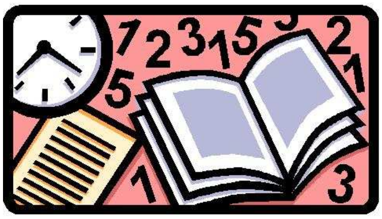
Lineare Funktionen

1. **Carmens Schultag**

   Carmens Schultag beginnt um 7.00 Uhr. Sie fährt zunächst mit dem Bus zur Schule. Um 8.00 Uhr beginnt der Unterricht. Von 9.30 Uhr bis 9.50 Uhr und von 11.20 Uhr bis 11.40 Uhr ist Pause. Um 13.10 Uhr endet der Unterricht. Um 14.00 Uhr ist Carmen wieder zu Hause.

   (a) Zeichne den Graphen der Zuordnung
   Gesamtzeit der Abwesenheit von zu Hause → reine Unterrichtszeit.

   (b) Zeichne einen entsprechenden Graphen für deinen eigenen Schultag.

   Quelle: Lambacher Schweizer 8(1988)

   Variationen der Aufgabe:

   (a) Darstellung des Schulalltags des Sitznachbarn

   (b) Rekonstruktion des Alltags des Nachbarn aus dessen Graphen

   (c) Schulalltag als abschnittsweise def. lineare Funktion

   (d) Vernetzung mit Prozentrechnung: Wieviel Prozent des Tages verbringt man in der Schule?

2. **Flaschen hinterm Steuer**

Alkohol und Autofahren passen nicht zusammen. Das leuchtet ein. Aber die wenigsten wissen, wie langsam Alkohol im Körper abgebaut wird. Der durchschnittliche Abbauwert beträgt lediglich $0,15$ Promille stündlich. Weder Schlaf noch starker Mokka können dies beschleunigen. Wer z.B. nach einer Feier um Mitternacht einen Alkoholspiegel von $1,5‰$ hat, kann sich leicht ausrechnen, wann er wieder restlos nüchtern ist. Denn bereits bei $0,3‰$ muß ein Fahrer mit einer Geldstrafe und Führerscheinentzug rechnen, selbst dann, wenn er lediglich Anzeichen von Fahrunsicherheit zeigt. Bei $0,5‰$ liegt auf jeden Fall eine Ordnungswidrigkeit vor, die mit Fahrverbot, Geldstrafe bis zu 3000,- DM und Punkten in Flensburg geahndet wird. **Darum: Nach Alkoholgenuß lieber Taxi, Bahn & Bus.** Jetzt fällt Ihnen die Beantwortung der Quiz-Fragen sicherlich nicht schwer.

(a) Um wieviel Uhr sind Sie bei einer Ausgangslage von $1,5‰$ um Mitternacht und einem durchschnittlichen Alkoholabbauwert von $0,15‰$ stündlich wieder restlos nüchtern und

(b) wann haben Sie immerhin noch einen Alkoholspiegel von $0,5‰$?

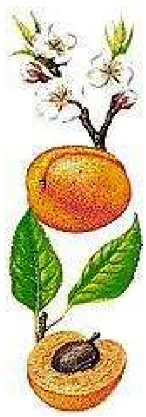
Lösung: (a) 10 Uhr morgens

(b) 6.40 Uhr morgens

Variationen: Biologische Prozesse behandeln (Biologieunterricht), Graphen zeichnen, Ausgangswert und Abbaufaktor variieren

3. **Marillen**

Kauft man Marillen beim Obsthändler, so kostet 1 kg Marillen 24 €. Familie Schneider fährt in die Wachau und zahlt dort 12 € pro Kilo. Die Fahrtkosten für die Hin- und Rückfahrt betragen 240 €.
Finde eine geeignete Frage und beantworte sie.



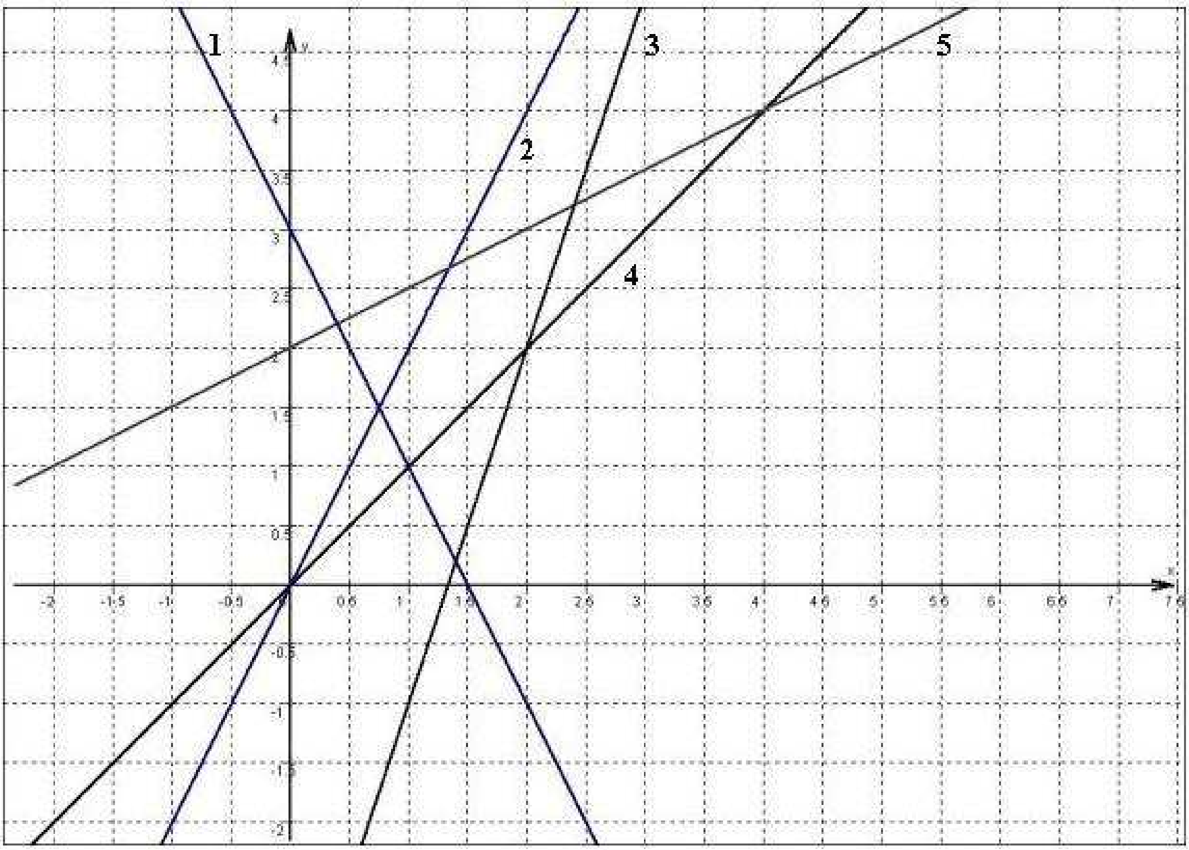
Variationen:

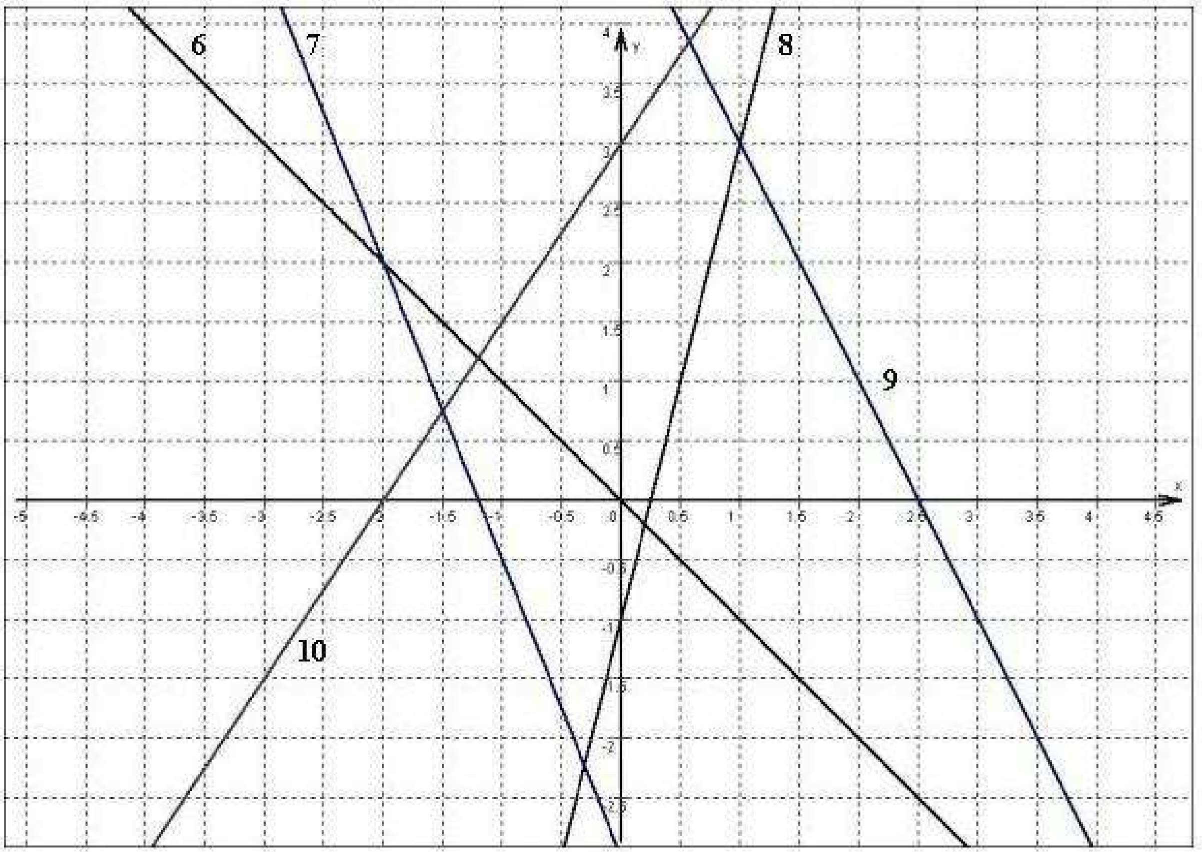
(a) Formulierung im deutschen Kontext

(b) Andere Preisvergleiche vor Ort

4. **Übersetzungen zwischen Graph und Term**

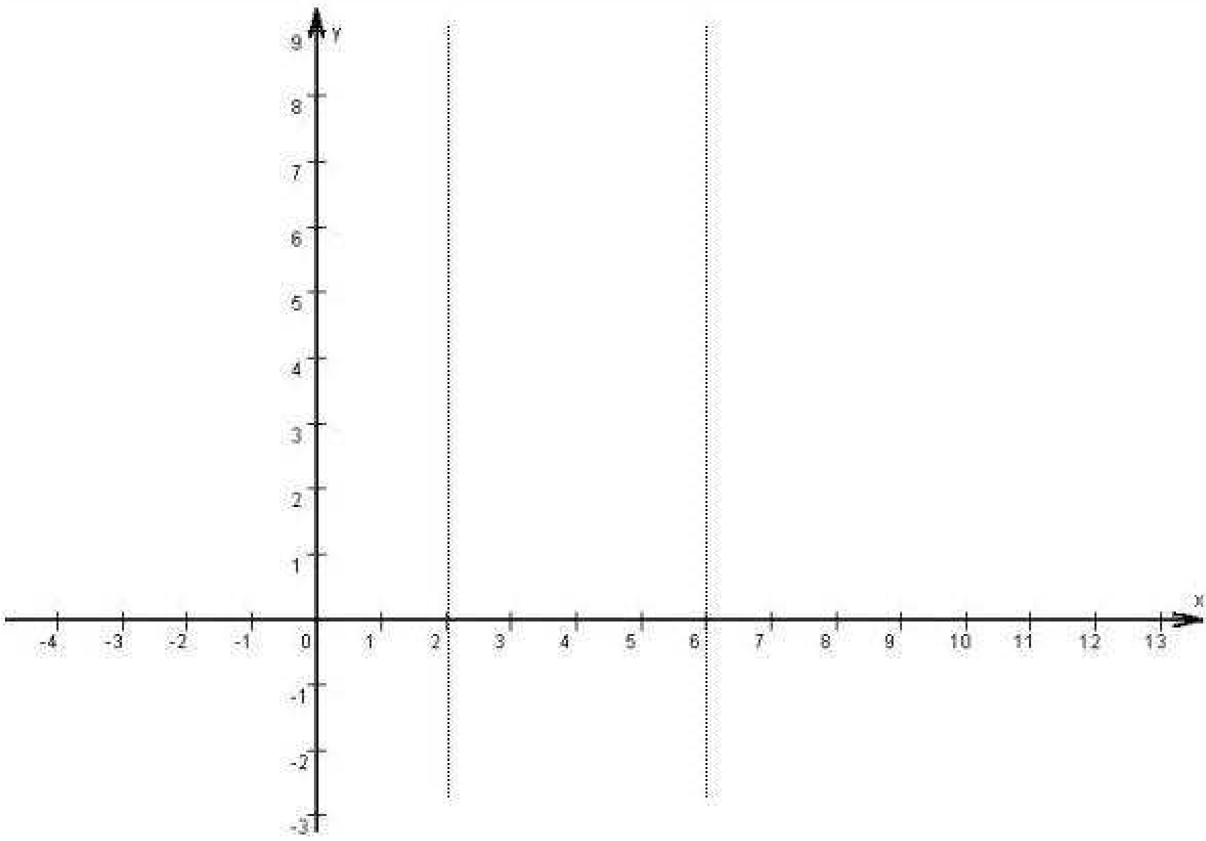
Finde die Funktionsterme $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{10}(x)$ zu den gezeichneten Geraden $1-10$.





Lösung: (a) $y = -2 \cdot x + 3$
(b) $y = 2 \cdot x$
(c) $y = 3 \cdot x - 4$
(d) $y = x$
(e) $y = 0,5 \cdot x + 2$
(f) $y = -x$
(g) $y = -2,5 \cdot x - 3$
(h) $y = 4 \cdot x - 1$
(i) $y = -2 \cdot x + 5$
(j) $y = 1,5 \cdot x + 3$

5. **Geometrische Figuren im Koordinatensystem**



Bestimme möglichst viele verschiedene lineare Funktionen so, dass die Fläche, die von der x-Achse, den gestrichelten Linien und dem Graphen der linearen Funktion umschlossen wird, den Inhalt 12 FE hat. Welche geometrischen Figuren entstehen dabei?

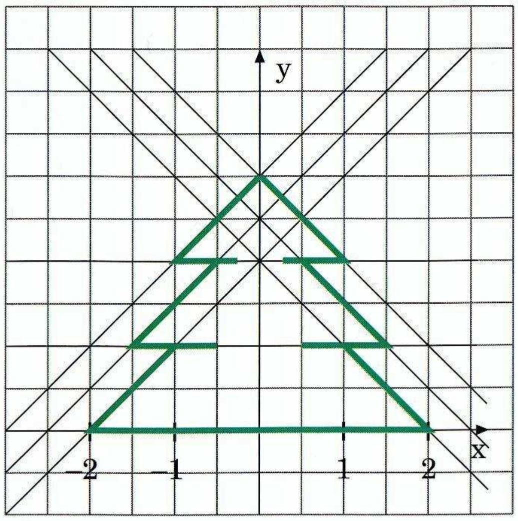
Lösung: Alle geometrischen Figuren, die durch eine Gerade, die durch den Punkt $(3|4)$ geht, entstehen.

6. **Zeichnen mit linearen Funktionen**

Zeichne die Graphen folgender Funktionen in ein Koordinatensystem ein:

(a) $y = x + 2$ für $x \in [-2; -1]$
(b) $y = x + \frac{5}{2}$ für $x \in [-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}]$
(c) $y = x + 3$ für $x \in [-1; -0]$
(d) $y = 2$ für $x \in [-1; -\frac{1}{4}]$ und $x \in [\frac{1}{4}; 1]$
(e) $y = 1$ für $x \in [-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}]$ und $x \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$
(f) $y = 0$ für $x \in [-2; 2]$
(g) $y = -x + 2$ für $x \in [1; 2]$
(h) $y = -x + \frac{5}{2}$ für $x \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$
(i) $y = -x + 3$ für $x \in [0; 1]$

Lösung: Es entsteht eine Tanne (siehe nebenstehende Abbildung)



7. **Arbeitsblatt-BahnCard**

   Wann lohnt sich die BahnCard?

<u>Preissystem:</u> *(Stand: 1.5.2000)*

<u>„Normaler Fahrpreis“:</u>

2. Klasse	**27,2 Pf/km**	*(Fernverkehr ab 101 km)*
1. Klasse	**40,8 Pf/km**	*(Fernverkehr ab 101 km)*

Die Fahrpreise werden auf volle DM gerundet.

<u>Bahn Card Teen</u>

(12 - 17 Jahre) **2.Klasse** **65 DM**

1.Klasse **130 DM**

Die Bahn Card halbiert den normalen Fahrpreis und gilt 1 Jahr an allen Tagen in Deutschland.

<u>Aufgabe:</u>

1. Berechne die Fahrpreise für folgende Strecken jeweils *ohne* und *mit* Bahn Card Teen !

			ohne BC	*mit* BC
a) Rotenburg - Frankfurt a.M.		165 km		
b) Rotenburg - Berlin		430 km		
c) Rotenburg - Hamburg		360 km		
d) Rotenburg - Garmisch		520 km		
e) Rotenburg - Freiburg		415 km		

2. Notiere für die Funktionen
   a) Streckenlänge x *(in km)* → Fahrpreis <u>ohne</u> Bahn Card *(in DM)*
   b) Streckenlänge x *(in km)* → Fahrpreis <u>mit</u> Bahn Card *(in DM)*
   die entsprechenden **Funktionsgleichungen:**

   a) ______________________________

   b) ______________________________

   Zeichne die **Graphen** der beiden Funktionen in ein Koordinatensystem !

3. Ab welcher Streckenlänge lohnt sich die Bahn Card Teen ?
   (Begründe !)

8. **Internet**

1&1 Internet AG

Der Internet-Provider 1&1 hat zum 1.5.1999 seine Tarife verändert.
Alter Tarif: 2 Freistunden pro Monat, dann jede weitere Minute 5 Pfennig für

den Internet Zugang. Allerdings kommen noch die Telefongebühren zum City-Tarif dazu, diese ohne Freistunden.
Neuer Tarif: Pro Minute 6 Pfennig (unabhängig von der Tageszeit) einschließlich der Telefongebühren; keine Freistunden.

(a) Zeichne in ein gemeinsames Koordinatensystem drei Graphen für die Zuordnung *Zeit* $\rightarrow$ *Gesamtkosten* bis zu 6 Stunden für

  i. alter Tarif, Surf-Zeiten immer zwischen 21 und 5 Uhr (also je 240 Sekunden für 12 Pfennig Telefongebühren)

  ii. alter Tarif, Surf-Zeiten immer zwischen 9 und 18 Uhr (also je 90 Sekunden für 12 Pfennig Telefongebühren)

  iii. neuer Tarif

(b) Wärst du als Kunde mit der Tarifänderung zufrieden? Begründe deine Antwort ausführlich.

(c) Stell dir vor, du solltest (als Angestellter von 1&1) den Kunden die Tarifänderungen schmackhaft machen. Welche Argumente würdest du benutzen?

Variation: Vergleich aktueller Provider

Lösung: (a) i. $y = 1,8x$ für $x \in [0; 2]$
$y = 4,8x - 6$ für $x \in [2; 6]$

ii. $y = 4,8x$ für $x \in [0; 2]$
$y = 7,8x - 6$ für $x \in [2; 6]$

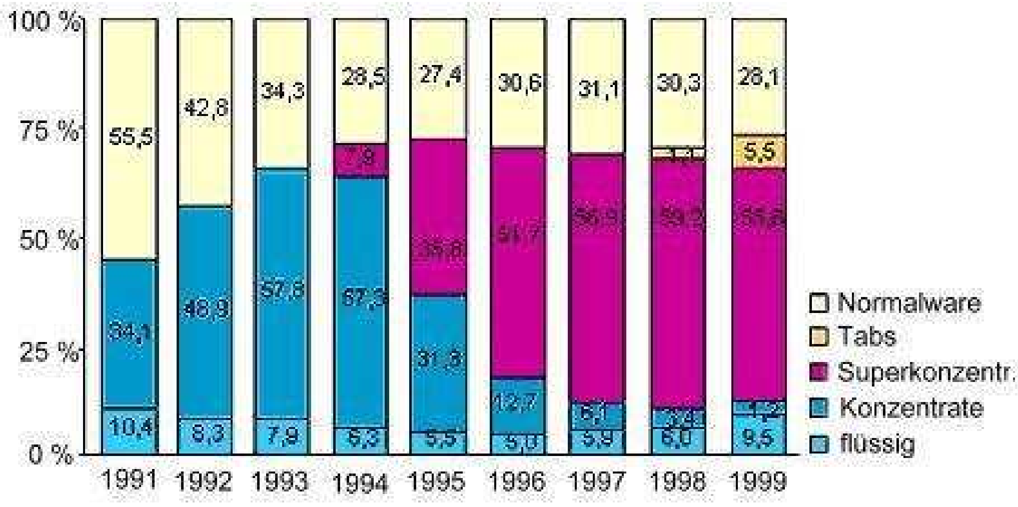
iii. $y = 3,6x$ für $x \in [0; 6]$

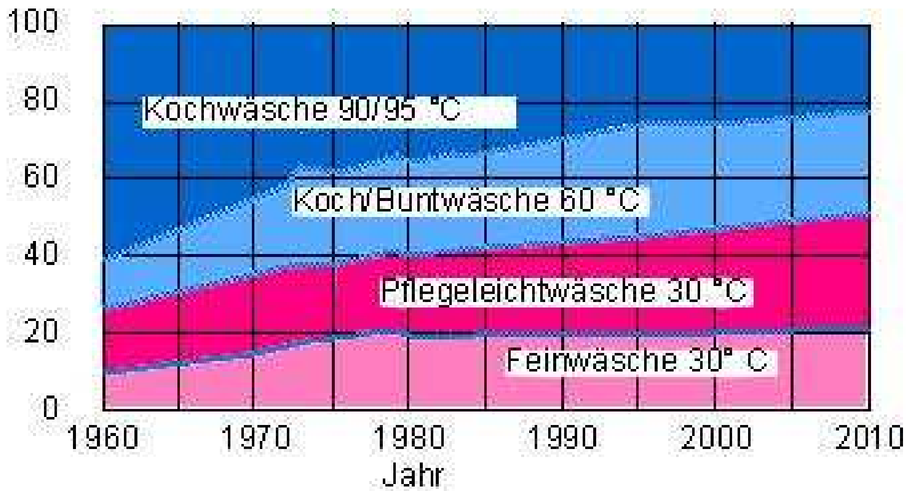
(b) Kundensicht: Die Zufriedenheit richtet sich nach meiner Nutzung: Wenn ich tagsüber surfe, habe ich mit dem neuen Tarif einen dauernden Vorteil unabhängig von der Nutzungsdauer. Wenn ich nachts surfe, habe ich erst einen Vorteil mit dem neuen Tarif ab einer Nutzung von 5 Stunden.

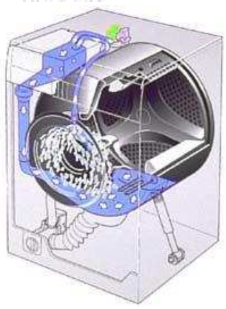
(c) Firmensicht: Ein Kunde wird, da er tagsüber arbeitet, erst abends oder nachts surfen. Innerhalb eines Monats sind 5 Stunden schnell erreicht, und dann ist der neue Tarif wirklich günstiger. Ein Kunde, der tagsüber surft, liegt mit dem neuen Tarif immer günstiger.

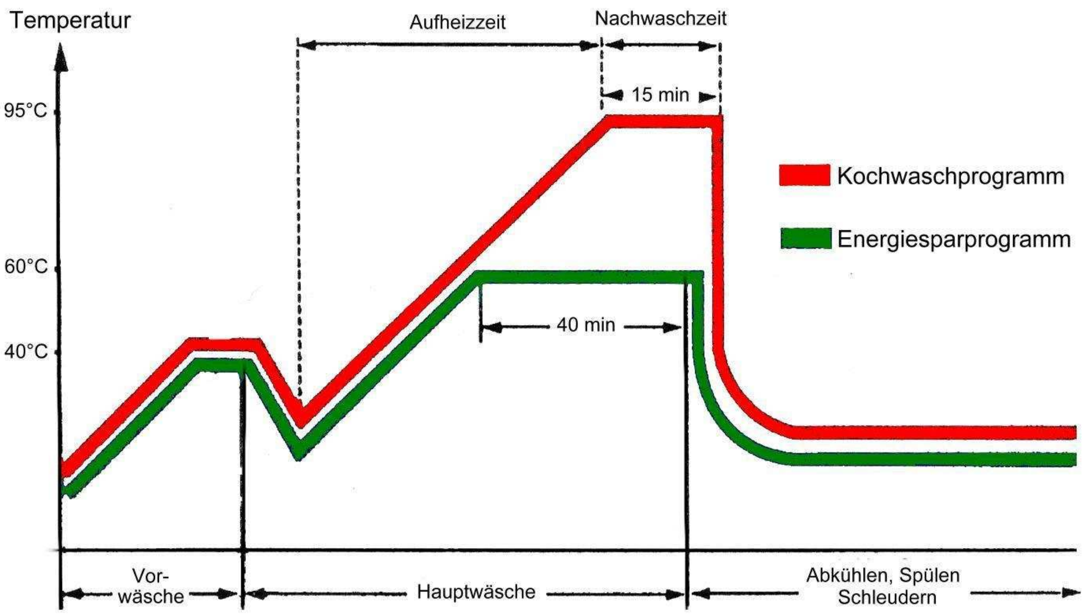
9. **Wäsche waschen**

Verwendung von verschiedenen Waschmitteln im Laufe der Zeit









Vergleich: Kochwaschprogramm - Energiesparprogramm

Schreibe mit Hilfe der hier abgebildeten Diagramme und (Schau-)Bilder eine (mathematische) Geschichte über die Entwicklung des Wäschewaschens. Falls dir Informationen fehlen, besorge sie aus der Bibliothek, dem Internet, beim Fachverkäufer etc.

Variationen:

Betrachtung anderer linearer Zusammenhänge, Untersuchung einer realen Waschmaschine

10. **Fahren mit dem ICE**

Ein ICE beschleunigt von 0 auf 100 $\frac{km}{h}$ in einer Minute und 6 Sekunden. Dann beschleunigt er weiter in 2 Minuten und 14 Sekunden von 100 $\frac{km}{h}$ auf 200 $\frac{km}{h}$. Zuletzt beschleunigt er von 200 $\frac{km}{h}$ auf 250 $\frac{km}{h}$ in 3 Minuten.

(a) Stelle den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Zeit näherungsweise dar (graphisch und durch Angabe einer Funktionsgleichung).

(b) Berechne jeweils den gesamten zurückgelegten Weg, bis der ICE eine Geschwindigkeit von 100 $\frac{km}{h}$, 130 $\frac{km}{h}$ bzw. 250 $\frac{km}{h}$ erreicht hat.

Lösung: (a) Teil (a) verlangt einen Wechsel der Darstellungsebene und die Angabe einer Funktionsgleichung einer abschnittsweise definierten linearen Funktion.

(b) Teil (b) ist durch eine weitere Modellannahme (konstante Durchschnittsgeschwindigkeit in jedem angegebenen Teilintervall) lösbar. Zudem muss ein Teilgraph zur Berechnung des Wertes zu 130 $\frac{km}{h}$ linear interpoliert werden (Vernetzung Algebra mit Geometrie).

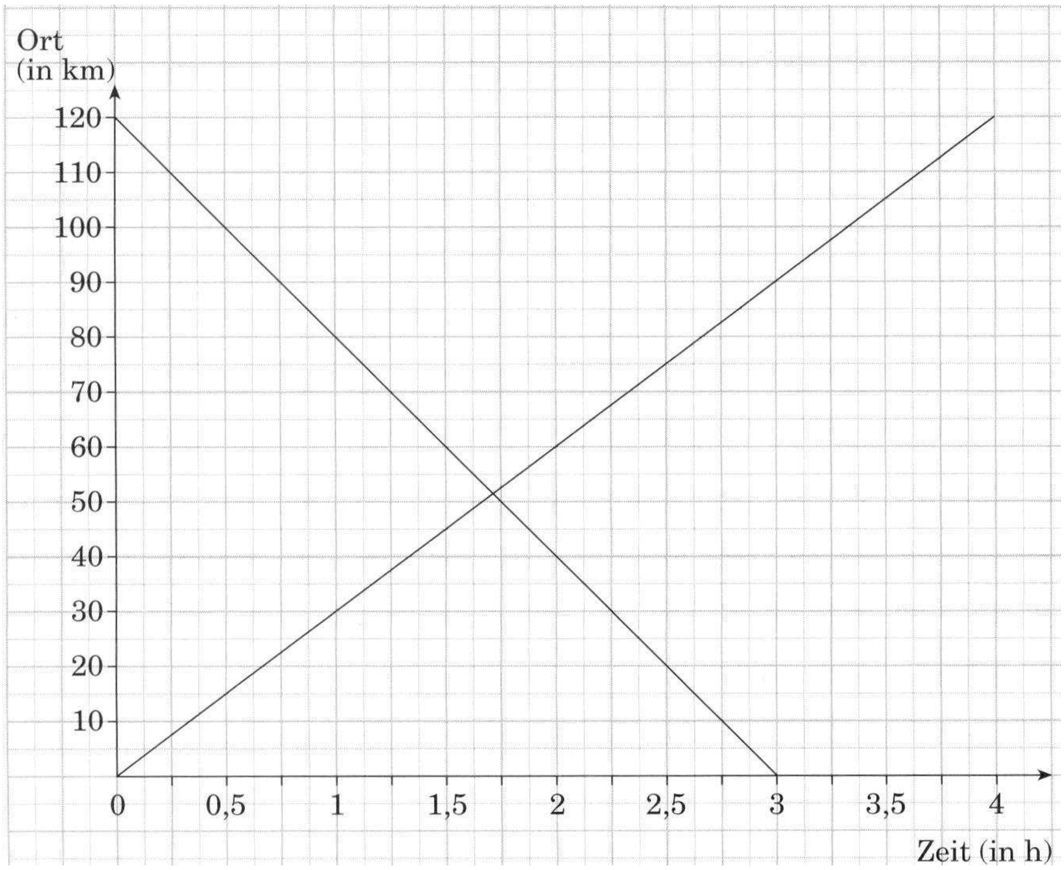
11. **Kapitänsaufgabe**

Ein Schiff startet vom Hafen Entenhausen und ist nach 4 Stunden im 120 km entfernten Hafen von Goofytown. Gleichzeitig mit ihm startet ein etwas schnelleres Schiff im Hafen von Goofytown und ist nach 3 Stunden im Hafen von Entenhausen. Unten siehst du das Zeit-Ort-Diagramm für die beiden Schiffe. Gib anhand des Diagramms zumindest ungefähre Antworten auf folgende Fragen:

(a) Wann und wo fahren die beiden Schiffe aneinander vorbei?

(b) Die Kapitäne der beiden Schiffe besitzen Ferngläser, mit denen sie ungefähr 20 km weit sehen können. In welchem Zeitintervall können die beiden Kapitäne einander im Fernglas beobachten? Wo befinden sich die beiden Schiffe dabei ungefähr?

(c) Finde selbst weitere geeignete Fragen und beantworte sie.



Quelle: Mathe-Welt, in: mathematik lehren (2000) Heft 103, S. 3

Variationen:

(a) Fragen zu dem Diagramm formulieren

(b) zu einer gegebenen Geschichte ein Zeit-Ort-Diagramm zeichnen oder umgekehrt

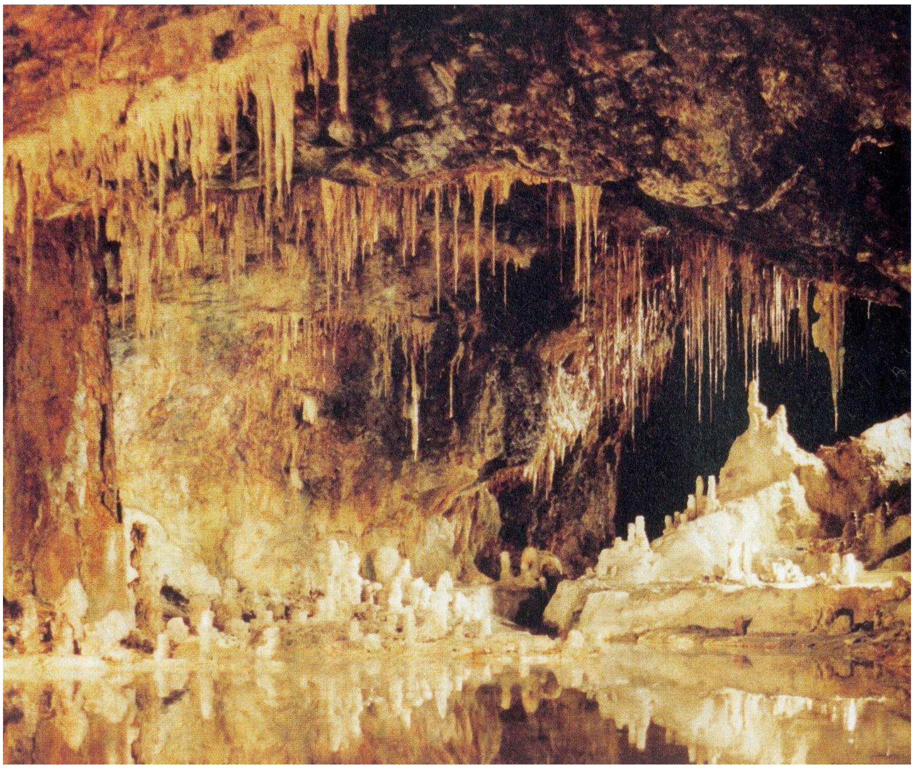
(c) Wie schnell fahren die beiden Schiffe (in km/h)?

(d) Wie weit ist das erste Schiff noch vom Hafen in Goofytown entfernt, wenn das zweite Schiff gerade im Hafen von Entenhausen ankommt?

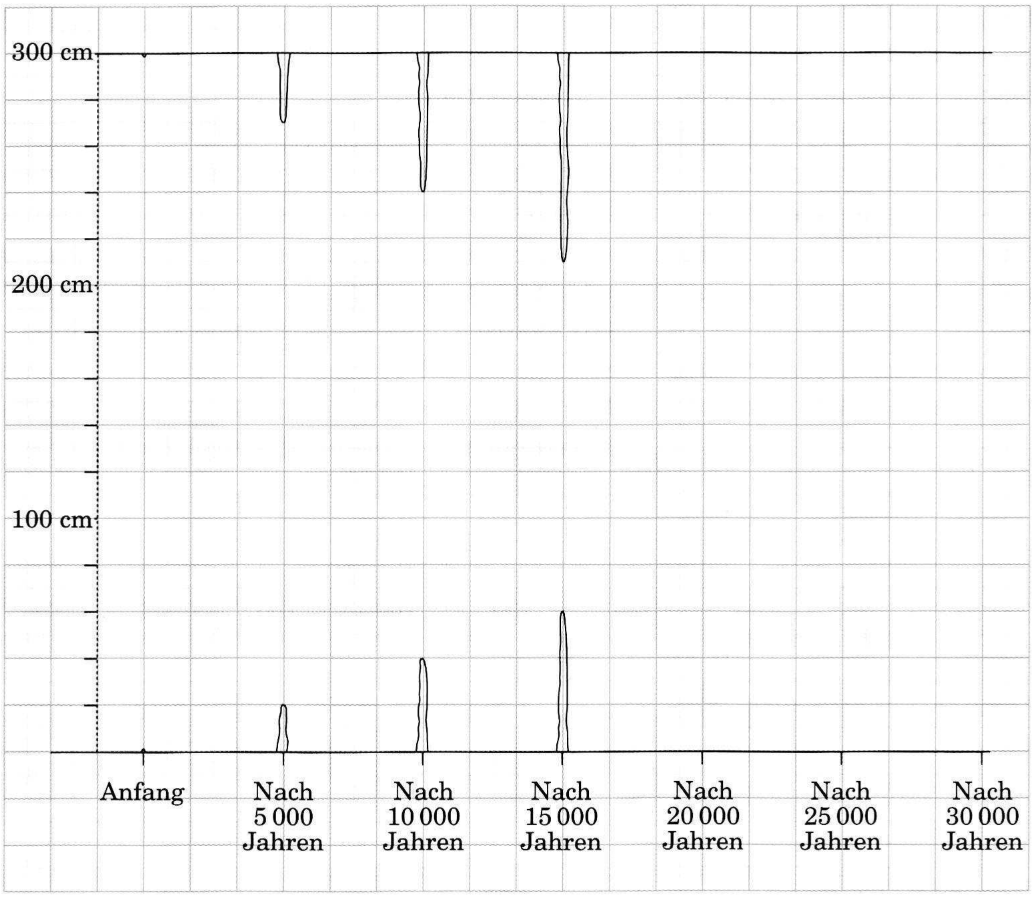
Lösung: (a) Die beiden Schiffe fahren ungefähr nach $1,7\,\mathrm{h} = 1\,\mathrm{h}\,42\,\mathrm{min}$ aneinander vorbei.

(b) Ungefähr zwischen $1,4\,\mathrm{h} = 1\,\mathrm{h}\,24\,\mathrm{min}$ und $2\,\mathrm{h}$ sind die beiden Schiffe höchstens $20\,\mathrm{km}$ voneinander entfernt. In diesem Zeitintervall können die beiden Kapitäne einander im Fernglas sehen. Die beiden Schiffe sind dabei ungefähr 40 bis $64\,\mathrm{km}$ von Entenhausen entfernt.

12. **Tropfsteinhöhle**



In Tropfsteinhöhlen tropft an verschiedenen Stellen kalkhaltiges Wasser von der Decke. Durch ständige Kalkablagerungen bildet sich an jeder solcher Stelle ein von der Decke hängender Tropfstein (Stalaktit) und ein vom Boden aufsteigender Tropfstein (Stalagmit). Diese Tropfsteine wachsen allerdings sehr langsam und brauchen zu ihrer Entstehung viele tausend Jahre.



Anhand der Zeichnung können eine Reihe von Fragen rechnerisch und dann zur Kontrolle auch zeichnerisch beantwortet werden.

Finde selbst eine geeignete Frage und beantworte sie!

Quelle: Mathe-Welt, in: mathematik lehren (2000) Heft 103, S. 3

(a) Nach wie vielen Jahren bilden die beiden Tropfsteine eine zusammenhängende Säule, wenn wir annehmen, dass das so weitergeht?
(b) Wie weit sind die beiden Tropfsteine dann nach 20000 Jahren voneinander entfernt?
(c) Nach wie vielen Jahren sind die beiden Tropfsteine nur noch 50 cm voneinander entfernt?

Variationen der Aufgabe:

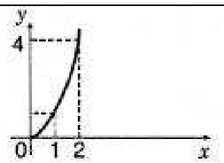
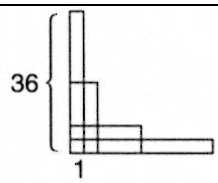
(a) Frage weglassen
(b) Nach wie vielen Jahren bilden die beiden Tropfsteine eine zusammenhängende Säule, wenn wir annehmen, dass das so weiter geht?
(c) Wie weit sind die beiden Tropfsteine dann nach 20000 Jahren voneinander entfernt?
(d) Nach wie vielen Jahren sind die beiden Tropfsteine nur noch 50 cm voneinander entfernt?

Lösung: (a) Nach ca. 30000 Jahren
(b) Ca. 100 cm
(c) Nach ca. 25000 Jahren

13. **Wiederholung von Funktionen**

(a) Felix grübelt über den unten aufgeführten Aufgabenstellungen. Seine ältere Schwester Gil hilft ihm und füllt einige Felder in der Tabelle aus. Versuche, die restlichen Einträge zu ergänzen.

i. Ich habe einen Blumenstrauß für x DM gekauft und mit einem Hundertmarkschein bezahlt. Als Wechselgeld habe ich y DM erhalten.
ii. Gegeben ist ein quadratisches Blumenbeet mit Seitenlänge x. Der Flächeninhalt ist y.
iii. Das Blumenbeet ist nun rechteckig. Der Flächeninhalt beträgt $36\,\mathrm{m}^2$. Die Länge des Rechtecks ist x und die Breite y.
iv. Ich habe x kg Zucker gekauft. 1 kg kg kostete 1, 50 DM. Der Gesamtpreis betrug y DM.

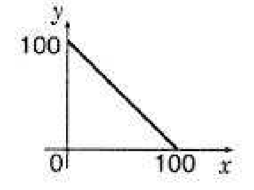
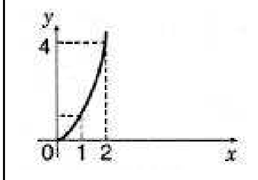
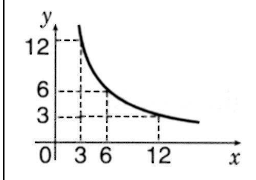
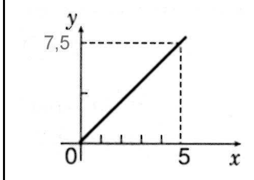
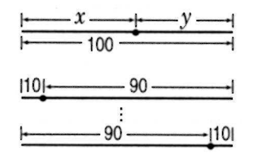
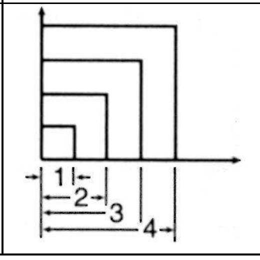
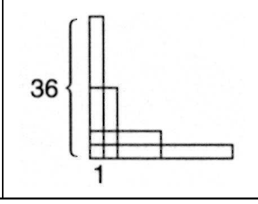
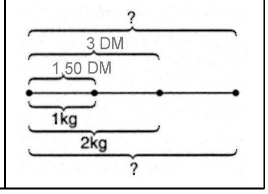
	a.	b.	c.	d.
Werte	x: 0, 10, 20, 30, ⋯ y: 100, 90, 80, 70, ⋯			
Term				$y = 1,5x$
Graph				
Bild				

(b) Nachdem Felix die leeren Tabellenfelder ausgefüllt hat, kommt seine Schwester wieder ins Zimmer. Sie sagt: „Situation 1 und 3 sind ähnlich.“ Inwiefern stimmt dies? Finde selbst möglichst viele andere Gemeinsamkeiten von zwei verschiedenen Situationen.

Quelle: Mathe-Netz 8, S. 60

Lösung:

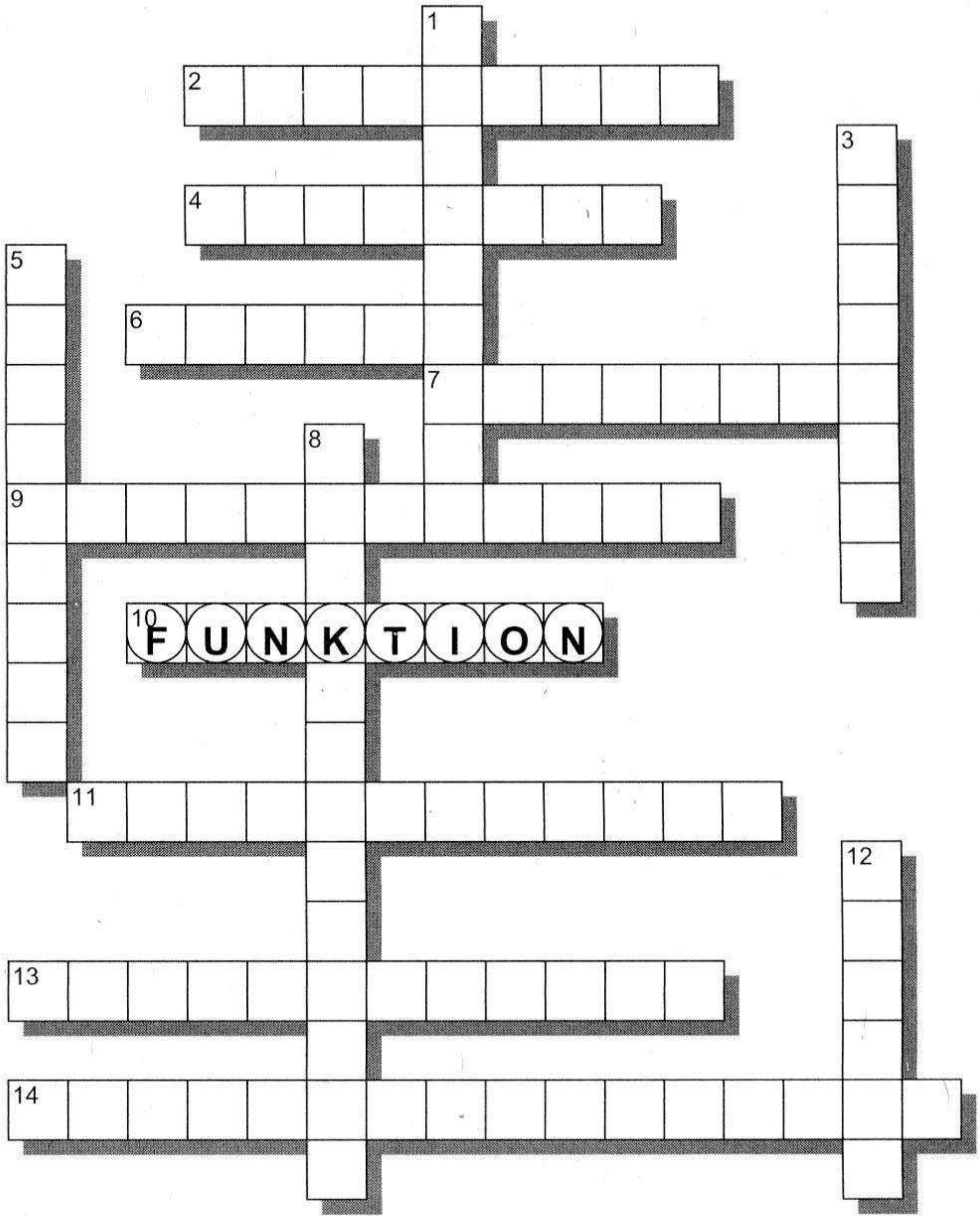
(a) siehe Tabelle

	a.	b.	c.	d.
Werte	x: 0, 10, 20, 30, … y: 100, 90, 80, 70, …	x: 1, 2, 3, 4, 5, 6 y: 1, 4, 9, 16, 25, 36	x: 1, 2, 3, 4, … y: 36, 18, 12, 9, …	x: 0, 1, 2, 3, … y: 0, 1,5, 3, 4,5, …
Term	$x + y = 100$ $y = 100 - x$	$y = x \cdot x$ $y = x^2$	$x \cdot y = 36$ $y = \frac{36}{x}$	$y = 1,5x$
Graph				
Bild				

(b)
- *a. und c.*
  je mehr desto weniger
  Graph fallend nicht durch Ursprung
  $x + y = const.$ vs. $x \cdot y = const.$
- *a. und d.*
  Graphen sind Geraden
  Konstantes Wachsen bzw. Fallen
  geht um Geld
- *b. und c.*
  Graphen sind Kurven
  geht um Flächeninhalte
- *b. und d.*
  Graphen gehen durch den Ursprung
  je mehr desto mehr wachsend
- *a., b. und c.*
  geht um Blumen
- *a. und b.*
  keine erkennbaren Gemeinsamkeiten

14. **Rätsel**

In das Gitter sind mathematische Begriffe zum Thema „Funktionen“ einzutragen. Hier sind die zugehörigen Umschreibungen angegeben. Zur Kontrolle sind die Lösungswörter in dem unten abgebildeten Buchstaben-Gitter versteckt.
Diese können waagerecht, senkrecht oder diagonal (von links oben nach rechts unten oder von rechts oben nach links unten) gelesen werden (sowohl vorwärts als auch rückwärts).



Waagerecht

2. zeichnerische Darstellung
4. Kurve
6. benötigt man für ein Koordinatensystem
7. zentraler Punkt
9. bestimmt den Schnittpunkt mit einer Achse
10. FUNKTION
11. viele einfache Zuordnungen sind…
13. Anordnung von Zahlenpaaren
14. je-mehr-desto-weniger-Zuordnung

Senkrecht

1. eindeutige Beziehung
3. kennzeichnet den Verlauf von Geraden
5. Französischer Mathematiker und Philosoph
8. sagt, wie zugeordnet wird
12. Gleichungstyp

L	G	N	U	N	D	R	O	U	Z	H	N	N	J	G	K
L	A	Q	U	O	T	I	E	N	T	G	L	E	I	C	H
A	A	N	H	D	F	I	S	P	O	S	D	T	E	T	F
N	S	N	O	G	L	Y	U	L	A	A	D	I	T	U	A
O	F	S	Q	I	T	I	P	A	R	Z	E	G	N	L	B
I	U	W	E	E	T	C	B	E	E	R	B	K	U	E	S
T	N	N	G	T	O	R	G	U	D	E	T	M	R	B	O
R	K	O	E	B	R	N	O	S	A	I	M	F	S	R	L
O	T	P	L	S	E	A	G	P	O	H	E	D	P	E	U
P	I	O	R	L	H	N	C	N	O	X	C	G	R	P	T
O	O	U	H	M	U	C	S	S	X	R	Y	S	U	Y	G
R	N	A	I	G	M	T	A	V	E	G	P	V	N	H	L
P	Z	F	I	X	E	M	N	V	R	D	L	I	G	F	I
H	A	E	I	R	W	L	I	N	E	A	R	E	T	N	E
I	T	C	M	U	S	T	E	I	G	U	N	G	P	N	D
S	G	O	E	L	L	E	B	A	T	E	T	R	E	W	A

Quelle: Elemente Unterrichtsmaterialien Band 2, Schroedel, 2001, S. 235

Lösung:

1. Zuordnung
2. Schaubild
3. Steigung
4. Hyperbel
5. Descartes
6. Achsen
7. Ursprung
8. Funktionsterm
9. Absolutglied
10. FUNKTION
11. Proportional
12. Linear
13. Wertetabelle

14. Antiproportional

15. **Aufgaben zu (linearen) Funktionen**

(a) Bäume wachsen unterschiedlich schnell und hoch. Übertrage die Daten in ein Koordinatensystem und vergleiche die Wachstumsformen. Finde „Rekordbäume“, die besonders

- schnell wachsen
- alt werden
- hoch werden
- dick sind

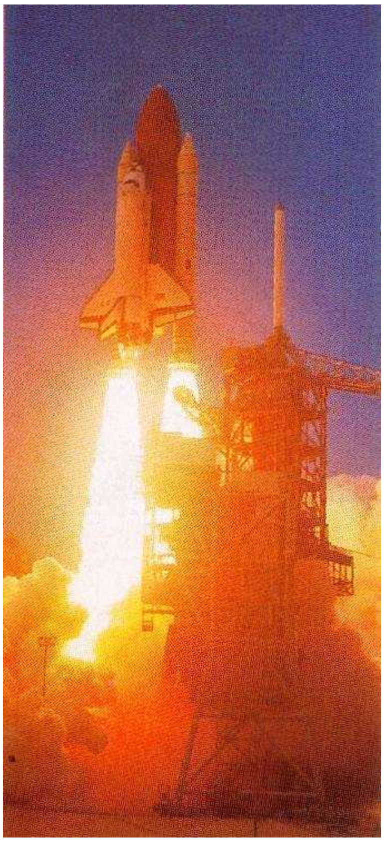
Alter (in Jahren)	**Höhe** (in m) Tanne	Eiche	Zirbelkiefer
0	0	0	0
20	2,5	9,3	1,2
40	13,3	18,3	4,0
60	22,9	22,2	7,0
80	28,4	26,1	9,5
100	32,5	29,5	12,0
120	34,7	31,6	15,5
160	...	...	19,0

(b) Beim Start einer Rakete mit einer Startmasse von 800 t werden in den ersten zwei Minuten 612 t Treibstoff verbrannt. Dieser Vorgang verläuft gleichförmig.

i. Gib für die Funktion f: Zeit (in min) $\to$ Masse der Rakete (in t) und g: Zeit (in sek) $\to$ Masse der Rakete (in t) je eine Funktionsvorschrift an.

ii. Zeichne den Graphen der Funktion f.

iii. Lies die Antworten auf folgende Fragen am Graphen der Funktion f ab.
Wie viel t wiegt die Rakete 1 min nach dem Start?
Nach wie viel Sekunden wiegt die Rakete nur noch 500t?



(c) Eine Vase wird mit gleichmäßig zulaufendem Wasser gefüllt. In der Tabelle ist eingetragen, wie hoch das Wasser zu den jeweiligen Füllzeiten steht.

Füllzeit in s	5	10	25	20	25	30	35
Wasserhöhe in cm	10	15	16	18	20	30	40

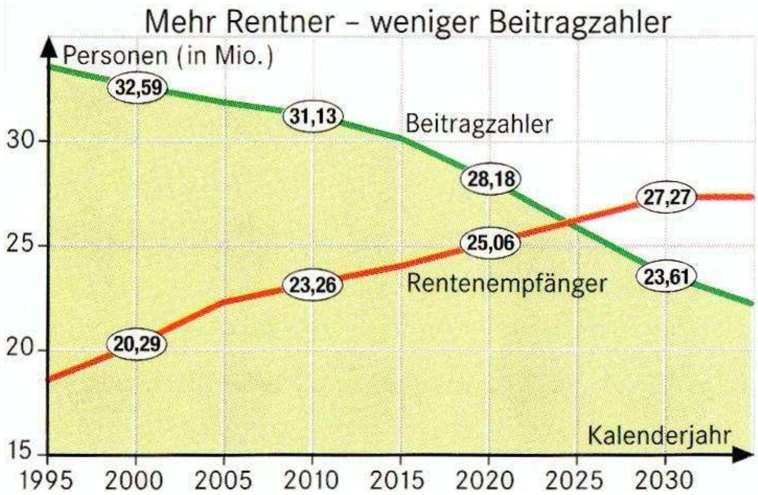
i. Übertrage die Werte in ein Koordinatensystem und verbinde die Punkte zu einer Kurve.

ii. Wie könnte die Vase aussehen? Vergleicht eure Lösungen miteinander.

iii. In welchem Zeitraum steigt das Wasser am schnellsten?

iv. Lässt sich eine Antwort leichter aus der Tabelle oder dem Schaubild ablesen?

(d) Eine Versicherung veröffentlicht die abgebildete Grafik.



i. Wie ist das Verhältnis von Beitragszahlern zu den Rentenempfängern heute und wie wird es sich verändern?

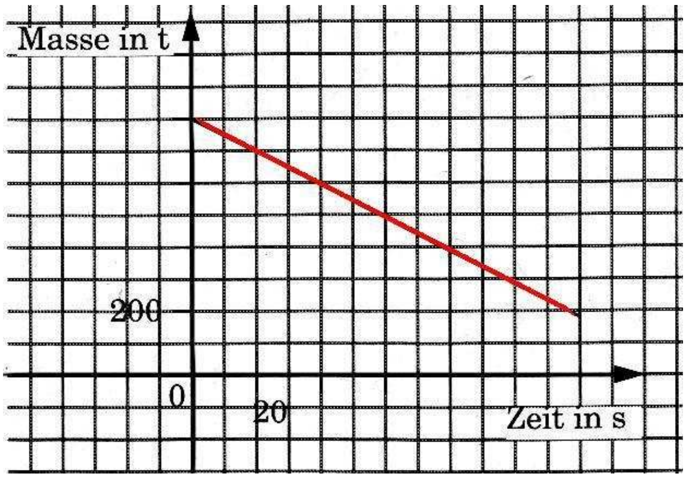
ii. Was beabsichtigt die Versicherung vermutlich mit dieser Veröffentlichung?

iii. Wie beurteilst du die dargestellte Prognose? Was kann sie für dich bedeuten?

(e) Erkundige dich nach den Tarifen der Post oder denen eines anderen Anbieters und stelle fest, ob folgende Zuordnungen eine Funktion darstellen: *Gewicht* $\rightarrow$ ($\leftarrow$)*Porto*.

Lösung: (a)

(b) i. $f(m) = 800 - 306 \cdot m$
$g(s) = 800 - 5,2 \cdot s$

ii. 

iii. Die Rakete wiegt dann 341 t. Nach ca. 59 s wiegt sie nur noch 500 t.

16. **Weitere Anwendungen**

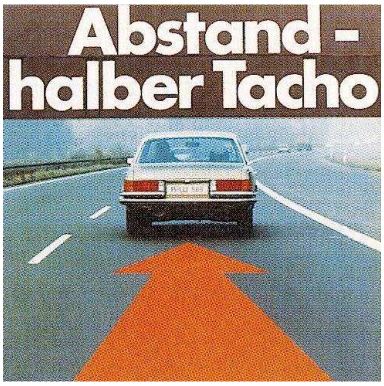
(a) Für ein Kraftfahrzeug hat man festgestellt, dass sich der Anhalteweg y (in m) beim Bremsen aus der vorher gefahrenen Geschwindigkeit x (in $\frac{km}{h}$) mit Hilfe einer Gleichung berechnen lässt:

i. $(1) y = 0,01x^2 + 0,3x$ (ohne Verwendung eines Antiblockiersystems)

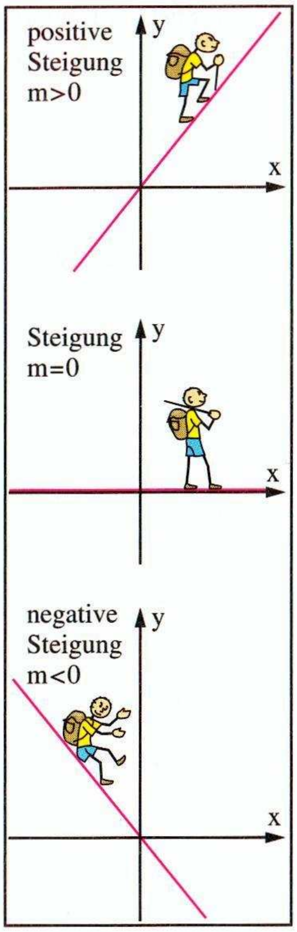
ii. $(2) y = 0,0095x^2 + 0,3x$ (bei eingebautem Antiblockiersystem)

i. Berechne für die Geschwindigkeiten $30\,\frac{km}{h}, 60\,\frac{km}{h}, \ldots, 150\,\frac{km}{h}$ den zugehörigen Anhalteweg. Fasse die Ergebnisse in einer Wertetabelle zusammen und zeichne die Graphen.

ii. Zeichne den Graphen der Zuordnung Geschwindigkeit (in $\frac{km}{h}$) Abstand (in m) in ein Koordinatensystem. Vergleiche mit dem Graphen in i.



(b) Svetlana: „Du kannst die Steigung $m = \frac{3}{7}$ auch einzeichnen, indem du von einem Punkt der Geraden 7 Einheiten nach links und 3 Einheiten nach unten gehst.“ „Gut, dann kann man auch $m = -\frac{2}{5}$ einzeichnen, indem man 5 Einheiten nach links und 2 Einheiten nach unten geht,“ erwidert Kai.
Nimm zu beiden Äußerungen Stellung und verdeutliche deine Argumentation an selbst gewählten Beispielen.



(c) Gib jeweils eine Funktionsvorschrift an und berechne $f(-2)$, $f(-\frac{1}{2})$ und $f(2,2)$.

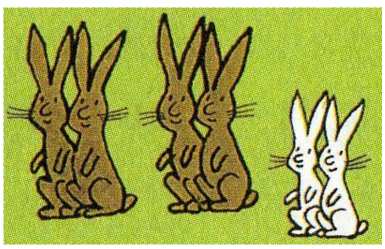
i. $f : Zahl \rightarrow dasDreifachederZahlvermindertumEins$

ii. $f : Zahl \rightarrow Kehrwert$

iii. $f : Zahl \rightarrow EinsvermindertumdasQuadratderKehrzahl$

iv. $f : Zahl \rightarrow dieHälftederZahl$

(d) Im Jahre 1202 erschien das Werk „Liber abaci“ des Mathematikers Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci. Aus diesem Buch stammt das folgende Problem.



Ein Kaninchenpaar wirft vom 2.Monat an in jedem Monat ein junges Paar, und bei den Nachfahren ist es ebenso. Die Monatszählung beginnt mit dem ersten Monat, in dem das erste Kaninchenpaar lebt. Die Funktion a ordnet jeder Monatsnummer die Anzahl der in diesem Monat lebenden Kaninchenpaare aus der betrachteten Familie zu. Fülle die Tabelle vollständig aus.

Monatsnummer n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl Paare a(n)	1	1	2	3						

(Erst im Jahre 1843 gelang es dem Mathematiker Jacques Philippe Marie Binet, für die Funktion a einen Funktionsterm anzugeben!)

(e) Starte eine Stoppuhr mit dem Anschalten einer Kaffeemaschine und lies ab, wie lange es dauert, bis eine, zwei, drei, vier, fünf,... Tassen Kaffee durchgelaufen sind! Notiere deine Ergebnisse in einer Tabelle! Lässt sich der Vorgang angenähert durch eine lineare Funktion beschreiben und wenn durch welche?

Lösung: (a) i.

	(1)	(2)
$30\,\frac{km}{h}$	18 m	17,55 m
$60\,\frac{km}{h}$	54 m	52,2 m
$90\,\frac{km}{h}$	108 m	103,95 m
$120\,\frac{km}{h}$	180 m	172,8 m
$150\,\frac{km}{h}$	270 m	258,75 m

30 km/h

ii.

(b)

	x	-2	$-\frac{1}{2}$	1	2,2
a)	$f(x) = 3x - 1$	-7	$-2{,}5$	2	5,6
b)	$f(x) = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-2	1	$\frac{5}{11}$
c)	$f(x) = 1 - (\frac{1}{x})^2$	$\frac{3}{4}$	-3	0	$\frac{96}{121}$
d)	$f(x) = \frac{x}{2}$	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{10}$

(c)

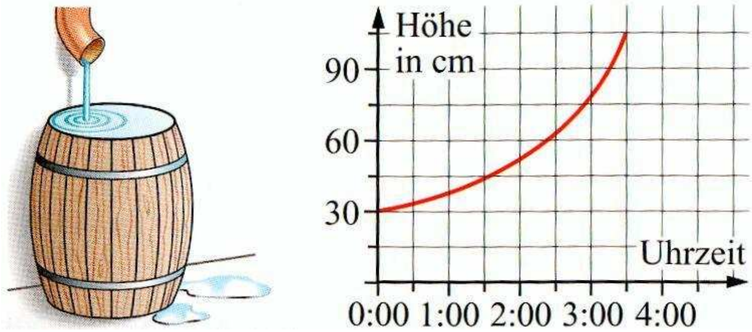
(d)

Monatsnummer	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Anzahl der Paare	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

(e)

17. **Vermischtes**

(a) In einer Regentonne steht das Wasser 30 cm hoch. Nachdem es nachts geregnet hat, ist sie am nächsten Morgen voll. Wie könnte der Graph verlaufen, wenn es jeweils von 1 Uhr bis 1.30 Uhr und von 3.30 Uhr bis 4.00 Uhr heftige Schauer gab und es dazwischen nicht geregnet hat? Skizziere und vergleiche die Graphen.



(b) Ein Dreieck im Koordinatensystem ist durch die Punkte $\mathrm{A}\,(0|-3)\,, \mathrm{B}\,(1|1)$ und $\mathrm{C}\,(-3|2)$ festgelegt. Bestimme die Gleichungen der drei Geraden, die das Dreieck umranden.

(c) An dem Salatbuffet wird der Salat mit Teller gewogen. Löse zeichnerisch und rechnerisch:

  i. Jörg muss $5,10$ € für seine Salatportion bezahlen. Wieviel g Salat hat er auf seinem Teller?

  ii. Wieviel g wiegt der Teller?

(d) Überlege dir, dass sich eine Gerade auch durch eine Gleichung der Form: $ax + by + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$ darstellen lässt.

  i. Für welche Werte von a, b und c erhält man Geraden mit positiver Steigung?

  ii. Welche Bedingungen müssen für a, b und c gelten, damit die Geraden parallel zur x-Achse bzw. parallel zur y-Achse verlaufen?

  iii. In welchen Fällen liegt eine lineare Funktion vor?

(e) Die weltweite Erdgasreserven wurden 1993 auf etwa $141,8\ Billionen\ m^3$ geschätzt. Die jährliche Fördermenge betrug etwa $2,5\ Billionen\ m^3$.

  i. Bestimme für die Zuordnung $Zeit(in\ Jahrenseit 1993) \rightarrow Erdgasreserven(in\, m^3)$ die Gleichung unter der Voraussetzung, dass sich die jährliche Fördermenge nicht ändert.
  Wie lange würden die geschätzten Erdgasreserven reichen?

  ii. Wie lange reichen die Erdgasreserven, wenn die Produktion von heute an auf jährlich zwei Billionen Kubikmeter zurückgefahren würde?

iii. In Russland lagern etwa 60% der Welterdgasreserven. Das russische Energieunternehmen „Gazprom“ möchte die jährliche Fördermenge von 650 *Milliarden* m^3 auf 1 *Billion* m^3 steigern. Wie lange reichen unter diesen Voraussetzungen die Erdgasreserven in Russland?

Quellen: MatheNetz 8 (2000), MatheLive 8 (2001), Lambacher Schweizer 8 (1996), Schnittpunkt 8 (1994), Mathematik heute 8 (1995), Zahlen und Größen 8 (2000), Mathematik 8 (1994), Die Welt der Zahl (1994), Elemente der Mathematik 8 (1994), Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sek.I (2001).

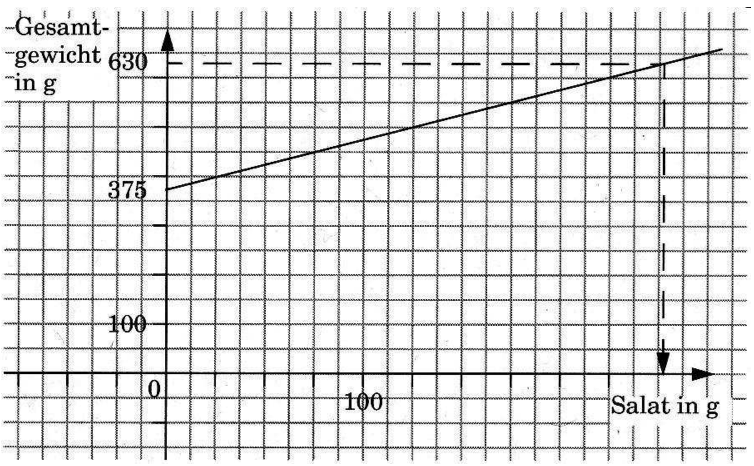
Lösung: (a)

(b) $AB: y_1 = 4x - 3 \qquad x \in [0;1]$
$BC: y_2 = -\frac{1}{4}x + 1,25 \qquad x \in [-3;1]$
$CA: y_3 = -\frac{5}{3}x - 3 \qquad x \in [-3;0]$

(c) i. Er hat 255 g Salat.

ii. Teller wiegt 375 g.

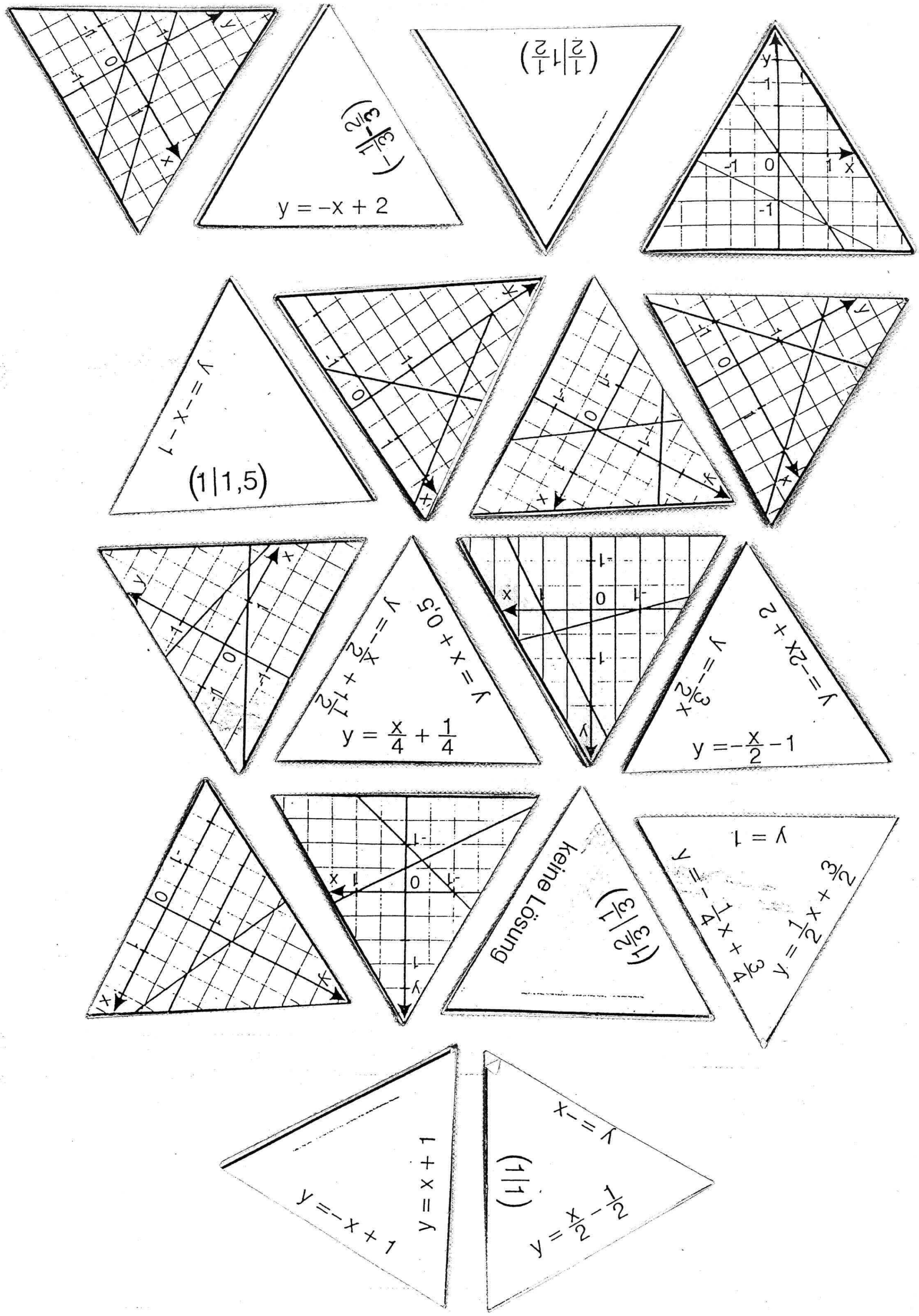
Graphische Lösung:

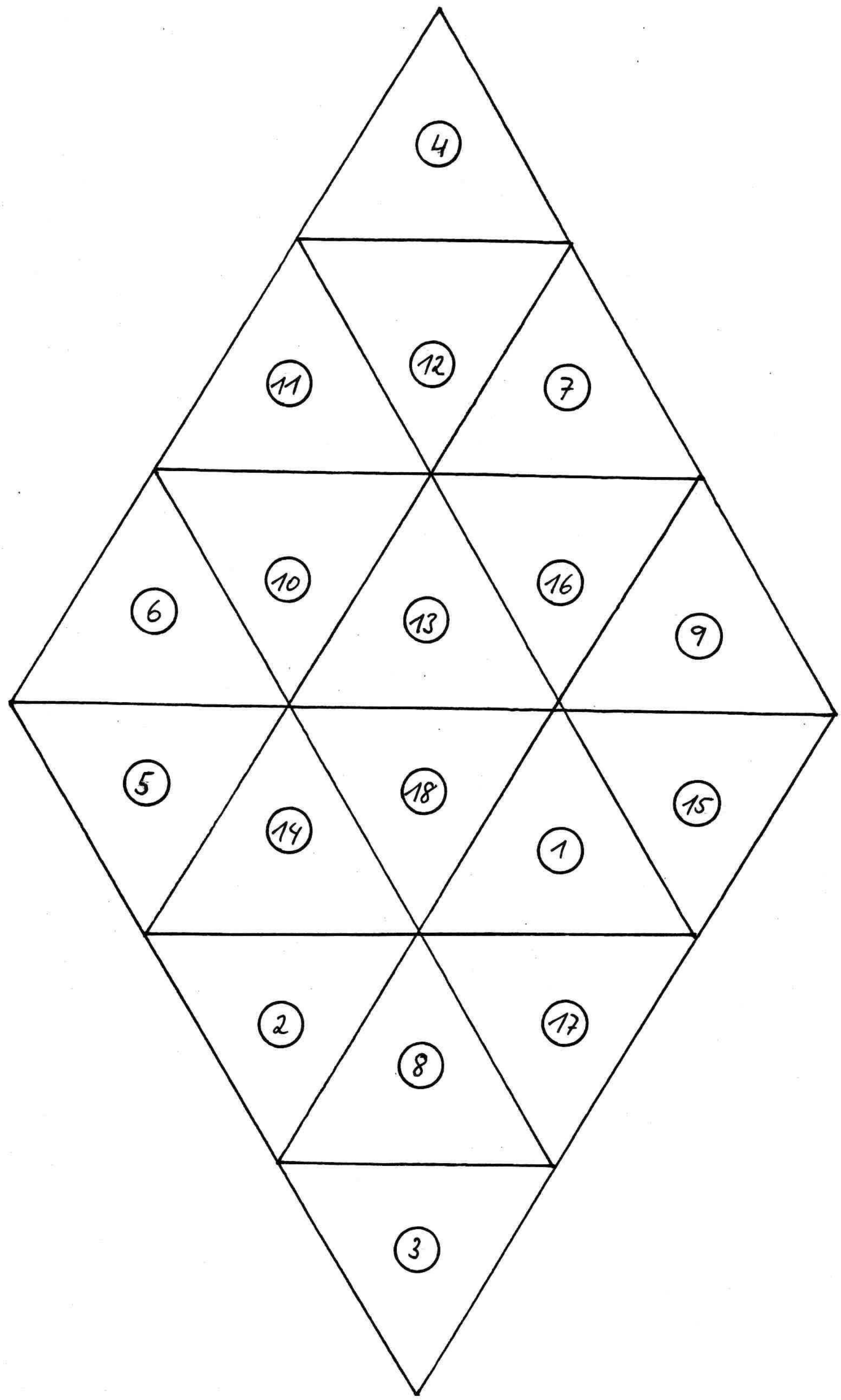


(d)

(e)
   i. $y = -2,5 \cdot x + 141,8$
      x-Anzahl der Jahre seit 1993 / y-Erdgasreserve
      Die geschätzten Erdgasreserven würden noch ca. 57 Jahre reichen.
   ii. 71 Jahre
   iii. 85 Jahre

18. **Funktionenpuzzle**

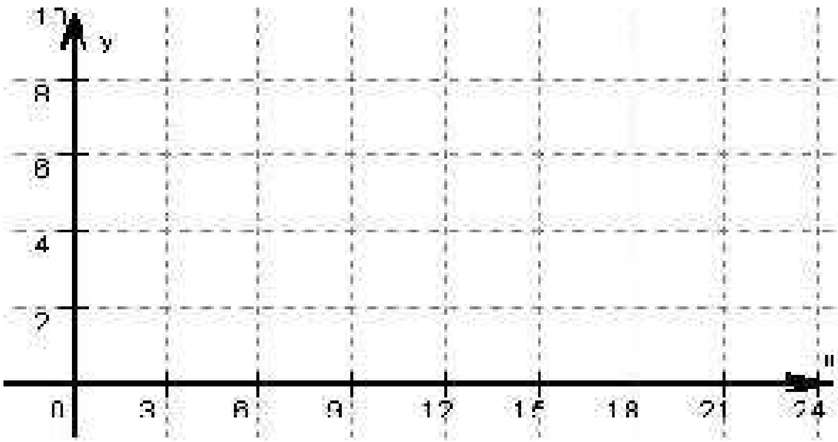

y = −x + 2
(1|1,5)
y = −x − 1
y = x + 0,5
y = x/4 + 1/4
y = −2x + 2
y = −x/2 − 1
keine Lösung
y = 1
y = 1/2 x + 3/2
y = −1/4 x + 3/4
y = x + 1
y = −x + 1
y = −x
(1|1)
y = x/2 − 1/2



Lösung:

19. **Kinder als Sozialhilfeempfänger**
Wie viele Kinder waren 1984 Sozialhilfeempfänger und wie viele sind es im Jahr 2000?

Zeige, dass die Graphik aus der SZ einen falschen Eindruck erwecken soll. Benutze dazu das angegebene KO-System.



Wie viele Kinder waren 1997 Sozialhilfeempfänger?

Weitere Fragen:

(a) Wie viele Kinder waren nun 1884 Sozialhilfeempfänger? (relativ und absolut)

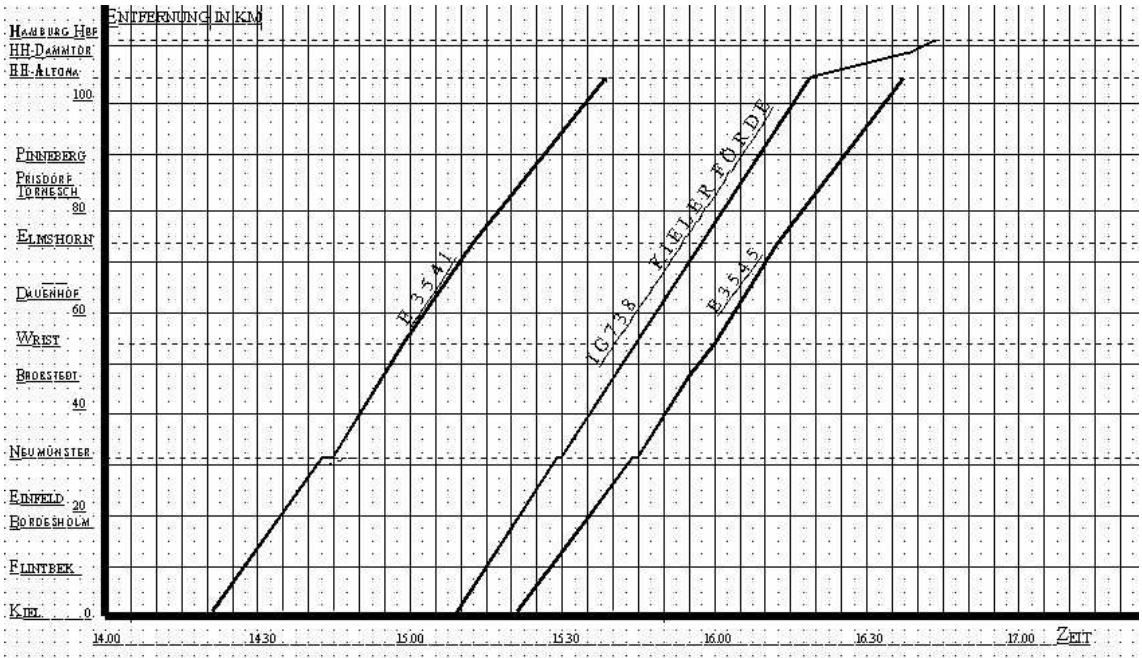
(b) Wie viele Kinder werden es laut der Prognose im Jahr 2000 sein?

(c) Warum ist diese Prognose problematisch? (Betrachte den bisherigen Verlauf des Graphen.)

(d) Wie sieht der Graph aus, wenn du nur die Zahlen von 1980 und 1997 kennst?

(e) Warum beschreibt der Graph die Wirklichkeit nur ungenau?

20. Bildfahrplan Kiel—Hamburg



a) Gib die Nummern der Züge an, die zwischen 14 und 16 Uhr von Kiel nach Hamburg fahren.

b) Notiere daneben ihre Abfahrtzeiten von Kiel.

Zugnummern	Abfahrtzeiten

c) Welcher Zug ist (welche Züge sind) am schnellsten von Kiel in Hamburg-Altona? ______

d) Suche eine günstige Verbindung von Kiel nach Hamburg-Altona heraus. Begründe: ______

______

e) Wie viele Minuten braucht der Zug für die Strecke? ______

______

f) Der 5601 fährt um 15.50 Uhr ab Kiel und ist um 16.18 Uhr in Neumünster, fährt dort um 16.20 Uhr ab und kommt um 16.52 in Elmshorn an. Wann wird er bei gleicher Geschwindigkeit in Hamburg-Altona sein? ______________

____

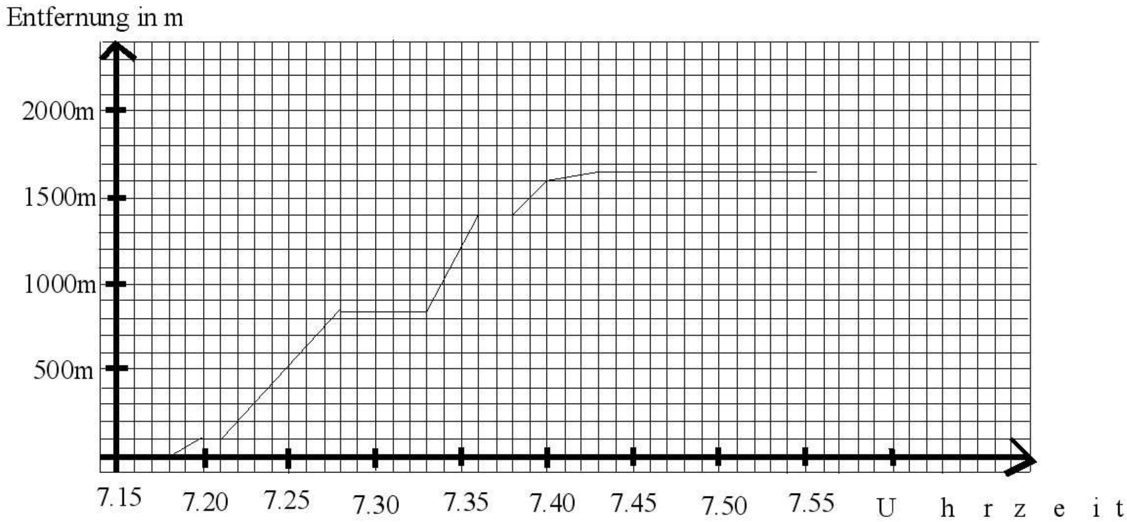
g) Kannst du auch den Graphen eines Zuges einzeichnen, der von Hamburg-Altona nach Kiel fährt? Der E 3550 z. B. fährt um 14.20 Uhr ab Hamburg-Altona, ist um 14.42 Uhr in Elmshorn, um 14.55 Uhr in Wrist, um 15.09 Uhr in Neumünster, fährt dort um 15.11 Uhr ab, ist um 15.20 Uhr in Bordesholm und um 15.35 Uhr in Kiel.

h) Finde selbst interessante Aufgaben zu diesem Bildfahrplan.

Lösung:

21. Petras Schulweg

Petra fährt jeden Morgen mit dem Fahrrad zur Schule und trifft auf dem Weg zur Schule einige Freundinnen. An zwei Stellen müssen sie an Ampeln Hauptstraßen überqueren. Nachdem sie ihr Fahrrad abgestellt hat, muss sie die letzten 30 m einen kleinen Hang hinaufgehen, um ins Schulgebäude zu gelangen. Der Verlauf von Petras Weg zur Schule ist hier abgebildet:



Lies daraus ab:

a) Um welche Uhrzeit verlässt Petra ihr Elternhaus?

b) Wann kommt sie in der Schule an?

c) Wann trifft sie sich mit ihrer Freundin?

d) Wann warten beide an der ersten Ampel auf eine weitere Klassenkameradin?

e) Wann müssen sie an der zweiten Ampel warten?

f) Um wieviel Uhr merkt sie, dass sie sich beeilen muss? Begründe, woran du das erkennst.

g) Kannst du noch mehr aus der Tabelle ablesen? Notiere das.

h) Zeichne den Verlauf deines eigenen Schulweges in ein Diagramm.

i) Kannst du dir andere Situationen mit solchen „Verlaufsskizzen“ vorstellen?

Lösung: a) Petra verlässt ihr Elternhaus um 7.18 Uhr.

b) Sie kommt um 7.43 Uhr in der Schule an.

c) Um 7.20 Uhr trifft sie sich mit ihrer Freundin.

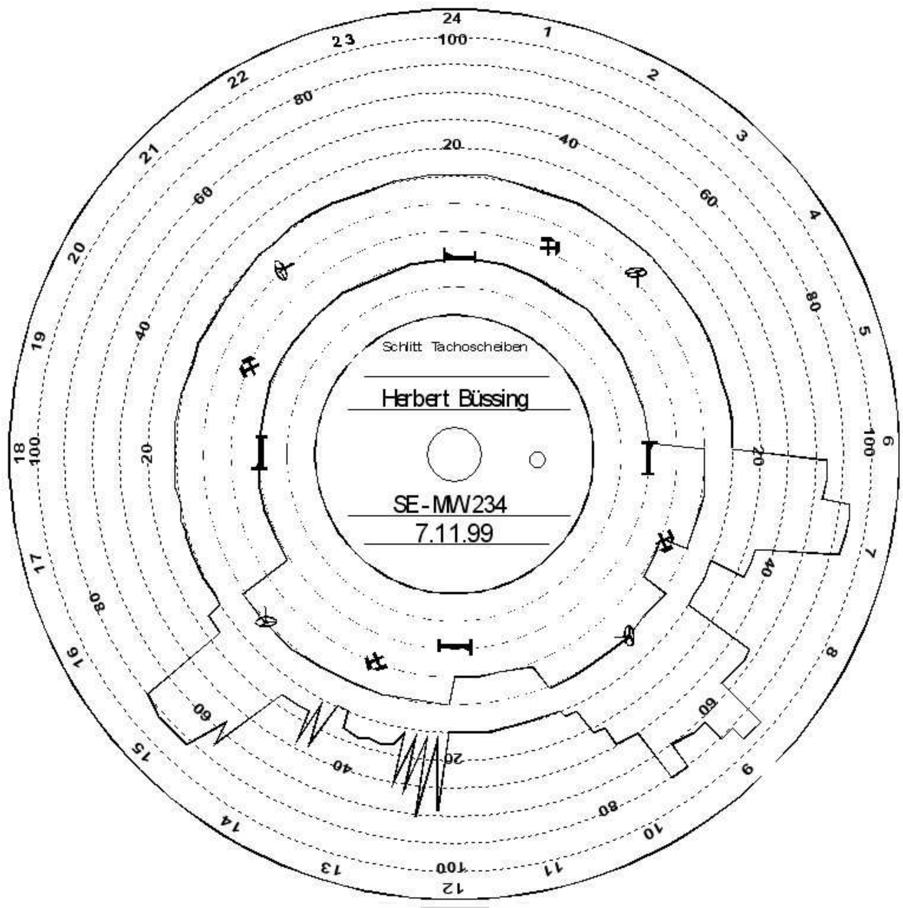
d) Um 7.28 Uhr warten beide an der ersten Ampel auf weitere Freundinnen.

e) Um 7.36 Uhr müssen sie an der zweiten Ampel warten.

f) Um 7.33 Uhr merkt sie, dass sie sich beeilen müssen. Danach verläuft der Graph der Wegstrecke nämlich steiler, das bedeutet, dass sie schneller sind.

g) Z. B. auf der letzten Strecke bevor sie die Schule erreichen, ist sie wesentlich langsamer, wohl deshalb, weil sie das letzte Ende zu Fuß und bergan gehen müssen. Nachdem sie von zu Hause aufgebrochen ist, ist sie zunächst auch noch langsam...

22. Tachograph

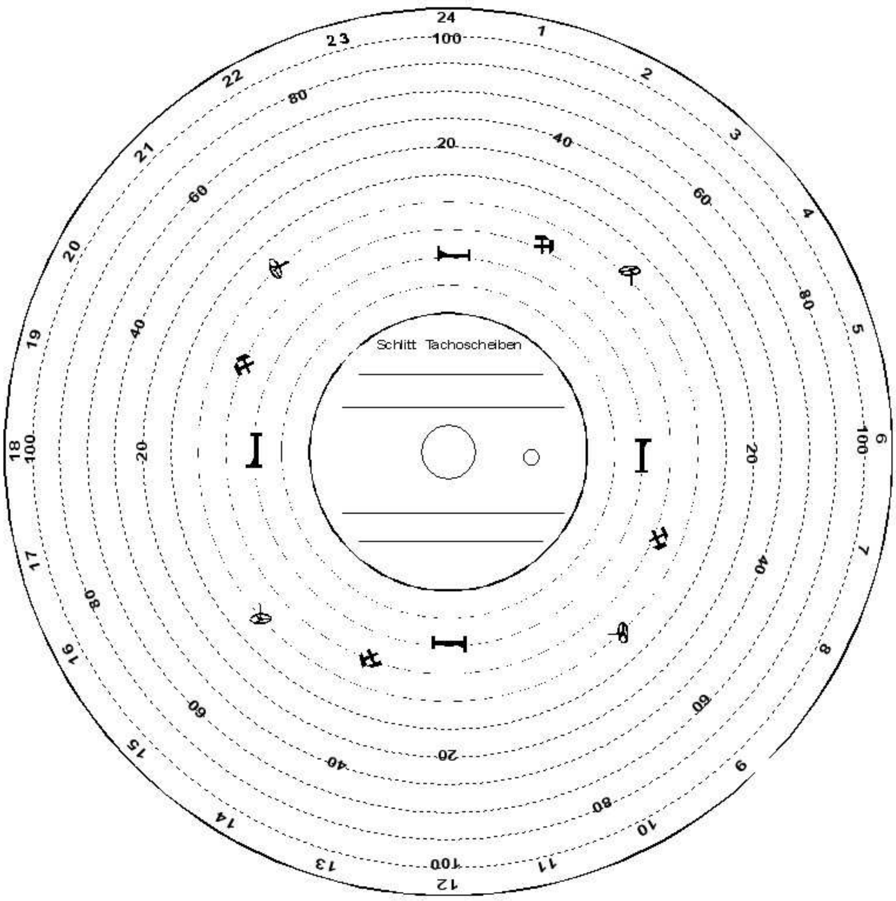


Um 6.30 Uhr startet Fernfahrer Herbert K. seinen 40-Tonner und fährt vom Hof der Spedition, für die er arbeitet. Mit durchschnittlich 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ steuert er seinen LKW durch den beginnenden Berufsverkehr zu einem Elektrogroßhandel, den er um 7.15 Uhr erreicht. Dort angekommen, parkt er sein Fahrzeug und fängt an, es

mit 62 Kühlschränken und 27 Spülmaschinen zu beladen. Nach ca. 40 Minuten hat Herbert K. seinen Lastzug beladen, alle Formalitäten erledigt und startet zur nahe gelegenen Autobahn. Mit den vorgeschriebenen 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt er Richtung Süden. Um 9.00 Uhr hält er für ein zweites Frühstück an einer Raststätte an. Da er dort seinen Freund Karl trifft, dauert es 50 Minuten, bis er endlich weiter fährt. Mit durchschnittlich 65 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erreicht er nach 2,5 Stunden die Autobahnausfahrt, an der er die Autobahn verlässt. Jetzt dauert es noch 20 Minuten, da er im Durchschnitt nur 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fahren kann, bis er sein Ziel erreicht. (Aus: Segeberger Zeitung vom 09.09.1999)

a) Wie sieht die Tachoscheibe von Fernfahrer Herbert K. aus? Trage deine Werte in die leere Tachoscheibe ein.

b) Überlege dir selbst eine Geschichte und zeichne dazu einen passenden Fahrtenverlauf.



Legende zur Tachoscheibe

Ungleichmäßige Öffnung in der Mitte bewirkt eindeutiges Mitführen der eingelegten Tachoscheibe.

Angaben in der Mitte: Name des Fahrzeugführers, Abfahrtsort, Bestimmungsort, Abfahrtstag, Ankunftstag, Amtliches Kennzeichen des Fahrzeugs, Kilometerstand bei der Ankunft, Kilometerstand bei der Abfahrt, gefahrene Kilometer.

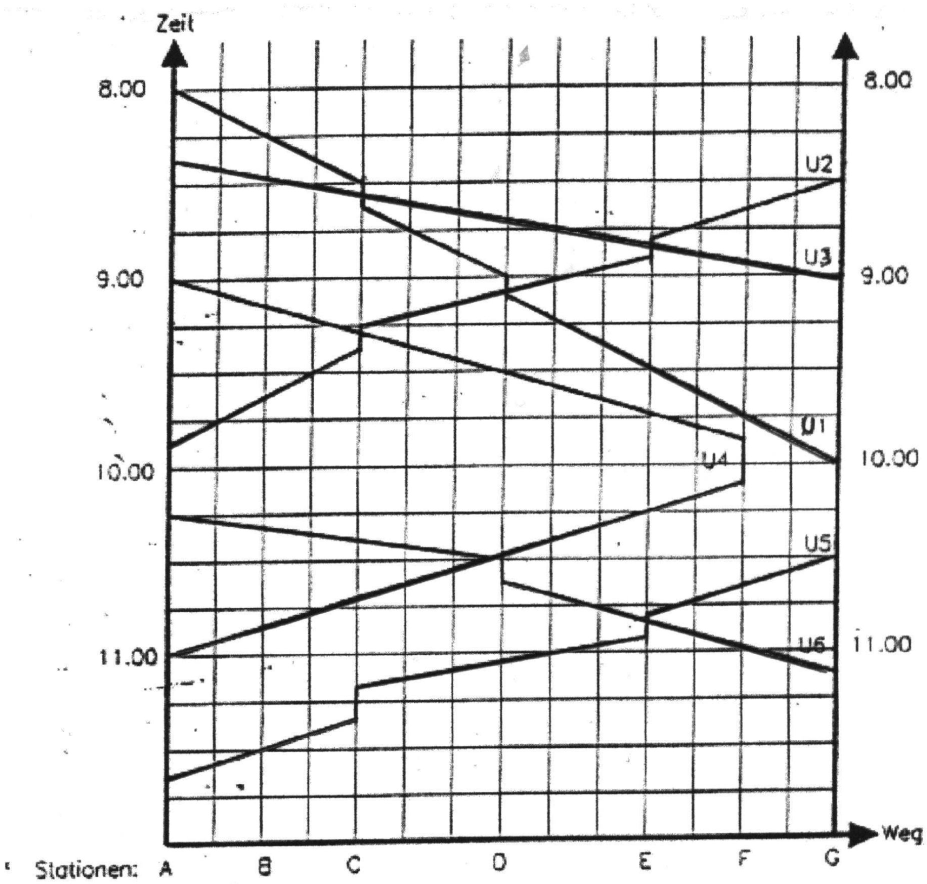
1. Kreisring mit zackigen Ausschlägen: Kilometeraufschrieb
Jeder Ausschlag entspricht 5 gefahrenen Kilometern, also einmal hoch und runter bedeutet 10 gefahrene Kilometer. Dieser Teil dient der Kontrolle, ob alle gefahrenen Kilometer fortlaufend mit offiziell vorgelegten Tachoscheiben dokumentiert werden. Eine Tachoscheibe muss an die folgende lückenlos anschließen.

Symbole für die Tätigkeiten:

Lenkzeit Arbeitszeit Mitfahrzeit Ruhezeit

Lösung:

23. Fahrdienstleiter bei der U-Bahn
In einem Stellwerk findest du folgenden U-Bahn-Plan vor. Könntest du dich in diesem Plan zurechtfinden?



a) Versuche, den Fahrplan zu lesen.

b) Schreibe einige U-Bahnverbindungen auf.

c) Warum ist es zum Lesen des Planes nicht notwendig, daß die U-Bahnen mit Pfeilen gekennzeichnet sind?

d) Was macht U2 um 8.48 Uhr?

e) Welche U-Bahnen begegnen sich?

f) Kann man zwischen 9.00 Uhr und 10.00 Uhr von A nach G fahren?

g) Bei U6 sind die Linien unterschiedlich steil. Erkläre die Bedeutung.

h) Zeichne eine eigene U-Bahnverbindung ein.

Lösung: b) U1 fährt um 8.00 Uhr in Station A los und erreicht um 10.00 Uhr Station G.
U2 fährt um 8.30 Uhr in Station G los und erreicht um 9.50 Uhr Station A.
U3 fährt um 8.22 Uhr in Station A los und fährt ohne Haltepause durch bis Station G. Sie erreicht die Station um 9.00 Uhr.
U4 fährt um 9.00 Uhr in Station A los, erreicht um 9.55 Uhr Station F, hält 10 Minuten und fährt dann direkt zurück zu Station A, die um 11.00 Uhr erreicht wird.
U5 und U6 fahren ähnlich wie U1—U4.

c) Die Leserichtung (Fahrtrichtung der U-Bahn) ist von der Zeitachse abhängig: Linke Zeitachse, fallende Verbindung, Fahrtrichtung A bis G. Rechte Zeitachse, fallende Verbindung, Fahrtrichtung G bis A.

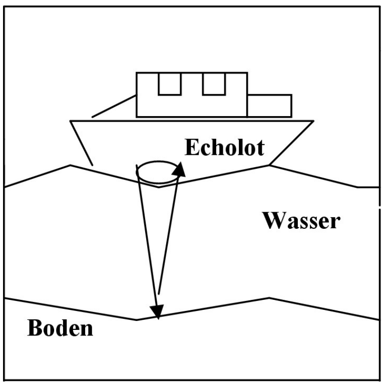
d) Halt an Station F (weitere Beispiele für Haltestationen sind möglich).

e) U1 und U2, U1 und U3, U2 und U3, U2 und U4, U4 und U6, U5 und U6.

f) Nein.

g) Unterschiedliche Steigung bedeutet unterschiedliche Geschwindigkeit von U6: Steilere Steigung, größere Geschwindigkeit — flachere Steigung, kleinere Geschwindigkeit.

24. Echolot
Beim Echolot sendet man Schallwellen auf den Meeresgrund. Bei einer Wassertiefe von 1480 m benötigen die Schallwellen für die Entfernung vom Echolot zum Meeresboden zwei Sekunden. Bei einer Wassertiefe von 2960 m benötigen sie dann vier Sekunden.



a) Ein Echolot hat bei fünf Messungen in einem Abstand von 50 m nach folgenden Zeiteinheiten die vom Meeresboden zurückkehrenden Schallwellen aufgezeichnet:

nach 1,5 s nach 1,2 s nach 2 s nach 1,1 s nach 0,9 s

Kannst du einen Verlauf des Meeresbodens zeichnen (Maßstab 1:1000)?

b) Ein Echolot hat folgende Tiefen des Meeresboden gemessen: 740 m, 1776 m, 1184 m, 2664 m. Gib die dazugehörigen Zeiten an.

c) Nach welcher Funktionsgleichung sendet das Gerät?

d) Zeichne einen Graphen mit geeigneter Achseneinteilung.

Lösung:

25. Natürliche Nachtsichtgeräte: Die Ohren der Fledermaus
Fledermäuse und Wale nutzen das Ultraschallprinzip. Das heißt: Sie stoßen Ultraschalltöne mit der Nase aus und fangen das Echo nach einer bestimmten Zeiteinheit wieder mit den Ohren auf. Auf diese Weise können sie sich auch bei Dunkelheit orientieren.

   a) Für das Lufttier Fledermaus gilt: Die Ultraschalltöne der Fledermaus treffen nach einer Sekunde auf einen 331 m entfernten Gegenstand. Zeichne einen sinnvollen Graphen. Berücksichtige dabei die Größen Zeit und Weg.

   b) Bei einer sitzenden Fledermaus wurden die Zeitspannen zwischen Aussenden des Ultraschalls und Auffangen des Echos, das von verschiedenen Insekten zurückprallte, mit 1,7 s, 4 s und 1,4 s gemessen. Wie weit waren die Insekten jeweils von der Fledermaus entfernt?

Lösung:

26. Hungriger Wal
Für das Meerestier Wal gilt: Die ausgesendeten Schallwellen treffen nach 2 Sekunden auf einen 1,480 km entfernten Gegenstand.

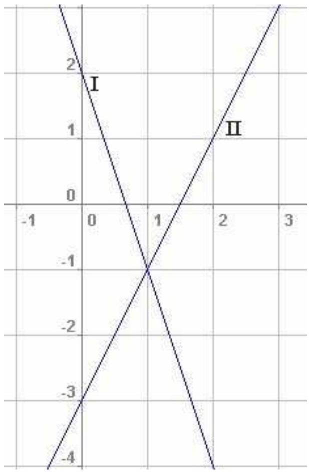
   a) Zeichne einen sinnvollen Graphen. Berücksichtige dabei die Größen Zeit und Weg.

   b) Wann hat der Wal einen Tintenfisch geortet, der in 962 m Entfernung auf einem Stein festsitzt?

   c) Wie viele Minuten nach dem Orten kann der Wal den Tintenfisch fressen, wenn er mit einer Geschwindigkeit von $v = 30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ schwimmt?

Lösung:

27. Lineare Funktionen



a) Bestimme die Normalform der Funktionsgleichung der Geraden I und II.

b) Lies den Schnittpunkt der beiden Geraden miteinander aus der Zeichnung ab.

c) Überprüfe deine Lösung rechnerisch.

d) Überprüfe, ob der Punkt A $(-2|4)$ auf der Geraden I liegt und ob der Punkt B $(4|5)$ auf der Geraden II liegt.

Lösung:

a) (I) $y = -3\,x + 2$, (II) $y = 2\,x - 3$

b) P $(1| - 1)$

c) Werte aus b) für x und y einsetzen und dadurch erhaltene Aussage auf Wahrheit prüfen.

d) A liegt nicht auf I, B liegt auf II.