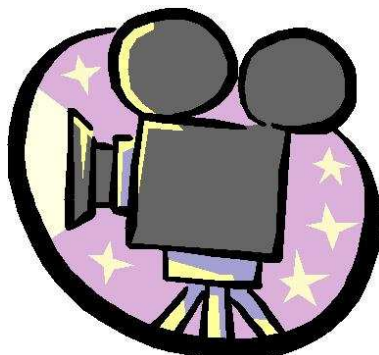


## Oberflächen und Volumina

### 1. Videoclip „Zwei Männer und viele Bälle“



In dem 10-minütigen Videoclip wird gezeigt, wie bei unterschiedlichen Bällen jeweils das Volumen und der Umfang empirisch bestimmt werden.

Im Abspann endet das Video mit der Frage „Was nun?“

Das beiliegende Blatt mit den Messwerten soll als Kopiervorlage dienen und kann an die Schülerinnen und Schüler ausgehändigt werden.

Dann lässt man der Phantasie und Kreativität der Schülerinnen und Schüler freien Lauf.

Angaben in $cm$	Angaben in $cm^3$
70,4	5900
56,5	3050
51,0	2250
38,0	900
20,0	140
12,7	40

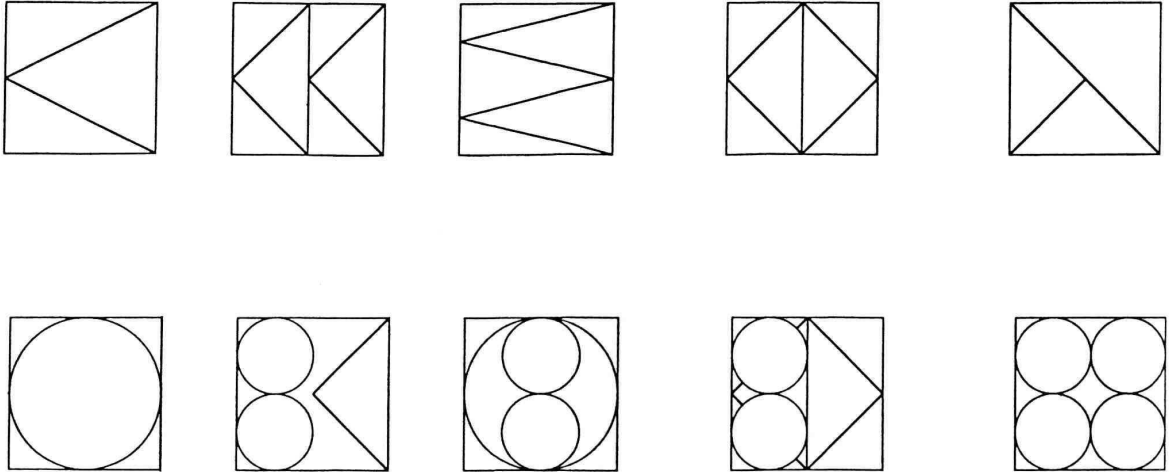
### 2. Rotierende Figuren

Die äußeren Quadrate in der unten stehenden Abbildung haben jeweils die Seitenlänge  $a$ .

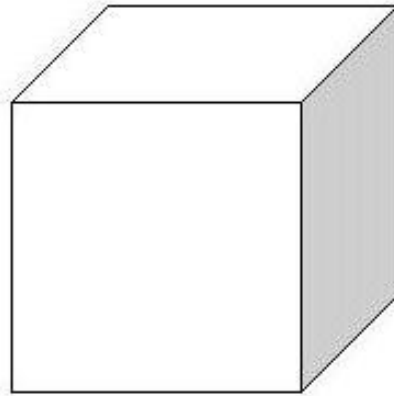
- (a) Bestimme die prozentualen Anteile der Teilflächen.
- (b) Die Figur rotiert - sofern vorhanden - um eine frei wählbare Symmetrieachse.
  - i. Bestimme das Verhältnis der Volumina der entstehenden Körper. Die Bezugsgröße ist der durch das rotierende Quadrat entstehende Körper.
  - ii. Bestimme das Verhältnis der Oberflächeninhalte der entstehenden Körper. Wähle als Bezugsgröße:

- A. den Flächeninhalt des Quadrates;
- B. den Oberflächeninhalt des durch das rotierende Quadrat entstehenden Körpers.

(c) Finde selbst weitere geeignete Figuren und untersuche sie.



### 3. Maximales im Würfel



Setze in den Würfel

- (a) eine Kugel,
- (b) einen Kegel,
- (c) einen Zylinder
- (d) eine Pyramide

mit maximalem Volumen. Vergleiche die Volumina und Oberflächeninhalte der Körper mit dem Volumen und dem Oberflächeninhalt des Würfels.

#### 4. Die A-Klasse



Mercedes bietet von seinem A-Klasse Modell 140 zwei verschiedene Versionen an. Eine „normale“ und eine etwas längere Version. Die normale Version kostet mit Normalausstattung 16530€, die längere 140L Version kostet mit gleicher Ausstattung und Motorisierung 17632€.

Entscheide anhand des Bildes und der folgenden Daten, ...

- ... wie viel qm beim Mercedes 140 bzw. 140L lackiert werden müssen?
- ... wie viele Sprudelkisten (Länge: 35 cm; Breite: 27 cm ; Höhe: 34,5 cm) passen in die jeweiligen Autos bei umgeklappter Rückbank?
- ... ob der Preis des Mercedes 140L gegenüber dem des 140 gerechtfertigt ist.

Version	140	140L
Radstand in <i>mm</i>	2423	2593
Länge in <i>mm</i>	3606	3776
Breite in <i>mm</i>	1719	1719
Höhe in <i>mm</i>	1575	1589
Leergewicht in <i>kg</i>	1105	1060
Nutzlast in <i>kg</i>	385	520
Gesamtgewicht in <i>kg</i>	1490	1580
Ladevolumen in Liter	390	390
Ladevolumen umgeklappt in Liter	1740	1930
Tankinhalt in Liter	54	54

- Lösung:*
- Durch Zerlegen der Gesamtoberfläche der Autos in berechenbare Teilflächen kann unter zu Hilfenahme die  $m^2$ -Anzahl an Lack für die jeweiligen Autos bestimmt werden.
  - Kann durch die Vorgaben nicht bestimmt werden. Annäherung durch Volumenvergleich: Volumen einer Sprudelkiste:  $32600 \text{ cm}^3$   
Volumen des umgeklappten Kofferraums:  $1740000 \text{ cm}^3$  bzw.  $1930000 \text{ cm}^3 \Rightarrow 53$  bzw. 59 Wasserkisten (theoretisch! Praktisch sieht das sicher anders aus)
    - Wenn man davon ausgeht (dem Bild entnommen), dass der umgelegte Kofferraum ca. 30% der Gesamtlänge der Autos einnimmt und man mit Gesamtvolumen, Breite und Länge die Höhe ermitteln kann, dann ergeben sich folgende Maße für die beiden

Kofferräume:

	140	140L
Breite:	1719 mm	1719 mm
Länge:	1082 mm	1133 mm
Höhe:	930 mm	990 mm

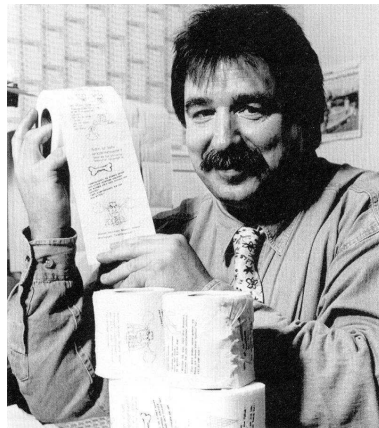
[Hierbei handelt es sich um eine Durchschnittshöhe, die so in der Realität nicht existiert!]

Mithilfe dieser Daten kann man sich nun überlegen, bei welcher Stellweise man wie viele Kisten in den Kofferraum bekommt.

- (b3) Man misst die exakten Daten in einem realen Auto (z.B. im Autohaus) aus und ermittelt mit unter Berücksichtigung der verschiedenen Stellweisen die mögliche Anzahl.
- (c) Wenn die Daten des Mercedes 140 als Grundwerte angenommen werden, dann gilt:
- Mercedes 140L - 107% Radstand
  - 105% Länge
  - 111% Ladevolumen (umgeklappt)
  - 96% Leergewicht (!)
  - 106% Gesamtgewicht
  - 106,5% Preis

Wenn man diese Werte betrachtet, kann man zu dem Schluss kommen, dass bei einem prozentualen Preisvergleich der Preis für den Mercedes 140L im Vergleich zum 140 durchaus angemessen ist.

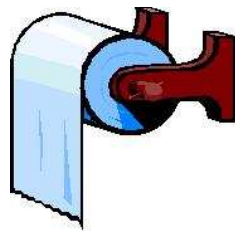
## 5. Klopapier



Das Format ist etwas gewöhnungsbedürftig: ziemlich lang und zehn Zentimeter breit. Aber der gelernte Dekorateur und Werbefachmann Georges Hemmerstoffer, 50, aus Saarbrücken ist dennoch guten Mutes. Denn was für einen normalen Stuhlgänger eine schlichte Rolle Klopapier ist, betrachtet er als „die längste Werbefläche der Welt“.

Wer, genervt von den überlangen Werbeblöcken der TV-Sender, auf seinem WC die werbefreie Stille sucht, soll sich ab Herbst wundern. Rohrreinigungs-, Pharmaunternehmen und Putzmittelhersteller machen den Anfang mit Werbebotschaften auf Toilettenpapier. Die Berliner Band „Knorkator“ hat auch schon fest gebucht. Pünktlich zum Erscheinen ihrer neuen CD will sie die Liedertexte dreilagig zum Mitsingen bringen. Der Kontakt zur Werbebotschaft ist garantiert, schließlich müsse jeder

mehrmals pro Tag auf die Toilette, schwärmt Hemmerstoffer. Hemmerstoffer ist zuversichtlich. Schon prophezeit der Saarbrücker Klopapier zum Nulltarif. Was heute noch im Sechserpack so zwischen 1,5 und 3 Euro kostet, werde dank der Werbebotschaften in ein paar Jahren grundsätzlich „umsonst werden“. Etwa so, wie Anzeigenblätter, die sich rein über Werbung finanzieren. Es bleiben ein paar „emotionale Probleme“. Hemmerstoffer: „Der Gang zur Toilette ist auch heute noch bei manchen Mitmenschen mit höchster Diskretion verbunden“. Doch glücklicherweise werde das Verhältnis der Deutschen zu ihrem Stoffwechsel immer unverkrampfter: Den 1. FC Kaiserslautern als potenziellen Werbetreibenden konnte dieses Argument nicht überzeugen. Dort konterten die Vereinsoberen kurzerhand: „Wir wollen nicht, dass sich unsere Gegner mit unserem Logo den Hintern abwischen“.



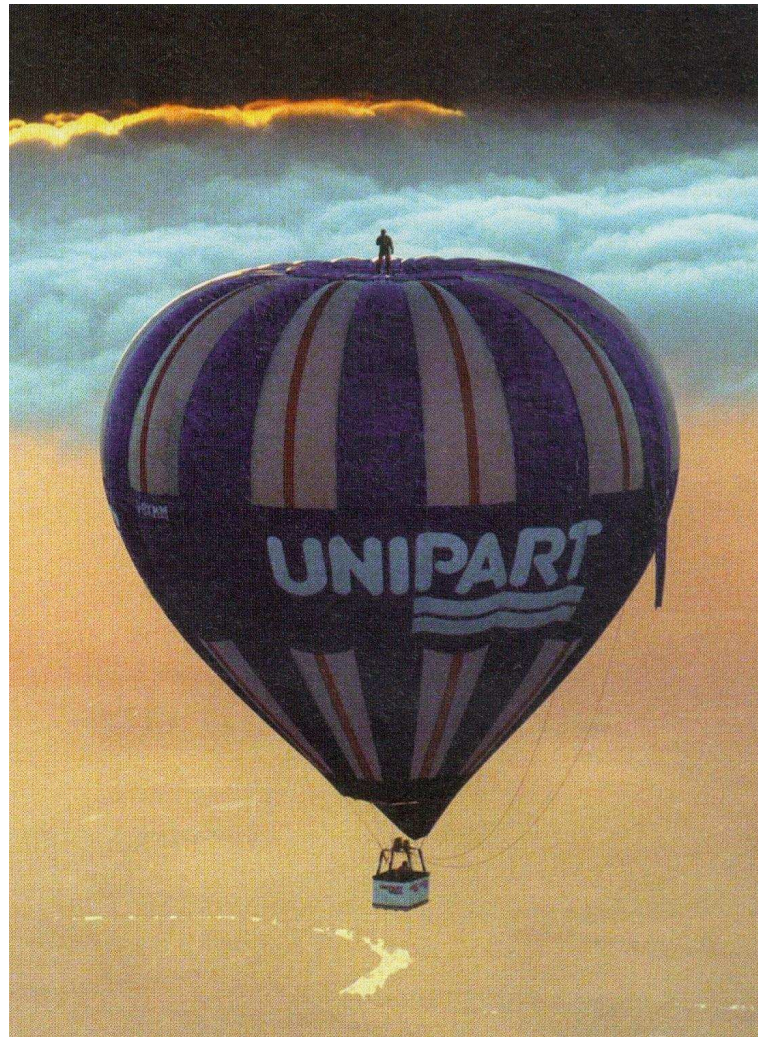
- (a) Wie viel  $m$  Klopapier sind auf einer Rolle?
- (b) Was müsste der Meter Werbung auf einer Rolle kosten, damit die Rolle für den Verbraucher kostenlos ist?
- (c) Schätze: Wie viel € müsste für Werbung auf Klopapier jährlich ausgegeben werden, wenn alle Deutschen (ca. 80 Millionen) ihr Klopapier umsonst bekommen sollen?

Quelle: Herget, W. et al.: Produktive Aufgaben

- Lösung:*
- (a) Ohne eine Klopapier-Rolle vollständig auszurollen (kann am Ende als Kontrolle verwendet werden) ist das Problem der Längenbestimmung keine triviale Aufgabe. Ein möglicher, aber keineswegs naheliegender Weg führt über das Volumen der Klopapier-Rolle. Naheliegender, aber etwas umständlicher ist eine Lösung mit Folgen. Die Papierdicke (mit Luft) beträgt etwa 0,25 mm, wie eine Messung von z.B. 10 Lagen zeigen (dieser Wert variiert zwischen den Herstellern). Die gesuchte Länge  $L$  multipliziert mit der Papierdicke und der Breite ergibt das Volumen des gewickelten Papiers! Für einen Außendurchmesser  $D = 11$  cm und einen Innendurchmesser  $d = 4,5$  cm und die Breite 10 cm ergibt sich somit (alles Näherungswerte):
 
$$V_{\text{gesamte Rolle ohne Innenkern}} \approx 790 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Papier der Länge } L} = 0,25 \text{ cm}^2 \cdot L$$
 Ansatz:  $0,25 \text{ cm}^2 \cdot L = 790 \text{ cm}^3$   
 Somit:  $L \approx 3160 \text{ cm} = 31,60 \text{ m}$
  - (b) Bei 30 Meter pro Rolle kosten 180 Meter ca. 2,25 €. Damit kostet 1 Meter Klopapier 1,25 Cent.
  - (c) Bei der Annahme, dass jeder Bürger pro Tag ca. 1,5 Meter Klopapier (entspricht ungefähr 10 Blatt) benötigt, werden im Jahr mit 365 Tagen ungefähr 547.500.000 € für Klopapier ausgegeben. Das heißt über eine halbe Milliarde DM müsste für Werbung auf Klopapier ausgegeben werden, damit die Rollen umsonst wäre.

## 6. Heißluftballon



Viel heiße Luft bringt einen mit Sicherheit nach oben. Niemand weiß das besser als Ian Ashpole. Der 43-Jährige stand in England auf der Spitze eines Heißluftballons. Die Luft-Nummer in 1500 Meter Höhe war noch der ungefährlichste Teil der Aktion. Kritischer war der Start: Nur durch ein Seil gesichert, musste sich Ashpole auf dem sich füllenden Ballon halten. Bei der Landung strömte dann die heiße Luft aus einem Ventil direkt neben seinen Beinen vorbei. Doch außer leichten Verbrennungen trug der Ballonfahrer keine Verletzung davon.

- (a) Wie viel Luft sind wohl in diesem Heißluftballon?
- (b) Wie viel Stoff benötigte man zur Herstellung dieses Ballons?

Quelle: Herget, W. et al.: Produktive Aufgaben

*Lösung:* Je mehr man mathematisch vorgebildet ist, umso mehr mathematisches Instrumentarium wird man bei dieser Aufgabe wie selbstverständlich einsetzen - und zwar ohne darüber nachzudenken, ob diese hoch genauen Instrumente wirklich genauere Ergebnisse liefern.

So könnte man hier den Heißluftballon sehr genau modellieren, etwa durch eine obere Halbkugel und einen zylindrischen Kegel. In der Analysis bietet sich die Interpretation als Rotationskörper an, wobei der Fantasie für die zugrunde gelegte Kurve (fast) keine Grenzen gesetzt sind - hoffentlich ist das Integral dann elementar lösbar; und wenn nicht, könnte man es schließlich noch numerisch lösen. Aber es geht (auch) hier einfacher: In jedem Fall ist man darauf angewiesen, die Maße des Ballons aus dem Foto zu entnehmen und in die Wirklichkeit hochzurechnen (Proportionen/Verhältnis/Dreisatz). Einziger Bezugspunkt dafür ist wohl der Mann auf der Spitze des Ballons. Daraus ergibt sich für die Höhe des Ballons (ohne Gondel) und ebenso für seine Breite etwa 20 – 25 m. Bei dieser unvermeidbaren Unschärfe sind solch feinsinnige Modellierungen wie die oben aufgeführten schlichtweg „oversized“.

Ein ganz einfaches Modell leistet schon das Gewünschte: Etwa ein Würfel, den wir uns „nach Augenmaß“ so vorstellen, dass er an den Ecken über den Ballon herausragt, seine Seitenfläche aber teilweise in den Ballon „hineintauchen“ - oder eine entsprechend dimensionierte Kugel als geeignete „Ersatz-Form“ für den Ballon.

Auf diese Weise kann man als gute Näherung einen Würfel mit einer Kantenlänge von 16m wählen oder eine Kugel mit einem Durchmesser von etwa 20 m. Das Volumen des Würfels ist besonders einfach:  $V = 4096 \text{ m}^3$  und für die Kugel erhalten wir

$$V = \frac{4\pi}{3} \cdot 10^3 \approx 4180 \text{ m}^3.$$

Beide Modelle liefern für das Volumen also rund  $4000 \text{ m}^3$ , das sind 4 Millionen Liter, und für die Oberfläche ungefähr  $1500 \text{ m}^2$  - mit wenig Rechnung, aber geschickten, der Situation angepassten Überlegungen!

## 7. Zeitungslieferant



Wie schwer ist wohl dieser Zeitungsstapel?

Quelle: Herget, W. et al.: Produktive Aufgaben

## 8. Lagertanks





**Millimeterarbeit** war vonnöten, um die jeweils drei Einzelteile zweier Lagertanks für den Transport vom Gelände der Firma Apparatebau vorzubereiten. Mit sechs Kesselbrücken wurden die riesigen bleiummantelten Behälter jetzt nach Ludwigshafen zu einem großen Chemieunternehmen gefahren. Die Tanks sind nach der Montage 30 Meter groß, sieben Meter breit und fassen jeweils 900 Kubikliter Flüssigkeit. Pro Exemplar erreichen sie ein Gewicht von 150 000 Kilogramm. In den Behältern soll Rückschwefelsäure gelagert werden.

Goslarische Zeitung vom 4.7.1997

- (a) Zeige, dass die im Text genannte Einheit „Kubikliter“ keine Volumeneinheit ist! Welche Potenz einer Längeneinheit wird durch die Einheit „Kubikliter“ dargestellt?
- (b) Berechne das (Außen-)Volumen eines solchen Tanks und korrigiere dann die falsche Einheit!

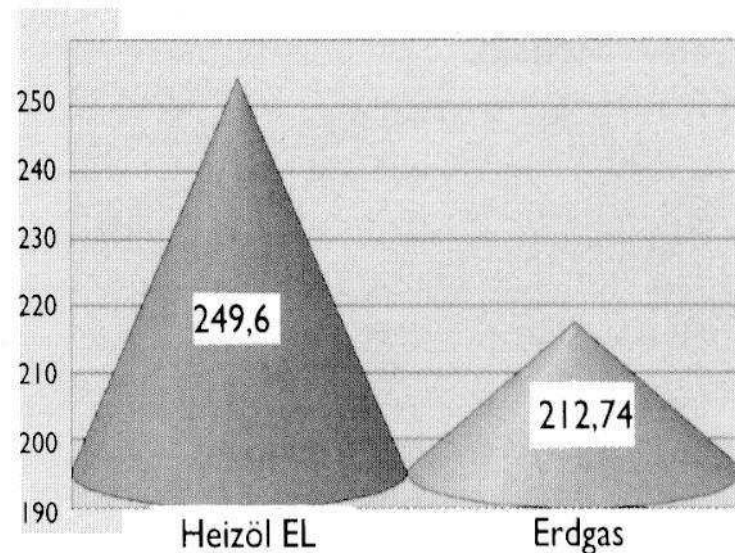
Quelle: Herget, W. et al.: Produktive Aufgaben

*Lösung:* (a) Es gilt  $1 \text{ Kubikliter} = 1 \text{ l}^3 = 1 (\text{dm}^3)^3 = 1 \text{ dm}^9$ . Die Einheit „Kubikliter“ entspricht einer Längeneinheit in neunter Potenz und ist damit keine Volumeneinheit (Längeneinheit in dritter Potenz).

- (b) Gegeben sind die Größe (gemeint ist die Höhe)  $h = 30$  m und die Breite (gemeint ist der Durchmesser)  $d = 7$  m, womit für den Radius  $r = 3,5$  m folgt. Für die Stirnfläche  $A$  der Tanks gilt  $A = \pi r^2$ , somit für das Volumen  $V$  eines Tanks  $V = \pi r^2 \cdot h \approx 1150 \text{ m}^3$ . Aufgrund der Dicke der Wände, des Bodens und der Decke der Tanks ist ihr Fassungsvermögen sicherlich jeweils kleiner als  $1150 \text{ m}^3$ . In der Zeitung sollte es also vermutlich „und fassen 900 Kubikmeter Flüssigkeit“ heißen.

## 9. $\text{CO}_2$ -Emission

Das nebenstehende Diagramm befand sich in der Kundenzeitschrift „Tag und Nacht“ 3/1999 der Wetzlarer Stadtwerke. Es soll Kunden zur Umstellung ihrer Heizungsanlage von Heizöl auf Erdgas motivieren.



Bisherige Minderung der  $\text{CO}_2$ -Emission – unter Berücksichtigung gleicher Energieinhalte – in Tonnen pro Jahr durch Brennstofftausch bei der Aktion WechselGeld

- Was meinst du dazu? Um wie viel Prozent ist der Erdgas-Kegel kleiner als der Heizöl-Kegel?
- Vergleiche mit den angegebenen Zahlen.
- Versuche eine angemessene Darstellung der Werte mit Kegeln (bzw. mit anderen geometrischen Körpern) zu finden.

Quelle: mathematik lehren (1999)

*Lösung:* Der „unbefangene“ Betrachter der Grafik assoziiert nahe liegender Weise das Volumen der dargestellten Kegel als Maß für die  $\text{CO}_2$ -Menge und stellt fest: Bei Erdgasheizung wird die  $\text{CO}_2$ -Emission um rund 60% reduziert. Rechnet man dagegen mit den angegebenen Zahlen, so erhält man eine Reduktion um rund 15%, was weit weniger eindrucksvoll ist.

## 10. Forever-Stone

Als vor einigen Jahren das chemische Mittel „Forever-Stone“ auf den Markt kam, das die Verwitterung von Steinen verlangsamen oder gar stoppen sollte, begann die Diskussion um die Erhaltung der Cheops-Pyramide bei Gise (Abb. auf der nächsten Seite). Viele forderten den Einsatz dieses Mittels, um das älteste und einzige noch erhaltene Weltwunder des Altertums, die Cheops-Pyramide, zu bewahren. Andere lehnten eine derartige Aktion ab, da sie eine Entweihung der alten Grabstätten darstelle. Wieder andere argumentierten, dass die Kosten weit über das hinausgingen, was an anschließenden Mehreinnahmen zu erwarten sei, wohingegen andere meinten, dass bei derartigen Kulturdenkmälern der Kostenaufwand keine Rolle spielen dürfe. Soll das Mittel also angewendet werden oder nicht?

Wenn du einen Bericht für die internationale Gesellschaft für die Bewahrung historischer Güter abgeben müsstest, wie würde deine Stellungnahme aussehen?

Der schriftliche Bericht soll folgende Punkte enthalten:

- Eine Analyse der historischen Bedeutung der Pyramide;
- Eine Kostenaufstellung für die Anwendung des Mittels „Forever-Stone“;
- Eine Erörterung der Vor- und Nachteile der Anwendung;
- Eine Begründung der Entscheidung (möglichst an Diagrammen und grafischen Darstellungen erläutert).

Du sollst deine Überlegungen auch mündlich darstellen. Bei dieser mündlichen Präsentation hast du nur 5 Minuten Zeit. Bitte denke an eine auch visuell gut unterstützte Präsentation.

Als Anlage erhältst du die folgende Produktinformation:

„Forever-Stone“ ist das einzige Mittel, das zur Bewahrung der Steine empfohlen werden kann. Eine Behandlung schützt den Stein für 10 Jahre unter den klimatischen Verhältnissen von Ägypten. Ein Kanister (4 Liter) reicht für 100 m<sup>2</sup> halbporösen Stein und 50 m<sup>2</sup> porösen Stein und kostet 30 €. Für dieses „Pyramiden-Projekt“ bietet Forever-Stone einen Sonderpreis an: Beim Erwerb von mehr als 100 Kanistern erfolgt ein Preisnachlass von 30%.



Quelle: mathematik lehren (2001)

### 11. Der menschliche Körper: Herzschlag

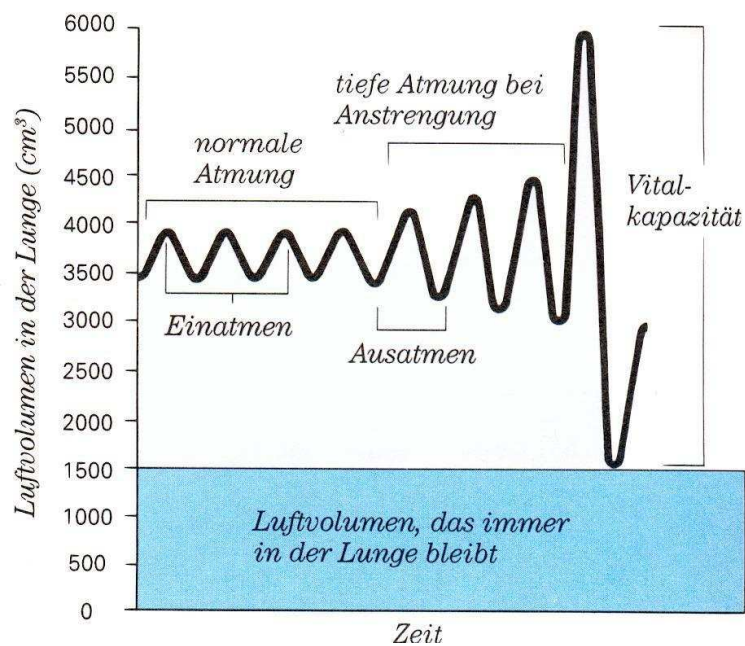
Das Herz des Menschen pumpt bekanntermaßen unsere ca. 5 Liter Blut in einem Kreislauf. Wie lange dauert ein solcher Kreislauf, d.h. ein kompletter Blutumlauf, wenn pro Herzschlag ca. 70 – 100 ml Blut gepumpt werden?

*Lösung:* Das menschliche Herz pumpt pro Herzschlag ca. 70 – 100 ml pro Herzkammer das macht bei ca. 70 Schlägen pro Minute (können die Schüler bei sich selber messen) zwischen 5 und 7 Liter Blut!

### 12. Atmung

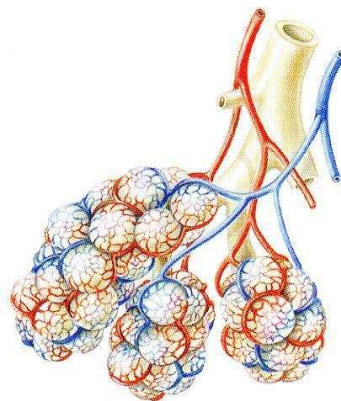
Bestimme näherungsweise deine „Vitalkapazität“ mit Hilfe des neben stehenden Diagramms: Atme dazu so tief wie möglich ein und dann in einen Luftballon aus.

- (a) Wie groß ist das gesamte Luftvolumen deiner Lunge?
- (b) Deine Lunge besteht aus Lungenbläschen, von denen jedes einzelne ein Volumen von ca.  $0,004\text{mm}^3$  hat. Wie viele dieser Lungenbläschen hast du?



In den Lungenbläschen findet der Gasaustausch zwischen Sauerstoff und Kohlendioxid statt. Der Mensch besitzt ca. 400 Mio. Lungenbläschen mit einem Radius von jeweils 0,1 mm.

- (c) Berechne den Gesamtoberflächeninhalt aller Lungenbläschen eines Menschen.  
 (d) Welchen Radius müsste eine einzige Kugel mit dem gleichen Oberflächeninhalt haben?



- (e) Um wie viel Prozent ist die Gesamtoberfläche der Lungenbläschen größer als die der Haut?

- Lösung:* (a)  
 (b)  
 (c)  $\approx 50 \text{ m}^2$   
 (d)  $\approx 2 \text{ m}$   
 (e)  $\approx 2500\%$

### 13. Haut

Das größte Organ des menschlichen Körpers ist die Haut. Versuche mit einem Maßband als Hilfsmittel ungefähr herauszufinden, wie viel Haut ein Mensch hat. Mediziner gehen davon aus, dass bei einem Erwachsenen mit Verbrennungen von mehr als 15% Lebensgefahr besteht. Einer wie großen Fläche entspricht dies?

*Lösung:* ca.  $2\text{ m}^2$  Haut, 15% sind also  $0,3\text{ m}^2$

### 14. Glas im Flugzeug



Auf einem runden Tisch in einem Flugzeug steht ein zylindrisches Glas, das bis zum Rand mit Wasser gefüllt ist. Das Glas ist 12 cm hoch und hat einen Durchmesser von 8 cm. Wir nehmen an, dass das Glas so dünn ist, dass wir im Folgenden von der Dicke des Glases absehen können. Außerdem sehen wir von besonderen physikalischen Eigenschaften wie der Oberflächenspannung des Wassers ab.

Wenn sich das Flugzeug beim Hochsteigen um 20 Grad im Verhältnis zur Erdoberfläche neigt, wie viel Wasser läuft aus dem Glas? Wie viel Prozent des ursprünglichen Inhalts sind dies?

Quelle: Fich, O.: Mathelogik (2001)

*Lösung:* Klar: Das verbliebene Wasser steht bis zu einer unbekanntten Höhe  $h$ . Kippt man das Glas, ist der Flüssigkeitspegel an dieser Stelle höher als  $h$ , sagen wir  $h + x$ . Auf der anderen Seite des Glases ist dann der Pegel natürlich gerade  $h - x$ .

Also müssen wir den Abstand bis zum oberen Rand ( $2x$ ) bestimmen, wenn es auf der gegenüberliegenden Seite gerade am Rand ist.

Dazu denken wir uns ein rechtwinkliges Dreieck in das Glas gelegt, bei dem eine Kathete der (obere) Durchmesser des Glases ist, die Hypotenuse auf der Wasseroberfläche entlangläuft und die andere Kathete gleich der gesuchten Länge  $y = 2x$  ist.

In diesem Dreieck gilt für die gesuchte Länge offenbar:  $y = \tan(20^\circ) \cdot 8\text{ cm}$

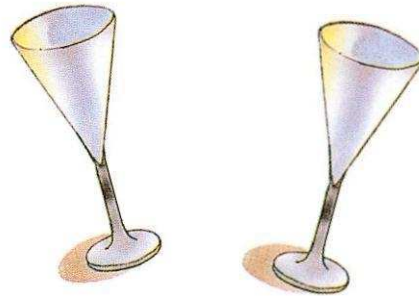
Also ist das verschüttete Volumen:

$V = \frac{1}{2} \cdot (4\text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot 8\text{ cm} \cdot \tan(20^\circ) \approx 73\text{ cm}^3$  und dies sind ca. 12% des ursprünglichen Inhalts.

### 15. Sektgläser

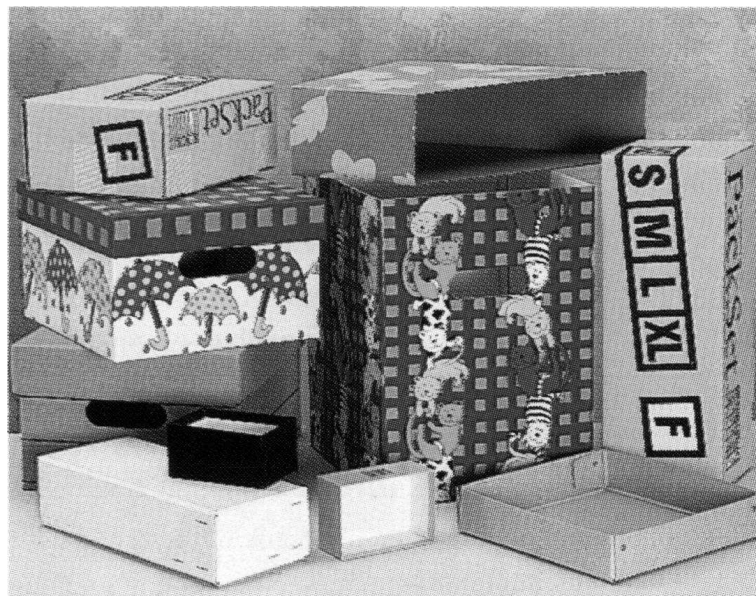
Eine übliche Sektflasche reicht für sieben „normal große“ Sektgläser. Für wie viele Sektgläser reicht eine Sektflasche, wenn die Gläser nur halb gefüllt werden?

Bevor ihr rechnet: Gebt einen Tipp ab und versucht, eine möglichst schöne Begründung zu finden.



*Lösung:* Die folgende Lösung gilt nur für Sektgläser, die die Form von Kreiskegeln haben. Zunächst muss dann geklärt werden, was „halb gefüllt“ bedeutet. Meint man damit, dass die Füllhöhe halbiert wird, so können mit einer üblichen Sektflasche 56 Sektgläser halb gefüllt werden. Dies kann insbesondere mit rein funktionalen Argumenten begründet werden (Halber Radius und halbe Höhe; Radius tritt quadratisch auf, also Volumen nur  $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$  des ursprünglichen).

## 16. Faltkartons

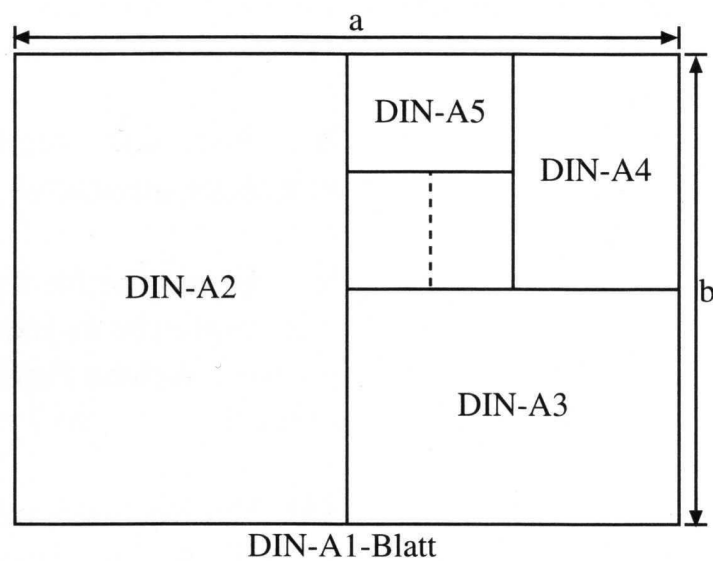


- Untersuche Faltkartons für Zeitschriften, Umzüge usw. Zeichne Netze für die Kartons und baue sie nach. Berechne jeweils den Papierverbrauch und den Rauminhalt. Welche Kartonform wird man wählen, wenn der Verbrauch möglichst niedrig sein soll?
- Suche dir noch interessantere Körper, die in deinem Alltag vorkommen, und wiederhole die Aufgabe mit ihnen.

## 17. Papierformate

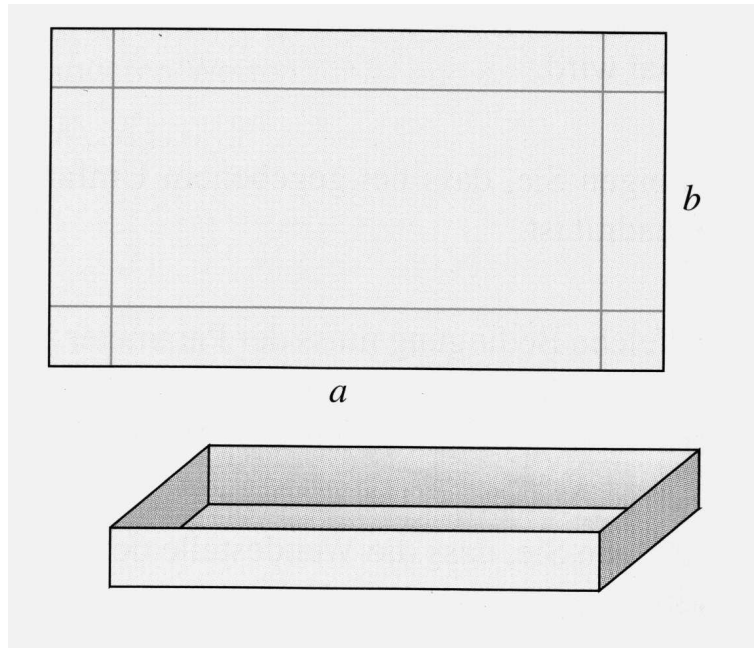
In Deutschland werden bestimmte Papiergrößen nach der Deutschen Industrie Norm (DIN) bezeichnet. Für DIN-A Formate von Papier gelten folgende Bedingungen:

- Die Rechtecke sind einander ähnlich.
- Durch Halbieren der längeren Seite erhält man das nächstkleinere DIN-A Format.
- Ein Rechteck des Formats DIN-A 0 ist  $1 \text{ m}^2$  groß.



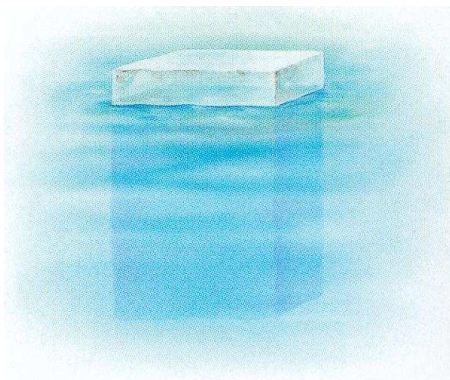
- Bestimme den Verkleinerungsfaktor, den man am Fotokopierer einstellen muss, um ein DIN-A4 Blatt auf DIN-A5 zu verkleinern.
- Wie ist das beim Verkleinern von DIN-A2 auf DIN-A3?
- Eine Fabrik stellt aus DIN-A4 Pappstücken oben offene quaderförmige Pappkästen mit maximalem Volumen her (siehe Abbildung). Dabei wird an jeder Ecke ein Quadrat als Klebefalz benutzt. Den wie vielfachen Rauminhalt hätte ein solcher Kasten aus DIN-A3 Papier?





- Lösung:* (a) Für das DIN-A4 Blatt beträgt das Seitenverhältnis  $a : b$ , für das Blatt DIN-A5 beträgt es  $b : \frac{a}{2}$ . Also gilt:  $\frac{a}{b} = \frac{2 \cdot b}{a} \Rightarrow a^2 = 2b^2$ . Das Seitenverhältnis  $a : b$  beträgt also  $\sqrt{2} : 1$ . Der Flächeninhalt wird halbiert, also wird jede Seitenlänge (und darauf bezieht sich die eingestellte Zahl) um den Faktor  $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 70,71\%$  gekürzt.
- (b) entsprechend
- (c) Auf anschaulichem Niveau: Klar, die Schachteln sind ähnlich zueinander. Jede Seitenlänge wird mit dem Faktor  $\sqrt{2}$  gestreckt, also vervielfacht sich das Volumen um den Faktor  $\sqrt{8}$ .

## 18. Schwimmende Körper



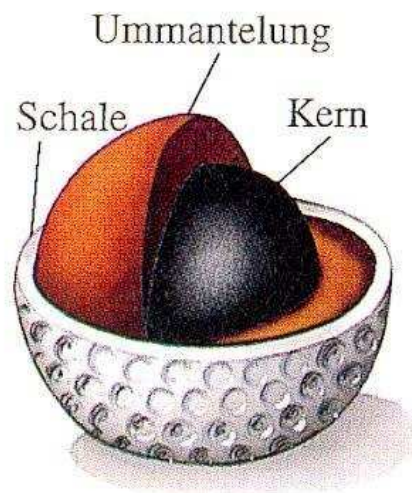
Wenn ein Körper im Wasser schwimmt, so stimmt seine Masse mit der Masse des von ihm verdrängten Wassers überein. Ein quaderförmiger Eisblock ist 80 cm lang, 25 cm breit und 20 cm tief. Wie tief taucht der Eisblock ins Wasser ein (Dichte: Eis  $0,9 \frac{g}{cm^3}$  - Wasser  $1 \frac{g}{cm^3}$ ) ?

*Lösung:* 72 cm

## 19. Golfball

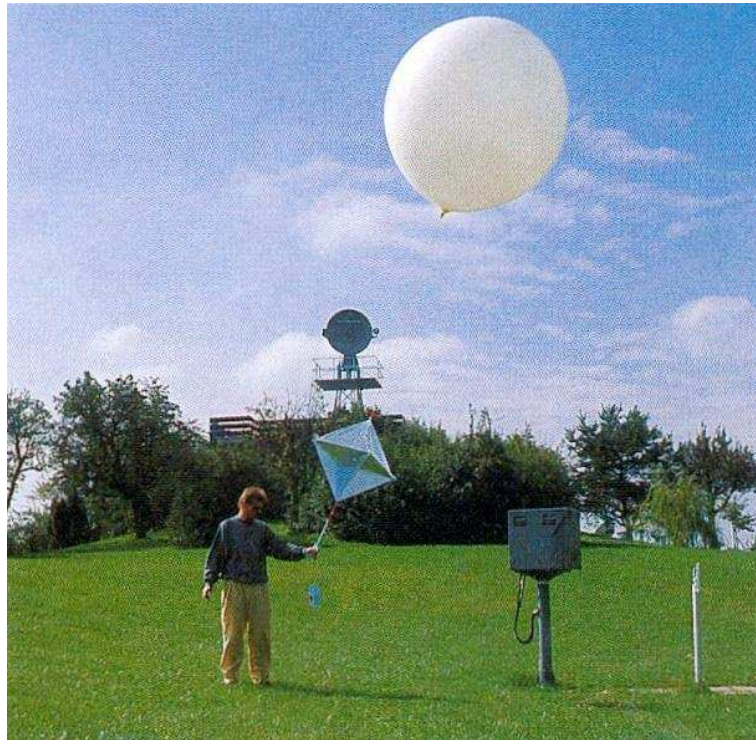
Ein Turniergolfball besteht aus drei Schichten, dem Kern, der Ummantelung und der Schale. Ein Ball hat 42,8 mm Durchmesser und ein Gewicht von 46,23 g. Die Ummantelung hat eine Schichtdicke von 3,0 mm, der Kern hat einen Durchmesser von 34,8 mm, die Schale hat eine Dicke von 1,0 mm.

- Bestimme den prozentualen Anteil des Volumens der Schale, der Ummantelung und des Kerns am Gesamtvolumen des Balles.
- Die Schale ist aus Lithium,  $1 \text{ cm}^3$  Lithium wiegt 0,534 g, die Ummantelung aus Graphit,  $1 \text{ cm}^3$  wiegt 2,39 g. Welche Dichte hat das Material des Kerns?



*Lösung:* (a) Kern: 54% / Ummantelung: 33% / Schale: 13%  
(b)  $0,5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

## 20. Wetterballon

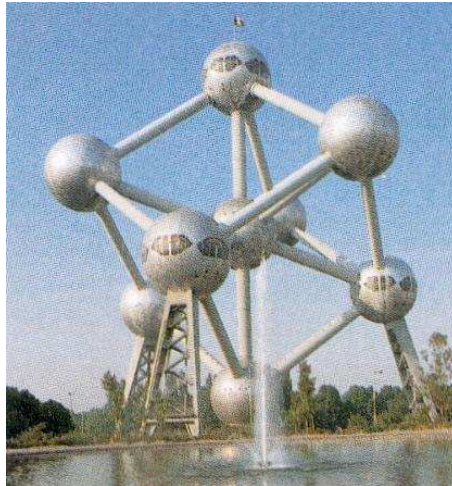


Viermal am Tag lässt die Aerologische Abteilung des Wetteramts Stuttgart vom Schnarrenberg aus einen Wetterballon in die Atmosphäre aufsteigen, der beim Aufstieg Wetterdaten sammelt und dieser zur Erde funkt. In der dünner werdenden Atmosphäre nimmt das Volumen des Ballons zu bis er schließlich in 30 bis 35 km Höhe zerplatzt. Am Boden besitzt der Wetterballon einen Durchmesser von etwa 1,70 m.

- (a) Berechne das Gewicht seiner hochempfindlichen Latexhülle, von der  $1 \text{ dm}^2$  etwa 1,1 g wiegt.
- (b) Bis zum Zerplatzen wächst das Volumen auf das 500fache an. Berechne die Oberfläche des Ballonriesen.

*Lösung:* (a) 1 kg  
(b)  $572 \text{ m}^2$

## 21. Atomium



Das Wahrzeichen der Weltausstellung 1958 in Brüssel ist das „Atomium“. Es besteht aus 9 Kugeln von je 18 m Durchmesser. Berechne das Gesamtvolumen aller Kugeln. Wie viele m<sup>2</sup> muss ein Reinigungsteam putzen (ohne das Gestänge zwischen den Kugeln), wenn das Wahrzeichen so glänzen soll, wie hier auf dem Bild? Vergleiche mit den Quadratmetern an Fensterfläche bei euch zu Hause, die beim Frühjahresputz auf Hochglanz gebracht werden!

*Lösung:* 27482 m<sup>3</sup> Gesamtvolumen / 9160 m<sup>2</sup>

## 22. Brunnen

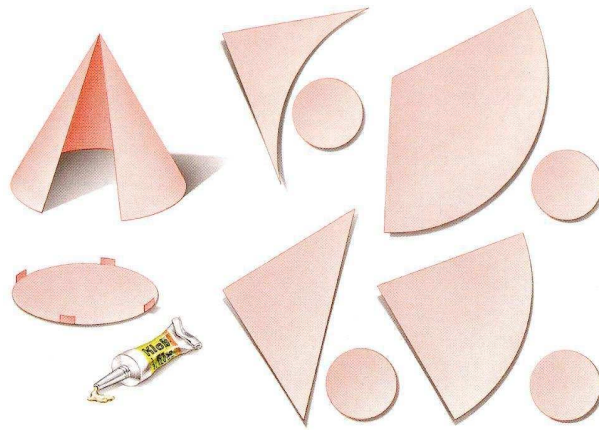
Bei einem Brunnen wird eine Granitkugel ( $d = 1\text{ m}$ ) durch einen Wasserstrahl in der Schwebe gehalten. Berechne das Gewicht der Kugel ( $1\text{ cm}^3$  wiegt 2,9 g).



*Lösung:* 1518 kg

## 23. Kegel

- Aus welchen Flächen lässt sich ein Kegel herstellen?
- Schneide einen Viertelkreis, einen Halbkreis und einen Dreiviertelkreis mit je 8 cm Radius aus und forme offene Kegel. Wie groß sind jeweils die Grundkreisdurchmesser? Wie kann man sie berechnen?



#### 24. Turmspitze

Ein Turmdach hat die Form eines Kegels mit dem Grundkreisdurchmesser  $d = 4,8$  m und der Höhe  $h = 6$  m.

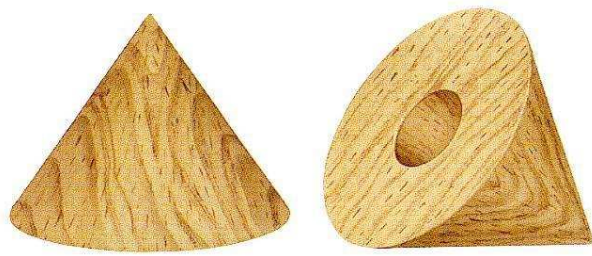
- (a) Berechne den umbauten Raum
- (b) Wie teuer ist die Belegung mit Dachplatten, wenn für  $1 \text{ m}^2$  Dachbelegung  $285 \text{ €}$  berechnet werden?



#### 25. Holzkegel

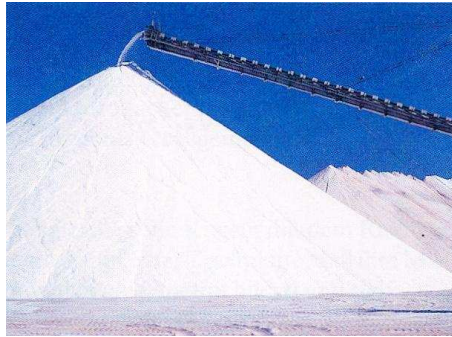
Ein Holzkegel (Buche:  $0,7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ) hat ein Gewicht von  $665 \text{ g}$  und eine Höhe von  $7,5 \text{ cm}$ .

- (a) Berechne den Radius des Kegels.
- (b) Welchen Durchmesser muss eine  $4 \text{ cm}$  tiefe Bohrung haben, damit das Gewicht des Kegels auf  $650 \text{ g}$  verringert wird?



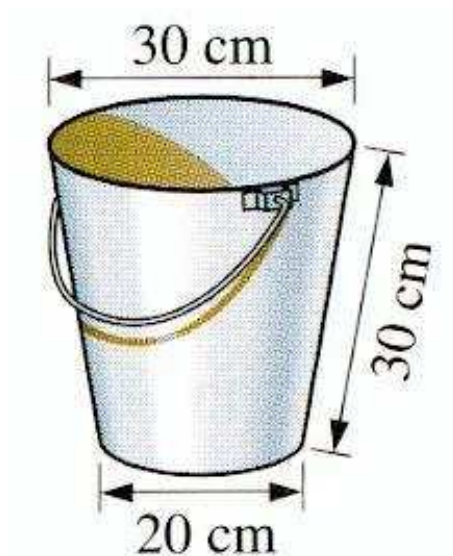
**26. Sandhaufen**

Über ein Förderband werden  $2 \text{ m}^3$  Sand wie nebenstehend abgebildet aufgeschüttet. Welche Bodenfläche bedeckt der Sandhaufen bei einer Höhe von  $0,8 \text{ m}$ ?



**27. Blech-Eimer**

Eine Firma stellt Eimer aus Zinkblech her. Wie viel Quadratmeter Blech werden zur Herstellung von 1000 Eimern gebraucht, wenn mit 14% Verschnitt gerechnet werden muss?

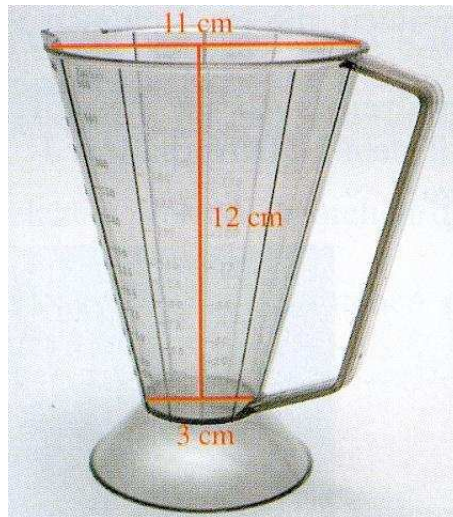


## 28. Messbecher

In jeder Küche ist ein Messbecher notwendig, um die Menge von Flüssigkeiten oder Zucker, Mehl und ähnliches zu bestimmen.

- Wie viel Kubikzentimeter Wasser fasst der nebenstehende Messbecher?
- In welcher Höhe ist auf dem Mantel des Messbechers die Markierung für  $\frac{1}{20}$  l ( $\frac{1}{10}$  l;  $\frac{1}{8}$  l;  $\frac{1}{4}$  l und  $\frac{1}{2}$  l) anzubringen?
- Der Messbecher fasst 350 g Mehl. In welcher Höhe ist die Markierung für 10 g (20 g; 30 g; 40 g; 50 g; 100 g; 150 g; 200 g und 250 g) Mehl anzubringen?

*Anleitung:* Zeichne eine Schnittfigur des Messbechers und verlängere sie so weit, dass ein Kegel entsteht! Wende den zweiten Strahlensatz an!



## 29. Cheopspyramide

Die größte ägyptische Pyramide, die Cheopspyramide (erbaut um 2600 v.Chr.), ist eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Ihre Grundkante war 233 m lang, ihre Seitenkanten 221 m.

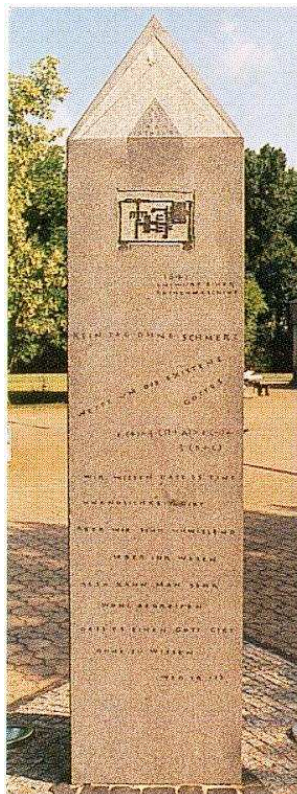
- Wie hoch war die Pyramide ursprünglich?
- Das verwendete Gestein wiegt 2,75 t pro  $m^3$ . Wie viel t Gestein wurden benötigt, wenn man von den Gängen und Kammern im Inneren der Pyramide absieht?
- Heute hat die Cheopspyramide aufgrund der Verwitterung nur noch eine Grundkantenlänge von 227 m und eine Höhe von 137 m. Wie viel Prozent des ursprünglichen Volumens sind inzwischen verwittert?
- Angenommen, Christo und Jeanne-Claude möchten die Cheopspyramide verhüllen. Wie viel  $m^2$  Gewebe benötigen sie dazu mindestens?



*Christo und Jeanne-Claude  
verpackten im Juni 1995  
den Reichstag in Berlin.*

### 30. Denkmal

Im Hof des Pascal-Gymnasiums steht ein Denkmal für Blaise Pascal. Es besteht aus Granit und hat eine Gesamthöhe von 2,50 m. Die Grundfläche ist ein gleichseitiges Dreieck mit einer Seitenlänge von 30 cm. Die Pyramide ist 43 cm hoch. 1 dm<sup>3</sup> Granit wiegt 2,9 kg. Wie schwer ist das Denkmal?

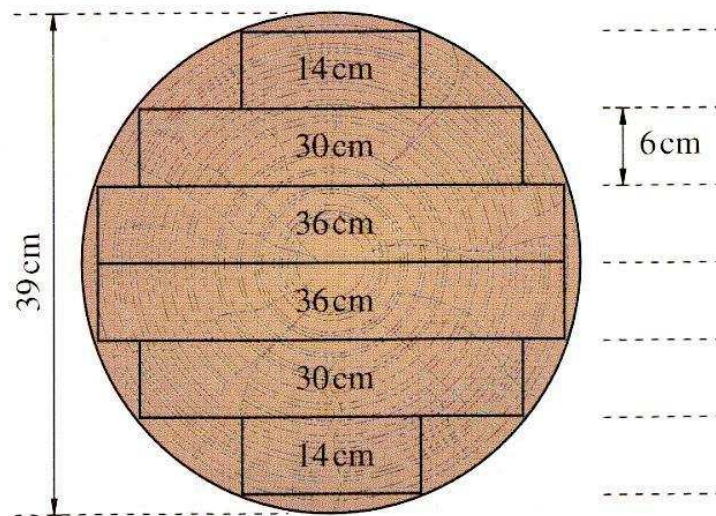




### 31. Baumstamm

Aus einem 39 cm dicken und 7 m langen Baumstamm sollen Dielen gesägt werden wie in nebenstehender Abbildung angegeben.

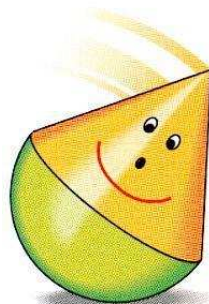
- Berechne das Volumen des Baumstamms.
- Wie viel  $m^3$  Holz kann für die Dielen genutzt werden? Wie viel Prozent beträgt der Schnittverlust
- Wenn die Dielen eine Dicke von 1,5 cm haben sollen, wie viel  $m^2$ -Wohnfläche können damit ausgelegt werden?



### 32. Stehaufmännchen

Ein 11 cm hohes Stehaufmännchen besteht aus einer Halbkugel von 4 cm Radius und einem aufgesetzten Kegel. Beide Teile sind aus dem gleichen Material.

- Wie groß ist der Rauminhalt?
- Wie viel Prozent des Rauminhaltes befinden sich in der Ruhelage unterhalb des Kugelmittelpunktes?
- Damit ein Stehaufmännchen funktioniert, darf der aufgesetzte Kegel höchstens so schwer sein wie die Halbkugel. Ist das hier der Fall?
- Wie hoch darf bei einem Stehaufmännchen der aufgesetzte Kegel höchstens sein, damit das Stehaufmännchen funktioniert?



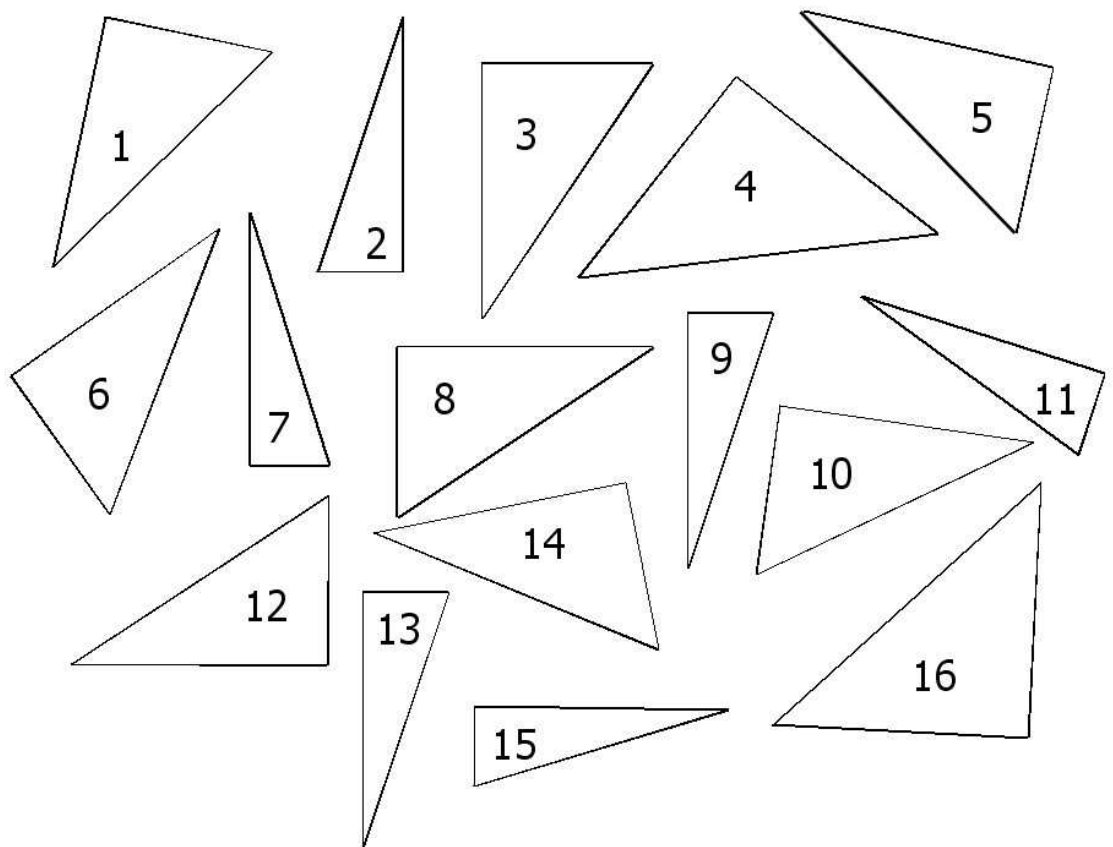
### 33. Fresh-Drinks

Eine Getränkefirma bietet ihre verschiedenen Sorten Fresh-Drink in Standard-Tetrapacks an, deren Höhe immer doppelt so groß ist wie die Kantenlänge der quadratischen Grundfläche.

- (a) Wie viel Milliliter Fresh-Drink befinden sich in einem 10 cm hohen Mini-Tetrapack?
- (b) Die Verpackung wiegt 10 g. Wie schwer ist das Trinkpäckchen ? (Nimm an, dass der Fresh-Drink und Wasser die gleiche Dichte haben.)
- (c) Bestimme einen Term für die Oberfläche eines beliebigen Standard-Tetrapacks.
- (d) Während einer Sonderaktion werden Party-Tetrapacks abgefüllt, deren Kantenlängen um jeweils 5 cm länger sind als die der Standard-Tetrapacks. Die Oberfläche der Party-Tetrapacks ist doppelt so groß wie die der Standardverpackung. Wie viel Liter Fresh-Drink ist in der Standardverpackung?
- (e) Die Firma bietet Trinkpäckchen im 3-er Pack an. Dieser ist 15,9 cm lang und 5,3 cm breit. Je 5 dieser 3-er Packs sollen hintereinander in 4 mm starken Kartons verpackt werden. Wie lang und wie breit ist ein solcher Karton? Die Kartons sollen so auf eine 1 m x 1 m große Palette gepackt werden, dass sie an den Rändern nicht überstehen. Skizziere, wie man diese Kartons auf der Palette anordnen kann und gib an, wie viele Kartons höchstens in einer Lage untergebracht werden können.

### 34. Kongruente Dreiecke

- a) Welche dieser Dreiecke sind kongruent?



b) Setze alle Dreiecke zu einer möglichst einfachen Fläche zusammen.

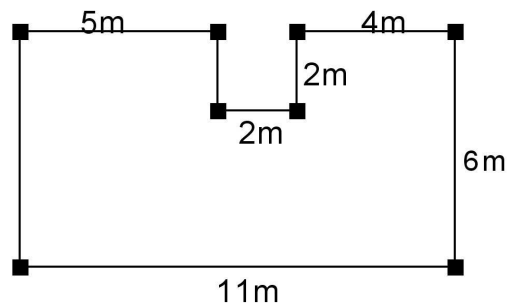
*Lösung:*

35. Mit zweierlei Maß messen...

- a) „Maßstab 1:250 000“ — erkläre die Bedeutung dieser Angabe.
- b) Welcher wirklichen Länge entsprechen 25 mm auf einer Karte?
- c) Welchen wirklichen Flächeninhalt hat ein kreisförmiges Gebiet, das auf der Karte einen Radius von 1,4 cm hat?
- d) Die Orte Großdorf und Kleindorf liegen 64 km auseinander. Welcher Länge entspricht das auf der Karte?

*Lösung:*

36. Top-Figur

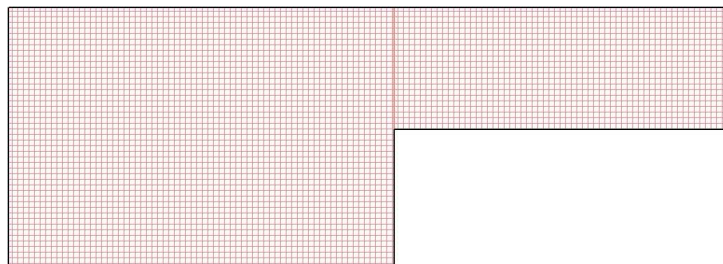


- Berechne den Flächeninhalt der abgebildeten Figur.
- Gib den Maßstab zu dieser Abbildung an.
- Berechne den Umfang der Figur.
- Stelle dir die Figur als geschlossenes Rechteck vor. Wie viel Prozent der Gesamtrechtecksfläche macht das entstandene Quadrat aus?

*Lösung:*

- $62 \text{ m}^2$
- Maßstab 1:200
- 38 m
- ca. 6,06 %

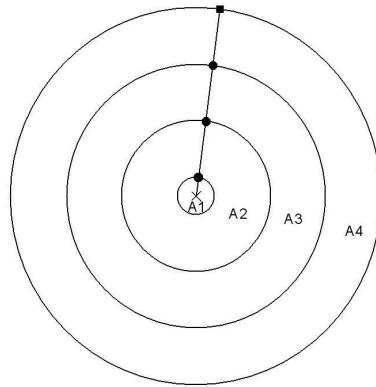
### 37. Liegender Teppich



Abgebildet ist der Fußboden zweier ineinander übergehender Zimmer im Maßstab 1:100. Dieser Fußboden soll mit Teppichboden ausgelegt werden. Um die Teppichkanten soll eine Leiste angebracht werden. Der Teppichboden kostet 26 € pro  $\text{m}^2$ ; ein Meter Fußleiste kostet 5,80 €. Wie teuer wird die Renovierung?

*Lösung:*  $21,7 \text{ cm}^2$  bzw.  $21,7 \text{ m}^2$ ; Messungenauigkeit in Wirklichkeit mit einbeziehen.  
 Preis (Teppich): 564,20 €  
 $24,8 \text{ cm}$  bzw.  $24,8 \text{ m}$   
 Preis (Leisten): 143,84 €  
 Preis (gesamt): 708,04 €

### 38. Kreisringe

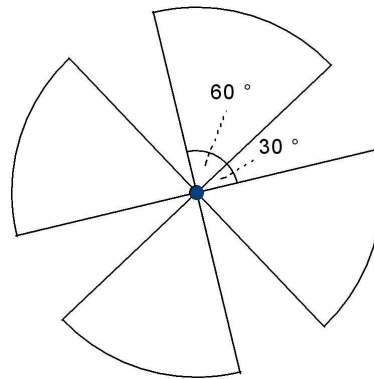


- a) Berechne die Größe der Kreisringflächen  $A_2$  bis  $A_4$ . Beachte die Größe des jeweiligen Radius. Der Radius  $r_1$  des kleinen Innenkreises beträgt 0,75 cm; die Breite jedes Kreisringes beträgt 2,5 cm.
- b) Wie viel Prozent der gesamten Kreisfläche entfällt auf die Kreisringfläche  $A_4$ ?

*Lösung:* a)  $A_{Kr2} = 31,42 \text{ cm}^2$ ,  $A_{Kr3} = 70,69 \text{ cm}^2$ ,  $A_{Kr4} = 110,0 \text{ cm}^2$   
 b) ca. 51,42%

39. Urlaub in Holland

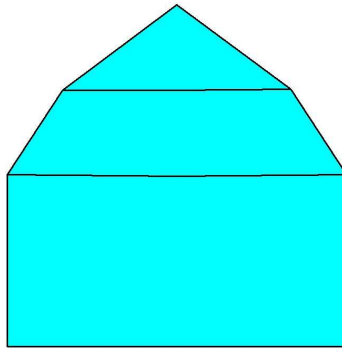
Berechne den Flächeninhalt der Mühlenflügel ( $d = 8 \text{ cm}$ ).



*Lösung:*

40. Bunte Bude

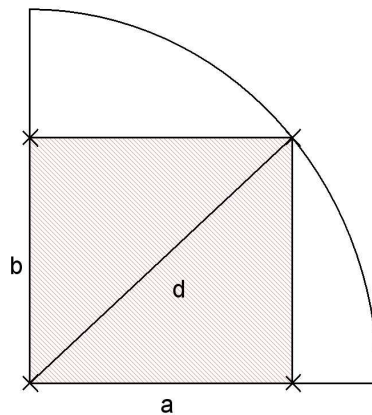
Die unten abgebildete Giebelfläche eines Gebäudes (Maßstab 1:150) soll mit Farbe gestrichen werden.



- a) Berechne die Fläche. Entnimm dazu die Maße der Zeichnung, beachte den Maßstab.
- b) Ein Eimer Farbe enthält 18 kg und kostet 65,00 €. Pro  $\text{m}^2$  werden 1,2 kg benötigt. Wie teuer wird der Anstrich?

*Lösung:* a)  $14,772 \text{ cm}^2$  bzw.  $33,237 \text{ m}^2$   
 b) 39,8844 kg; 2,2 Eimer  $\Rightarrow$  3 Eimer; 195 € kostet der Anstrich.

#### 41. Flächen berechnen

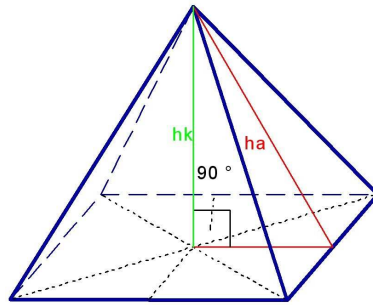


Berechne den Flächeninhalt der weißen Fläche ( $d = 8 \text{ cm}$ ,  $a = 6,5 \text{ cm}$ ).

*Lösung:*  $50,27 \text{ cm}^2 - 30,32 \text{ cm}^2 = 19,95 \text{ cm}^2$

#### 42. Wer im Glashaus sitzt...

Von einer Pyramide aus Glas (Dichte für Glas  $\rho = 2,7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ) mit quadratischer Grundfläche sind gegeben:



- a)  $a = 15 \text{ cm}$ ,  $h_a = 18 \text{ cm}$
- b)  $h_k = 7,8 \text{ cm}$ ,  $h_a = 9,4 \text{ cm}$
- c)  $V = 260 \text{ l}$ ,  $h_k = 7,2 \text{ dm}$

Berechne die jeweils fehlenden Größen ( $a$ ,  $h_a$ ,  $h_k$ ,  $s$ ,  $V$ ,  $M$ ,  $O$  und die Masse  $m$ )!

- Lösung:*
- a)  $h_k = 16,36 \text{ cm}$ ;  $s = 19,5 \text{ cm}$ ;  $V = 1227,23 \text{ cm}^3$ ;  $M = 540 \text{ cm}^2$ ;  $O = 765 \text{ cm}^2$ ;  $m = 3313,52 \text{ g}$
  - b)  $a = 10,49 \text{ cm}$ ;  $s = 10,76 \text{ cm}$ ;  $M = 197,248 \text{ cm}^2$ ;  $O = 307,328 \text{ cm}^2$ ;  $V = 286,208 \text{ cm}^3$ ,  $m = 772,7616 \text{ g}$
  - c)  $a = 10,41 \text{ cm}$ ;  $h_a = 8,88 \text{ cm}$ ;  $s = 10,3 \text{ cm}$ ;  $M = 184,932 \text{ cm}^2$ ;  $O = 293,266 \text{ cm}^2$ ;  $m = 702 \text{ g}$

43. Kupferbolzen

Ein Zylinder aus Kupfer (Dichte für Kupfer  $\rho = 8,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ) hat eine Masse von 1500 kg und eine Körperhöhe von 45 cm.

- a) Fertige eine Planfigur an.
- b) Berechne das Volumen und die Oberfläche des Zylinders.

*Lösung:* b)  $V = 168,539 \text{ dm}^3$ ;  $O = 172,5315402 \text{ dm}^2$

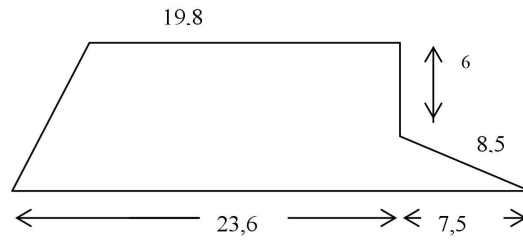
44. Die Würfel sind gefallen. . .

Wie oft passt ein Würfel mit der Kantenlänge 2 cm in einen Würfel mit den Kantenlängen 6 cm, 8 cm, 4 cm?

*Lösung:* 27 mal, 64 mal, 8 mal

45. Flächeninhalt und Umfang

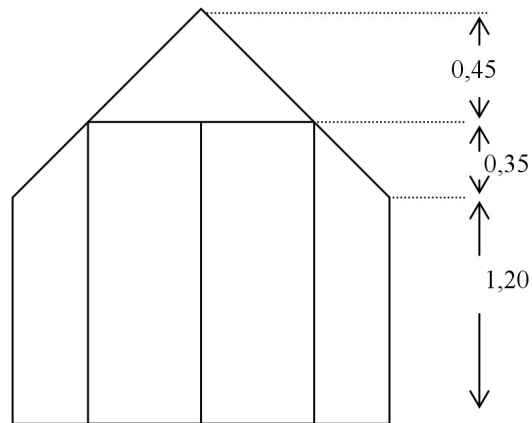
Berechne den Flächeninhalt und den Umfang der abgebildeten Figur. Die Maße sind in cm angegeben! Hinweis: Zeichne Hilfslinien ein.



Lösung:

46. Hexenhäuschen

Benenne die Formen der einzelnen Scheiben eines Giebelfensters und berechne ihren Flächeninhalt und den Flächeninhalt der Gesamtfläche der Scheiben. Maße in m.



Lösung:  $3,36 \text{ m}^2$