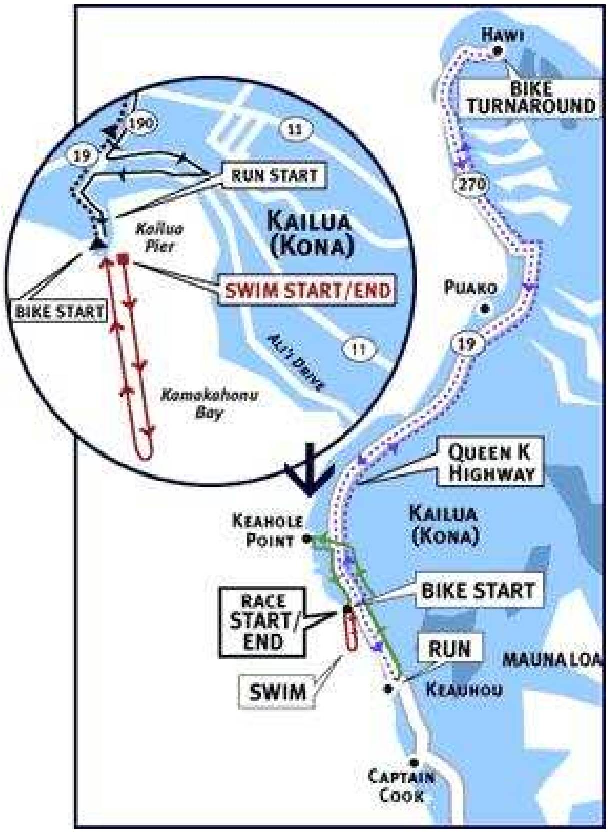
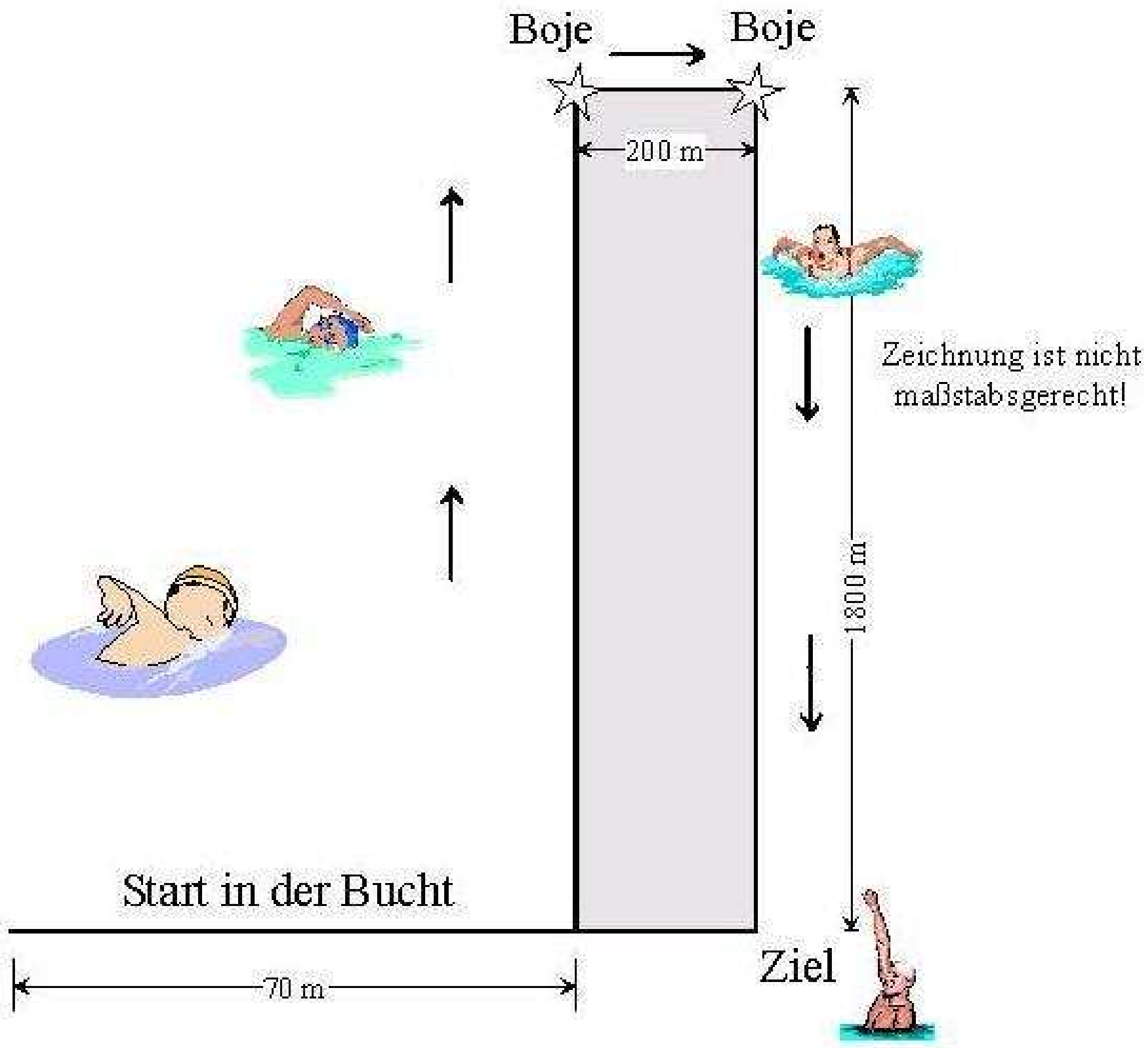
Satzgruppe des Pythagoras

1. **Pythagoras auf Hawaii**

   Mitte Oktober findet alljährlich die Weltmeisterschaft im Triathlon („IronMan“) auf Big Island (Hawaii) statt. Dabei müssen folgende Distanzen zurückgelegt werden:
   3, 8 km Schwimmen im Meer,
   180, 0 km Radfahren und
   42, 2 km Laufen (Marathon).
   Die Schwimmstrecke ist ein Rechteckkurs.
   Alle 1400 Teilnehmer starten gleichzeitig von der 70 m breiten Bucht. Nachdem sie die beiden Wendebojen passiert haben, gehen sie im Ziel wieder an Land.





(a) Wie viele Teilnehmer stehen auf einem Meter, wenn sich beim Start alle gleichmäßig auf die Bucht verteilen?

(b) Wie lang ist die Strecke auf der Ideallinie? Zeichne alternative Strecken und berechne deren Länge.

(c) Welche Strecke legt ein Schwimmer zusätzlich zurück, der (linksstartend) zunächst 1500 m geradeaus schwimmt und dann Kurs auf die erste Wendeboje nimmt?

(d) Wie viel Zeit verliert dieser Schwimmer wenn er 100 m durchschnittlich in 1 : 30 min schwimmt?

(e) Wie viel Prozent macht dieser Zeitverlust gegenüber seiner theoretisch erreichbaren Zeit (Schwimmen auf der Ideallinie) aus?

(f) Wie groß ist der Zeitverlust, wenn ein Teilnehmer vom linken Rand der Bucht direkt die erste Boje ansteuert?

(g) Wie wirkt sich das Gedränge auf einen Schwimmer aus? Oder: Finde mögliche mathematische Beschreibungen des Vorteils nicht im Gedränge schwimmen zu müssen (z.B. höhere konstante Geschwindigkeit oder prozentualer Vorteil) und berechne jeweils die Gesamtzeiten.

(h) Wie viel schneller müsste der Schwimmer außerhalb des Gedränges mindestens sein, damit er den Nachteil der längeren Strecke ausgleichen kann?

Lösung: (a) 20 Teilnehmer pro Meter bei gleichmäßiger Verteilung. Allerdings Häufung auf der rechten Seite zu erwarten.

(b) Schwimmen auf der Ideallinie: Strecke = 3800 m.

(c) Länge der Alternativroute: $\sqrt{70^2 + 300^2} \approx 308,1$; also zusätzliche Strecke von ca. 8,1 m.

(d) Zeitverlust: $90 \cdot 0,081 = 7,29$; also rund 7 Sekunden.

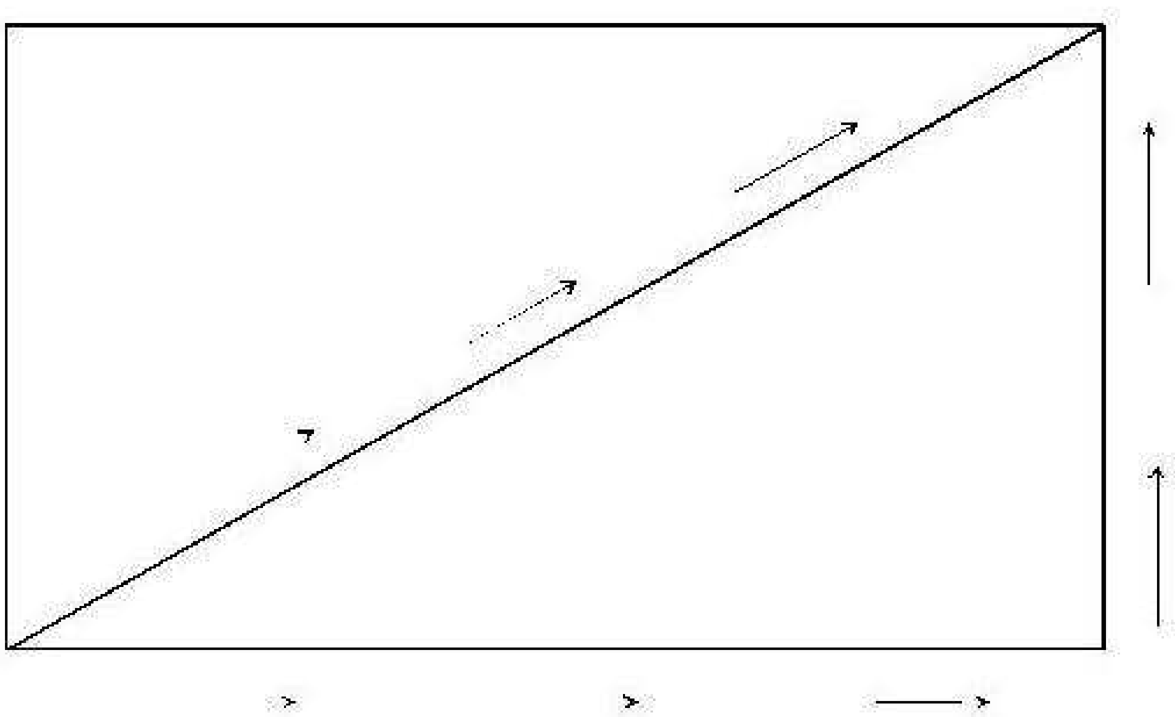
(e) Insgesamt benötigte Zeit $= 1,5 \cdot 38 = 57\,(min)$. Damit ein Zeitverlust von ca. 0,2%.

(f) Zusätzliche Strecke: 1,36 m; dies entspricht einem Zeitverlust von ca. einer Sekunde. Es stellt sich allerdings die Frage, ob die Diagonalstrecke frei ist.

(g) z.B.: Die Geschwindigkeit des Schwimmers verringert sich im Gedränge so, dass er durchschnittlich für 100 m 1 : 40 min braucht. Dann benötigte Zeit auf Ideallinie (nur bis zur ersten Boje): $\frac{5}{3} \cdot 18 = 30$; also 30 Minuten. Benötigte Strecke bis zur ersten Boje mit Umweg (wie 3): 1808,1 m; also Zeit: $1,5 \cdot 18,081 \approx 27,1$; also 27 Minuten und 7 Sekunden.

(h) z.B.: Die Geschwindigkeit des Schwimmers, der den Umweg schwimmt sei x. Der Schwimmer auf der Ideallinie legt 100 m in 90 sek zurück. Dann gilt: $90 \cdot 18 = x \cdot 18,081 \Leftrightarrow x \approx 89,6$; also ungefähr genauso lange, falls der Schwimmer 100 m durchschnittlich in 89,6 sek zurücklegt.

2. **Pythagoras auf dem Sportplatz**



Ein rechteckiger Sportplatz ist 100 m lang und 50 m breit. Ulli startet direkt zur gegenüberliegenden Ecke. Frank läuft an der Außenlinie entlang.

(a) Wie viel Prozent des Weges spart Ulli?

(b) Wie viel m ist Frank noch vom Ziel entfernt, wenn Ulli ankommt? (Was muss man hierbei voraussetzen? Gleiche Geschwindigkeit)

(c) Mit welcher Geschwindigkeit muss Frank laufen, um gleichzeitig mit Ulli anzukommen?

(d) Wann treffen sie sich wieder, wenn sie auf ihren Wegen dauernd hin- und herlaufen?

(e) Wo begegnen sie sich, wenn Ulli Frank entgegenläuft?

Lösung: (a) Diagonale: $\sqrt{100^2 + 50^2} \approx 111,8 \; A \; 74,5\%$ des Außenweges.

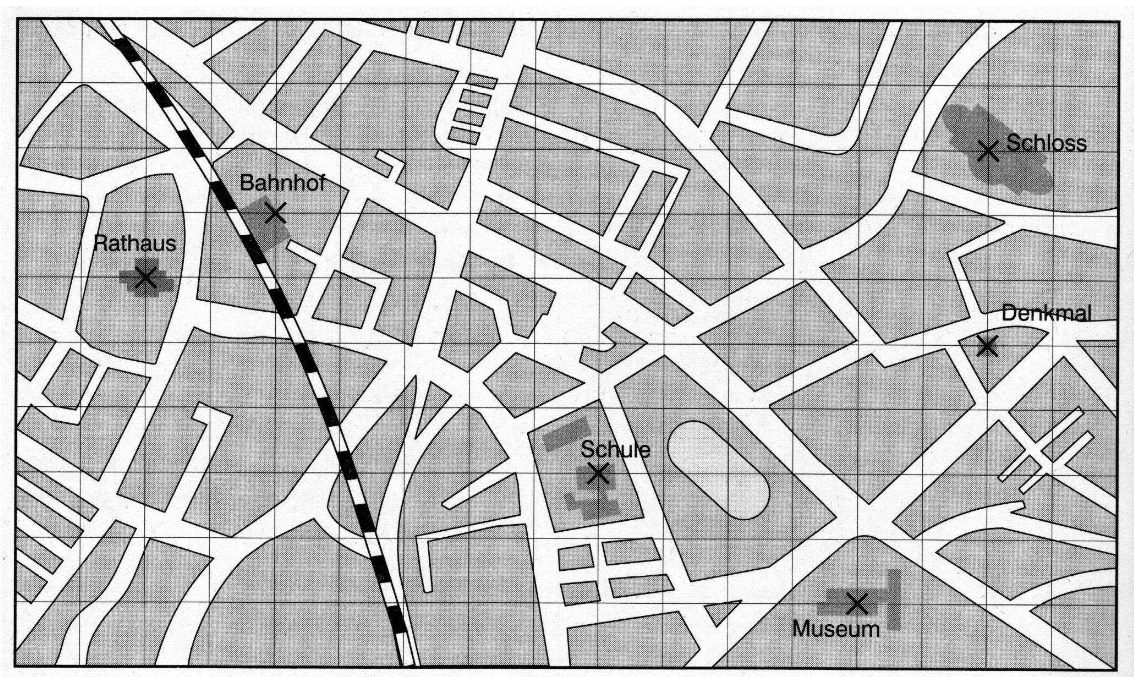
(b) Entfernung: $150 - 111,8 = 38,2$ m.

(c) Frank muss ca. 1,34 mal so schnell laufen wie Ulli.

(d) Nach 900 bzw. 894,4 m wird es relativ knapp. Gilt das als Treffpunkt?

(e) Begegnung ca. 19,1 m von der Eckfahne entfernt.

3. **Entfernungen auf dem Stadtplan**

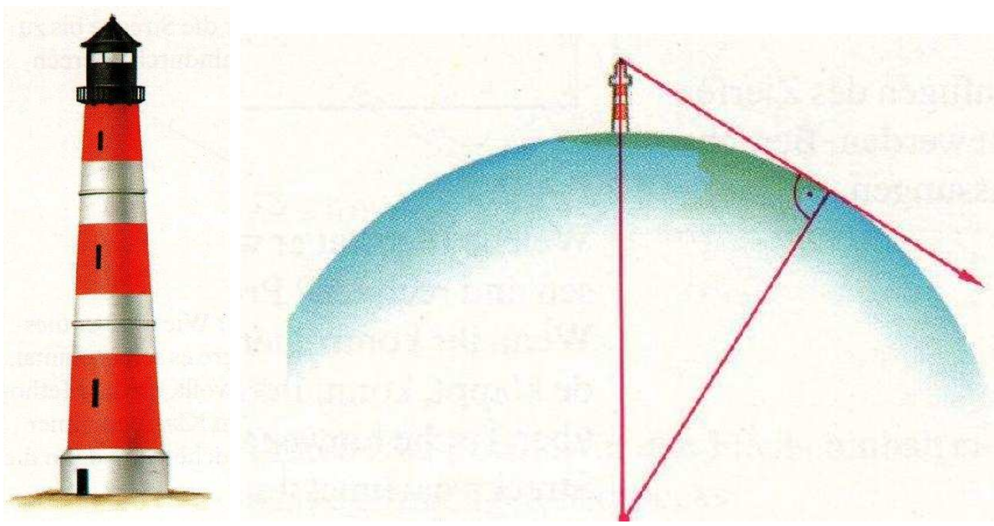


Ein Kästchen auf der Karte entsprechen 100 m in der Realität.
Berechne die Luftlinienentfernungen.

Lösung: Schule - Bahnhof: $640,31\,\mathrm{m}$
Schule - Schloss: $781,02\,\mathrm{m}$
Schule - Museum: $447,21\,\mathrm{m}$
Rathaus - Museum: $1208,30\,\mathrm{m}$
Rathaus - Bahnhof: $223,61\,\mathrm{m}$
Bahnhof - Museum: $1081,67\,\mathrm{m}$
Bahnhof - Schloss: $1104,54\,\mathrm{m}$
Bahnhof - Denkmal: $1118,03\,\mathrm{m}$

4. **Wie weit kann man sehen?**

   Wie weit kann man von einem 45 m hohen Leuchtturm sehen? Stelle dir Erde als Kugel vor und verwende bei der Berechnung für den Erdradius 6370 km .



   Quelle: Schnittpunkte 9 (1995), S. 130

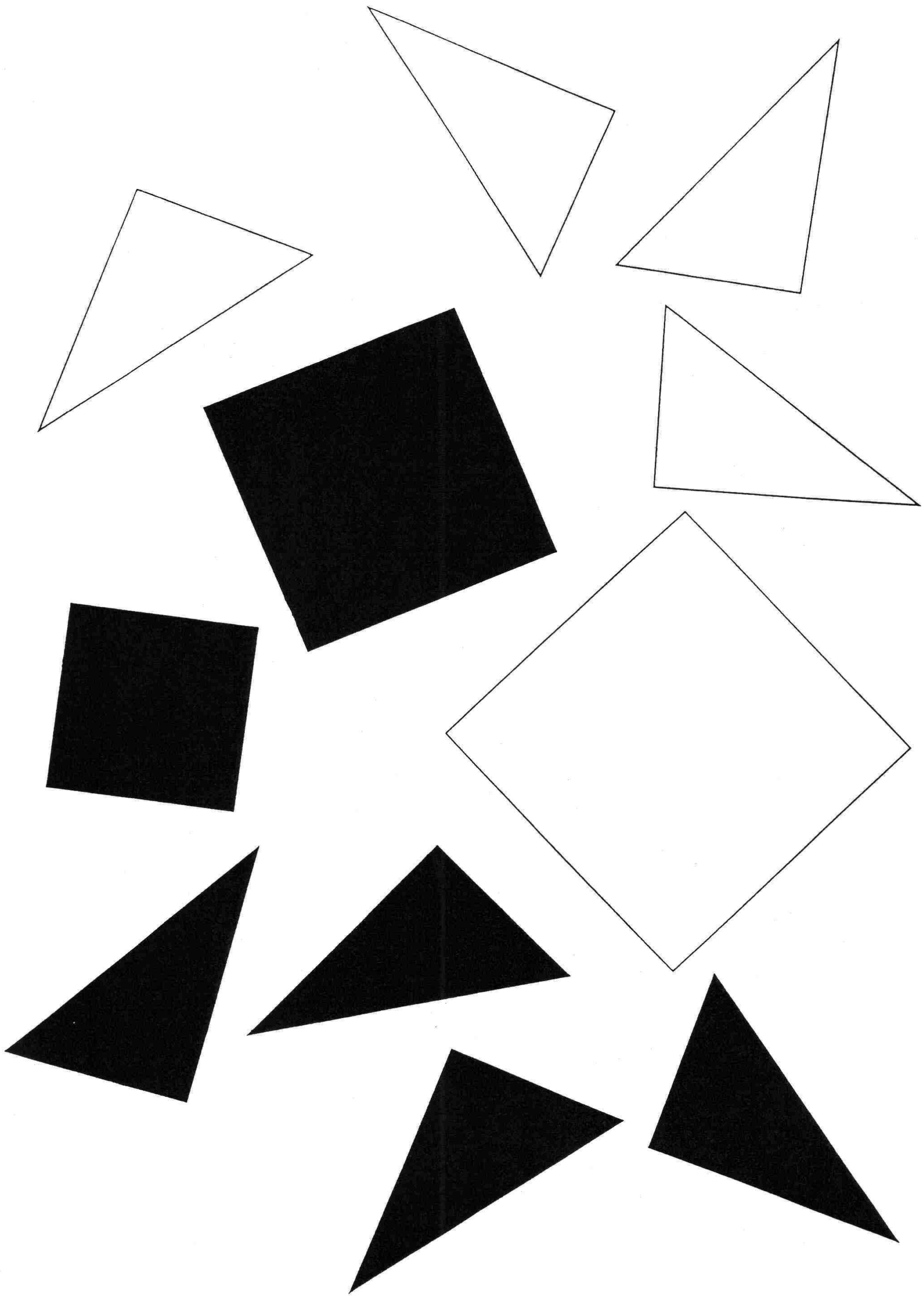
   Variation: Auf Vorgabe der Zeichnung verzichten.

5. **Der Leuchtturm von Alexandria (vgl. Aufg. 4)**

   In dem nachfolgenden Text sind falsche Werte für die Sichtweiten von diversen Türmen angegeben worden. Korrigiere sie!

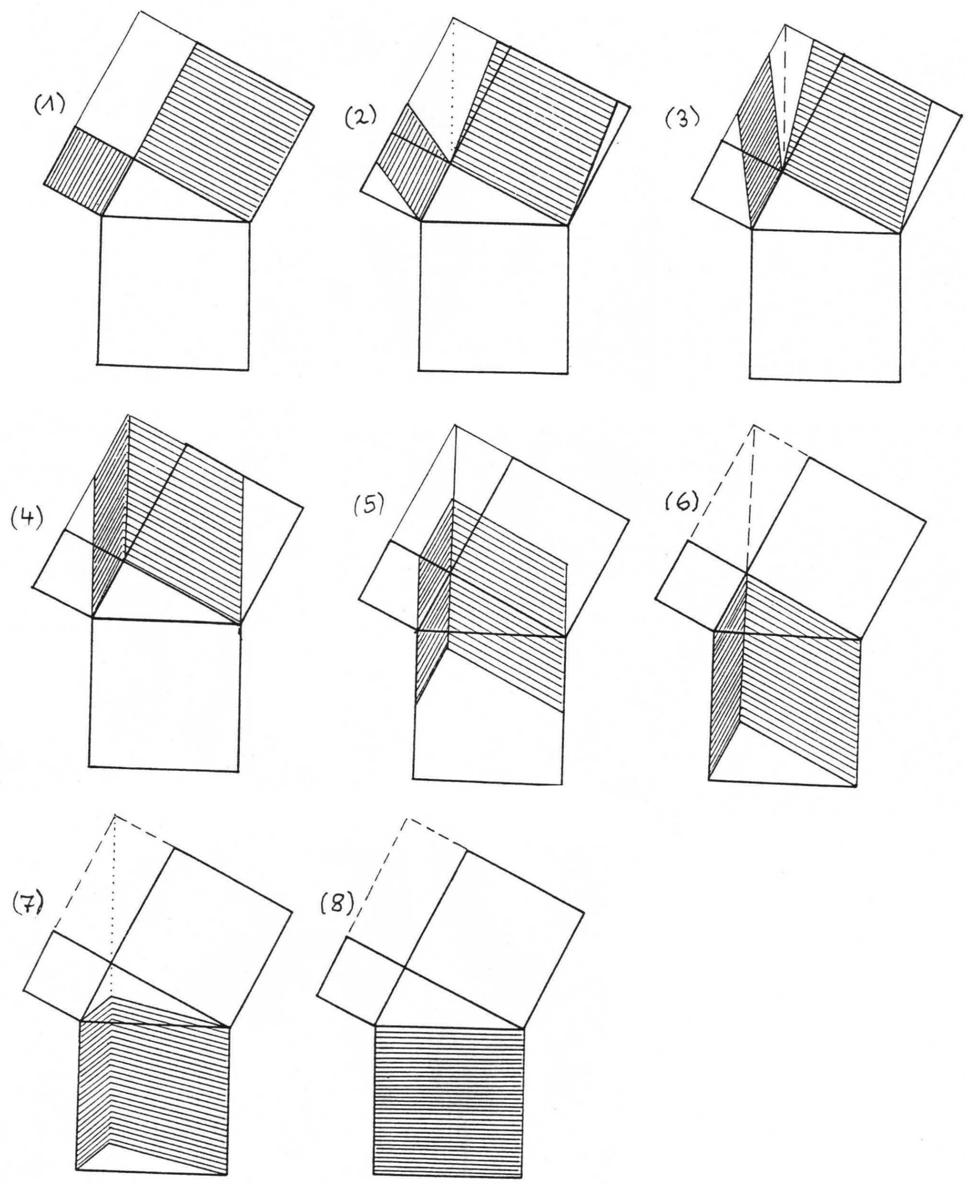
Im Altertum gab es sieben Bauwerke, die man als „Weltwunder“ bezeichnete. Eines dieser sieben Weltwunder war der Leuchtturm von Alexandria. Alexandria ist eine Hafenstadt in Ägypten, sie wurde 331 *v. Chr. von Alexander dem Großen gegründet und war eine der bedeutendsten Großstädte der alten Welt. Damals gehörte Ägypten zum griechischen Weltreich, das sich über Persien bis Indien erstreckte. Der berühmte Leuchtturm stand auf einer kleinen Felsinsel vor der Hafeneinfahrt, die Insel nannte sich Pharos. Mit der Zeit hat sich der Name der Insel so mit dem Turm verknüpft, dass man von dem Bauwerk selbst als dem „Pharos von Alexandria“ sprach. Das französische Wort „Phare“ für Leuchtturm kommt daher. Gebaut wurde der Turm ab* 290 *v. Chr.,* 279 *wurde er dann feierlich eingeweiht.*
Ursprünglich war das Bauwerk allerdings gar nicht als Leuchtturm gedacht, sondern als Wahrzeichen der neuen Stadt, als Künder der Weltmacht des griechisch-morgenländischen Reiches. Seine enorme Höhe deutet das an, er war mehr als 120 m *hoch.*
Schon im Altertum war bekannt, dass die ideale Höhe eines Leuchtturms bei etwa 40 m *liegt. Sein Leuchtfeuer hat nämlich durch die Erdkrümmung nur eine begrenzte Reichweite. Ein Feuer auf der Spitze eines* 10 m *hohen Turms leuchtet* 20 km *weit. Baut man ihn doppelt so hoch, leuchtet das Feuer nicht etwa doppelt so weit: Die Sichtweite eines in* 20 m *Höhe angebrachten Lichts beträgt nur* 25 km. *Und ein Turm von* 110 m *Höhe strahlt nicht einmal* 1 km *weiter als einer von* 100 m. *Der Bau eines allzu hohen Leuchtturms bedeutet folglich nur Verschwendung von Zeit und Material. Da der riesige Turm aber nun schon mal stand, ging man um das Jahr* 150 *(also rund* 400 *Jahre nach seiner Vollendung) dazu über, auf der Turmspitze ein nächtliches Feuer zu schüren und das Bauwerk fortan auch als Leuchtturm zu benutzen.*

6. **Ein Pythagoras Puzzle**



Quelle: Steudel, H.: Der Satz des Pythagoras - ein Legespiel. In: mathematik lehren (1994)

7. **Und er sagte sein einziges Wort ...**



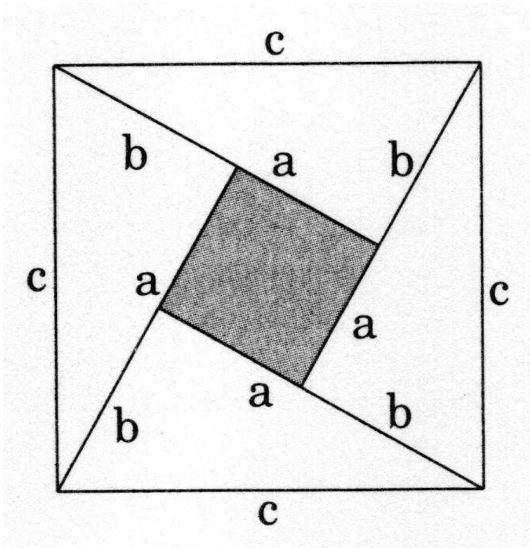
Quelle: Fraedrich, A.M.: Die Satzgruppe des Pythagoras. BI (1995)

8. **Wie lang ist die Diagonale im Rechteck**

   Zunächst wird an die vorangegangene Unterrichtseinheit angeknüpft und die Länge der Diagonalen im Quadrat bestimmt. (Teilen von zwei identischen Quadraten durch Diagonalschnitt). Wichtig ist, dass die Schüler begründen, warum beim Zusammenlegen alles passt.

   Nun kann die Frage gestellt werden, ob sich zur Bestimmung der Diagonalenlänge im Rechteck nicht analog zwei kongruente Rechtecke zerlegen lassen. Die Schülerinnen und Schüler erhalten dazu Papier und Schere, damit sie experimentieren können. Die naheliegende Figur (die Raute) löst das Problem nicht, aber weiteres Probieren

dürfte mit ziemlicher Sicherheit in jeder Klasse auf die dem indischen Mathematiker Bhaskara (12 Jh.) zugeschriebene Konfiguration führen: Die vier rechtwinkligen Teildreiecke bilden ein Quadrat mit einem quadratischen Loch. Das Quadrat hat die Seitenlänge c, das Loch die Seitenlänge $(a-b)$.
Damit lässt sich die Gleichung $c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot ab + (a-b)^2$ aufstellen und unter Benutzung der zweiten binomischen Formel in den Satz des Pythagoras umformen.
Die Beweislast liegt im Nachweis, dass wirklich Quadrate entstehen. Hierzu muss man wie im Spezialfall die Kongruenz der Teildreiecke, den rechten Winkel in jedem Teildreieck und die Tatsache heranziehen, dass die restlichen Winkel jedes Teildreiecks zusammen einen rechten Winkel bilden. Kritisch ist die Stelle, wo drei rechtwinklige Dreiecke bereits zusammengesetzt sind und bewiesen werden muss, dass das vierte Dreieck wirklich eingepasst werden kann.



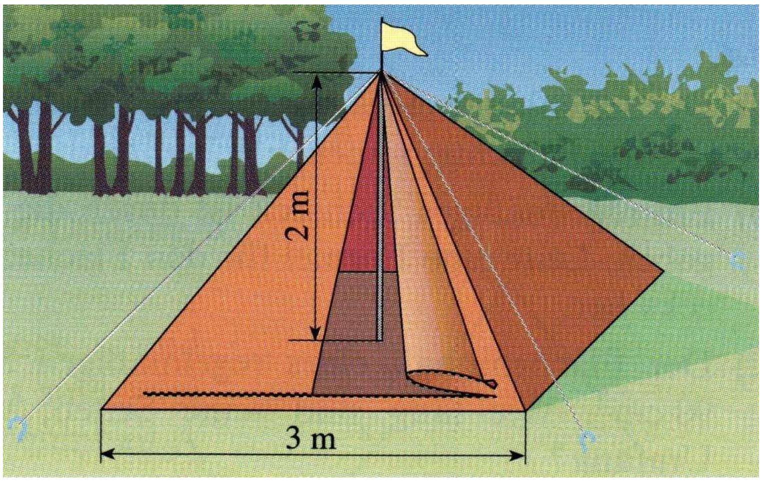
9. **Amasis' Problem**

Es begab sich im alten Ägypten, dass der reiche Kaufmann Potiphar nach reiflicher Überlegung der Vermählung seiner Tochter zugestimmt hatte. Nun wollte er dieses große und wunderbare Ereignis in der ganzen Stadt bekannt geben. Sein Schreiber sollte die freudige Neuigkeit in schönsten Hieroglyphen auf feines Papyrus schreiben. Zu diesem Zwecke benötigte Potiphar Papyrusrollen der besten Qualität.
So ging er zu dem Papyrushändler Amasis und erklärte ihm sein Anliegen. Amasis zeigte ihm die feinsten Papyrusblätter, die alle von quadratischer Form waren. Sie gefielen Potiphar durchaus, jedoch war ihm seine Tochter sehr kostbar, und deshalb wünschte er sich für die Bekanntgabe ihrer Vermählung noch größere Papyrusblätter. So sprach er: „Edler Amasis, du wirst doch gerühmt für deine geometrischen Fähigkeiten. Könntest du nicht Papyrusblätter konstruieren, deren Fläche jeweils genau doppelt so groß ist wie die des hier vorliegenden Papyrus, und die ebenso quadratisch sind?“ „Aber selbstverständlich, guter Potiphar“, antwortete Amasis sichtlich geschmeichelt. „Ich werde gerne quadratische Papyrusblätter nach deinen Wünschen konstruieren. Das ist für mich eine der leichteren Übungen. Gib mir einen Tag Zeit.

Morgen um die gleiche Stunde kannst du die Papyrusblätter abholen.“ Worauf Potiphar sich gebührend bedankte und ging.
Zurück blieb der arme Amasis, der in jener Nacht viele Stunden schwitzend über Papyrusrollen gelehnt zubrachte. Sein leichtfertig gegebenes Versprechen war doch nicht so einfach einzuhalten, wie er zunächst geglaubt hatte. Ihm wollte keine Lösung zur Konstruktion von Papyrusblättern in der von Potiphar gewünschten Größe einfallen. Vielleicht kannst du ihm helfen.

10. **Pyramiden**

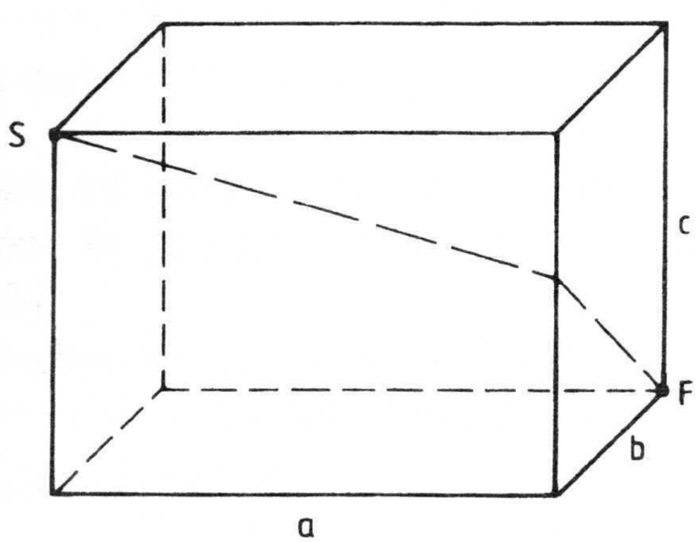
    Wie viel Zeltstoff benötigt man für die Herstellung des Zeltes?



Quelle: Mathematik heute 9 (1996)

11. **Kürzeste Wege**

    Gegeben sei ein quaderförmiger Körper mit $a = 20\,\text{cm}, b = 10\,\text{cm}$ und $c = 15\,\text{cm}$. Auf dem Eckpunkt S sitzt eine Spinne, auf F eine Fliege. Die Spinne will auf kürzestem Weg - auf den Begrenzungsflächen des Körpers laufend - zur Fliege gelangen.



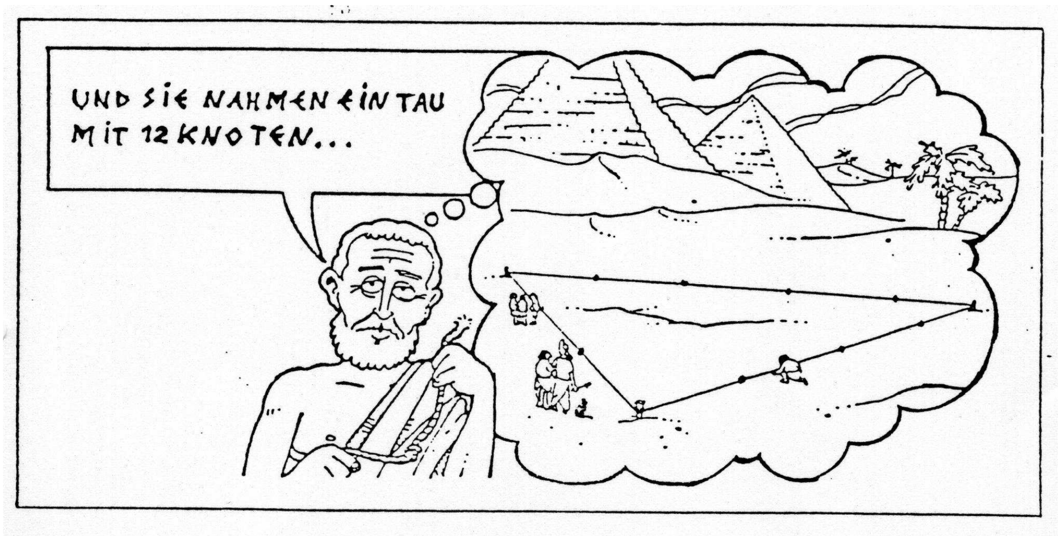
Quelle: Walsch, W.: Aufgabenfamilien 9, in: MiS 33 (1995)

Lösung: Sicher muss man irgendwie „schräg“ über jeweils zwei Begrenzungsflächen laufen. Um die genaue Lage dieses Weges zu ermitteln, kann man die Seitenflächen geklappt vorstellen. Für die Abbildung ergibt sich so: $l_1 = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}; l_1 = 33,5\,\text{cm}$. Damit ist die Aufgabe aber noch nicht gelöst, da die Spinne ja auch über andere Begrenzungsflächen laufen kann. So findet man hier: $l_2 = \sqrt{(a+c)^2 + b^2}; l_2 = 36,4\,\text{cm}$ und $l_3 = \sqrt{(b+c)^2 + a^2}; l_2 = 32,0\,\text{cm}$.

12. **Die ägyptischen Seilspanner**

Lies die folgenden Zeitungsartikel.
Erkläre,worum es geht. Ein Artikel enthält Fehler.

Die ägyptischen Seilspanner (um 2000 v. Chr.) hatten eine sehr genaue Methode um rechte Winkel zu konstruieren. Sie benutzten dazu ein Seil mit Knoten in gleichen Abständen.



(a) Warum soll es wichtig sein, genau rechte Winkel konstruieren zu können? Hast du eine Idee, wie das heute die Maurer machen?

(b) Nimm ein langes Stück Bindfaden und markiere darauf 12 gleich große Abschnitte. Finde möglichst viele Dreiecke, so dass jeder der drei Eckpunkte genau bei einem Knoten liegt. Welches haben wohl die ägyptischen Seilspanner benutzt und warum gerade dieses?

Quelle: MUED

Variationen:

(a) Selbst Schnur hestellen, Schüler Tripel finden lassen.

(b) Alle 15 Dreiecke finden lassen, die man mit weniger als 12 Knoten legen kann.

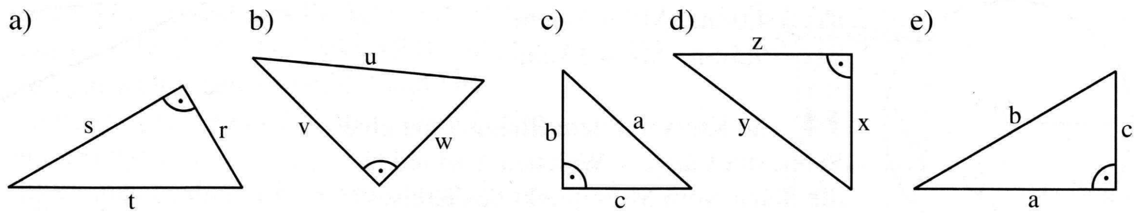
(c) Streichhölzer statt Schnur verwenden.

Lösung: (a) Neueinteilung der Felder nach der jährlichen Nilschwemme. Maurer nutzen oft eine analoge Lattenkonstruktion.
(b) 12 verschiedene Tripel.

13. **Anwendungen des Satzes des Pythagoras**

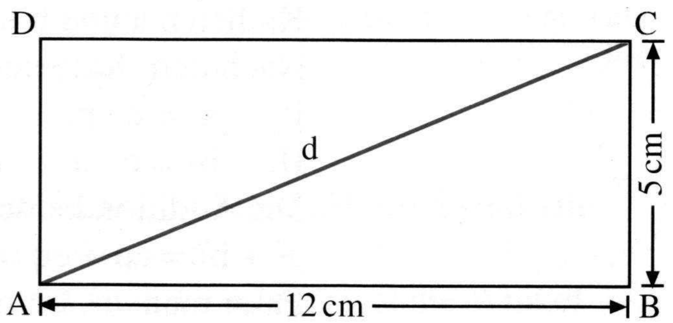
Quellen: Welt der Mathematik 9 (1990), Mathematik heute 9 (1996), Lambacher Schweizer 9 (1997), Schnittpunkt 9 (1995), MUED

Gib für die rechtwinkligen Dreiecke jeweils die Gleichung nach dem Satz des Pythagoras an.



14. **Rechteckdiagonale**

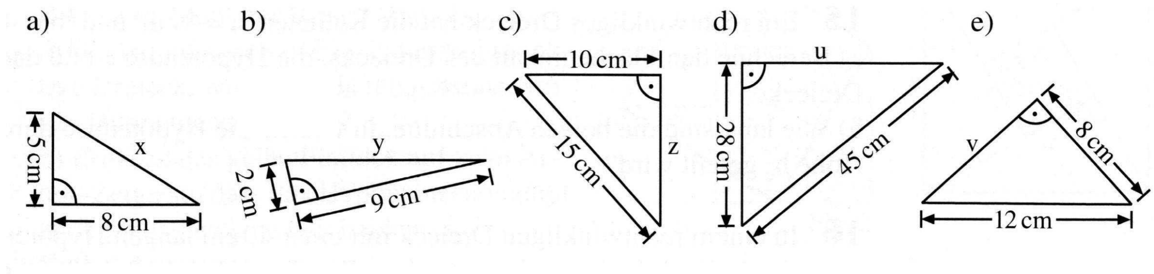
Berechne die Länge der Diagonalen des Rechtecks $ABCD$.



Lösung: Diagonale = 13 cm

15. **Dreiecke berechnen**

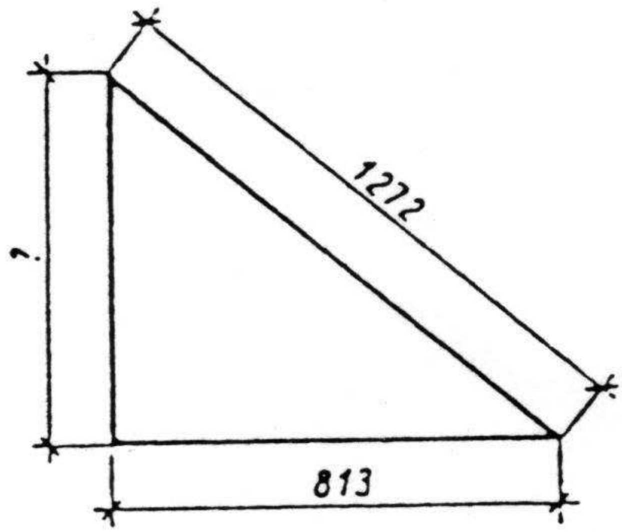
Berechne bei den rechtwinkligen Dreiecken die fehlenden Seitenlängen.



Lösung: (a) $x \approx 9{,}43\,\mathrm{cm}$
(b) $y \approx 9{,}22\,\mathrm{cm}$
(c) $z \approx 11{,}18\,\mathrm{cm}$
(d) $u \approx 35{,}23\,\mathrm{cm}$
(e) $v \approx 8{,}94\,\mathrm{cm}$

16. **Kathetenbestimmung**

Bei der Festlegung der Bestellmaße für eine rechtwinkligdreieckige Isolierglasscheibe wurde vergessen, das Maß einer Seitenlänge anzugeben.



Lösung: Maß $\approx 978{,}27$

17. **Dreieck-Flächenberechnung**

Ein rechtwinkliges Dreieck hat die Kathete $r = 6\,\mathrm{cm}$ und die Hypotenuse $t = 15\,\mathrm{cm}$. Berechne die Länge der anderen Kathete s und den Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösung: Kathete $s \approx 13{,}75\,\mathrm{cm}$
Flächeninhalt $\approx 41{,}24\,\mathrm{cm}^2$

18. **Dreieckseiten**

In einem Dreieck ABC sind gegeben:

(a) $a = 10\,\mathrm{dm}$
$c = 6\,\mathrm{dm}$
$\alpha = 90°$

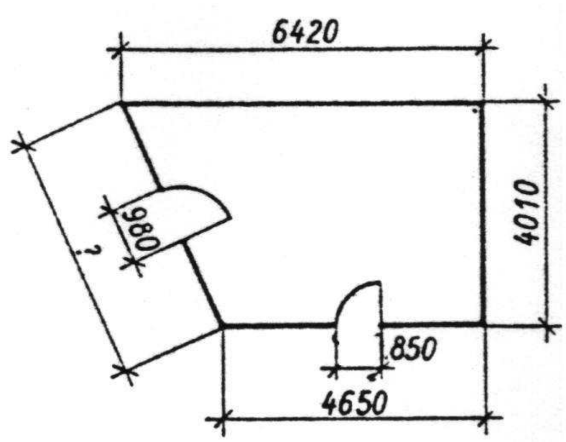
(b) $a = 8\,\mathrm{m}$
$b = 12\,\mathrm{m}$
$\beta = 90°$

Berechne die dritte Dreiecksseite.

Lösung: (a) $b = 8\,\mathrm{dm}$
(b) $c \approx 8,94\,\mathrm{m}$

19. **Sockelleisten**

In einem Wohnraum werden Fußsockelleisten montiert. Wie viele Meter dieser Leisten werden in der Kalkulation verrechnet, wenn die beiden Türen ausgespart werden und ein Verschnittzuschlag von 15% einbezogen wird?



Lösung: $U \approx 17633,26$
Mit Verschnitt $\approx 20278,25$

20. **Pfostenschuss**

Elfmeter! Olaf knallt den Ball in einer Höhe von $1,50\,\mathrm{m}$ an den Pfosten. Welche Strecke legt der Ball dabei mindestens zurück?
Das Tor ist $7,32,\mathrm{m}$ breit und $2,44,\mathrm{m}$ hoch.

Lösung: Strecke (min.) $\approx 11,69\,\mathrm{m}$

21. **Zahnradbahn**

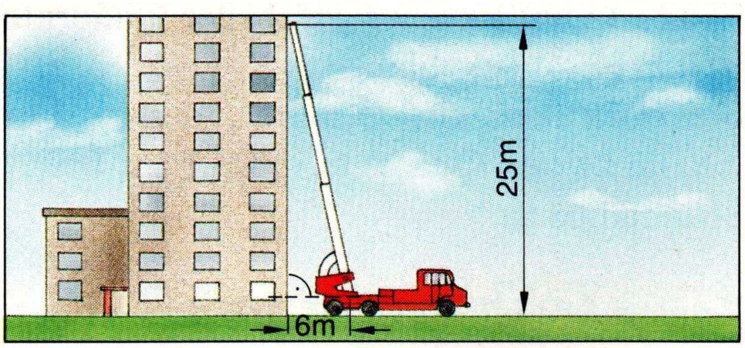
(a) Die steilste Zahnradbahn der Welt fährt auf den Pilatus (Schweiz). Auf einem Streckenabschnitt von 1130 m Länge überwindet sie gleichmäßig einen Höhenunterschied von 489 m.
Wie lang erscheint dieser Steckenabschnitt auf einer Karte im Maßstab 1 : 25000?

(b) Eine andere Zahnradbahnstrecke erscheint auf einer Karte 12 cm lang (Maßstab 1 : 10000). Die wirkliche Streckenlänge beträgt 1250 m.
Wie groß ist der Höhenunterschied?

Lösung: (a) Strecke $\approx 1018,71\,\mathrm{m}$
Auf der Karte $\approx 4,07\,\mathrm{cm}$
(b) Höhenunterschied $= 350\,\mathrm{m}$

22. **Feuerwehrleiter**

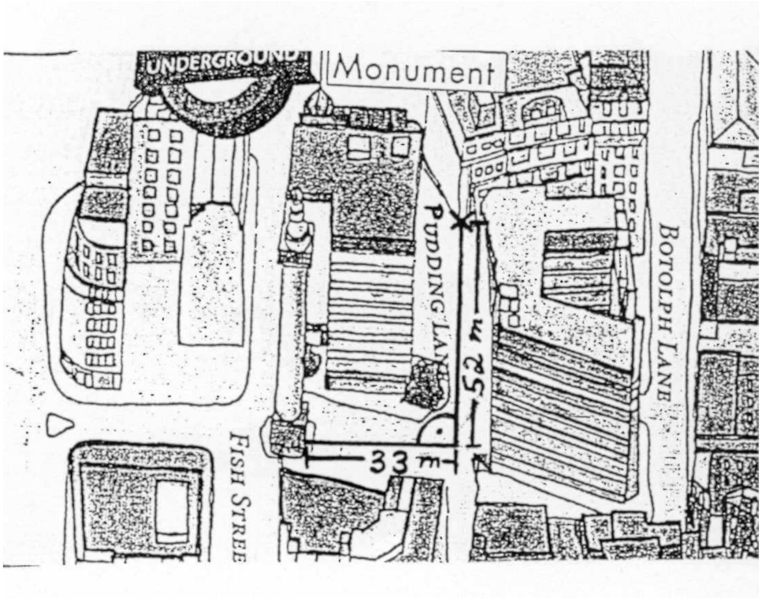
Wie lang muss die Feuerwehrleiter sein, falls es im obersten Stockwerk des Hochhauses brennen sollte?



Lösung: Feuerleiter $\approx 25,71\,\mathrm{m}$

23. **Säule**

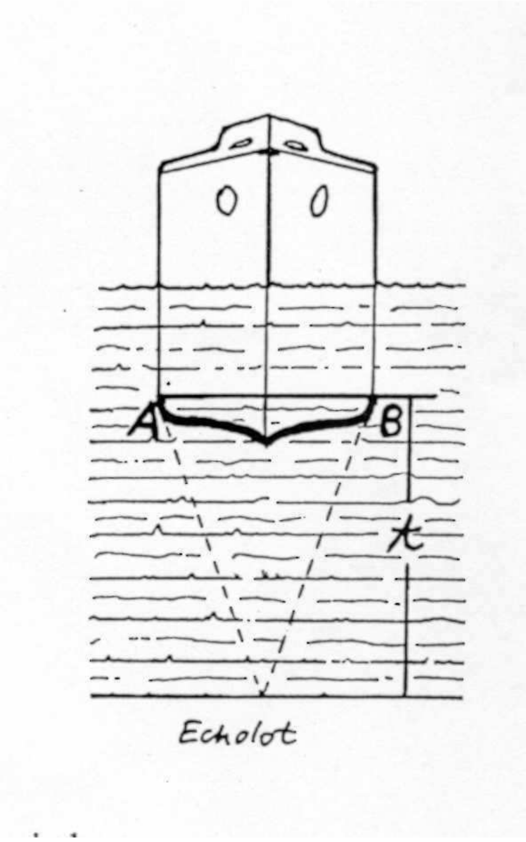
Beim großen Brand von London im September 1666 wurden $\frac{4}{5}$ der City vernichtet. Als Mahnmal wurde ein Säule (genannt Monument) errichtet, deren Höhe genau der Entfernung vom Fuß der Säule zu der Stelle entspricht, an der das Feuer ausbrach (einer Bäckerei in der Pudding Lane). Ein Londonbesucher misst die noch zugänglichen Strecken. Bestimme damit die Höhe der Säule.



Lösung: Höhe der Säule $\approx 61,59\,\text{m}$

24. **Echolot**

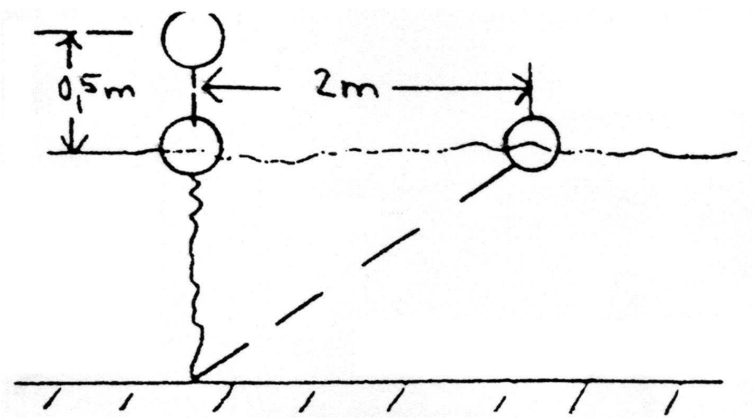
Man benutzt das Echolot, um die Meerestiefe zu messen. Das funktioniert folgendermaßen:
In A wird ein Schallsignal erzeugt. Dieses breitet sich aus und wird am Meeresboden zurückgeworfen. In B wird der reflektierte Schall nach einiger Zeit wieder empfangen. Aus der Schalldifferenz zwischen Schallempfang in B und Schallerzeugung in A rechnet man die Tiefe t aus.
Bestimme die Meerestiefe für den vorliegenden Fall:
Das Schiff ist 16 m breit. Der Schall legt in einer Sekunde 1510 m im Wasser zurück. Die Schalldifferenz an der Stelle sei 0, 4 Sekunden. Ergänze und beschrifte die Skizze so, dass dein Rechenweg erkennbar wird.



Lösung: Meerestiefe $\approx 301,89\,\text{m}$

25. **Boje**

    Eine Boje kann $0,5\,\text{m}$ senkrecht über die Wasseroberfläche emporgehoben oder $2\,\text{m}$ zur Seite bewegt werden, bis das Halteseil straff gespannt ist. Wie tief ist das Wasser?

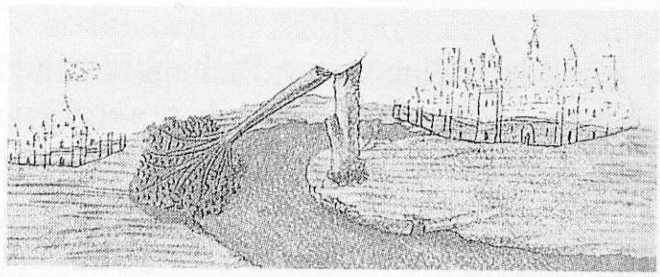


Lösung: Wassertiefe $= 3,75\,\text{m}$

26. **Geknickter Baum**

Ein $3,40\,\mathrm{m}$ hoher Baum ist umgeknickt. Er ragt jetzt genau über den $2\,\mathrm{m}$ breiten Fluss. In welcher Höhe ist der Baum umgeknickt?

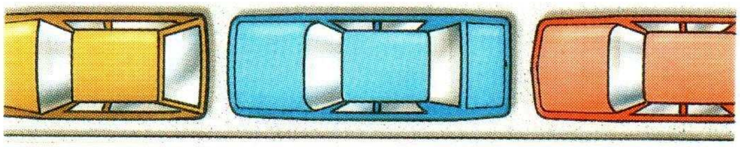
Fig. 5



Lösung: Knick in Höhe $\approx 1,11\,\mathrm{m}$ (Voraussetzung: Baum steht direkt am Fluss)

27. **Parklücke**

Kann das mittlere Auto noch ausparken? Es ist $4,80\,\mathrm{m}$ lang und $1,80\,\mathrm{m}$ breit; der Abstand zum vorderen und hinteren Fahrzeug beträgt jeweils $30\,\mathrm{cm}$.



Lösung: Diagonale $\approx 5,13\,\mathrm{m}$; das klappt schon...

28. **Wäscheleine**

Zwischen zwei Pfählen mit einem Abstand von $3,80\,\mathrm{m}$ ist waagerecht eine dehnbare Wäscheleine straff gespannt.

(a) Hängt man z.B. in die Mitte der Leine einen Bügel mit einem nassen Wäschestück, senkt sich die Wäscheleine um $20\,\mathrm{cm}$. Wie stark hat sich die Wäscheleine gedehnt?

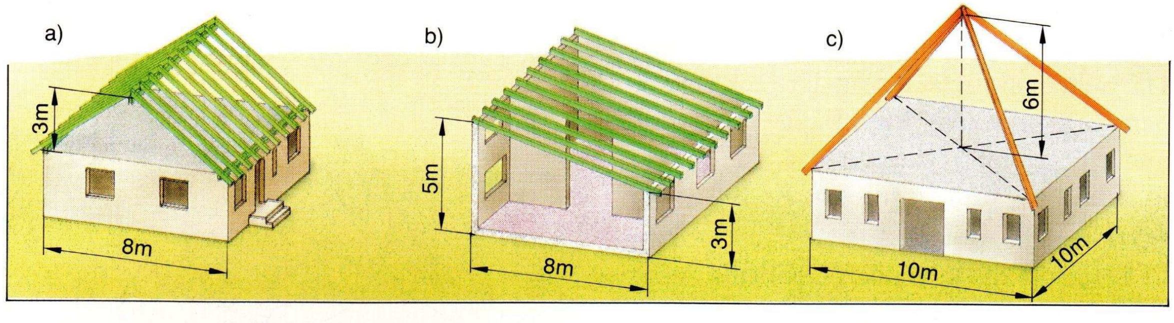
(b) Die Wäscheleine ist bis zu 8% ihrer Länge dehnbar. Um wie viel cm dürfte sich die Wäscheleine höchstens senken, ohne zu zerreißen?

Lösung: (a) Dehnung $\approx 2,1\,\mathrm{cm}$

(b) Senkung (max.) $\approx 60\,\mathrm{cm}$

29. **Dachsparren**

Berechne für jedes abgebildete Gebäude die Länge eines Dachsparren. Jeder Dachsparren soll dabei 40 cm überstehen.



Lösung: Sparrenlängen

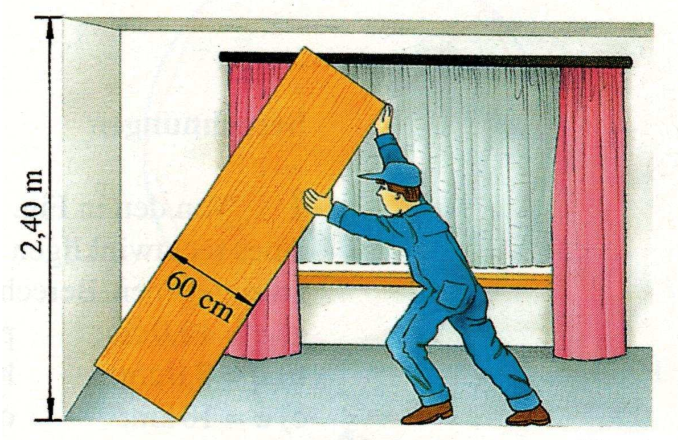
(a) $= 5{,}4\,\mathrm{m}$

(b) $\approx 9{,}05\,\mathrm{m}$

(c) $\approx 9{,}67\,\mathrm{m}$

30. **Maximale Schrankhöhe**

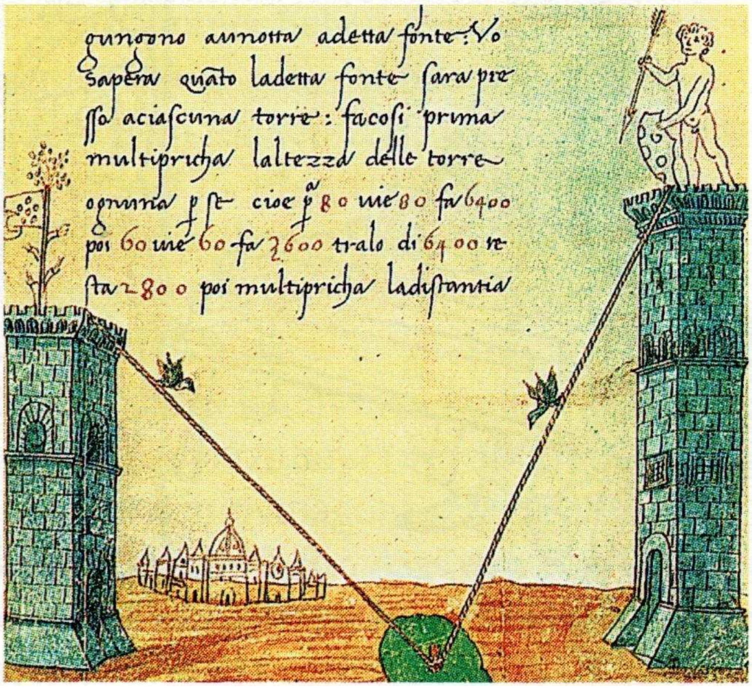
Wie hoch darf der Schrank höchstens sein, damit man ihn wie angegeben aufstellen kann?



Lösung: Schrankhöhe (max.) $\approx 2{,}32\,\mathrm{m}$

31. **Turm und Brunnen**

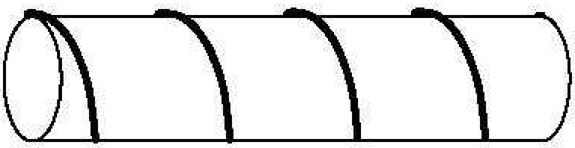
Auf einem ebenen Feld stehen zwei Türme, einer 60 Fuß hoch, der andere 80 Fuß hoch. Ihr Abstand beträgt 100 Fuß. Für die beiden Vögel ist der Weg von der Turmspitze bis zu einem Brunnen zwischen den Türmen gleich weit. Wie weit ist der Brunnen von den Türmen entfernt?



Lösung: Entfernung Brunnen - Turm = 64 m bzw. 36 m

32. **Aufgerollte Schnur**

    Eine Schnur ist symmetrisch um einen Stab gewickelt. Die Schnur windet sich genau 4 mal um den Stab. Der Umfang des Stabes ist 4 cm und die Länge des Stabes ist 12 cm.
    Wie lang ist die Schnur?



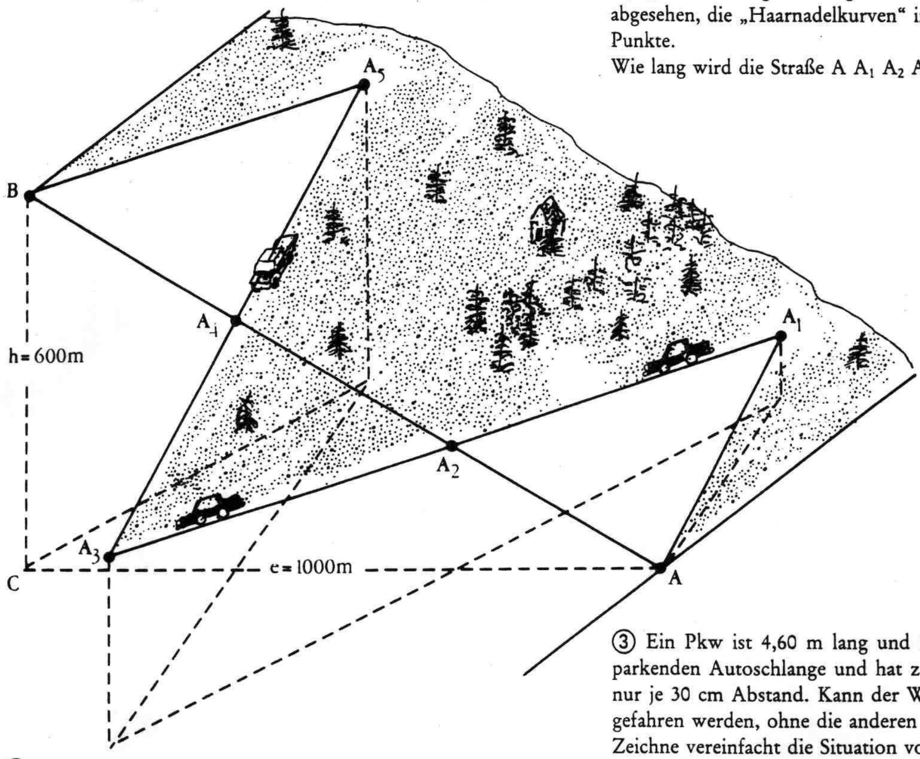
Lösung: Handlungsvorstellung: Küchenpapierrolle längs aufschneiden; Schnur = 20 cm

33. **Pythagoras und Vernetzungen**

„Pythagoras auf der Straße“

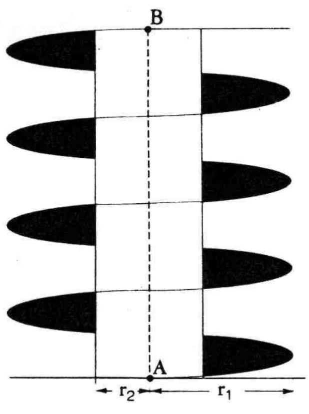
① Geringe Steigungen sind im Verkehr sehr erwünscht. Nenne Gründe dafür.

Die Steigung der Autobahnen ist in der Regel geringer als 4 %, steile Strecken (z. B. zwischen Stuttgart und Ulm, Albrand) haben selten mehr als 6 % Steigung. Geringe Steigungen müssen aber durch lange Wege erkauft werden: Je geringer die Steigung, um so länger der Weg bei fester Höhe. Die Anlage langer und gerader Wege ist oft gar nicht möglich oder wäre zu teuer (Brückenbauten!). Ein Ausweg sind Serpentinen. Hier ist eine typische Situation stark vereinfacht dargestellt.

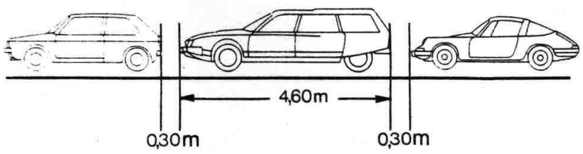


Eine Straße soll vom Talpunkt A zum Bergpunkt B über eine steile Ebene (also überall gleich geneigte Fläche) führen. Der Höhenunterschied zwischen A und B betrage h = 600 m, und der Horizontalabstand, also die Länge von $\overline{AC}$ sei 1000 m, (dieses Maß kann man aus der Landkarte bekommen, dort sind ja immer nur die Horizontalabstände gezeichnet.) Die Steigung ist also 60 %, eine gerade Straße AB wäre viel zu steil. Statt dessen soll eine Serpentinenstraße A A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 B gebaut werden, die überall dieselbe Steigung haben soll, nämlich nur noch 20 %. Die Teilstrecken $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, ... sollen gleich lang sein. Von der Breite der Straße wird abgesehen, die „Haarnadelkurven“ in A_1, A_3, A_5 betrachten wir als Punkte.
Wie lang wird die Straße A A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 B?

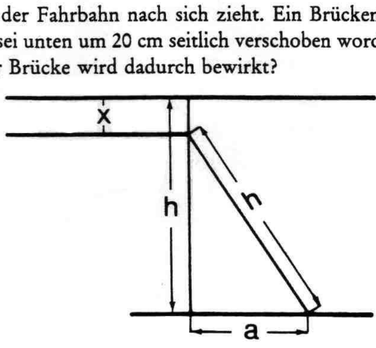
② Manche Kaufhäuser haben das Dach, das über eine Wendelstraße erreichbar ist, als Parkfläche eingerichtet. Wie groß muß man den Radius r_1 für den äußeren Zylinder, der die Wendelstraße umgrenzt, wählen, wenn die Höhe 16 m beträgt und die Straße 4 volle Windungen enthalten und die Steigung der Straße auf ihrer rechten (äußeren) Randlinie 10 % betragen soll?
Wie lang sind weiterhin der äußere und der innere Rand der Straße, wenn diese 4 m breit sein soll?



③ Ein Pkw ist 4,60 m lang und 1,70 m breit. Er steht in einer parkenden Autoschlange und hat zum Vorgänger und Nachfolger nur je 30 cm Abstand. Kann der Wagen aus der Parklücke heraus gefahren werden, ohne die anderen Wagen zu berühren?
Zeichne vereinfacht die Situation von oben (Grundriß)!



④ Besondere Beachtung verdienen Brücken, die regelmäßig kontrolliert werden müssen. Durch Bewegungen der Erde, verursacht z. B. durch starke Regenfälle, können Brückenpfeiler unten verschoben werden, so daß sie nicht mehr lotrecht stehen, was eine Unebenheit der Fahrbahn nach sich zieht. Ein Brückenpfeiler von 12 m Höhe sei unten um 20 cm seitlich verschoben worden. Welche Senkung der Brücke wird dadurch bewirkt?



Lösung:

Hinweise zu den Arbeitsblättern „Pythagoras auf der Straße“

Bei Aufgabe ① ist zu beachten: Durch Ausstrecken erhält man das neue Steigungsdreieck mit h = 600 m und e = 3000 m (Also s ≈ 3059 m, während die direkte Verbindung $\overline{AB}$ rd. 1166 m beträgt). Zusatzfrage: Wie lang müßte die Serpentinenstraße sein, wenn man die Steigung auf 10 % herunterdrücken will? (rund 6030 m).

Im Unterricht erscheint bei Aufgabe ② folgende Hilfe sinnvoll: Schlitzen wir den äußeren Zylinder längs einer Mantellinie (in Gedanken) auf und rollen ihn in der Ebene ab, so erscheint die äußere Randlinie der Wendelstraße, die in Wirklichkeit eine Schraubenlinie ist, als Streckenschar, was an einem Pappmodell sofort einsichtig wird (Bild 4).

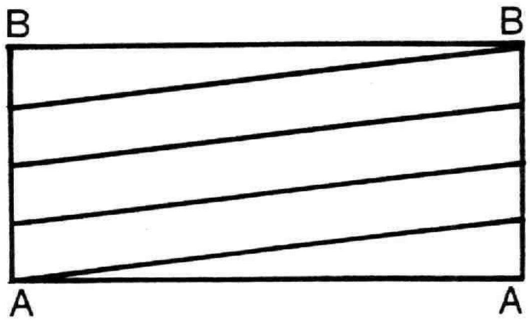


Bild 5: Aufgeschlitztes Pappmodell einer Parkhausstraße.

Länge des Rechtecks = Umfang des Grundkreiszylinders = 10·4 m = 40 m (wegen 10 % Steigung).

Also $r_1 = 40\text{ m} : 2\pi \approx 6{,}37$ m. Damit ist $r_2 \approx 2{,}37$ m und die linke innere Steigung beträgt $4\text{ m} : 2{,}37\text{ m} \cdot 2\pi \approx 27\ \%$ (!).

Länge des äußeren und des inneren Straßenrandes (Pythagoras)

$4 \cdot \sqrt{40^2+4^2}\text{ m} \approx 160{,}8$ m und

$4 \cdot \sqrt{14{,}89^2+4^2}\text{ m} \approx 61{,}7$ m.

Was ändert sich, wenn man $r_1 = 10$ m wählt, bei 4 Windungen, 16 m Höhe und 4 m Straßenbreite?

Zu Aufgabe ③: Die Länge des Parkrechtecks (hier 4,60 m + 2 · 0,30 m = 5,20 m) muß etwas größer sein als die Diagonale des „Autorechtecks“, das hier 4,60 m lang und 1,70 m breit ist. Mit Hilfe des Pythagoras ergibt sich als Länge der „Diagonalen“

$\sqrt{4{,}60^2 + 1{,}70^2}\text{ m} \approx 4{,}90\text{ m} < 5{,}20\text{ m}.$

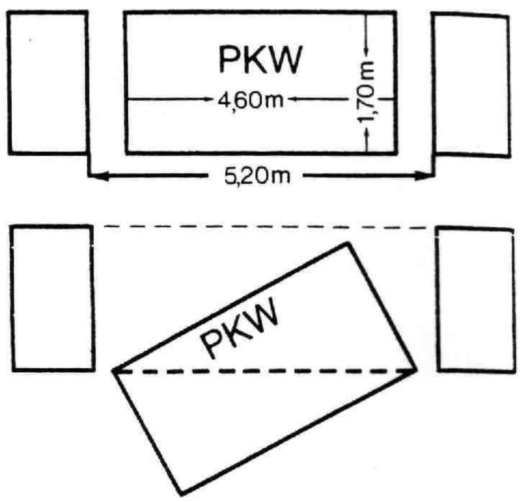


Bild 6: Zeichnung zu Aufgabe ③

Der Wagen kann also sogar ganz gut aus der Parklücke herausgefahren werden. Ginge das auch noch, wenn der Wagen 4,69 m lang und 1,77 m breit (Audi 100) wäre? (Ja). – Wie lang muß das Parkrechteck mindestens sein, wenn ein Pkw von 4,25 m Länge und 1,52 m Breite parken können soll? (4,52 m).

Bei Aufgabe ④ ist ein stark vereinfachendes und vergröberndes Bild der Situation gezeichnet. Gesucht ist x, gegeben sind

h = 12 m, a = 0,2 m.

Es ist $x = h - \sqrt{h^2-a^2}$

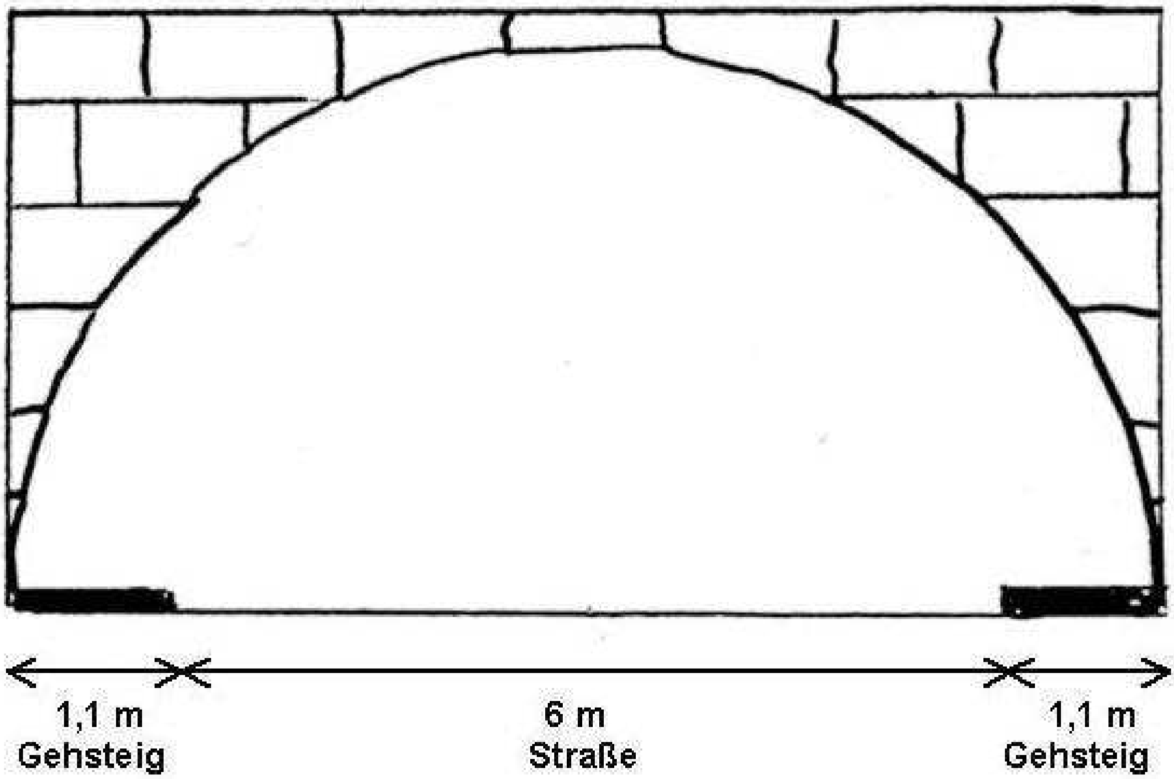
$= 12 - \sqrt{12^2-0{,}2^2}$

$= 12 - \sqrt{143{,}96} \approx 0{,}00166$

Die Brücke senkt sich also um rd. 1,7 mm.

34. **Das Tunnelproblem**

Unterwegs nach Hamburg: Das Tunnelproblem



Stellt euch vor, ihr seid mit einem Transporter auf dem Weg nach Hamburg. Immer auf der $A7$ Richtung Norden. Kurz hinter Göttingen geratet ihr in einen langen Stau und entscheidet euch deshalb, bei der nächsten Abfahrt die Autobahn zu verlassen. Weiter geht's auf der Landstraße. In einer kleinen Ortschaft stellt sich euch allerdings ein schwieriges Problem: die Straße, auf der ihr euch befindet, führt durch einen Tunnel, der euch sehr, sehr niedrig erscheint. Ob der Transporter hindurchpassen wird? Leider haben böse Buben, die in der Gegend ihr Unwesen treiben, das Verkehrsschild zur Höhenbegrenzung, das normalerweise über jeder Straßenunterführung oder Brücke befestigt ist, entwendet. Ein Blick in die Wagenpapiere bringt keine Erleichterung, denn es stellt sich heraus, dass der Transporter $2,70\,\mathrm{m}$ hoch ist. Ganz schön hoch! Das Risiko, auf gut Glück loszufahren, erscheint euch zu groß, zumal das Verkehrsaufkommen auf der Gegenspur sehr groß ist, ihr also auf eurer Fahrspur bleiben müsst.
Aber schließlich erinnert ihr euch an den Matheunterricht. Wenn sich die Höhe der Tunneldurchfahrt an der kritischen Stelle berechnen ließe, hättet ihr ja tatsächlich etwas Nützliches gelernt! Immerhin wisst ihr, dass der Querschnitt des Tunnels halbkreisförmig ist. Außerdem habt ihr ein einfaches Maßband bei euch, mit dem ihr zumindest die Breite der Straße und des schmalen Gehsteigs messen könnt (Maße siehe Zeichnung).

Quelle: Mathematik heute (1996); Text: Dagmar Seuberlich

Lösung: Aufstellen von drei Gleichungen nach Satz des Pythagoras. Lösung des linearen Gleichungssystems. Allgemeine Lösung liefert Höhensatz. Kritische Höhe $\approx 2,79\,\mathrm{m}$; Durchfahrt möglich.

35. **Vermischtes zur Satzgruppe des Pythagoras**

Internet Recherche zum Satz des Pythagoras

Ihr sollt in Zweiergruppen eine Recherche im Internet zum Satz des Pythagoras machen und eure Ergebnisse dokumentieren. Die Dokumentation wird bewertet. Die folgenden Aufgaben geben eine Leitlinie für Recherche und Dokumentation. Die Dokumentation kann handschriftlich erfolgen.

(a) Benutzt eine deutsche Suchmaschine, z.B. `www.altavista.de` oder `www.fireball.de` um geeignete Webseiten zu finden.
Hinweis: Verwendet das Zeichen + und Anführungszeichen z.B. bei „Satz des Pythagoras" (warum?).

(b) Was besagt der Satz des Pythagoras? Gebt drei unterschiedliche von euch gefundene Formulierungen an. Formuliert den Satz auch in euren eigenen Worten.

(c) Schwerpunkt: Findet Beweise zum Satz des Pythagoras und vollzieht sie für euch selbst nach (Mitschrift, Zeichnungen ins Matheheft) Dokumentiert zwei unterschiedliche Beweise (es gibt z.B. arithmetische, Zerlegungs-, Ergänzungs- oder Scherungsbeweise).

(d) Was besagt die Umkehrung des Satzes des Pythagoras?
(Zusatz: Warum muss man die Umkehrung extra beweisen?)

(e) Dokumentiert einige unterschiedliche Anwendungen des Satzes des Pythagoras und dessen Umkehrung.

(f) Findet biografische Daten über Pythagoras und dokumentiert Wesentliches.

(g) Gebt maximal drei Webadressen (URL) an, bei denen das Thema eurer Meinung nach am besten dargestellt wird.

(h) Zusatz: Findet Anekdoten, Witze, Cartoons und sonstiges „Schräges" zum Thema und dokumentiert diese.

36. **Der Satz von Fermat**

MA' :MATIK HNA, 11.7.93

„Fermat-Theorem“: 350 Jahre altes Rätsel gelöst

Als „Beglückung“ empfinden führende Mathematiker auf der ganzen Welt, daß das wohl bekannteste Rätsel der Mathematik jetzt gelöst ist. Andrew Wiles (40) von der Cambridge University legte Fachkollegen einen Beweis der 350 Jahre alten „Fermat-Theorems“ vor. „Durch diesen Beweis hat sich die Landschaft der Mathematik verändert“, würdigte Kenneth Ribet von der Universität von Kalifornien (Berkeley) die Arbeit des Briten.

Der französische Gelehrte Pierre de Fermat hatte 1637 die Behauptung aufgestellt, daß es unmöglich sei, den Kubus einer ganzen Zahl (beispielsweise „zwei hoch drei“) als eine Summe zweier Kuben darzustellen. Anders ausgedrückt: Der Lehrsatz von Pythagoras ist – zumindest für ganze Zahlen – im Dreidimensionalen nicht gültig. Der Franzose blieb in seinem Buch den Beweis schuldig – mit dem schlichten Hinweis, er würde nicht auf den Rand der Seite passen.

Nachdem Generationen von Profi- und Amateur-Mathematikern an der strengen Beweisführung gescheitert waren, gelang nach mehr als 350 Jahren dem Briten Wiles die Verifizierung des Fermatschen Theorems.

„Wiles konnte in seiner Arbeit auf Vermutungen zurückgreifen, die der japanische Zahlenforscher Yutaka Taniyama in den fünfziger Jahren formulierte“, erläuterte Hans-Georg Rück vom Institut für Experimentelle Mathematik der Universität Essen. Bedeutend für die Forschung sei vor allem der strenge Beweis der Taniyama-Thesen. Es könne aber noch bis zu einem Jahr dauern, bis alle Einzelheiten nachgeprüft sind.

(dpa)

Nun ist das Fermatsche Theorem wohl endlich bewiesen

Erledigt?

Die berühmteste mathematische Kopfnuß, der Beweis der Fermatschen Vermutung, ist anscheinend geknackt. Bereits vor eineinhalb Jahren schien es, als habe der Brite Andrew Wiles das Problem gelöst (siehe *ZEIT* 27/93). Doch stellte sich die Meldung wenige Wochen später als voreilig heraus. Eine Lücke im Beweis war aufgetaucht. Wiles scheint sie jetzt geflickt zu haben.

Vor 357 Jahren kritzelte der französische Jurist und Hobbymathematiker Pierre de Fermat an den Rand eines Buches: „Es ist unmöglich, eine Kubikzahl als Summe zweier Kuben zu schreiben, eine vierte Potenz als Summe zweier vierten Potenzen, oder allgemeiner gesagt, irgendeine höhere Potenz als Summe von zwei Potenzen gleichen Grades." Mit anderen Worten: Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ hat keine positiven ganzzahligen Lösungen, wenn n eine ganze Zahl größer als 2 ist (für $n = 2$ gibt es die natürlich, zum Beispiel $3^2 + 4^2 = 5^2$). Fermat fügte hinzu: „Ich habe eine wahrhaft wunderbare Beweisführung dieses allgemeinen Satzes entdeckt, die auf diesem Rand nicht Platz findet." Der Autor nahm sie mit ins Grab. Und bis heute nerven ganze Heerscharen von Hobbymathematikern die Zunft damit, sie hätten Fermats Geheimnis gelüftet. Doch bislang saß noch jedes der Möchtegerngenies einem Trugschluß auf – genauso wie vermutlich seinerzeit der Altmeister selbst.

Vor elf Jahren ließ sich aus einer Arbeit des deutschen Mathematikers Gerd Faltings folgern, daß es für jedes n, das größer als 2 ist, höchstens endlich viele ganzzahlige Lösungen der Gleichung gibt. Zum ersten Mal war damit eine für alle Exponenten gültige Aussage bewiesen. Faltings' Überlegungen hatten eine weitere Konsequenz: Sollte die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ doch lösbar sein, muß einer der Summanden mehr als eine halbe Million Stellen haben. Computerberechnungen haben zudem Fermat für alle n kleiner als 150 000 verifiziert. Ein Beweis wollte dennoch niemandem gelingen.

Im vergangenen Jahr reichte Andrew Wiles seinen 200 Seiten dicken Beweisversuch bei der Fachzeitschrift *Interventiones Mathematicae* ein. Interessierten Kollegen verweigerte Wiles indes den Vorabdruck seines Formelwerks, über das er acht Jahre lang einsam in seinem Büro auf einem Dachboden gegrübelt hatte. Als Faltings, der damals wie Wiles an der Universität Princeton arbeitete, ihn um eine Kopie bat, meinte der Brite, er wolle lieber alles für sich behalten, bis die Arbeit veröffentlicht sei. Unter Mathematikern ist derartige Geheimniskrämerei äußerst ungewöhnlich. Wiles mußte harsche Kritik einstecken.

Wie üblich schickten die Herausgeber der *Interventiones Mathematicae* das Manuskript anderen Fachkollegen zur Durchsicht, und die fanden die Lücke. An der mühte sich Wiles, auf den Dachboden zurückgekehrt, fast ein Jahr lang ab – und nun erzielte er zusammen mit seinem ehemaligen Studenten Richard Taylor, der an der Universität Cambridge in England lehrt, den Durchbruch. Ihre neue, 25 Seiten starke Arbeit schickte Wiles vor drei Wochen zusammen mit der ersten an vier Kollegen. Einer von ihnen war Faltings. Der hat den Beweis inzwischen für richtig befunden: „Ich halte Fermat damit für erledigt."

Wiles scheint nicht nur mathematisch dazugelernt zu haben: Diesmal läßt er die beiden Papiere jedem Fachkollegen zukommen, der sie bei ihm anfordert. Ansonsten hüllt er sich in Schweigen; Interviews verweigert er. Nach der Pleite im letzten Jahr will er wohl abwarten, bis sein Beweis mit ausreichender Sicherheit als korrekt gelten kann. Da sich diesmal viele Köpfe darüberbeugen können, um Fehler zu suchen, sollte sich das innerhalb weniger Wochen herausstellen. Bis dahin gilt die Devise, die Nicholas Katz, ebenfalls Mathematiker in Princeton und ein Freund Wiles', ausgegeben hat: Daumen drücken.

Wolfgang Blum

HNA, 1.7.97

ANDREW JOHN WILES

Das „Jahrhundert-Rätsel“ gelöst

350 Jahre lang haben sich Generationen von Wissenschaftlern und Laien an dem „Fermatschen Problem“ abgemüht. 1994 fand Andrew Wiles die Lösung – eine wissenschaftliche Sensation.

GÖTTINGEN ■ Seit der Schulzeit weiß ein jeder: $x^2 + y^2 = z^2$. Doch gilt die Geichung noch, wenn der Exponent größer ist als zwei? Um das Jahr 1636 be-

VON GERD HENKE

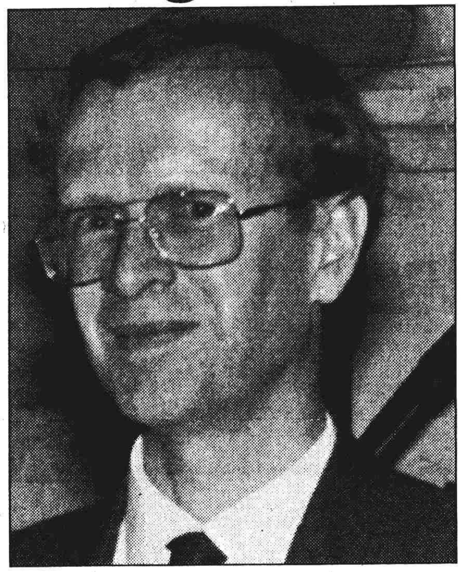
hauptete der französische Jurist und Hobby-Mathematiker, Pierre de Fermat, schlichtweg, daß es eben keine natürlichen Zahlen gäbe, die diese Gleichung erfüllten. Damit war sie – auf den Rand eines Lehrbuches gepinnt – in der Welt, die Vermutung, an der Generationen von Mathematikern schier verzweifelten.

Auch Paul Wolfskehl erging es wie vielen seiner Zunft-Kollegen: Irgendwann während seines Studiums in den 80er Jahren des vorigen Jahrhundert wurde der Sohn eines reichen jüdischen Bankiers mit dem „Fermatschen Theorem“, kurz FLT, konfrontiert. Das Rätsel schlug ihn fortan in seinen Bann und ließ ihn bis zu seinem Tod im Jahr 1905 nicht mehr los. Wolfskehl war so fasziniert von der Aufgabe, daß er testamentarisch einen Preis auslobte: 100 000 Goldmark für den, der den Beweis für Fermats Vermutung lieferte.

Welche Anziehungskraft das zahlentheoretische Problem entfaltete, erfuhr fortan auch die Göttinger Akademie der Wissenschaften. Dort, wo der Wolfskehl-Preis verwaltet wurde, verging kaum eine Woche, in der nicht ein Lösungsvorschlag aus irgendeinem Winkel der Welt im Briefkasten landete. So hatte die Akademie seit 1905 mehr als 5000 Vorschläge zu prüfen. An der mathematischen Fakultät waren eigens Assistenten für die Prüfung der ernstzunehmenden Ansätze abgestellt.

Fast neun Jahrzehnte vergingen, ohne daß der endgültige Beweis für das FLT erbracht werden konnte. Zwar hatte es einige bemerkenswerte Ansätze gegeben, so von dem Essener Mathematik-Professor Gerhard Frey, doch des Rätsels vollständige Lösung war noch nicht gelungen. Die war Andrew John Wiles allein vorbehalten: 1994 – 89 Jahre nach Wolfskehls Testament – ließ sein Aufsatz in den „Annals of Mathematics“ die wissenschaftliche Welt aufhorchen. Der Mathematik-Professor an der amerikanischen Elite-Uni Princeton, hatte den Weg gefunden. Das Jahrhundertproblem war tatsächlich gelöst. Auch die Fachleute der Göttinger Akademie sahen die wissenschaftliche Sensation und erkannten dem heute 44jährigen gebürtigen Engländer den Wolfskehl-Preis zu.

Vergangenen Freitag, drei Jahre nach der Veröffentlichung seines FLT-Beweises, erhielt Andrew John Wiles sein



Andrew John Wiles hat das Fermatsche Problem gelöst. Auf dem Lösungsweg habe der Princeton-Professor der Zahlentheorie völlig neue Wege eröffnet, anerkennen Kollegen. (Foto: Pohl)

Preisgeld in Höhe von 70 000 Mark – ganz wie es Paul Wolfskehl in seinem Testament bestimmt hatte. Die Akademie ehrte Wiles mit einem Festakt anläßlich ihrer Sommertagung. Mit mehr als 1000 Gästen fand die Veranstaltung in der Aula der Universität eine Resonanz wie kaum eine zuvor.

Schon als zehnjähriger Junge sei er in einer öffentlichen Bücherei auf Fermats Problem gestoßen, berichtete Wiles. Von da an habe es ihn nicht mehr losgelassen. Auch während seines Studiums in Cambridge und Oxford sah sich das Mathematik-Genie immer im Bann des FLT. Als Professor in Princeton habe er schließlich „acht Jahre lang Tag und Nacht mit dem Problem gekämpft“, bekannte Wiles.

Er habe „durch souveräne Beherrschung modernster mathematischer Methoden, mit Ausdauer und Genialität“ eines der großen zahlentheoretischen Probleme gelöst, würdigte Gerhard Frey den Preisträger.

Einen Computer habe er dazu nie in Anspruch genommen, verriet Professor Wiles. Den benötige er allenfalls zur Kommunikation.

Lösung: In der HNA vom 11.7.93 wird der Satz auf den dreidimensionalen Fall beschränkt.

37. **Umzugsprobleme**

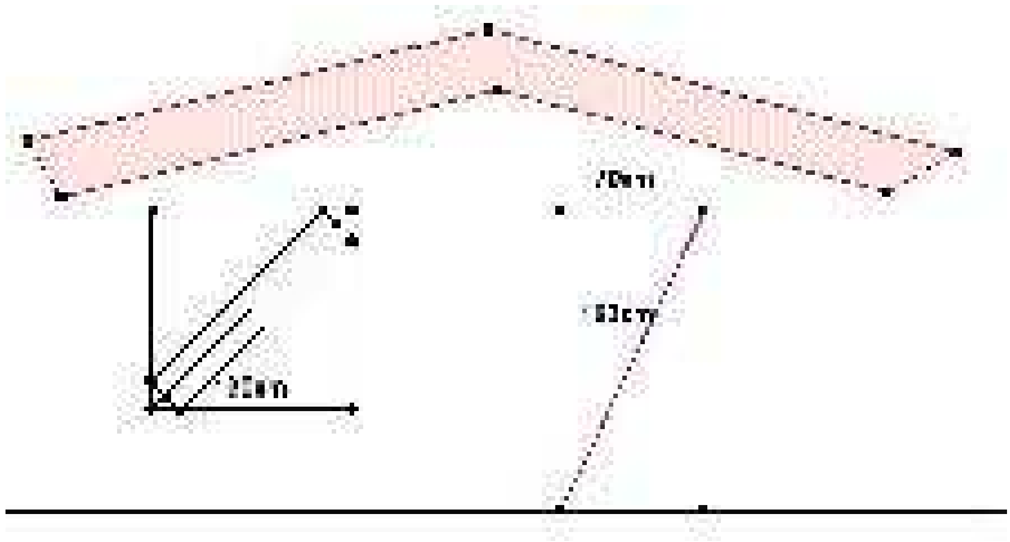
Herr Hurtig will beim Umzug seinen tollen Tisch in die neue Wohnung schaffen. Allerdings ist die Tischplatte 1,83m breit und 2,20 m lang. Sie besteht aus einer starren Metallplatte und einer darunter liegenden Holzplatte. Durch die nur 70cm breite Haustüre geht die Metallplatte, deren Höhe zu vernachlässigen ist, nicht durch.

(a) Wie hoch ist die Haustüre höchstens?

(b) Bekommt er die Platte durch sein quadratisches Fenster, das 1,3m breit ist?

(c) Wie viel muss er von der Breite der Holzplatte absägen, damit die 10cm dicke Platte durch das Fenster passt?

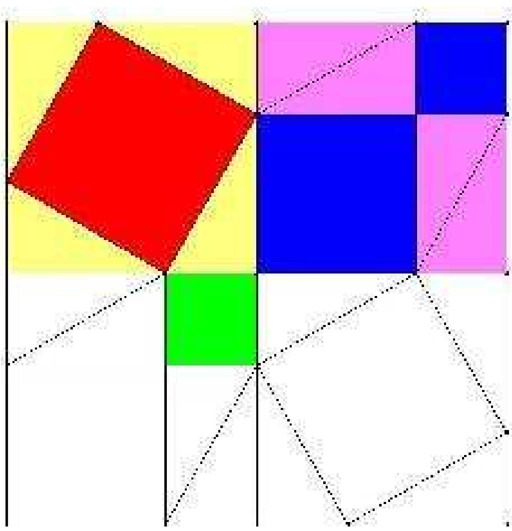
Die Schüler erhalten keine Skizze. Sie sollen aus dem Text ein mathematisches Modell entwickeln, das den oben beschriebenen Sachverhalt möglichst gut wiedergibt. Erst damit lässt sich die Aufgabe bewältigen.

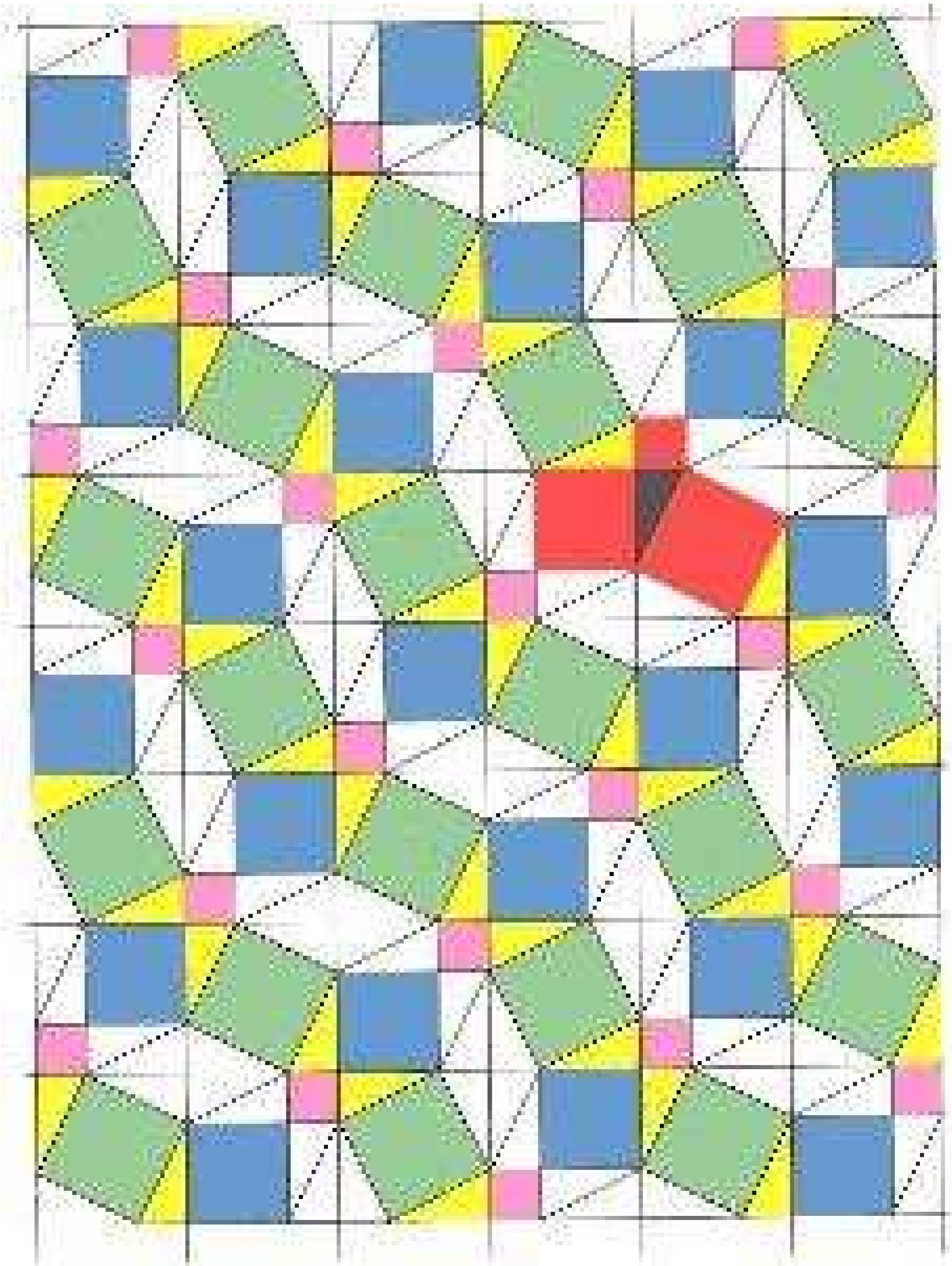


Als Hilfe kann die oben abgebildete Skizze in beweglicher Form mit einem Beamer projiziert werden.

38. **Pythagoras-Parkett**

Ein Pythagoras-Beweis ohne viele Worte





Die Zeichnung kann an der Tafel, am TLP oder am Computer entwickelt werden. Es ist aber auch empfehlenswert, genügend viele rechtwinklige Dreiecke und Quadrate aus Papier oder Karton auszuschneiden, und die Figur durch konkretes Tun zu erzeugen.