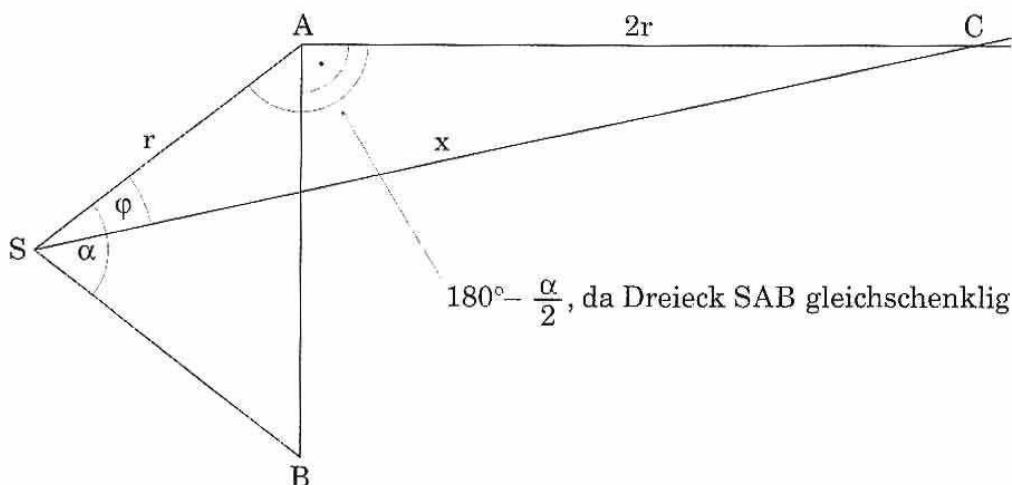


Prag, 11. April 1610

Hoch geehrter Bartholomäus Schobinger aus St. Gallen, Sohn eines reichen Gutsbesitzers und Handelsherren,

ich bedanke mich für die Ehre, die Sie mir beweisen, indem Sie mir ihre Ergebnisse mitteilen. Ihre Behauptung war, dass Sie ein Verfahren gefunden haben, mit dem es Ihnen gelungen ist, jeden beliebigen Winkel allein mit Zirkel und Lineal zu dritteln.

Dieses Verfahren haben Sie anschaulich beschrieben. Wenn man die Winkel wie in der Skizze benennt, ist die Behauptung: $\varphi = \frac{\alpha}{3}$.



Um Ihr Verfahren rechnerisch zu prüfen, muss man mit Hilfe des Cosinus-Satzes (siehe Zeichnung) die folgenden Formeln aufstellen:

$$\begin{aligned} \text{I. } x^2 &= r^2 + (2r)^2 - 2r \cdot 2r \cos(180^\circ - \frac{\alpha}{2}) & \text{II. } (2r)^2 &= r^2 + x^2 - 2rx \cdot \cos \varphi \\ x^2 &= 5r^2 + 4r^2 \cos \frac{\alpha}{2} & \cos \varphi &= \frac{r^2 + x^2 - (2r)^2}{2rx} \end{aligned}$$

Wenn x^2 eingesetzt wird, ergibt sich:

$$\cos \varphi = \frac{2r^2 + 4r^2 \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{2r \sqrt{5r^2 + 4r^2 \cos \frac{\alpha}{2}}} = \frac{2r^2 \left(1 + 2 \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{2r^2 \sqrt{5 + 4 \cos \frac{\alpha}{2}}} = \frac{1 + 2 \cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{5 + 4 \cos \frac{\alpha}{2}}}$$

Wenn man die von Ihnen genannten Winkel mit Hilfe dieser Formel prüft, kommt man zu den genauen gezeichneten Winkeln, aber nicht genau zu Winkeldritteln:

α	15°	30°	60°	90°
φ	5,0016°	10,018°	20,104°	30,361°

Je größer die Winkel werden, desto ungenauer ist die Drittelung durch Ihr Verfahren.

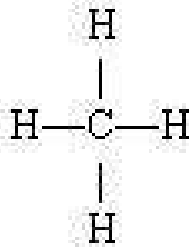
Die richtige Behauptung für Ihr zeichnerisches Verfahren wäre also

$$\text{nur } \varphi \approx \frac{\alpha}{3}.$$

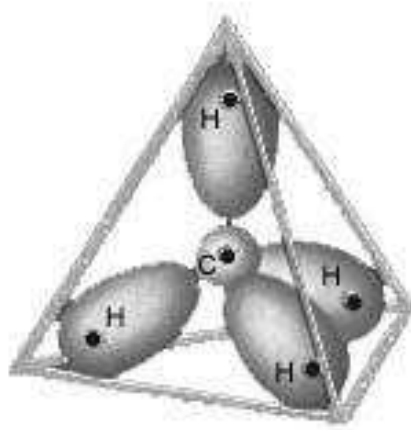
14. Methan



Methan (Summenformel CH_4) ist die einfachste Kohlenwasserstoffverbindung. Es bildet sich dort, wo organische Substanzen unter Luftabschluss verfaulen, was dazu führt, dass es die Haupts substanz von Erdgas, Grubengas, Sumpfgas, Faulgas und dem sogenannten „Biogas“ bildet. Die Molekülformel CH_4 und die Strukturformel (siehe links) sagen jedoch noch nichts über die räumliche Anordnung der Atome aus. Durch die gegenseitige Abstoßung der Elektronen bildet sich ein Tetraeder, in dessen Mittelpunkt sich das C -Atom befindet. Die „Orbitale“ um die Atome im unteren Bild sind die Bereiche, wo man die jeweiligen Atome mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit antreffen kann. Am wahrscheinlichsten ist, dass sich die Wasserstoffatome an den Eckpunkten des Tetraeders aufhalten.



- (a) Berechne den Bindungswinkel im Methanmolekül, d.h. den Winkel HCH .
- (b) Die Kantenlänge des Tetraeders beträgt 177 Pikometer. Wie groß ist die Bindungslänge zwischen Wasserstoff und Kohlenstoff, d.h. welchen Abstand haben diese beiden Atome?



Lösung: Bindungswinkel: $109,5^\circ$; Bindungslänge: 109 Pikometer

15. Steigung

Die Steigung einer Straße mit dem Steigungswinkel α ist der Wert von $\tan \alpha$, umgerechnet in Prozent.

- (a) Die steilste Straße der Welt soll im neuseeländischen Ort Duneddin sein. Sie hat den Steigungswinkel 31° . Ermittle die Steigung.
- (b) Ein Spezialfahrzeug für Waldarbeit im Gebirge kann 50° geneigte Hänge hochfahren. Wieviel % Steigung sind das?



Lösung: (a) 60% Steigung
(b) 119% Steigung

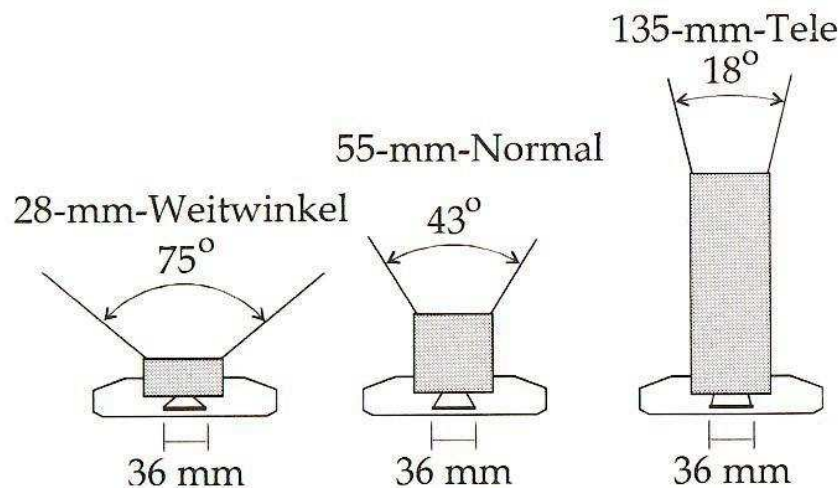
16. Fotoapparat



Auch Foto-Apparate haben einen „Sehwinkel“. Bei einem Normalobjektiv mit 55 mm Brennweite beträgt er 43° . Zoom-Objektive haben variable Brennweiten und damit auch verschiedene Sehwinkel.

Ein 30 m breites und 17 m hohes Gebäude soll frontal aufgenommen werden. In welcher Entfernung vom Objekt muss der Fotograf die Aufnahme mit einem Weitwinkel-, einem Normal- und einem Teleobjektiv machen?

Worin unterscheiden sich die Aufnahmen trotz des gleichen Ausschnitts?



Lösung: Weitwinkel – 19,55 m
 Normal – 38,08 m
 Tele – 94,71 m

17. Pisa

Bereits während des Baus im Mittelalter stellte sich der weltberühmte schiefe Turm von Pisa schräg. In einem Reiseführer steht, dass er mittlerweile um $5,47^\circ$ geneigt ist.

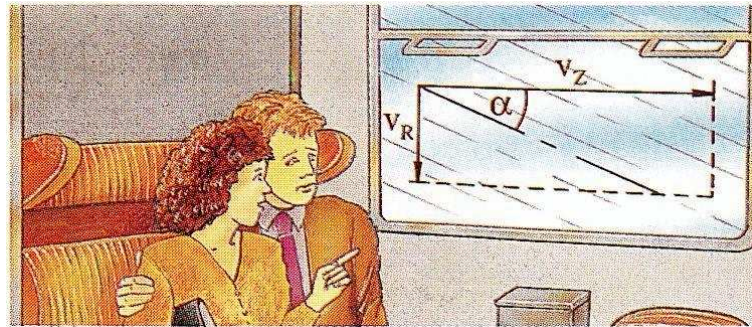
- Um wie viel Meter ragt der Turm über seine ursprüngliche Standfläche hinaus?
- Der Turm war dann lange für Besucher geschlossen während sich die Experten bemühten ihn aufzurichten. In der HNA vom 05.03.2002 stand: „Neigung wurde um fast 40 cm verringert!“. Welcher Neigungswinkel ergibt sich jetzt nach den Rettungsversuchen?



Lösung: Der Turm ragt 4,52, m über seine ursprüngliche Standfläche hinaus.

18. Regentropfen

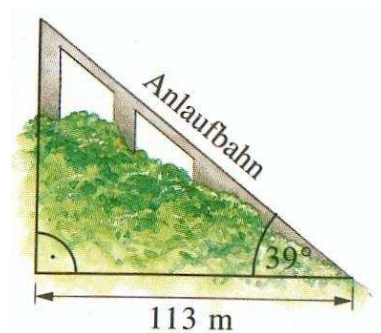
Bei Windstille bilden die Regentropfen am Fenster eines mit einer Geschwindigkeit $v_z = 140 \frac{km}{h}$ fahrenden Zuges einen Winkel $\alpha = 20^\circ$ mit der Waagerechten. Berechne die Fallgeschwindigkeit v_R der Regentropfen.



Lösung: Die Regentropfen fallen mit einer Geschwindigkeit von $14,15 \frac{m}{s}$ oder $50,96 \frac{km}{h}$.

19. Himmelsguckloch

In Oberstdorf befindet sich eine der größten Skiflugschanzen der Welt. Sie wird auch „Himmelsguckloch“ genannt.



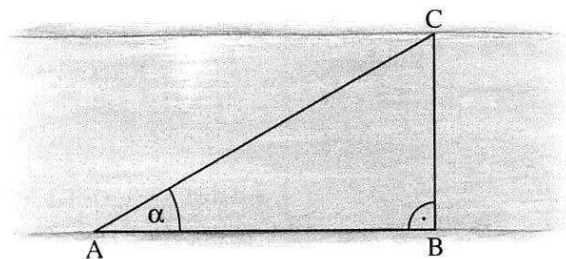
- (a) Welchen Höhenunterschied hat die Anlaufbahn und wie lang ist sie?
- (b) Welchen Höhenunterschied legt ein Springer auf der Anlaufbahn zurück, wenn diese wegen zu großer Weiten der Teilnehmer im ersten Durchgang im zweiten Durchgang um 5 m verkürzt worden ist?



Lösung: (a) Höhenunterschied = 91,5 m Länge der Anlaufbahn = 145,4 m
 (b) Höhenunterschied = 88,4 m

20. Flussbreite

Um die Breite eines Flusses zu bestimmen, hat man unmittelbar an einer Uferseite eine Strecke $|\overline{AB}| = 80$ m abgesteckt und den Visierwinkel $\alpha = 38^\circ$ gemessen. Wie breit ist der Fluss?

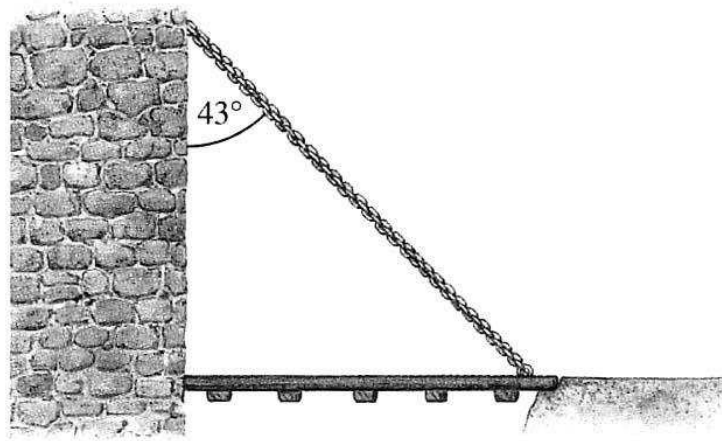


Lösung: Breite des Flusses = 62,5 m

21. Zugbrücke



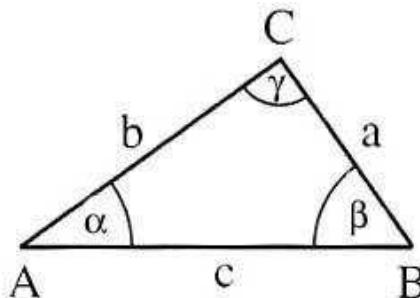
Ritter Eisenkopf soll für die neue Zugbrücke unter anderem eine Kette kaufen, mit der man die 8 Meter lange Brücke im Notfall hochziehen kann. Bei seinen vielen Einkaufszetteln findet er jedoch nur die nebenstehende Zeichnung ohne Längenangabe der Kette. Kannst du ihn davor bewahren ohne Kette in die Burg heimzukehren?



Lösung: Die Kette muss mindestens 11,7 m lang sein.

22. Dreiecksberechnung

Berechne im Dreieck ABC jeweils die fehlenden Stücke und trage sie in die Tabelle ein (Längenangaben in cm).



	(a)	(b)	(c)	(d)
a	3,5		8,2	0,75
b	5,7	22,7		2,4
c		31,6	5,9	2,15
α		$45,2^\circ$		
β			$95,7^\circ$	
γ	$67,5^\circ$			

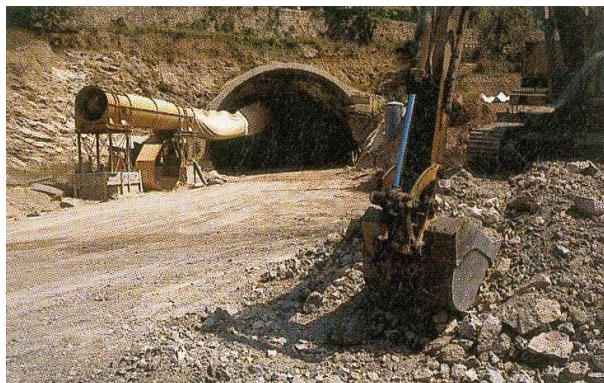
Lösung: (a) $c = 5,43$ $\alpha = 36,5^\circ$ $\beta = 76^\circ$
 (b) $a = 22,4$ $\beta = 46,0^\circ$ $\gamma = 88,9^\circ$
 (c) $b = 10,6$ $\alpha = 50,5^\circ$ $\gamma = 33,8^\circ$

(d) $\alpha = 17,9^\circ$ $\beta = 100,3^\circ$ $\gamma = 61,8^\circ$

23. Tunnelbau

Ein Autobahntunnel soll geradlinig durch einen Berg gebaut werden. Um die Tunnellänge $|AB|$ zu bestimmen, misst man von einem Punkt C aus folgende Längen und Winkel: $|CB| = 1,6$ km, $|CA| = 2,5$ km, $\gamma = 56^\circ$.

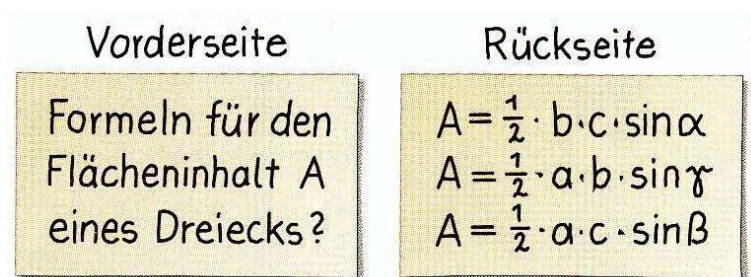
Fertige eine Skizze an und bestimme dann die Tunnellänge.



Lösung: Die Tunnellänge beträgt ca. 2082 m.

24. Lernkärtchen

Sabine hat sich für ihre Mathematik-Lernkartei ein Kärtchen angelegt. Was hältst du davon?



Lösung: Da die Formel für den Flächeninhalt bekanntermaßen $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ lautet und man die Höhe h durch z.B. $a \cdot \sin \beta$ bestimmen kann, ist die Beschriftung von Sabines Kärtchen richtig.

25. Satellit

Ein Beobachtungssatellit „sieht“ immer nur einen Ausschnitt der Erdoberfläche. Die Kugelkappe wird vom sogenannten Horizontkreis begrenzt, den Winkel λ nennt man Radiuswinkel.

Bestimme für den Satelliten OGO-1 (Orbiting Geophysical Observatory One) den Radiuswinkel λ ($\angle SM_E H$) und den Radius des Horizontkreises,

-

(a) $\lambda = 87,65^\circ$ Horizontkreis = 6394,64 km
 (b) $\lambda = 16,06$ Horizontkreis = 1770,78 km
 (c) $\lambda = 0,2582$ Horizontkreis = 28,84 km

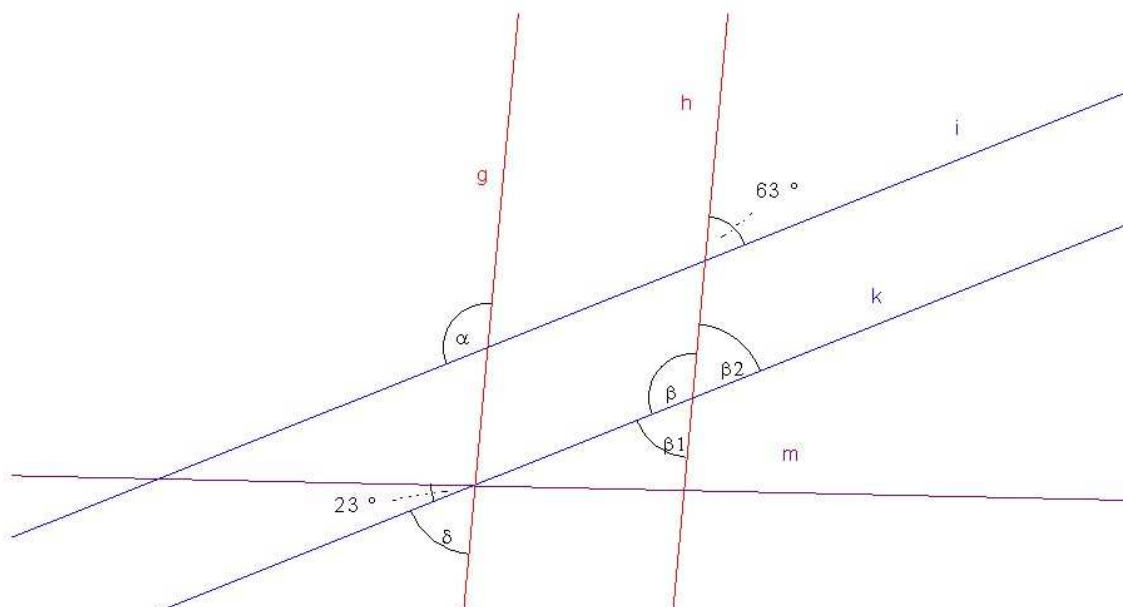
Die Bugwelle eines Schiffes hat immer einen Öffnungswinkel von etwa 40° . Das Schiff fährt in der Mitte eines 160 m breiten Flusses. Wie weit ist sein Bug vom Auftreffpunkt der Welle am Ufer entfernt?



29

27. Winkel

Die Geraden g und h sind zueinander parallel und ebenso die Geraden i und k . Bestimme die Größe der eingezeichneten Winkel! Finde andere Winkel, benenne sie und bestimme deren Größe.



Lösung:

28. Kartennavigation

Auf einer Karte, Maßstab 1:48 000, wird ein gerader Weg mit 1,2 cm gemessen. Punkt A liegt auf der Höhenlinie 480 m, Punkt B liegt auf der Höhenlinie 590 m. Wie lang ist der Weg in Wirklichkeit?

Lösung: Die maßstäblich umgerechnete direkte Entfernung beträgt 576 m, unter Berücksichtigung des Höhenunterschieds von 110 m ergibt sich eine Luftlinie von 586,4 m.