

Terme und Gleichungen

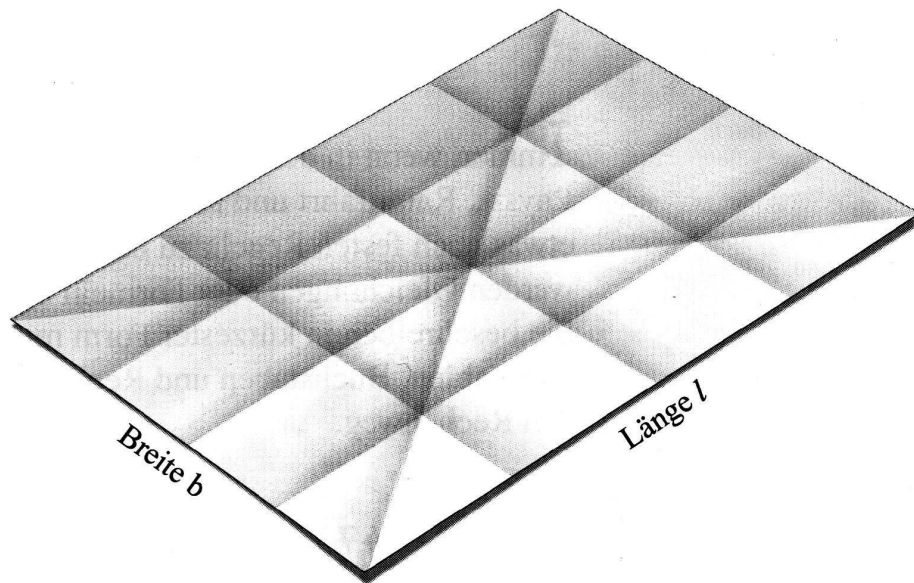
1. Immer wieder gleiche Seiten und Flächen

Faltet ein DIN A4 großes Blatt Papier 2-mal quer, danach 2-mal längs und nach dem Auffalten 2-mal diagonal von Ecke zu Ecke.

Wie viele Faltnlinien mit der Länge l gibt es? Wie viele Faltnlinien mit der Breite b gibt es? Messt aus wie lang sie jeweils sind.

Wie lang sind alle Faltnlinien zusammen? Beschreibt euren Rechenweg!

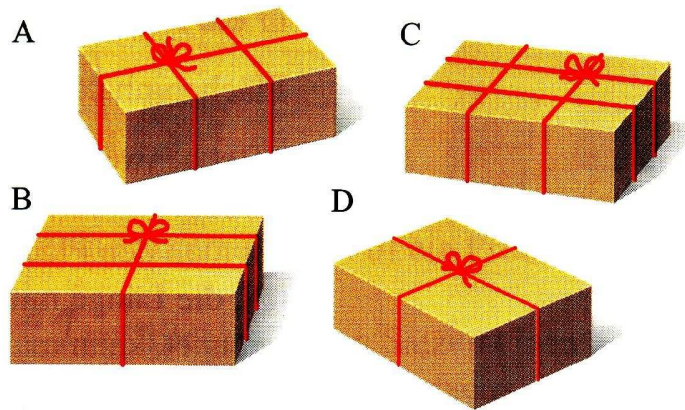
Welche sind die längsten Faltnlinien? Wie viele gibt es davon? Gebt ihnen einen Namen.



Lösung: 3 Faltnlinien der Länge l (29,7 cm) und 3 Faltnlinien der Länge b (21 cm)
 $l + l + l + b + b + b + d + d = 3l + 3b + 2d$; Gesamtlänge: 224,9 cm
2 Diagonalen d (36,4 cm)

2. Päckchen schnüren

- (a) Ein Paket hat die Länge $l = 35$ cm, die Breite $b = 25$ cm und die Höhe $h = 12$ cm. Je nach Gewicht des Inhaltes soll es unterschiedlich verschnürt werden. Schätzt, für welches Paket ihr am meisten Schnur benötigt. Gebt noch 20 cm (insgesamt) für die Knoten hinzu und berechnet die jeweils benötigte Schnurlänge. Versucht, einen Schuhkarton wie in der Grafik dargestellt zu schnüren, die Kordel soll nirgends doppelt verlaufen.

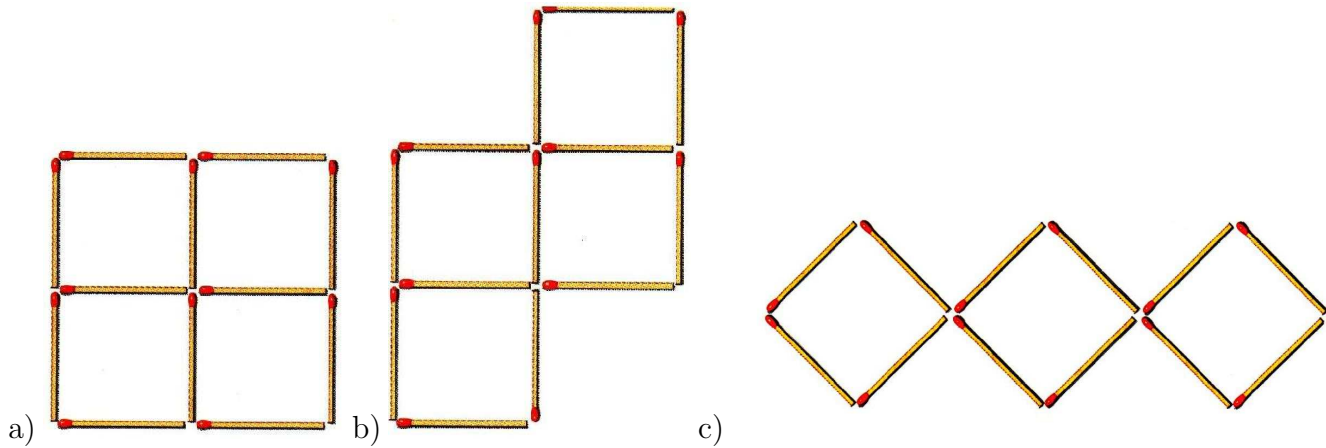


- (b) Gebt die Schnurlängen auch allgemein für solche Pakete mit der Länge l , der Breite b und der Höhe h an.
- (c) Wie sieht eine Paket-Schnürung aus zu $4l+4b+4h+15$ bzw. zu $3l+2b+4h+10$?
- (d) Überlege dir weitere Terme und lass deinen Nachbarn die Pakete aufzeichnen.

Lösung: (a) $2l + 4b + 6h + 20 = 2(l + 2b + 3h) + 20 = 262$ cm
 (b) $4l + 2b + 6h + 20 = 2(2l + b + 3h) + 20 = 282$ cm
 (c) $4l + 4b + 8h + 20 = 2(2l + 2b + 4h) + 20 = 356$ cm
 (d) $2l + 2b + 4h + 20 = 2(l + b + 2h) + 20 = 188$ cm
 Teil 2 bei b nicht möglich!

3. Streichholzquadrate

- (a) Für diese Aufgabe benötigt ihr eine Schachtel Streichhölzer. Legt vier Quadrate wie in a). Wie viele Streichhölzer benötigt ihr dafür?
- (b) Legt nun vier Quadrate wie in b). Wieso benötigt ihr jetzt ein Streichholz mehr? Wie viele Streichhölzer benötigt ihr für die Lösung in c) mehr?
- (c) Könnt ihr eine Regel bilden, mit der man die benötigte Anzahl der Streichhölzer für die Legebeispiele in a), b), c) berechnen kann?
- (d) Findet heraus, wie man fünf, sechs, sieben, acht,... Quadrate mit möglichst wenig Streichhölzern legen kann. Zeichnet euch auch eine Skizze in eure Hefte.
- (e) Wie viele Streichhölzer benötigt ihr mindestens um 100, 1000, ... Quadrate zu legen? Wie viele höchstens?
- (f) Wie viele Quadrate könnt ihr mit 100, 1000, ... Streichhölzern legen?
- (g) Zu guter Letzt: Legt drei gleichseitige Dreiecke mit möglichst wenigen Streichhölzern.



Lösung: (a) 12 Streichhölzer

(b) b): 13, da die Möglichkeit zum SZweierquadrat nicht genutzt wird

c): 16 Streichhölzer: 4 mehr als in a)

(c) Q : Anzahl der Quadrate, V : Anzahl der Viererquadrate, D : Anzahl der Dreierquadrate, Z : Anzahl der Zweierquadrate, S : Anzahl der Streichhölzer.

i. $4 \cdot D = S \mid 2 \cdot V + 2 \cdot Z = S$

ii. $2 \cdot V + 1 \cdot D + 1 \cdot Z = S \mid 1 \cdot V + 3 \cdot D = S$

iii. $4 \cdot V = S$

	$Q = 5$	$Q = 6$	$Q = 7$	$Q = 8$	$Q = 9$
(d)	$S = 15$	$S = 17$	$S = 20$	$S = 22$	$S = 24$
	$3 \cdot 5 = 15$	$3 \cdot 5 + 2 = 17$	$6 \cdot 3 + 2 = 20$	$6 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 22$	$6 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 24$

(e) 100 Quadrate: mindestens 220 Streichhölzer (z.B. $20 \cdot D + 80 \cdot Z$), höchstens 400 ($100 \cdot V$)

1000 Quadrate: mindestens 2064 Streichhölzer (z.B. $64 \cdot D + 936 \cdot Z$), höchstens 4000 ($1000 \cdot V$)

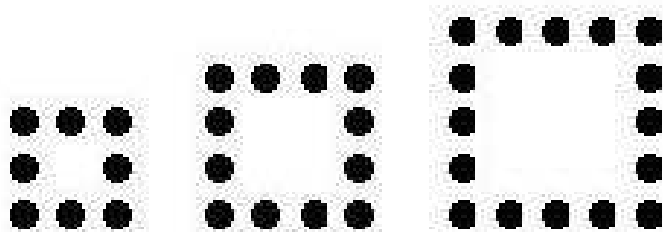
(f) 100 Streichhölzer: 43 Quadrate ($14 \cdot D + 29 \cdot Z$)

1000 Streichhölzer: 478 Quadrate ($44 \cdot D + 434 \cdot Z$)

(g) mit 7 Streichhölzern

4. Plättchenmuster

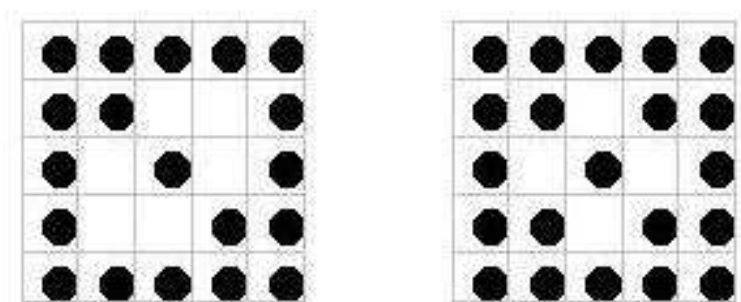
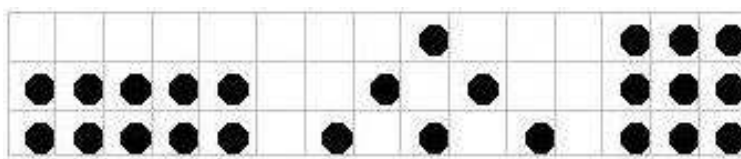
(a) Schau dir die folgende Reihe aus regelmäßig wachsenden Plättchenmustern genau an und versuche, sie fortzusetzen. Wie viele Plättchen sind in einer Grundseite, wenn die gesamte Figur aus 28 (68) Plättchen besteht?



- (b) Gegeben sind die Terme $2 \cdot n$; $3 \cdot n - 3$; $n \cdot n$, wobei n für irgendeine natürliche Zahl steht. Lege Figuren, bei denen sich die Gesamtzahl der Plättchen durch den vorgegebenen Term bestimmen lässt.
- (c) Denkt euch andere Muster aus, bei denen ihr die Gesamtzahl der Plättchen gut mit einem Rechenausdruck bestimmen könnt. Notiert den Rechenausdruck und lasst die Nachbargruppe das Muster dazu raten.

Lösung: (a) n : Anzahl der Plättchen auf der Grundseite. N : Anzahl der Gesamtplättchen. Dann gilt: $N = 4n - 4 = 4(n - 1)$. Für $N = 28$ gilt: $n = 8$. Für $N = 68$ gilt: $n = 18$.

- (b) jeweils fortgesetzt...(Dreieck innen leer)



$$2n + 3(n - 2) = 5n - 6 \quad 2n + 3(n - 2) + n - 3 = 6n - 9$$

- (c) z.B. siehe rechts oben

5. Das Tischtennisturnier

Bei einem Tischtennisturnier soll jeder Teilnehmer gegen jeden anderen ein Hin- und ein Rückspiel austragen.

- (a) Lege eine Tabelle an, in der die Spielergebnisse eingetragen werden können, falls sich 4 Spieler beteiligen!
- (b) Wie viele Spiele sind insgesamt bei 4 [5;10] Teilnehmern auszutragen? Begründe deine Antwort!
- (c) Bestimme einen Term, mit dem man die Zahl der Spiele bei n Teilnehmern berechnen kann.
- (d) Bei einem solchen Turnier gab es 72 [110] Spiele. Wie viele Spieler haben teilgenommen?

Variationen:

Bundesliga-Spiele, Händeschütteln

- Lösung:* (a)
(b) 12 [20; 90]

(c) $n(n - 1) = n^2 - n$

(d) 9 [11]

6. Die Backstreet Boys

Die Backstreet Boys waren 1998 zusammen 107 Jahre alt. Kevin war ein Jahr älter als Brian und Howie. Nick war sechs Jahre jünger und A.J. fünf Jahre jünger als Kevin. Wie alt war jeder?

Lösung: Kevin war 24.

7. Max der Vergessliche

Max will wissen, wie viel sein Kuli gekostet hat, den er zusammen mit einigen anderen Sachen gekauft hat. Doch er weiß nur noch, dass dieser halb so teuer war wie der Füller. Und der Füller, erinnert er sich, hat 2 € mehr gekostet als der Stift. Der Stift, das weiß er noch, war so teuer wie das Heft. Das Heft, das Buch und die Mappe haben zusammen 20 € gekostet. Das Buch war um 4 € teurer als das Heft. Die Mappe hat 4 € gekostet.

Lösung: Heft: 6 €; Stift: 6 €; Buch: 10 €; Füller: 8 €; Kuli: 4 €.

8. Gut wer einen Opa hat

Detlef hat Geburtstag. Sein Opa Dieter kauft ihm eine Mütze, eine Hose, die drei mal so viel kostet wie die Mütze und ein T-Shirt, das halb so viel wie die Hose kostet. Auf Wunsch seines Enkels kauft er ihm noch ein Kickboard, das so viel kostet wie die Hose, die Mütze und das T-Shirt zusammen. Für alles zusammen zahlt er das 9?-fache der Mütze und 30 €.

(a) Wie viel haben die Sachen zusammen gekostet?

(b) Wie viel haben die einzelnen Sachen gekostet?

Lösung: Mütze: 20 €; Hose: 60 €; T-Shirt: 30 €; Kickboard: 110 €.

9. Der Weihnachtsmann

Der Weihnachtsmann hat an Weihnachten viel zu tun, also hat er einen Helfer. Weihnachtsmann A ist grad in Finnland und will zurück zum Nordpol. Um 19 Uhr startet er seine 1120 km lange Reise mit $25 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ zum Nordpol. Weihnachtsmann B ist am Nordpol und will in Finnland weiter machen. Er startet auch um 19 Uhr und fährt mit $35 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wann treffen sie sich?

Lösung: 8 h 40 min bis Treff. Also um 13.40 Uhr.

10. Der Marathon-Lauf

Vor einer Woche hat in Berlin ein großer Marathon-Lauf von 500 Menschen stattgefunden. Der Startschuss fiel um 16.00 Uhr. Um diese Uhrzeit mussten alle Läufer an der Startfläche stehen. Obwohl ein Läufer noch nicht da war, hat der Lauf



ohne ihn begonnen. Alle Läufer liefen $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Am Ziel erwartete den Gewinner eine Summe von 5000 €. Doch plötzlich, nach einer viertel Stunde, kam der fehlende Läufer. Ihm wurde in letzter Sekunde noch erlaubt mit zu laufen, nämlich $7 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wie lange dauerte es, bis er die anderen 499 eingeholt hatte?

Lösung: Einholen nach $0,875 \text{ h} = 52,5 \text{ min}$.

11. Termdomino

$5z - 1 + 14x - 2$	$r + s - 1r + 1s$	$9x^2 - 5x^2$	$3xz + 4xz - xz$
1	$2a - 4a$	$-2a$	$4x^2$
$-\frac{9}{16}$	$3 \cdot (a - 2b)$	$6xz$	$14x + 5z - 3$
$4 \cdot (x + y)$	$2 \cdot (a + 2b)$	$a - b + c$	$5y^2 \cdot x$
$-6x$	$c - b - 3a + 4a$	$2a + 4b$	$(x + y) + y$
$5xy^2$	$4x + 4y$	$3a - 6b$	A_{Rechteck}
-11	$-7 \cdot (-\frac{1}{2})$	$x + 2y$	$(r + s) - (r + s)$
$a \cdot b$	$196 : 14^2$	a^3	$x \cdot y \cdot y \cdot x$
x^2y^2	$-15 - 17 + 21$	0	$a \cdot a \cdot a$
$\frac{35}{10}$	$-(\frac{5}{4})^2 + 1$	$2s$	$-4x + 3y - 2x - 3y$

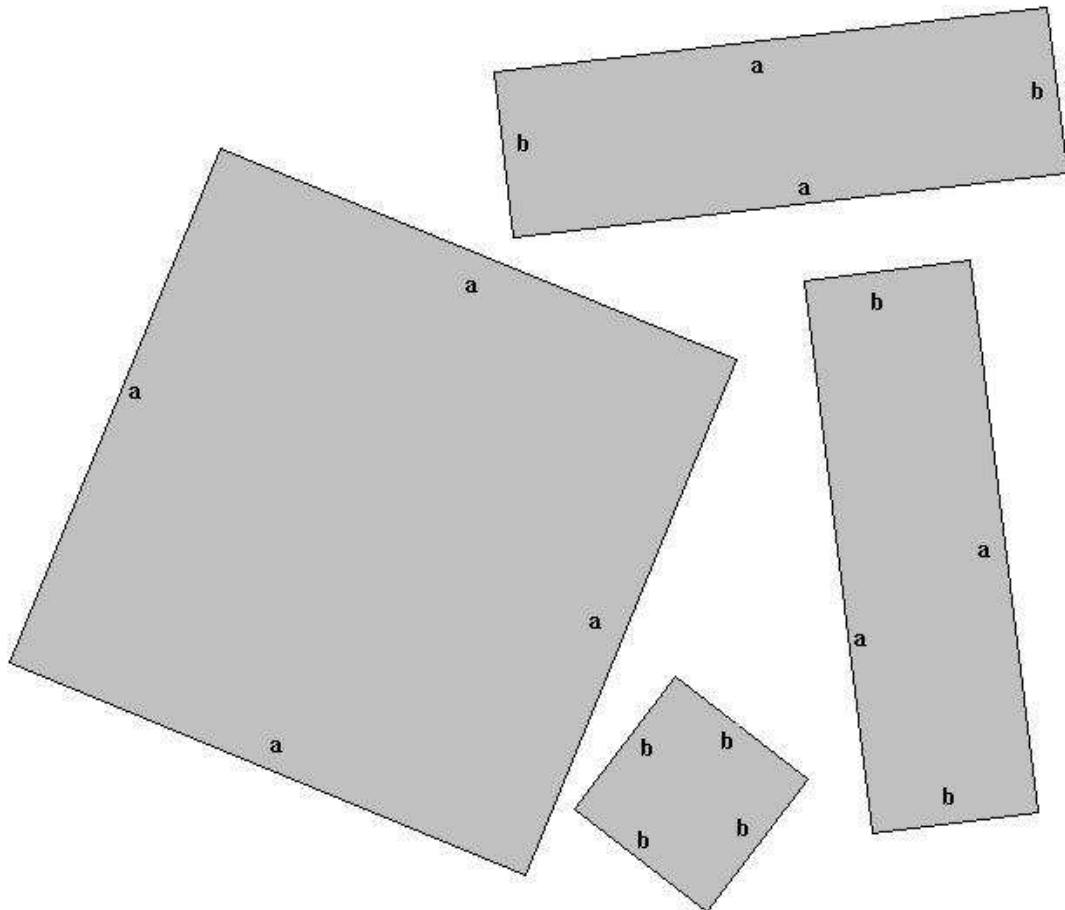
Schneidet die Dominosteine entlang der Doppellinien auseinander. Teilt die Dominosteine in eurer Gruppe auf und bestimmt, wer anfängt. Jetzt versucht jeder Spieler nacheinander, einen seiner Steine anzulegen. Dazu müssen die Terme allerdings wertgleich sein. Wer nicht anlegen kann, muss eine Runde aussetzen.

12. Binomische Formeln

- (a) Schneide die unten abgebildeten Vierecke aus!
 (b) Bestimme einen Term für den Flächeninhalt der grauen Gesamtfläche A der vier Rechtecke in Abhängigkeit von den Seitenlängen a und b :

$A =$

Überlege, ob es noch andere Terme gibt, mit denen man den Flächeninhalt A darstellen kann.



Lösung: $b^2 + ab + a^2 + ab = (b + 2a) \cdot b + a^2 = (a + 2b) \cdot a + b^2 = (a + b)^2$

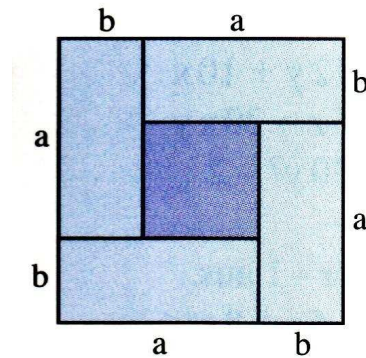
13. Babylonische Multiplikation

Die Babylonier nutzten Tafeln mit Quadratzahlen, um beliebige Zahlen miteinander zu multiplizieren.

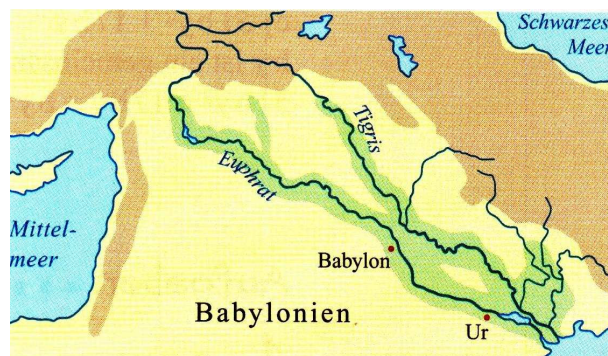
Sollten die Zahlen a und b miteinander multipliziert werden, bildeten sie zunächst die Summe $(a + b)$ und die Differenz $(a - b)$, ermittelten dann die Quadrate der Summe und der Differenz mit Hilfe der Tafeln und subtrahierten anschließend die beiden Zahlen voneinander. Schließlich teilten sie das Ergebnis durch 4 und heraus kam das Produkt der beiden Zahlen a und b .

- (a) Berechne mit diesem Verfahren $53 \cdot 47$.

- (b) Erstelle einen Term für das Rechenverfahren der Babylonier und zeige, dass dieser Term tatsächlich gleich dem Produkt $a \cdot b$ ist.
- (c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem beschriebenen Rechenverfahren und der Grafik?
- (d) Beurteile dieses Verfahren?



Die Babylonier lebten in Mesopotamien, einer fruchtbaren Ebene zwischen den Flüssen Euphrat und Tigris, im heutigen Irak. Sie entwickelten eine Schrift, die aus keilförmigen Symbolen bestand und mit Stiften in Tonplatten gedrückt wurde. Anschließend wurden die Platten in der Sonne getrocknet. Viele Tausende dieser Tafeln existieren noch heute, unter ihnen auch die im Text erwähnten Tafeln mit Quadratzahlen.



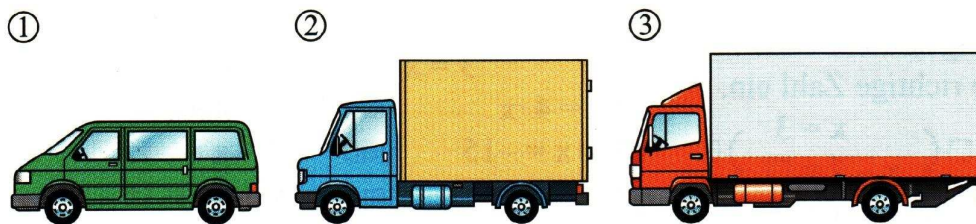
Lösung: (a) $\frac{100^2 - 6^2}{4} = 2491$
 (b) $\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2}{4} = ab$

14. Umzug mit dem Mietwagen

Für den Transport größerer Gegenstände, z.B. Möbel bei einem Umzug, kann man sich für Stunden oder auch Tage einen Lkw mieten. Meistens kann man bei den Vermietern unter verschiedenen Lkw-Größen und unter verschiedenen Angeboten wählen. Der Gesamtpreis errechnet sich aus der Tagesmiete und einem Pauschalpreis für jeden gefahrenen Kilometer.

Manchmal gibt es Mietangebote mit einer bestimmten Anzahl von Freikilometern. Nach der abgelaufenen Mietzeit muss man das Fahrzeug vollgetankt wieder zurückbringen.

STANDARD-ANGEBOT		
Wagentyp	Tagesmiete	Pauschale pro Kilometer
Transporter	65 €	0,36 €
Klein-Lkw	75 €	0,39 €
Lkw	99 €	0,54 €



An Wochenenden macht der gleiche Vermieter ein Spar-Angebot, bei dem 100 Kilometer schon in der Tagesmiete eingeschlossen sind

SPAR-ANGEBOT		
Wagentyp	Tagesmiete incl. 100 km	Mehr-km
Transporter	73 €	0,18 €
Klein-Lkw	87 €	0,22 €
Lkw	125 €	0,30 €

Inges Eltern wollen am Wochenende in eine 65 km entfernte Stadt umziehen. Sie wollen das Sparpaket nutzen und überlegen, ob sie zum Sparangebot den kleineren Wagentyp 2 nehmen. Dann müssen sie allerdings 2-mal fahren. Mit dem größeren Typ müssten sie nur 1-mal fahren.

- Berechne für die Wagentypen 1 bis 3, wie teuer es ist, sie für einen Tag zu mieten.
- Wie groß sind die Preisunterschiede?
- Bilde für jeden Wagentyp eine Gleichung mit Variablen, mit der man den Gesamtpreis für beliebig viele gefahrene Kilometer berechnen kann.
- Lege für den Wagentyp 2 eine Preistabelle für 25; 50; 100; 150 und 200 gefahrene Kilometer an. Wie viele Kilometer kann man für einen Gesamtpreis von 200 € fahren ?
- Bilde für alle drei Wagentypen Gleichungen mit Variablen, mit denen man für beliebig viel gefahrene Kilometer über 100 km (Mehr-km) den Gesamtpreis errechnen kann.
- Verdoppelt sich mit den gefahrenen Kilometern auch der Gesamtpreis?

- (g) Was kosten jetzt im Sparangebot 150; 200; 250 und 300 gefahrene Kilometer für die Wagentypen 1 bis 3?
- (h) Wie viel Kilometer kann man mit Wagentyp 1 für 200 € fahren?
- (i) Welche Lösung ist für Inges Eltern sinnvoller?

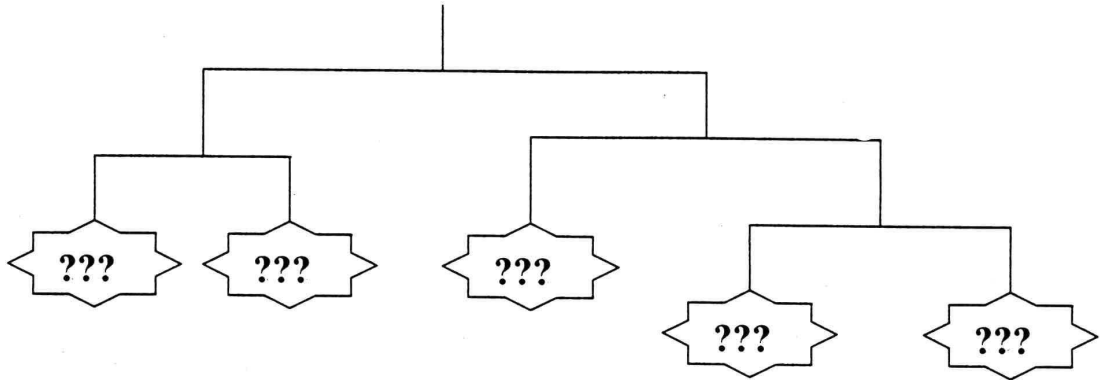
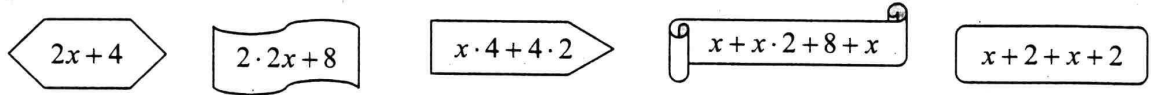
- Lösung:*
- (a) bei 120 km: Transporter: 108,2 €; Klein-Lkw: 121,8 €; Lkw: 163,8 €
 - (b) 13,6 €; 42 €
 - (c) $T = 0,36x + 65$; $K = 0,39x + 75$; $L = 0,54x \cdot 99$
 - (d) 84,75 €, 94,5 €, 114 €, 133,5 €; 153 €; ca. 320,5 km
 - (e) $T = 73 + 0,18x$; $K = 87 + 0,22x$; $L = 125 + 0,3x$;
 - (f) Nein, weil die Tagesmiete konstant ist.
 - (g) Transporter 82 €; 91 €; 100 €; 109 €;
Klein LKW 98 €; 109 €; 120 €; 131 €;
LKW 140 €; 155 €; 170 €; 180 €.
 - (h) ca. 805,5 km
 - (i) An die Autovermietung sind jeweils zu zahlen:
 $4 \cdot 65 \text{ km} = 260 \text{ km} \Rightarrow 87 + 0,22 \cdot 160 = 122,2$
 $2 \cdot 65 \text{ km} = 130 \text{ km} \Rightarrow 125 + 0,3 \cdot 30 = 134$

Welche Lösung insgesamt günstiger wäre, ist gar nicht so leicht zu entscheiden: Beim Sparangebot fallen wahrscheinlich höhere Benzinkosten an. Und vielleicht sind ja andere Faktoren entscheidender als die Kosten.

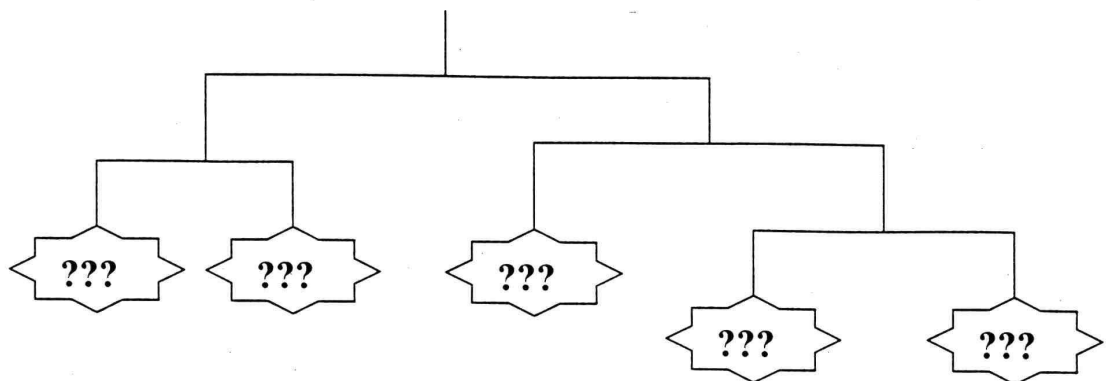
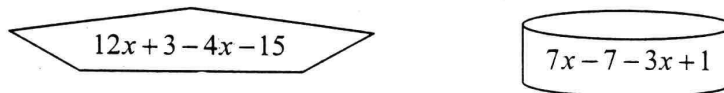
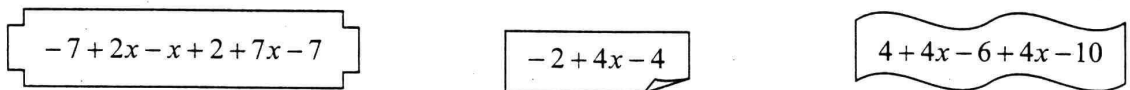
15. Term-Mobile

Das Term-Mobile ist im Gleichgewicht, wenn an beiden Enden eines Balkens insgesamt wertgleiche Terme vorhanden sind. Bringe die Mobiles mit den jeweils vorhandenen Elementen ins Gleichgewicht. Färbe dazu die entsprechenden Felder in gleicher Farbe.

a)



b)



Stelle selbst ein Term-Mobile her. Verwende dabei u.a. die folgenden Terme:

(a) $3(x + 4) + x$

(b) $2x + 6$

(c) $8(x + 1) + 4(1 - x)$

Frau S. aus K. ist es leid, jede Woche ein- oder zweimal zum Getränkemarkt zu fahren, um den entsprechenden Vorrat an Mineralwasser für ihre fünfköpfige Familie zu besorgen. Sie denkt über die Anschaffung eines Wasseraufbereitungsgerätes nach.

Die Firma Aquamaxx bietet ein solches Gerät zum Preis von 120 € an. Die entsprechenden CO_2 -Patronen kosten 16 € und reichen für 40l. $1m^3$ Leitungswasser kostet 8,50 € (einschließlich Abwassergebühren).

Die Hersteller des Aquamaxx behaupten: Bei Verwendung des Gerätes Aquamaxx sind die Kosten für ihr Mineralwasser bereits vor Ablauf eines Jahres geringer, als wenn Sie das Wasser im Getränkemarkt kaufen.

- Wie viel kostet ein Kasten Mineralwasser?
- Schätze den Tages- bzw. den Wochenbedarf der Familie S.
- Stelle die Kosten in einer Tabelle gegenüber (100l, 200l, 300l)
- Stelle für beide Möglichkeiten einen Term auf.
- Überprüfe die Aussage von Aquamaxx.
- Setze die beiden Gleichungen gleich und interpretiere das Ergebnis.

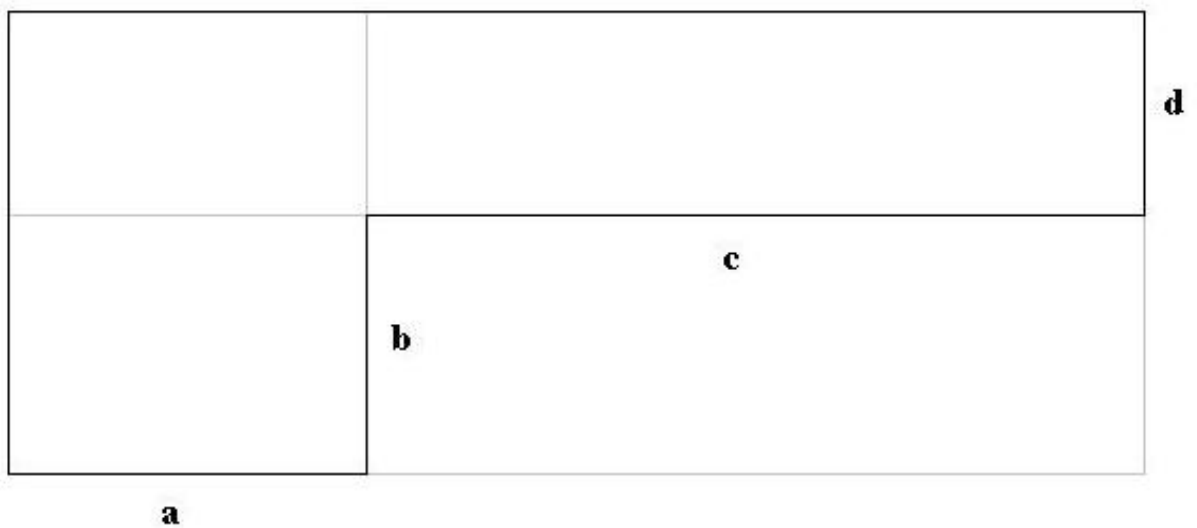
- Lösung:*
- 12 Flaschen à 0,7l kosten 7,60 € (ohne Pfand)
 - Jedes Kind eine Flasche, Eltern zusammen 3 bis 4 am Tag: ca. 6 Flaschen. 3 – 4 Kisten pro Woche, fast 30l

	100l	200l	300l
(c) Aquamaxx	48,5 € + 120 €	81,70 € + 120 €	130,55 € + 120 €
Kasten	91,20 €	182,40 €	240 €

- Kasten: $K = 91,2x$. Aquamaxx: $A = 16,34x + 120$ (in €; x in 40l-Einheiten)
- A : 100l Leitungswasser kosten 0,85 €, also kosten 40l 0,34 €. Dazu kommen 16 € für die Patrone. Also kosten 40l Mineralwasser 16,34 €.
 K : In einem Kasten sind 8,4l, also braucht man für 40l ca. 4,8 Kisten und die kosten ca. 36,48 €. Differenz also 20,14 €. Damit macht sich die Anschaffung nach 6 Patronen bezahlt und das sind 240l Mineralwasser, d.h. die Aussage stimmt.
- $91,20x = 36,48x \Leftrightarrow x = 5,96$ also nach der 6. Patrone.

17. Aufstellen von Formeln für Umfang und Flächeninhalt

Stelle eine Formel für den Umfang und eine Formel für den Flächeninhalt der folgenden Figur auf:



Lösung: $U = a+b+c+d+(a+c)+(d+b) = 2a+2b+2c+2d = 2(a+b+c+d)$ $A = a \cdot (b+d) + c \cdot d = (a+c) \cdot d + a \cdot b = (a+c) \cdot (b+d) - b \cdot c = ab + ad + cd$

18. Wortform von Termen

- (a) Gib einen Term mit einer Variablen an, der zu jeder Zahl, die man für die Variable einsetzt,
- i. das Doppelte der Zahl;
 - ii. die Hälfte der Zahl, vermindert um 3;
 - iii. die Hälfte der um drei verminderten Zahl;
 - iv. das Quadrat der Zahl;
 - v. den Kehrwert der Zahl;
 - vi. den Vorgänger der Zahl;
 - vii. das Dreifache des Kehrwerts;
 - viii. den Kehrwert des Dreifachen der Zahl liefert.
- (b) Der Term $2 \cdot n$ für $n \in \mathbb{N}$ beschreibt eine beliebige gerade Zahl. Beschreibe durch einen Term
- i. eine beliebige durch 3 teilbare Zahl;
 - ii. eine beliebige ungerade Zahl;
 - iii. eine beliebige Quadratzahl.
 - iv. Finde weitere Beschreibungen und den dazugehörigen Term.
- (c) Ein Paket wiegt a kg, ein anderes b kg. Was bedeuten die folgenden Aussagen?
- i. $a + b = 10$
 - ii. $a = b + 10$
 - iii. $b = \frac{1}{2} \cdot a$
 - iv. $a = 1,5 \cdot b - 2$
- (d) Es seien a, b und c natürliche Zahlen, wobei $a > b + c$ ist.

- i. Beschreibe die Aussage $a - (b + c) = (a - b) - c$.
- ii. Stelle die Aussage mit Hilfe von Strecken dar.
- iii. Erfinde eine Geschichte zu dieser Aussage, z.B.: „In einem Reisebus befinden sich a Personen...“.

19. Algebra mit Zahlenmauern

Du kennst vielleicht schon sogenannte Zahlenmauern. In der untersten Reihe können beliebige Zahlen geschrieben werden. In die übrigen Felder wird nun jeweils die Summe aus den Zahlen in den beiden darunter liegenden Steinen geschrieben.

			21	12			
5	12	9					

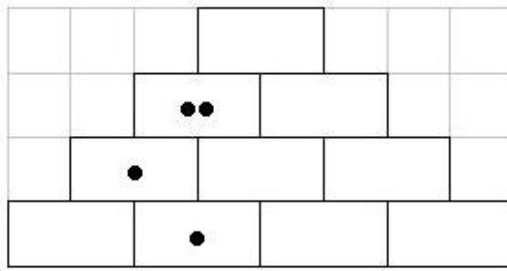
- (a) Kannst du die oben stehende Zahlenmauer vervollständigen? Welche Zahl steht ganz oben? Wie viele Zahlen müssen mindestens vorgegeben werden, damit jeder die gleiche Zahlenmauer erhält?

			F10				
		F8	F9				
	F5	F6	F7				
F1	F2	F3	F4				

Vielleicht wolltet ihr euch bei der Beantwortung der ersten Frage schon auf bestimmte Felder beziehen. Aus diesem Grund führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

Was passiert nun beispielsweise mit der Zahl im Feld $F10$, wenn wir die Zahl in $F2$ um eins erhöhen? Zur Beantwortung ist es hilfreich, einen Punkt zu betrachten, der die zusätzliche Eins darstellt:

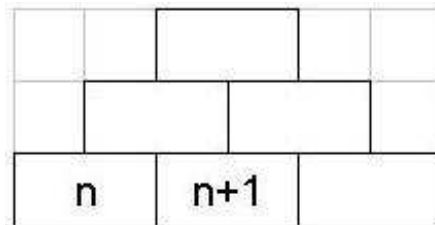
- (b) Fülle die Zahlenmauer vollständig aus. Erkläre damit, wie sich $F10$ verändert, wenn man die Zahl in $F2[F1; F3]$ um eins erhöht.



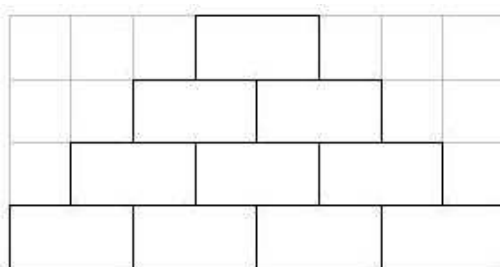
- (c) Wie wirken sich die Veränderungen aus Aufgabe 2 auf fünfreihige Zahlenmauern aus?
- (d) Wie verändert sich die Zahl in F_{10} in vierreihigen Zahlenmauern, wenn man die Zahl in F_2 um 2 erhöht? Untersuche dies auch für die anderen Felder.

Im Folgenden untersuchen wir ganz spezielle Zahlenmauern. Bei diesen stehen in der untersten Reihe aufeinander folgende natürliche Zahlen (Also zum Beispiel 5, 6, 7). Für die Zahl im ersten Feld schreiben wir ganz allgemein „ n “, wobei dieses n für irgendeine natürliche Zahl steht. Wir starten mit dreireihigen Mauern:

- (e) Fülle die Tabelle allgemein aus. Welche Zahl steht im ersten Feld, wenn im obersten Feld die 128[176] steht? Denke dir selbst eine Zahl aus, die im obersten Feld stehen könnte und lass deinen Nachbarn die erste Zahl angeben.



- (f) Untersuche nun vierreihige Zahlenmauern. Welche Zahl steht im ersten Feld, wenn im obersten Feld die 124[188] steht? Denke dir selbst eine Zahl aus, die im obersten Feld stehen könnte und lass deinen Nachbarn die erste Zahl angeben.



- Lösung:* (a) Oben steht die 71
- (b) F_2, F_3 um 1 erhöhen: Erhöhung tritt dreimal auf. Damit erhöht sich F_{10} um 3
- F_1 um 1 erhöhen: Erhöhung tritt einmal auf. Damit erhöht sich F_{10} um 1

- (c) $F1$ um 1 erhöhen: Erhöhung tritt einmal auf. Damit erhöht sich $F10$ um 1
 $F2$ um 1 erhöhen: Erhöhung tritt viermal auf. Damit erhöht sich $F10$ um 4
 $F3$ um 1 erhöhen: Erhöhung tritt sechsmal auf. Damit erhöht sich $F10$ um 6
- (d) $F1$: Erhöhung um 2; $F2, F3$: Erhöhung um 6; $F4$: Erhöhung um 2;
- (e) Oberstes Feld: 128 \rightarrow erstes Feld: 31; Oberstes Feld: 176 \rightarrow erstes Feld: 43
- (f) Oberstes Feld: 124 \rightarrow erstes Feld: 14; Oberstes Feld: 188 \rightarrow erstes Feld: 22

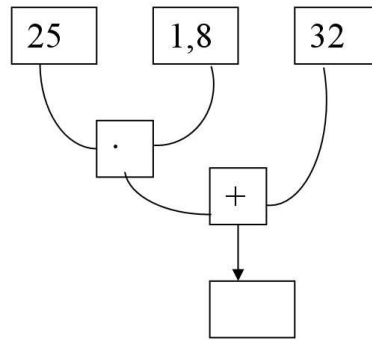
20. Zahlentheoretische Anwendungen der binomischen Formeln

- (a) 5-Quadrate
 Berechne $15^2, 25^2, 35^2, 45^2, \dots$. Finde eine Regel, wie man diese 5-Quadrate im Kopf berechnen kann.
- (b) Spiegelzahlen
 $18 \times 22 = 20^2 - 2^2 = 400 - 4 = 396$
 $29 \times 31 = 30^2 - 1^2 = 900 - 1 = 899$
 Berechne im Kopf so wie in den Beispielen: $19 \times 21, 53 \times 47$ und 152×148 .
 Formuliere eine allgemeine Regel zu den Beispielen und versuche diese zu beweisen.
- (c) Nimm zwei aufeinander folgende gerade natürliche Zahlen (oder zwei aufeinander folgende ungerade natürliche Zahlen), multipliziere sie und addiere die Zahl 1. Probiere mehrere Beispiele. Erkennst du eine Regel? Formuliere und beweise diese.
- (d) Jede ungerade ganze Zahl lässt sich als Differenz zweier Quadratzahlen schreiben. Formuliere eine Regel, wie das geht, und beweise den Satz.
- (e) Wenn eine natürliche ganze Zahl n als Summe zweier Quadrate geschrieben werden kann, dann kann das Doppelte dieser Zahl, nämlich $2n$, auch als Summe zweier Quadrate geschrieben werden. Formuliere eine Regel, wie das geht, und beweise den Satz.

Lösung:

- (a) $(a \cdot 10 + 5)^2 = a^2 \cdot 100 + a \cdot 100 + 25 = (a^2 + a) \cdot 100 + 25 = a \cdot (a + 1)100 + 25$
- (b) $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$
- (c) $x \cdot (x + 2) + 1 = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$
- (d) $(n + 1)^2 = n^2 + (2n + 1)$, also $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$
- (e) $x^2 + y^2 = n \Rightarrow (x + y)^2 + (x - y)^2 = 2n$

21. Ganz schön heiß: Celsius und Fahrenheit



- Berechne und schreibe als Term gemäß obiger Abbildung.
- Das Ergebnis zeigt, wie viel 25°C in Grad Fahrenheit sind. Verändere Rechenbaum und Term so, dass damit jede beliebige in Grad Celsius angegebene Temperatur in Grad Fahrenheit umgerechnet werden kann.
- Schreibe den Term für die Umkehrung, so dass Temperaturen, die in Grad Fahrenheit angegeben sind, in Grad Celsius umgerechnet werden.

Lösung: 77 Grad Fahrenheit. Umkehrung: Erst 32 subtrahieren, dann durch 1,8 dividieren.

22. Ich schwärme für die Terme...

Fasse die Terme zusammen.

- $5,2a - 6b + 14c - 66a - 42a + 20c - 5,8b =$
- $17a - (43b + 17,8a - 22c) - 66,2b =$
- $2,5a + 3(7a - 5,2b) - 66,8b + 12,8a =$
- $44\text{ cm} - 2\text{ mm} + 0,8\text{ m} + 0,005\text{ km} - 33\text{ cm} - 0,04\text{ m} =$
- $0,65\alpha + 7,8\lambda - 3\rho + (13\alpha - 10\lambda - 670\rho) =$

Lösung:

- $-102,8a - 11,8b + 34c$
- $-0,8a - 109,2b + 22c$
- $36,3a - 82,4b$
- $586,8\text{ cm}$
- $13,65\alpha - 2,2\lambda - 673\rho$

23. Herr Binomi lässt grüßen...

Wende die binomischen Formeln an.

- $(3a + 2b)^2 =$
- $(6r - 7s)^2 =$
- $(1,3p + 3t)(1,3p - 3t) =$

Lösung: a) $9a^2 + 12ab + 4b^2$

b) $36r^2 - 84rs + 49s^2$

c) $1,69p^2 - 9t^2$