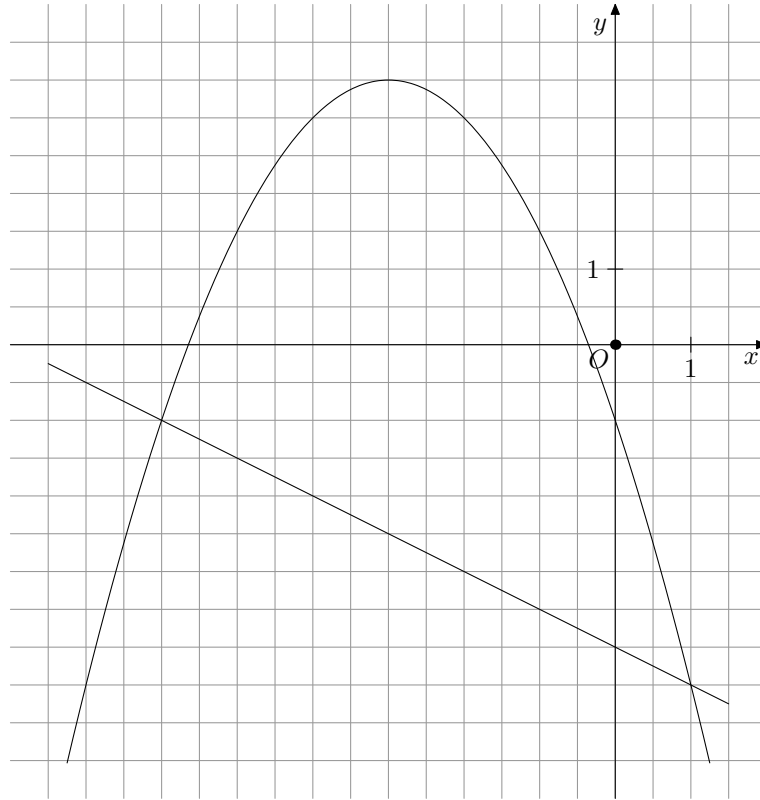


Quadratische Funktionen

1. Gegeben sind die Parabel $p : y = -0,5x^2 - 3x - 1$ und die Gerade $g : y = -0,5x - 4$ auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

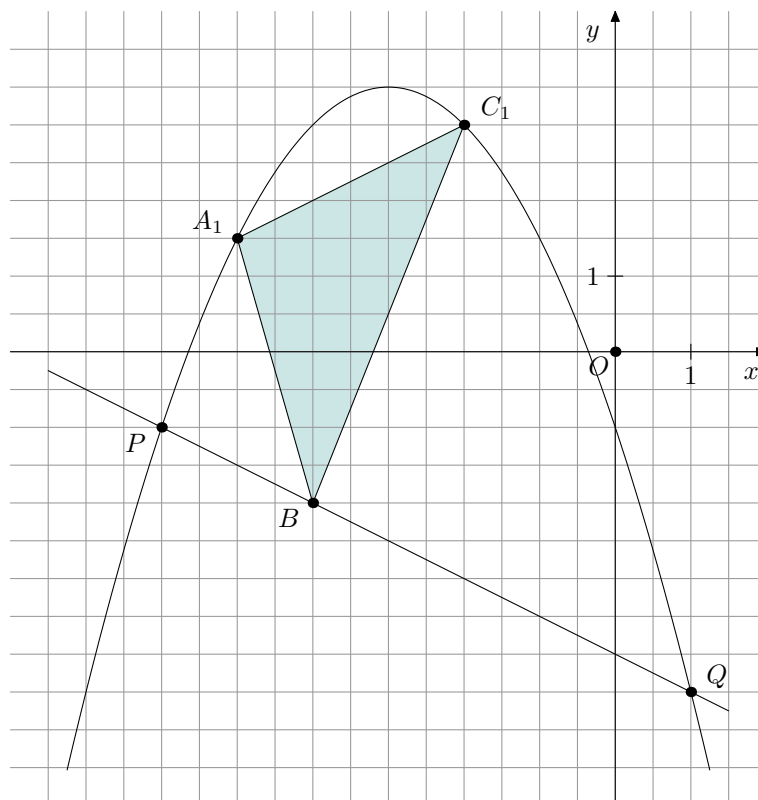
Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt:



Auf der Parabel p wandern sowohl Punkte $A_n(x \mid -0,5x^2 - 3x - 1)$ als auch Punkte C_n . Dabei ist der Abszissenwert der Punkte C_n stets um 3 größer als der Abszissenwert x der Punkte A_n .

- (a) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q der Parabel p mit der Geraden g .
- (b) Berechne die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit vom x -Wert der Punkte A_n .
[Ergebnis: $C_n(x + 3 \mid -0,5x^2 - 6x - 14, 5)$]
- (c) Zusammen mit dem Punkt $B(-4 \mid -2)$ werden zwischen Gerade und Parabel Dreiecke A_nBC_n erzeugt.
Zeichne für $A_1(-5 \mid y_1)$ das Dreieck A_1BC_1 in obiges Koordinatensystem ein.
- (d) Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke A_nBC_n in Abhängigkeit von x .
[Ergebnis: $A(x) = (0,75x^2 + 8,25x + 28,5) \text{ cm}^2$]
- (e) Unter allen Dreiecken A_nBC_n gibt es eines, das einen minimalen Flächeninhalt aufweist. Berechne dieses Minimum und die zugehörige Belegung von x .
- (f) Unter allen Dreiecken A_nBC_n gibt es das Dreieck A_3BC_3 , so dass $\sphericalangle A_3BP = \sphericalangle BA_3C_3$ gilt. Berechne den zugehörigen Abszissenwert x .

Lösung:

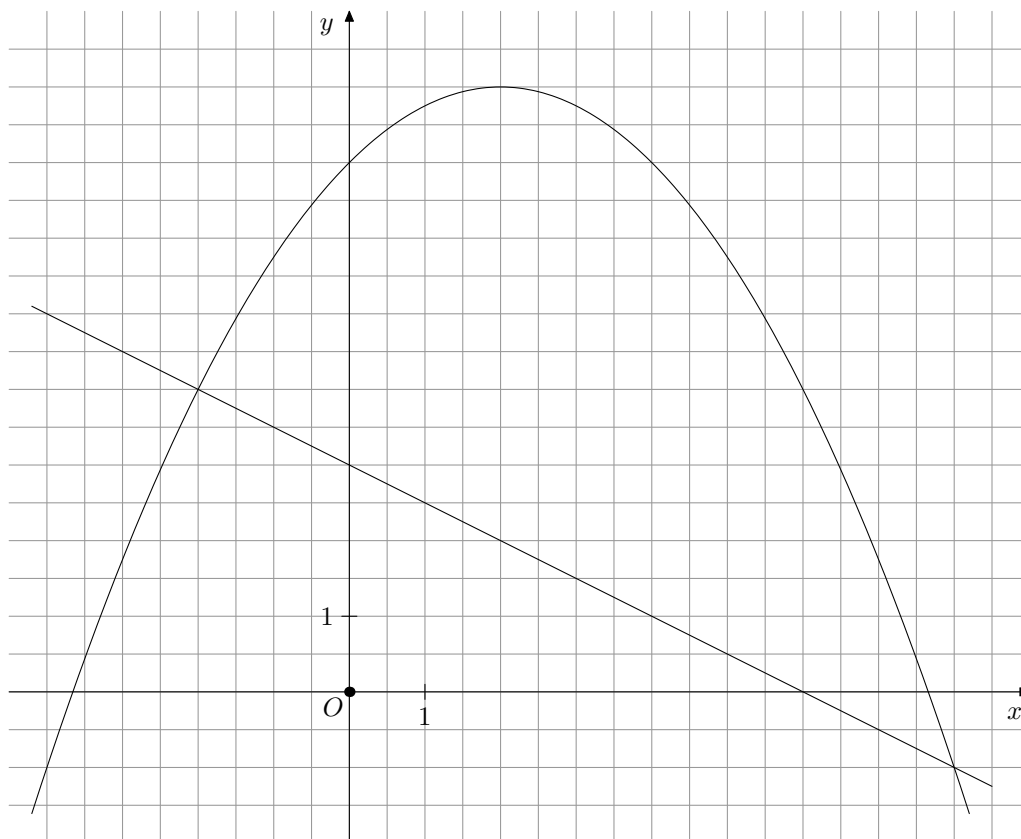


- (a) $-0,5x^2 - 3x - 1 = -0,5x - 4 \Rightarrow -0,5x^2 - 2,5x + 3 = 0$
 $D^* = 12,25 \Rightarrow \sqrt{D^*} = 3,5$
 $x_{1;2} = \frac{2,5 \pm 3,5}{-1}$
 $x_1 = -6$ in g : $y_1 = -1 \Rightarrow P(-6 | -1)$
 $x_2 = 1$ in g : $y_2 = -4,5 \Rightarrow Q(1 | -4,5)$
- (b) Das Ergebnis folgt aus: $C_n(x+3 | -0,5(x+3)^2 - 6(x+3) - 14,5)$.
- (c) Siehe Zeichnung
- (d) $\overrightarrow{BC_n} = \begin{pmatrix} x+7 \\ -0,5x^2 - 6x - 12,5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BA_n} = \begin{pmatrix} x+4 \\ -0,5x^2 - 3x + 1 \end{pmatrix}$
 $A(x) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x+7 & x+4 \\ -0,5x^2 - 6x - 12,5 & -0,5x^2 - 3x + 1 \end{vmatrix}$
 $\Rightarrow A(x) = (0,75x^2 + 8,25x + 28,5) \text{ cm}^2$
- (e) $x = -5,5$ liefert $A_{\min} = 5,8125 \text{ cm}^2$.
- (f) Die Seite $[A_3C_3]$ muss zur Geraden g parallel sein:

$$\overrightarrow{A_nC_n} = \begin{pmatrix} x+3-x \\ -0,5x^2 - 6x - 14,5 - (-0,5x^2 - 3x - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3x - 13,5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{-3x - 13,5}{3} = -0,5 \Rightarrow x = -4$$

2. Gegeben sind die Parabel p und die Gerade g durch die Gleichungen:
 $p: y = -0,25x^2 + x + 7$ und $g: y = -0,5x + 3$ auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
 Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt:



- (a) Ermittle die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q der Parabel p mit der Geraden g . Der Punkt P soll dabei nicht im IV. Quadranten liegen.
- (b) Die Punkte $A_n(x \mid -0,25x^2 + x + 7)$ auf der Parabel p und die Punkte B_n auf der Geraden g besitzen jeweils den gleichen Abszissenwert. Die Punkte A_n und B_n sind Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken $A_nB_nC_n$ mit den Basen $[A_nB_n]$. Die Höhen auf diese Basen sind stets 4 cm lang. Die Punkte C_n sollen stets rechts von den Basen $[A_nB_n]$ liegen. Zeichne für $x = -1$ das Dreieck $A_1B_1C_1$ ein.
- (c) Zeichne für $C_2(7, 5 \mid y_2)$ das Dreieck $A_2B_2C_2$ ein. Berechne die Koordinaten des Punktes A_2 .
- (d) Zeige durch Rechnung: Für den Flächeninhalt A dieser Dreiecke $A_nB_nC_n$ gilt in Abhängigkeit von x :
- $$A(x) = (-0,5x^2 + 3x + 8) \text{ cm}^2$$
- (e) Unter allen Dreiecken A_nBC_n gibt es eines, das einen maximalen Flächeninhalt aufweist. Berechne dieses Maximum und die zugehörige Belegung von x .
- (f) Gibt es unter allen Dreiecken A_nBC_n ein Dreieck $A_3B_3C_3$, dessen Eckpunkt C_3 auf der y -Achse liegt? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) Der Schnittpunkt im IV. Quadranten muss Q sein.

1. Möglichkeit:

$$-0,25x^2 + x + 7 = -0,5x + 3 \quad \Rightarrow \quad -0,25x^2 + 1,5x + 4 = 0$$

$$D^* = 6,25 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{D^*} = 2,5$$

$$x_{1;2} = \frac{-1,5 \pm 2,5}{-0,5}$$

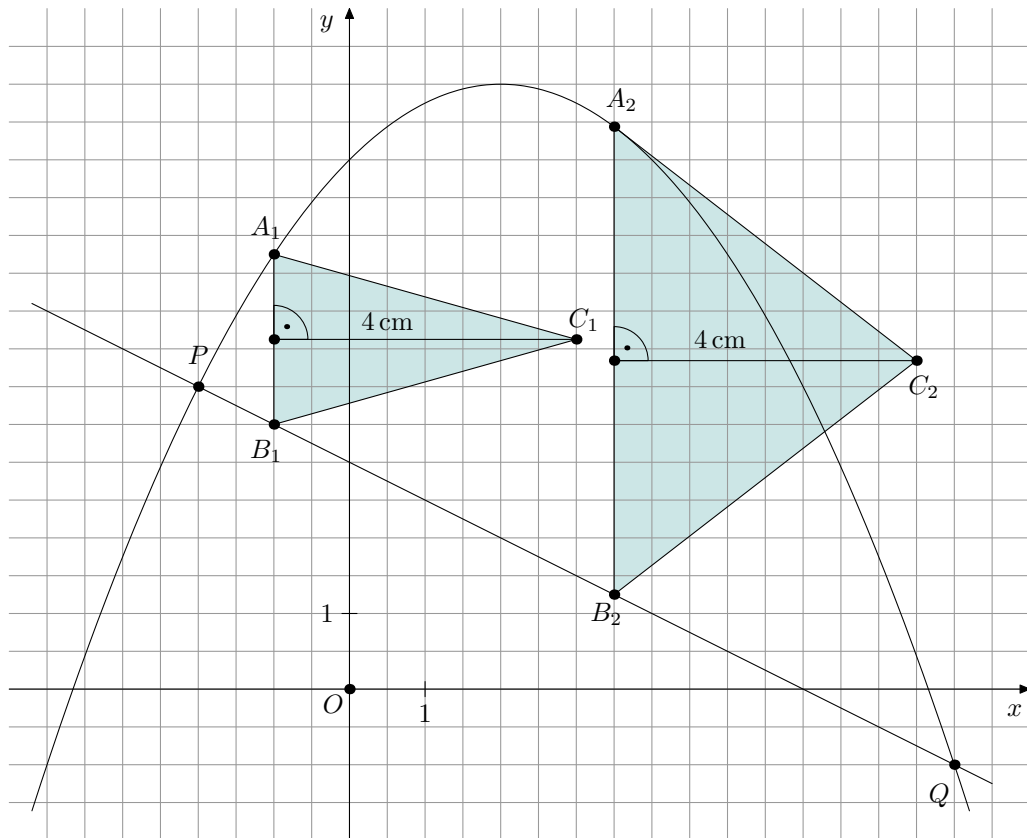
$$x_1 = -2 \text{ in } g: y_1 = 4 \Rightarrow P(-2 | 4)$$

$$x_2 = 8 \text{ in } g: y_2 = -1 \Rightarrow Q(8 | -1)$$

2. Möglichkeit:

Aus der schon vorhandenen Zeichnung kannst du ablesen: $P(-2 | 4)$ und $Q(8 | -1)$. Wenn du die Koordinaten dieser Punkte in die Gleichung der Parabel **und** die der Geraden einsetzt, ergeben sich insgesamt vier wahre Aussagen. Das bedeutet, dass die Punkte P und Q **sowohl** auf der Geraden g **als auch** auf der Parabel p liegen. Weil aber eine Gerade eine Parabel höchstens in zwei Punkten schneiden kann, sind P und Q die gesuchten Schnittpunkte.

(b)



(c) Siehe Zeichnung.

$$x_C = 7,5 \Rightarrow x = 7,5 - 4 = 3,5$$

$$\Rightarrow y = -0,25 \cdot 3,5^2 + 3,5 + 7 = 7,4375 \Rightarrow A_2(3,5 | 7,4375)$$

$$(d) y_{A_n} - y_{B_n} = -0,25x^2 + x + 7 - (-0,5x + 3) = -0,25x^2 + 1,5x + 4$$

$$A(x) = 0,5 \cdot (-0,25x^2 + 1,5x + 4) \cdot 4 \text{ cm}^2 \Rightarrow A(x) = (-0,5x^2 + 3x + 8) \text{ cm}^2$$

(e) $x = 3$ liefert $A_{\max} = 12,5 \text{ cm}^2$.

(f) Wenn der Punkt C_3 auf der y -Achse liegen soll, dann müssen die Punkte A_3 und B_3 auf einer Parallelen zur y -Achse im Abstand von 4 cm liegen, die durch den II. und III. Quadranten verläuft.

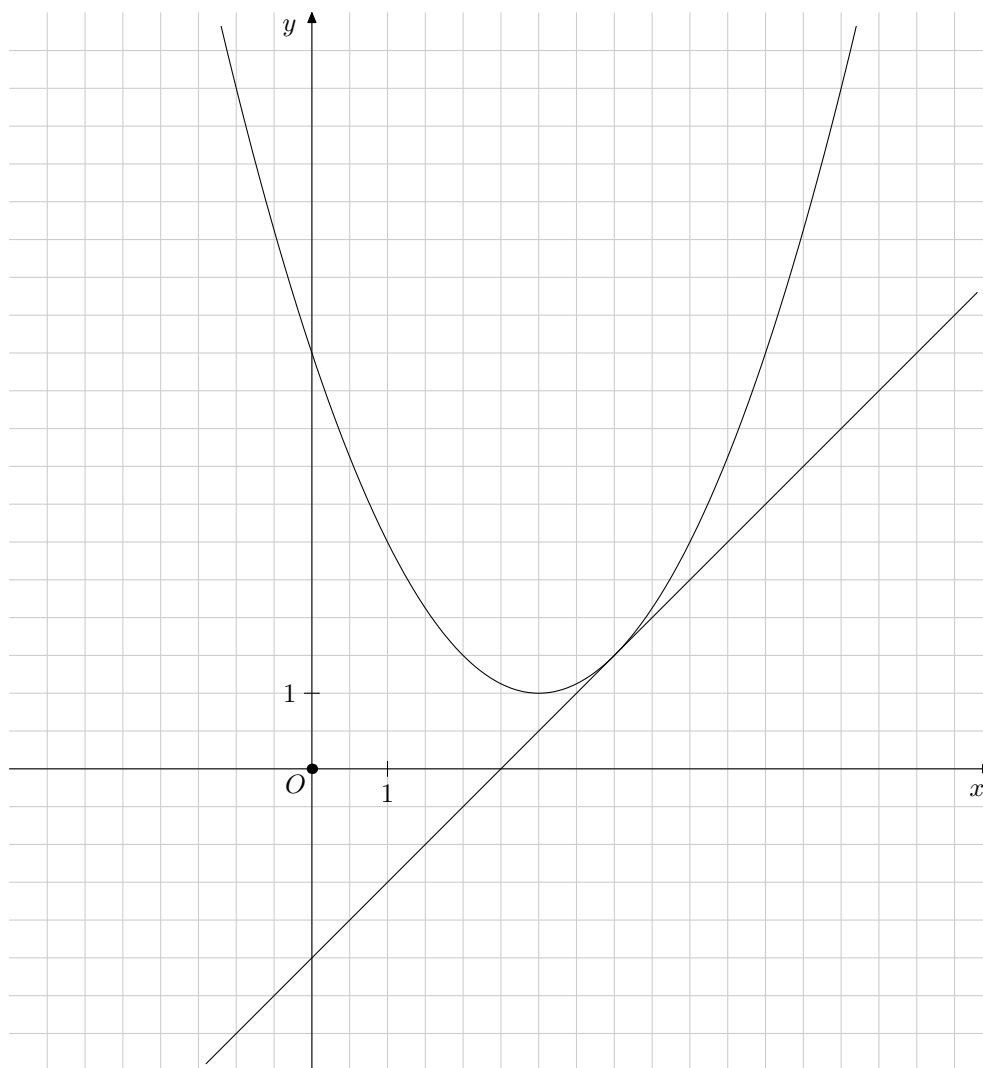
Der Abstand des Punktes P von der y -Achse beträgt 2 cm. Demnach käme der Punkt B_3 auf der Geraden g über den Punkt A_3 auf der Parabel p zu liegen. Dadurch hätte das Dreieck $A_3B_3C_3$ den falschen Drehsinn, weil der Punkt C_3 ja wie alle Punkte C_n rechts von der Basis liegen müsste; d.h. es gibt unter allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ kein solches Dreieck $A_3B_3C_3$.

3. Die Parabel p besitzt die Scheitelkoordinaten $S(3 \mid 1)$ und sie verläuft durch einen Punkt mit den Koordinaten $(5 \mid 3)$. Außerdem ist eine Gerade g durch die Gleichung $y = x - 2,5$ gegeben.

Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt.

Auf der Geraden g liegen Punkte $A_n(x \mid x - 2,5)$ und auf der Parabel p liegen Punkte C_n , die jeweils denselben Abszissenwert wie die Punkte A_n besitzen.

Damit werden Rauten $A_nB_nC_nD_n$ erzeugt, deren Diagonalen $[B_nD_n]$ stets 4 cm lang sind.



- (a) Zeige: Die Parabel p besitzt die Gleichung $y = 0,5x^2 - 3x + 5,5$.
- (b) Begründe rechnerisch: Die Gerade g ist eine Tangente an die Parabel p .
- (c) • Zeichne für $x = -1$ die Raute $A_1B_1C_1D_1$ ein.
 • Zeichne für $D_2(4 \mid y_{D_2})$ die Raute $A_2B_2C_2D_2$ ein.
- (d) • Für die Diagonalenlängen $\overline{A_nC_n}$ gilt in Abhängigkeit von x :
 $\overline{A_nC_n}(x) = (0,5x^2 - 4x + 8)$ cm.

Ermittle damit alle Belegungen von x , für die es solche Rauten $A_n B_n C_n D_n$ gibt.

- Für den Flächeninhalt A der Rauten $A_n B_n C_n D_n$ gilt in Abhängigkeit von x :

$$A(x) = (x^2 - 8x + 16) \text{ cm}^2.$$

Bestätige damit das Ergebnis der vorherigen Aufgabe.

- Bestätige mit dem Ergebnis der Aufgabe (b) das Ergebnis der vorherigen Aufgabe.

(e) Unter allen Rauten $A_n B_n C_n D_n$ gibt es auch Quadrate.

- Jeweils ein Eckpunkt dieser Quadrate muss auf der Geraden g liegen. Warum?
- Wie viele solcher Quadrate gibt es? Begründe deine Antwort.

Lösung: (a) $S(3 | 1)$ und $(5 | 3)$ in die Scheitelform:

$$p: 3 = a \cdot (5 - 3)^2 + 1 \Rightarrow a = 0,5$$

$$p: y = 0,5 \cdot (x - 3)^2 + 1 = \dots = 0,5x^2 - 3x + 5,5$$

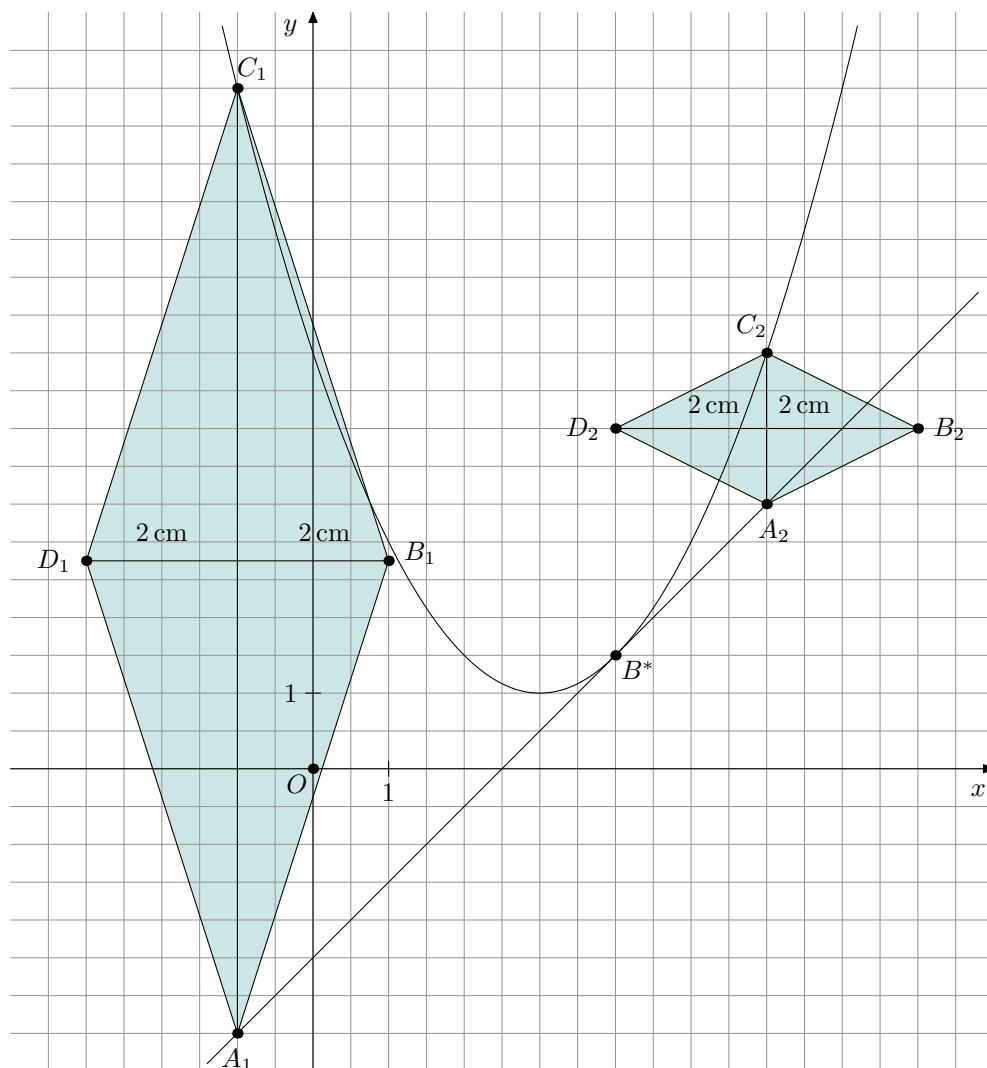
$$(b) p \cap g: 0,5x^2 - 3x + 5,5 = x - 2,5 \Rightarrow 0,5x^2 - 4x + 8 = 0 \Rightarrow D^* = 0$$

Also ist die Gerade g eine Tangente an die Parabel p .

(c) • Siehe Zeichnung.

- Wenn der Punkt D_2 den Abszissenwert 4 besitzt, dann muss der Punkt B_2 den Abszissenwert $4 + 4 = 8$ besitzen.

Somit müssen die Punkte A_2 und C_2 jeweils den x -Wert $\frac{8+4}{2} = 6$ besitzen, denn in jeder Raute halbieren sich die Diagonalen. Das ergibt dann das folgende Bild:



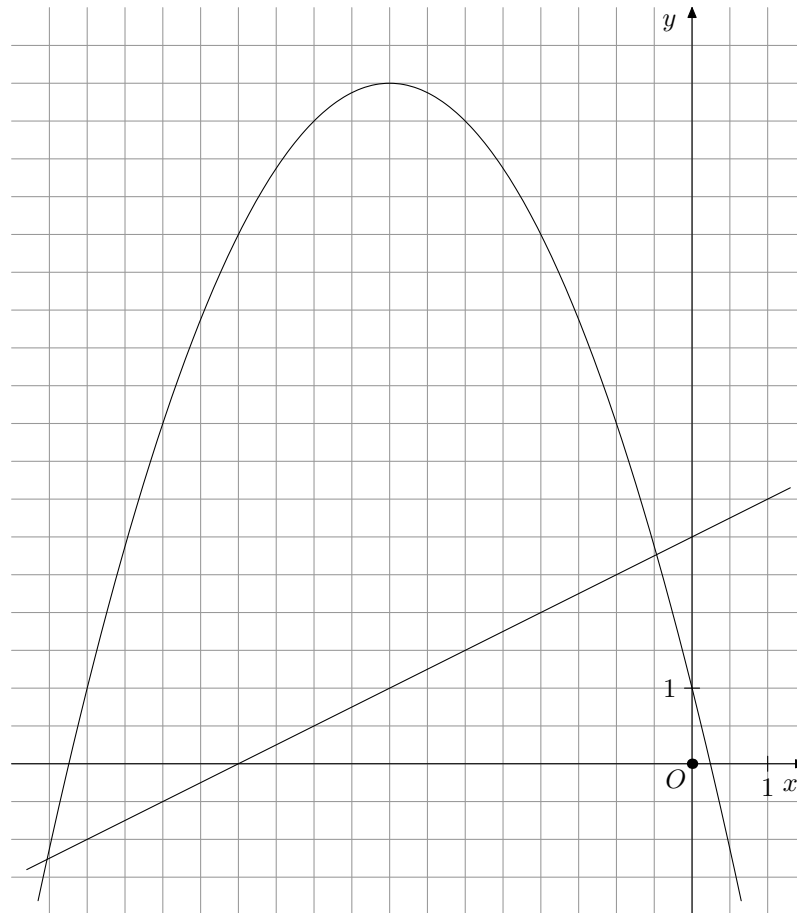
- (d) • $\overline{A_n C_n}(x) = (0,5x^2 - 4x + 8) \text{ cm} = [0,5(x^2 - 8x + 16)] \text{ cm} = 0,5(x - 4)^2 \text{ cm}$
 Es gilt stets $(x - 4)^2 \geq 0$ und damit $0,5(x - 4)^2 \geq 0$.
 Für $x = 4$ gilt $\overline{A_n C_n}(4) = 0 \text{ cm}$; d.h. die betreffende „Raute“ würde zur Strecke entarten.
 Der Drehsinn sämtlicher Rauten bleibt immer richtig, weil die Punkte C_n auf der Parabel p stets „über“ der Geraden g mit ihren Punkten A_n liegen.
 Also gibt es Rauten $A_n B_n C_n D_n$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.
- Für den Flächeninhalt A der Rauten $A_n B_n C_n D_n$ gilt in Abhängigkeit von x :
 $A(x) = 0,5 \cdot 4 \cdot (0,5x^2 - 4x + 8) \text{ cm}^2 = \dots = (x - 4)^2 \text{ cm}^2$
 Nur für $x = 4$ verschwindet der Flächeninhalt der betreffenden (zur Strecke entarteten) Raute.
 Also gibt es Rauten $A_n B_n C_n D_n$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.
- Die Gerade g ist eine Tangente der Parabel p . Also gibt es keinen Punkt auf der Parabel, der die Gerade g überquert und damit den Drehsinn auch nur einer der Rauten $A_n B_n C_n D_n$ umkehren könnte.
 Einzig der Berührungspunkt B^* stellt einen kritischen Fall dar.
 Wie in der Lösung (b) schon gezeigt, gilt $0,5x^2 - 4x + 8 = 0 \Rightarrow 0,5(x - 4)^2 = 0$
 und damit folgt $B^*(4 | 1,5)$ (siehe Zeichnung). Nur dort gibt es eine (zu Strecke entartete) „Raute“.
 Also gibt es Rauten $A_n B_n C_n D_n$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

- (e) • Die Quadratdiagonalen liegen wie alle Rautendiagonalen $\overline{A_n C_n}$ zur y -Achse parallel und sie halbieren jeweils zwei rechte Innenwinkel der betreffenden Quadrate. Die Gerade g besitzt den Steigungsfaktor $m=1$; d.h. sie schneidet die x -Achse unter einem 45° -Winkel. Folglich müssen die Quadratdiagonalen einen 45° -Winkel mit der Geraden g einschließen. Also müssen die Quadrateckpunkte unter den Rauteneckpunkten B_n auf der Geraden g liegen.
- 1. Möglichkeit:
 $0,5x^2 - 4x + 8 = 4 \Rightarrow 0,5x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow D^* = 8$.
 Die quadratische Gleichung besitzt zwei Lösungen und damit gibt es zwei Quadrate.
2. Möglichkeit:
 Der Eckpunkt B_1 der Raute $A_1 B_1 C_1 D_1$ liegt „über“ der Geraden g , der Eckpunkt B_2 der Raute $A_2 B_2 C_2 D_2$ liegt dagegen „unter“ der Geraden g . Also muss einer der Punkte B_n – wir nennen ihn B_3 – während der Wanderung von der Position 1 zur Position 2 **auf** der Geraden g liegen.
 Die Gerade g besitzt den Steigungsfaktor $m=1$; d.h. sie schneidet die x -Achse unter einem 45° -Winkel. Das bedeutet, dass auch in der betreffenden Raute $A_3 B_3 C_3 D_3$ $\sphericalangle B_3 A_3 C_3 = 45^\circ$ gilt. Aus Symmetriegründen muss dann $\sphericalangle B_3 A_3 D_3 = 90^\circ$ gelten. Wenn jedoch in der Raute $A_3 B_3 C_3 D_3$ ein Innenwinkel das Maß 90° besitzt, dann muss diese Raute (wie jede andere auch) ein Quadrat sein.
 Wenn nun Punkte B_n über den Punkt B_2 der Raute $A_2 B_2 C_2 D_2$ hinaus nach rechts wandern, nehmen die Diagonalenlängen $\overline{A_n C_n}$ wieder zu. Sie „heben“ dann die Punkte B_n über die Gerade g hinweg. Also muss es einen weiteren Punkt B_4 geben der auf der Geraden g liegt. Aus den vorherigen Überlegungen muss dieser Punkt B_4 zu einem weiteren Quadrat $A_4 B_4 C_4 D_4$ gehören.
 Links von der Position des Quadrates $A_3 B_3 C_3 D_3$ und rechts von der Position des Quadrates $A_4 B_4 C_4 D_4$ überquert keiner der Punkte B_n mehr die Gerade g . Also bleibt es bei den beiden Quadraten.

Anmerkung:

Die veränderlichen Rauten lassen sich sehr anschaulich in einer Datei, die mit Hilfe des dynamischen Mathematikprogrammes „GEONExT“ erzeugt wurde („10eh116.gxt“), darstellen.

4. Gegeben sind eine Parabel p und eine Gerade g durch die Gleichungen:
 $P : y = -0,5x^2 - 4x + 1$ und $g : y = 0,5x + 3$.
 Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt:



Auf der Parabel p liegen dort, wo die Parabel **oberhalb** der Geraden verläuft, Punkte $P_n(x \mid -0,5x^2 - 4x + 1)$.

Auf der Geraden g liegen Punkte Q_n jeweils mit dem gleichen Abszissenwert x wie die Punkte P_n . Zudem liegen auf der Geraden g Punkte R_n , deren Abszissenwert jeweils um 2 größer als der Abszissenwert der Punkte P_n bzw. Q_n ist.

Dadurch werden Dreiecke $P_nQ_nR_n$ erzeugt.

- (a) Zeichne für $x = -4,5$ das Dreieck $P_1Q_1R_1$ ein.
- (b) Zeige: Die Streckenlängen $\overline{P_nQ_n}$ lassen sich in Abhängigkeit von x wie folgt darstellen:

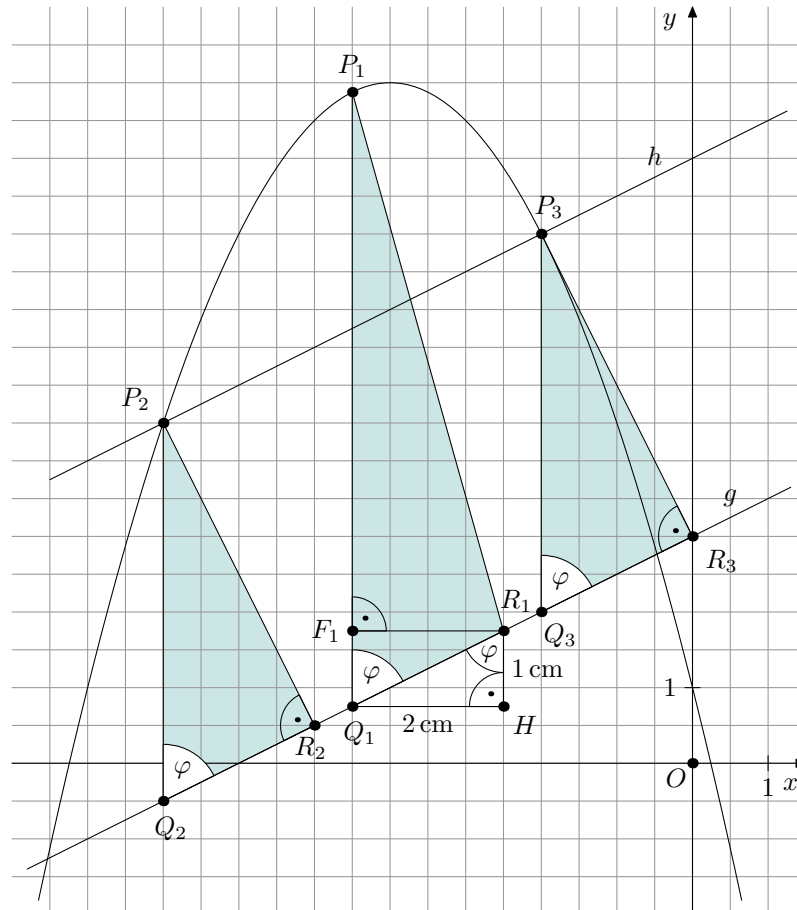
$$\overline{P_nQ_n}(x) = (-0,5x^2 - 4,5x - 2) \text{ cm}$$

- (c) Begründe: Die längste unter allen Streckenlängen $\overline{P_nQ_n}$ erzeugt gleichzeitig das flächengrößte unter allen Dreiecken $P_nQ_nR_n$
- (d) Untersuche rechnerisch, ob es unter allen Dreiecken $P_nQ_nR_n$ gleichschenklige gibt, deren Basis jeweils eine der Strecken $[P_nQ_n]$ ist.
- (e)
- Zeichne für $x = -7$ das Dreieck $P_2Q_2R_2$ ein.
Weise rechnerisch nach, dass dieses Dreieck rechtwinklig ist.
 - Berechne das Maß eines der spitzen Innenwinkel dieses Dreiecks.
 - Es gibt ein weiteres Dreieck $P_3Q_3R_3$, das zum Dreieck $P_2Q_2R_2$ kongruent ist.
Konstruiere den Eckpunkt P_3 dieses Dreiecks (die Konstruktionslinie muss

deutlich sichtbar sein) und begründe deine Vorgehensweise.
 Zeichne dieses Dreieck $P_3Q_3R_3$ ein.

- (f) Unter allen Dreiecken $P_nQ_nR_n$ gibt es noch zwei rechtwinklige Dreiecke $P_4Q_4R_4$ und $P_5Q_5R_5$ mit den Hypotenusen $[Q_4R_4]$ bzw. $[Q_5R_5]$. Berechne die zugehörigen x -Werte.

Lösung: (a) Siehe Zeichnung.



(b) Es gilt: $\overline{P_nQ_n}^2 = (x - x)^2 \text{ cm}^2 + [(-0,5x^2 - 4x + 1) - (0,5x + 3)] \text{ cm}^2$
 $= (-0,5x^2 - 4,5x - 2)^2 \text{ cm}^2$
 $\Rightarrow \overline{P_nQ_n} = |-0,5x^2 - 4,5x - 2| \text{ cm}$.

Weil die y -Werte der Punkte P_n stets größer als die y -Werte der Punkte Q_n sind, kannst du die Betragstriche weglassen.

Also folgt: $\overline{P_nQ_n}(x) = (-0,5x^2 - 4,5x - 2) \text{ cm}$

- (c) 1. Möglichkeit: anschaulich

Die Höhen $[R_nF_n]$ der Dreiecke $P_nQ_nR_n$ sind konstant 2 cm lang (vgl. $[R_1F_1]$ in der Zeichnung). Nur die Längen der zugehörigen Grundlinien $[P_nQ_n]$ sind veränderlich. Wegen der Formelgleichung für Dreiecksflächen $A = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe}$ hängt der Flächeninhalt dieser Dreiecke $P_nQ_nR_n$ nur von den Längen der Grundlinien $[P_nQ_n]$ ab. Wenn dort die maximale Länge erreicht ist, dann ist auch die zugehörige Dreiecksfläche am größten.

2. Möglichkeit: rechnerisch

Für den Flächeninhalt A der Dreiecke $P_nQ_nR_n$ gilt in Abhängigkeit von x :

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \overline{P_n Q_n} \cdot \overline{R_n F_n} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot (-0,5x^2 - 4,5x - 2) \cdot 2 \text{ cm}^2 = (-0,5x^2 - 4,5x - 2) \text{ cm}^2.$$

Damit stimmen für jeden zulässigen x -Wert die Maßzahlen von Flächeninhalt und Grundlinienlänge überein.

Wenn also eine der Grundlinien $[P_n Q_n]$ am längsten wird, dann ist auch der Inhalt der zugehörigen Dreiecksfläche maximal.

- (d) Es gilt $Q_n(x | 0, 5x + 3)$ und $R_n(x + 2 | 0, 5(x + 2) + 3) = (x + 2 | 0, 5x + 4)$.
 Betrachte das Steigungsdreieck $Q_1 H R_1$, das an der Geraden g unveränderlich ist.
 Dem kannst du entnehmen, dass stets $\overline{Q_n R_n} = \sqrt{1^2 + 2^2} \text{ cm} = \sqrt{5} \text{ cm}$ gilt.
 Von Aufgabe (b) ist $\overline{P_n Q_n}(x) = (-0,5x^2 - 4,5x - 2) \text{ cm}$ schon bekannt.
 Es muss $-0,5x^2 - 4,5x - 2 = \sqrt{5}$ gelten.
 $\Leftrightarrow 0,5x^2 + 4,5x + (2 + \sqrt{5}) = 0 \Rightarrow D^* = 16,25 - 2\sqrt{5} (\approx 11,78) > 0$
 Also gibt es zwei solche gleichschenklige Dreiecke.

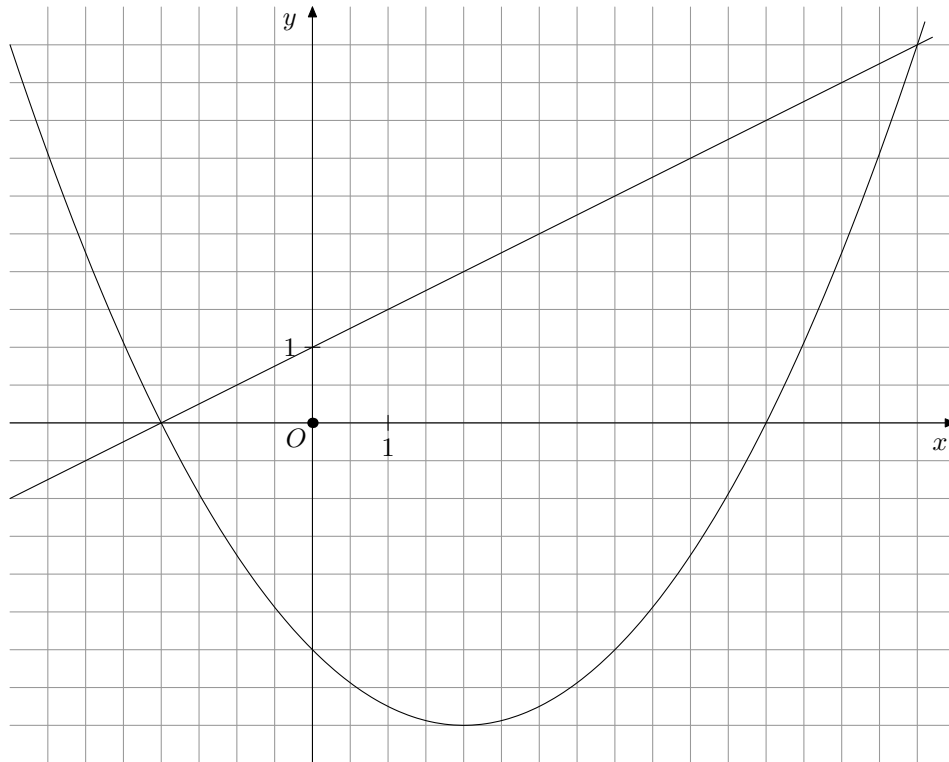
- (e) • Siehe Zeichnung.
- $x = -7$ liefert: $P_2(-7 | 4, 5)$, $Q_2(-7 | -0, 5)$ und $R_2(-5 | 0, 5)$.
 $\overline{P_2 Q_2} = 5 \text{ cm}$, $\overline{Q_2 R_2}(x) = \sqrt{5} \text{ cm}$ (siehe Lösung der Aufgabe (d)) und $\overline{P_2 R_2} = \sqrt{(-5 + 7)^2 + (4, 5 - 0, 5)^2} \text{ cm} = \sqrt{20} \text{ cm}$
 In diesem Dreieck $P_2 Q_2 R_2$ gilt der Satz des PYTHAGORAS:
 $5^2 = \sqrt{5}^2 + \sqrt{20}^2$. Also ist das Dreieck $P_2 Q_2 R_2$ rechtwinklig.
 - Jeder Eckpunkt Q_n der Dreiecke $P_n Q_n R_n$ ist Scheitel eines Winkels mit dem Maß φ (Stufen- oder F-Winkel). Im Steigungsdreieck $Q_1 H R_1$ ist der Punkt R_1 ebenfalls Scheitel eines Winkels mit dem Maß φ (Wechsel- oder Z-Winkel).
 Dort gilt: $\tan \varphi = \frac{2}{1} \Rightarrow \varphi \approx 63,43^\circ$.
 - Die Parallele h zur Geraden g durch den Punkt P_2 schneidet die Parabel p im gesuchten Punkt P_3 (Siehe Zeichnung).
 Begründung:
 Der Punkt P_2 besitzt den Abstand $\overline{P_2 R_2}$ zur Geraden g . Alle Punkte P_n aber, die den Abstand $\overline{P_2 R_2}$ von der Geraden g haben, liegen auf einer Parallelen (in der Zeichnung: h) zur Geraden g die den Abstand $\overline{P_2 R_2}$ besitzt.
 - Weil alle Strecken $[Q_n R_n] \sqrt{5} \text{ cm}$ lang sind, müssen die gesuchten Dreiecke z.B. zum Steigungsdreieck $Q_1 H R_1$ kongruent sein; d.h. es muss gelten:
 $\overline{P_n Q_n}(x) = (-0,5x^2 - 4,5x - 2) \text{ cm} = 1 \text{ cm} \Leftrightarrow -0,5x^2 - 4,5x - 3 = 0$

$$D^* = 14,25 \Rightarrow x_{1;2} = \frac{4,5 \pm \sqrt{14,25}}{-1} \Rightarrow x_1 \approx -8,27 \text{ und } x_2 \approx -0,72$$

5. Gegeben ist Parabel p mit der Gleichung $p : y = ax^2 - x - 3$, die durch den Punkt $P(-3 | 2, 25)$ verläuft.

Außerdem ist eine Gerade g durch die Gleichung $g : y = 0,5x + 1$ gegeben.

Die zugehörigen Funktionsgraphen sind in Ausschnitten dargestellt:

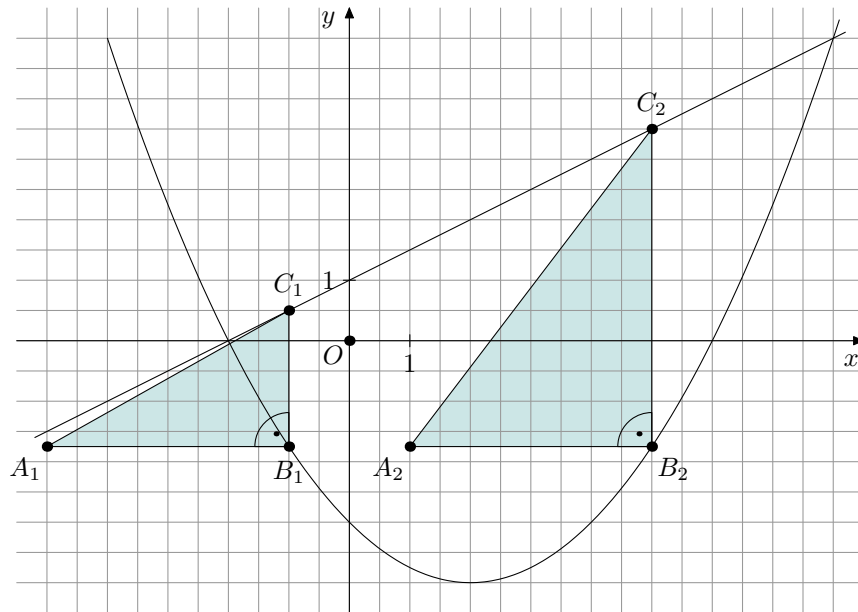


- (a) • Berechne die Scheitelkoordinaten der Parabel p .
 [Teilergebnis: $p : y = 0,25x^2 - x - 3$]
- Untersuche, ob die Gerade h mit der Gleichung $h : y = 0,5x - 5,26$ die Parabel p berührt.
- (b) Auf der Parabel p liegen Punkte $B_n(x \mid 0,25x^2 - x - 3)$. Auf der Geraden g liegen Punkte $C_n(x \mid 0,5x + 1)$ mit dem gleichen Abszissenwert x wie die Punkte B_n .
 Für $x \in]-2; 8[_{\mathbb{R}}$ erzeugen die Punkte A_n zusammen mit den Punkten B_n und C_n rechtwinklige Dreiecke $A_nB_nC_n$ mit den Hypotenusen $[A_nC_n]$. Dabei sind die Katheten $[A_nB_n]$ stets 4 cm lang.
 Zeichne für $x = -1$ und $x = 5$ die beiden Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ ein.
- (c) Berechne die Länge der Katheten $[B_nC_n]$ in Abhängigkeit von x .
 [Ergebnis: $\overline{B_nC_n}(x) = (-0,25x^2 + 1,5x + 4)$ cm]
- (d) Unter allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ gibt es eines mit maximalem Flächeninhalt. berechne dieses Maximum und die zugehörige Belegung von x .
- (e) Unter allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ gibt es zwei Dreiecke $A_3B_3C_3$ und $A_4B_4C_4$, so dass der Winkel $A_3C_3B_3$ bzw. $A_4C_4B_4$ das Maß 45° besitzt. Berechne die zugehörigen Belegungen von x .
- (f) Untersuche rechnerisch, ob es unter allen Dreiecken $A_nB_nC_n$ eines gibt, deren Hypotenuse auf der Geraden g liegt.

Lösung: (a) • $P(-3 \mid 3,25)$ in $p: 2,25 = a \cdot (-3)^2 - (-3) - 3 \Rightarrow 2,25 = 9a \Rightarrow a = 0,25$
 und $p : y = 0,25x^2 - x - 3$.
 $S\left(-\frac{-1}{2 \cdot 0,25} \mid -3 - \frac{(-1)^2}{4 \cdot 0,25}\right) = (2 \mid -4)$
 12

- $0,25x^2 - x - 3 = 0,5x - 5,26 \Rightarrow D^* = -0,01 < 0$: Die Gerade g meidet die Parabel p .

(b)



(c)

$$\begin{aligned} \overline{B_n C_n}(x) &= y_{C_n} - y_{B_n} \\ \overline{B_n C_n}(x) &= 0,5x + 1 - (0,25x^2 - x - 3) \\ &= 0,5x + 1 - 0,25x^2 + x + 3 \\ \overline{B_n C_n}(x) &= (-0,25x^2 + 1,5x + 4) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

(d) Für den Flächeninhalt A der Dreiecke $A_n B_n C_n$ gilt in Abhängigkeit von x :

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (-0,25x^2 + 1,5x + 4) \text{ cm}^2.$$

$$A(x) = 2 \cdot (-0,25x^2 + 1,5x + 4) \text{ cm}^2.$$

$$A(x) = (-0,5x^2 + 3x + 8) \text{ cm}^2.$$

$$x = 3 \text{ liefert } A_{max} = 12,5 \text{ cm}^2.$$

(e) Die beiden Dreiecke $A_3 B_3 C_3$ und $A_4 B_4 C_4$ müssen gleichschenkelig sein:

$$\overline{B_n C_n}(x) = 4 \text{ cm} : \Rightarrow -0,25x^2 + 1,5x + 4 = 4$$

$$\Leftrightarrow x(-0,25x + 1,5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$$

(f) Die Dreiecke $A_n B_n C_n$ können als Steigungsdreiecke zu den Hypotenusen $[A_n C_n]$ aufgefasst werden:

Wenn eine dieser Hypotenusen $[A_n C_n]$ auf der Geraden g liegen soll, dann müssen beide Steigungsfaktoren übereinstimmen; d.h.

$$\frac{-0,25x^2 + 1,5x + 4}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -0,5x^2 + 3x + 8 = 4$$

$$\Leftrightarrow -0,5x^2 + 3x + 4 = 0 \Rightarrow D^* = 17 > 0.$$

Also gibt es zwei solche Dreiecke.

6. Gegeben ist die Parabel p_0 durch die Gleichung $y = 0,5x^2 + 2x + 1000$.

(a) Gib die Gleichung einer Parabel p_1 an, welche die gleichen Scheitelkoordinaten wie die Parabel p_0 besitzt, die aber nicht zur Parabel p_0 kongruent ist.

- (b) Gib die Gleichung einer Parabel p_2 an, die zur Parabel p_0 kongruent ist und deren Scheitel gleichzeitig auf der x -Achse liegt.
- (c) Es gibt beliebig viele Parabeln, welche die Parabel p_0 meiden und deren Scheitel im II. Quadranten liegen. Gib die Gleichung einer dieser Parabeln an und führe den Nachweis.
- (d) Es gibt beliebig viele Parabeln, welche mit der Parabel p_0 nur einen Punkt gemeinsam haben. Gib die Gleichung einer dieser Parabeln an und führe den Nachweis.

Lösung: (a) $y = 0,5x^2 + 2x + 1000 = \dots = 0,5 \cdot (x + 2)^2 + 998 \Rightarrow S_0(-2 | 998)$

Skizziere die Parabel p_0 .

Z.B. $p_1 : y = -0,17296 \cdot (x + 2)^2 + 998$

(b) Z.B. $p_2 : y = -0,5 \cdot (x - \frac{22}{7})^2$

- (c) Wähle unter den beliebig vielen Parabeln, die in Frage kommen, am besten eine Parabel (nenne sie p_3) aus, die zur Parabel p_0 kongruent ist, die aber nach unten geöffnet ist: Der Formfaktor hat dann den Wert $-0,5$.

Wähle dann am besten deren Scheitel so aus, dass dieser genau unterhalb des Scheitels $S_0(-2 | 998)$ liegt, also z.B. $S_3(-2 | 997)$.

Diese Parabel p_3 hat dann die Gleichung $y = -0,5 \cdot (x + 2)^2 + 997$.

- (d) „ \dots nur einen Punkt gemeinsam hat“ eröffnet zweierlei Lösungsmöglichkeiten:

(α) Die gesuchte Parabel schneidet die Parabel p_0 nur in einem Punkt

(β) Die gesuchte Parabel berührt die Parabel p_0

Die einfachste Möglichkeit der Auswahl besteht in der Möglichkeit (α):

Die Parabel p_0 wird nach rechts oder nach links verschoben. Damit behält der Formfaktor den Wert $0,5$ und die beiden Symmetrieachsen liegen parallel. Damit verlaufen auch die Parabeläste so, dass sie sich nur einmal überkreuzen.

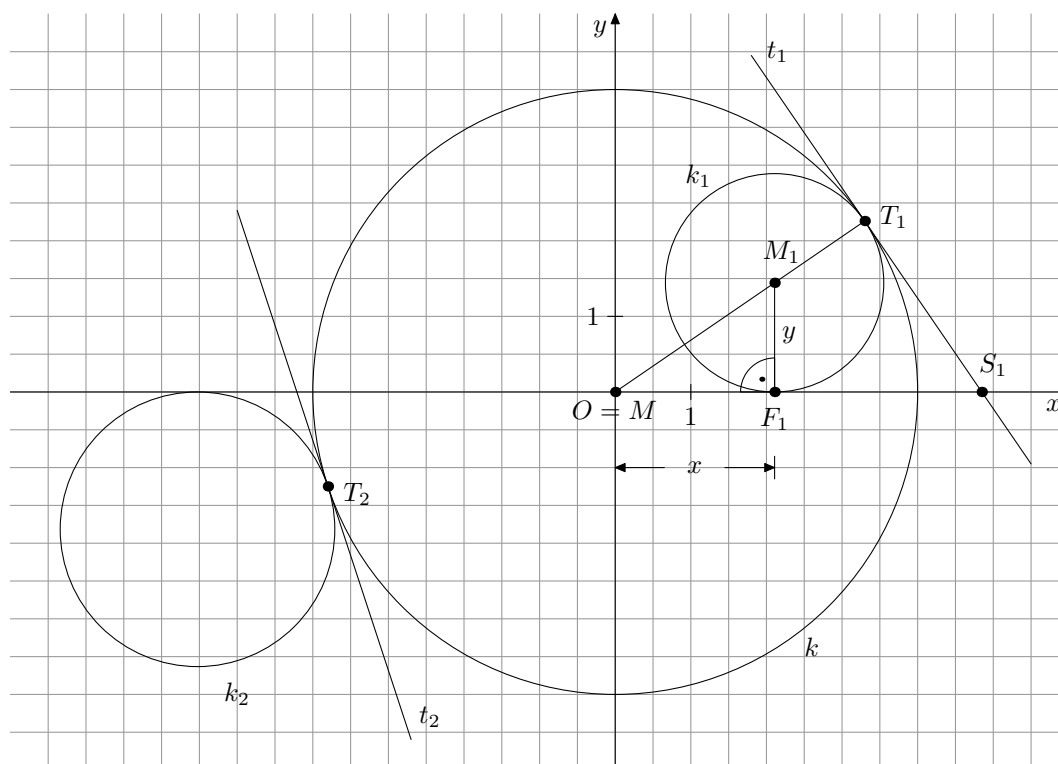
Also z.B.: $p_4 : y = 0,5 \cdot (x + 1)^2 + 998$.

Rechnerisch würde sich dann mit der Parabel p_4 die folgende Gleichung ergeben:

$$0,5 \cdot (x + 2)^2 + 998 = 0,5 \cdot (x + 1)^2 + 998 \dots \Leftrightarrow 2x = -3x = -1,5.$$

Egal, wie weit du die Parabel p_0 nach rechts oder links verschiebst: Rechnerisch hebt sich stets nach dem Gleichsetzen der Summand mit dem Faktor x^2 weg.

In der Möglichkeit (β) müsstest du nach einer Parabel p_5 suchen, welche die Parabel p_0 berührt. Eine entsprechende Parabelgleichung ist nicht so schnell und auch nicht so leicht zu finden, wie in der Möglichkeit (α).



Auf der Kreislinie k mit dem Mittelpunkt $M(0 \mid 0)$ und dem Radius 4 cm liegen Punkte T_n , die Berührungspunkte von Kreisen k_n mit dem Mittelpunkt $M_n(x \mid y)$ sind. Alle diese Kreise k_n berühren jeweils auch die x -Achse.

Liegen die Punkte T_n über der x -Achse, dann sollen die Berührungskreise k_n innerhalb des Kreises k liegen. Befinden sich die Punkte T_n unter der x -Achse, dann sollen die Berührungskreise k_n außerhalb des Kreises k liegen.

In der obigen Darstellung sind zwei Berührungskreise k_1 und k_2 mit den Berührungspunkten T_1 und T_2 eingezeichnet. Am Berührungspunkt T_1 ist die zugehörige Kreistangente t_1 und am Berührungspunkt T_2 ist die zugehörige Kreistangente t_2 eingezeichnet.

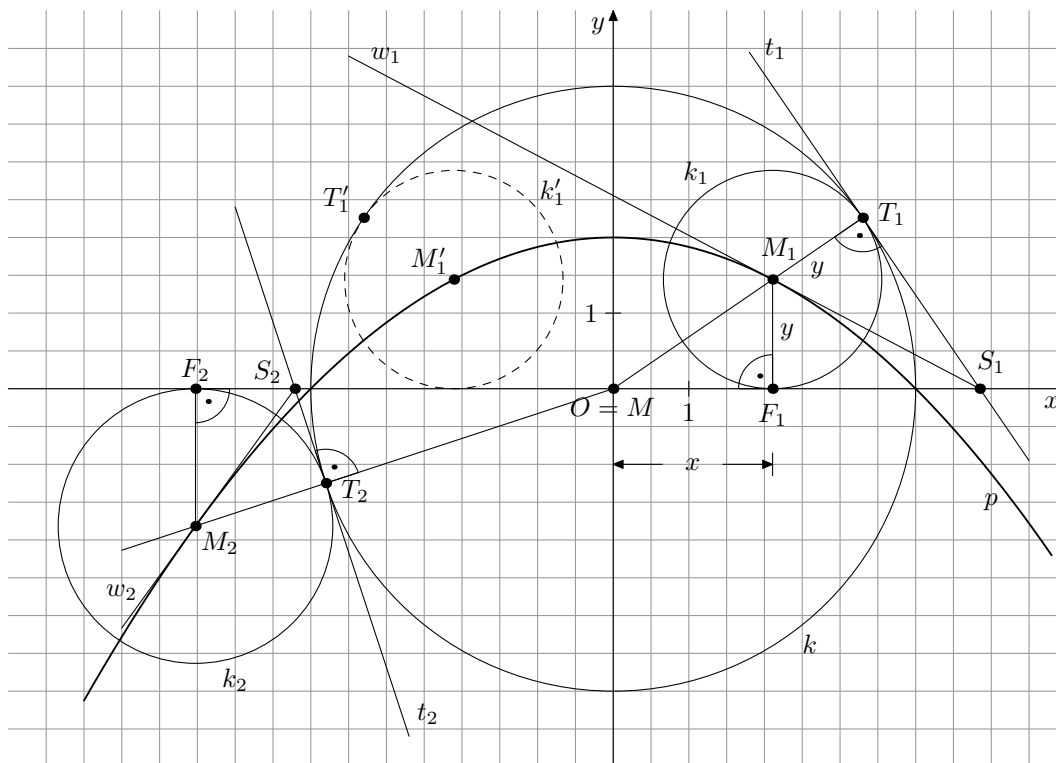
- (a)
- Begründe: Der Mittelpunkt M_1 des Berührungskreises k_1 muss auf der Halbierenden des Winkels T_1S_1M liegen.
 - Weise durch die Konstruktion dieser Winkelhalbierenden w_1 nach, dass der Punkt M_1 richtig eingezeichnet ist.
- (b) Konstruiere den Mittelpunkt M_2 der Kreislinie k_2 .
- (c) Für welche der Berührungspunkte T_n gibt es nur entartete Berührungskreise?
- (d) Alle Kreismittelpunkte M_n liegen auf einer Parabel p .
- Beschreibe ohne Rechnung die Lage und die Eigenschaften der Parabel p möglichst genau.
 - Leite die Parabelgleichung aufgrund der Lage besonderer Punkte auf ihr her.

$$[\text{Ergebnis: } p : y = -0,125x^2 + 2]$$

- Bestätige diese Parabelgleichung durch Rechnung mit Hilfe des Dreiecks MF_1M_1 als Stellvertreter aller begleitenden rechtwinkligen Dreiecke MF_nM_n .

- (e) Wie viel Prozent des Flächeninhalts des Kreises k wird von einem der Berührungskreise bedeckt, dessen Mittelpunkt auf der Winkelhalbierenden des I. Quadranten liegt?

Lösung:



- (a) Der Mittelpunkt M_1 muss sowohl zur Tangente t_1 als auch zur x -Achse den gleichen Abstand besitzen. Alle Punkte, die jeweils von diesen beiden Geraden mit dem Schnittpunkt S_1 den gleichen Abstand besitzen, liegen auf der Halbierenden w_1 des Winkels $T_1S_1F_1$. Diese Halbgerade verläuft dann durch den Punkt M_1 .
- (b) Die Tangente t_2 schneidet die x -Achse im Punkt S_2 . Dort bildet die Tangente t_2 mit der x -Achse einen stumpfen Winkel im III. Quadranten. Die Halbgerade w_2 halbiert diesen Winkel. Dann folgt: $[MT_2 \cap w_2 = \{M_2\}]$.
- (c) Für $T_3(4 | 0)$ und $T_4(-4 | 0)$ entarten die Berührungskreise zu Punkten. Für $T_5(0 | -4)$ liegt die zugehörige Kreistangente waagrecht. Der zugehörige Berührungskreis müsste sich am Punkt $T_5(0 | -4)$ nach unten krümmen. Er könnte dann die x -Achse niemals berühren. Mann könnte die Tangente noch als gigantischen „Berührungskreis“ deuten, der die x -Achse rechts und links „im Unendlichen“ berührt.
- (d) • Wenn du den Berührungskreis k_1 an der y -Achse spiegelst, dann erhältst du einen Kreis k'_1 mit dem Mittelpunkt M'_1 , der die Kreislinie k ebenfalls von innen berührt (siehe Zeichnung). Also liegt der Punkt M'_1 ebenfalls auf der Parabel p . Dasselbe gilt nun für das Spiegelbild M'_2 des Mittelpunktes M_2 und damit für alle denkbaren Kreismittelpunkte. Daher ist die y -Achse die Symmetrieachse der Parabel p . Je näher die Berührungskreise im I. und II. Quadranten der y -Achse kommen, desto größer wird deren Durchmesser; d.h. desto höher liegen die zugehörigen Kreismittelpunkte. Der Kreis k_0 , dessen Durchmesser auf der y -Achse liegt, ist am

größten; d.h. dessen Mittelpunkt $M_0(0 | 2)$ liegt am höchsten. Das muss dann der Parabelscheitel sein.

Wegen der Lage der Punkte T_3 und T_4 muss die Funktionsgleichung der Parabel die Nullstellen 4 und -4 besitzen.

- 1. Möglichkeit:

mit den beiden Nullstellen 4 und -4 sowie dem Scheitel $S(0 | 2)$

$$p : y = a \cdot (x - 4)(x + 4) \quad \wedge \quad S(0 | 2) \in p:$$

$$2 = a \cdot (0 - 4)(0 + 4) \quad \Rightarrow \quad a = -0,125.$$

$$\text{Eingesetzt: } p : y = -0,125 \cdot (x - 4)(x + 4) = -0,125 \cdot (x^2 - 16)$$

$$y = -0,125x^2 + 2$$

- 2. Möglichkeit:

mit den Scheitelkoordinaten $(0 | 2)$ und z.B. dem Punkt $T_3(4 | 0)$

$$p : y = a \cdot (x - 0)^2 + 2 \quad \wedge \quad T_3(4 | 0) \in p:$$

$$0 = a \cdot (4 - 0)^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad -2 = 16a \quad \Rightarrow \quad a = -0,125 \text{ usw.}$$

- (e) Dieser Kreis sei k_6 mit dem Mittelpunkt M_6 .

Auf der Winkelhalbierenden des I. Quadranten gilt $y = x$. Mit dem Ergebnis in der Aufgabe (d) folgt dann:

$$x = -0,125x^2 + 2 \quad \text{mit } G = \mathbb{R}^+ \quad \Leftrightarrow \quad 0,125x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1;2} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{0,25}.$$

Wegen $G = \mathbb{R}^+$ muss das Minuszeichen im Zähler entfallen.

$$\text{Also: } x = \frac{\sqrt{2} - 1}{0,25} = 4(\sqrt{2} - 1).$$

$$\frac{A_{k_6}}{A_k} = \frac{4^2(\sqrt{2} - 1)^2 \cdot \pi}{4^2\pi} = 3 - 2\sqrt{2} \approx 17,16\%$$

8. Gegeben ist eine Parabel durch die Gleichung:

$$y = -10x^2 - 19x + 2$$

Untersuche, ob die Parabel durch alle vier Quadranten verläuft.

Lösung: Berechne zunächst den Parabelscheitel: $S(x_S | y_S)$ mit $a = -10$, $b = -19$ und $c = 2$.

$$x_S = -\frac{-19}{2 \cdot (-10)} < 0 \quad \text{und} \quad y_S = 2 - \frac{(-19)^2}{4 \cdot (-10)} > 0$$

Der Scheitel liegt also im II. Quadranten.

Wegen $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet, also verläuft ihr linker Ast auch durch den III. Quadranten.

Weil sich die Äste der Parabel nach unten beliebig weit voneinander entfernen, muss ihr rechter Ast „irgendwann“ die y-Achse überqueren. Also verläuft der Graph auch durch den IV. Quadranten.

Nun musst du noch untersuchen, ob es Punkte auf der Parabel gibt, die im I. Quadranten liegen.

Ermittle dazu die Nullstellen der Funktionsgleichung: $10x^2 - 19x + 2 = 0$.

$$D^* = (-19)^2 - 4 \cdot (-10) \cdot 2 = 441 \text{ und } \sqrt{D^*} = 21$$

$$x_{1;2} = \frac{19 \pm 21}{-20} \Rightarrow x_1 = -2 \text{ und } x_2 = 0, 1.$$

$x_2 = 0, 1$ liegt rechts vom Ursprung auf der x-Achse; also verläuft die Parabel auch durch den I. Quadranten und damit durch alle vier Quadranten.

9. Gegeben ist die Parabelschar $p(a)$ mit der Gleichung $y = (x - 2a)^2 - a^2 + 3$ auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

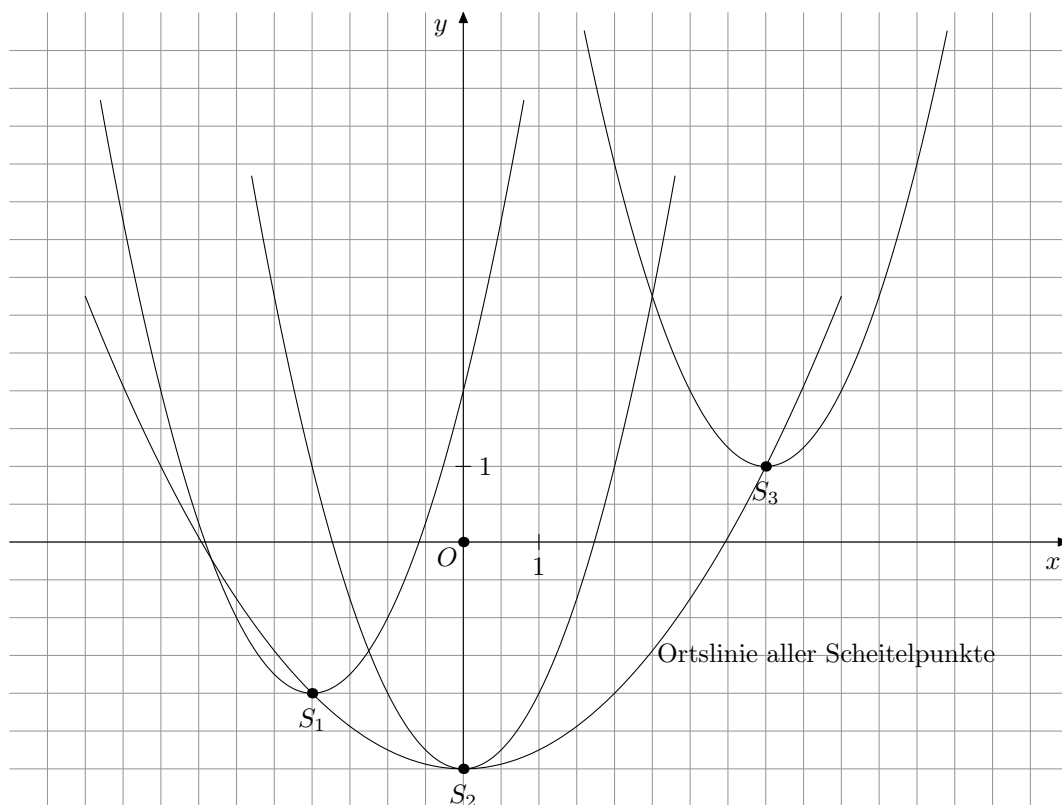
- (a) Begründe: Alle Parabeln der Schar sind Normalparabeln.
- (b) Zeichne für $a \in \{-1; 0; 2\}$ die zugehörigen Parabeln in ein Koordinatensystem.
Platzbedarf: $-6 \leq x \leq 8$ und $-3 \leq y \leq 7$
- (c) Berechne die nach y aufgelöste Gleichung des Trägergraphen aller Scheitelpunkte.

$$[\text{Ergebnis: } y = 0,25x^2 - 3]$$

- (d) Die Parabel p_4 besitzt die Gleichung $y = (x + 1)^2 + 2,75$.
Die Parabel p_5 besitzt die Gleichung $y = x^2 - 6x + 8,75$.
Die Parabel p_6 besitzt die Gleichung $y = x^2 + 10x + 28,75$.
Untersuche, ob diese drei Parabeln der Schar angehören oder nicht.
- (e) Wie viele Parabeln enthält die Schar $p(a)$, welche die x -Achse berühren? Begründe.

Lösung: (a) Vor dem binomischen Klammerterm steht heimlich der Formfaktor 1, egal, womit a belegt wird. Also handelt es sich ausschließlich um nach oben geöffnete Normalparabeln.

(b)



(c) Es ist $x_S = 2a \Rightarrow a = \frac{x_S}{2}$ (1) und weiter gilt: $y_S = a^2 - 3$.

Mit (1) folgt: $y_S = \frac{x_S^2}{4} - 3 = 0, 25x_S^2 - 3$.

(d) Aus der Schargleichung folgt: Die Parabeln besitzen die Scheitelkoordinaten $(2a \mid a^2 - 3)$.

Die Parabel p_4 besitzt den Scheitel $S_4(-1 \mid 2,75)$.

Es muss einerseits $2a = -1 \Leftrightarrow a = -0,5$ gelten.

Gleichzeitig muss $a^2 - 3 = -2,75$ gelten. Das ist für $a = -0,5$ (oder $a = 0,5$) erfüllt.

Also gehört die Parabel p_4 der Schar an.

Die Parabel p_5 besitzt den Scheitel $S_5(3 \mid -0,75)$.

Es muss einerseits $2a = 3 \Leftrightarrow a = 1,5$ gelten.

Gleichzeitig muss $a^2 - 3 = -0,75$ gelten. Das ist für $a = 1,5$ (oder $a = 0,5$) erfüllt.

Also gehört die Parabel p_5 der Schar an.

Die Parabel p_6 besitzt den Scheitel $S_6(-5 \mid 3,75)$.

Es muss einerseits $2a = -5 \Leftrightarrow a = -2,5$ gelten.

Gleichzeitig muss $a^2 - 3 = 3,75$ gelten. Das ist für $a = -2,5$ nicht erfüllt. Also gehört die Parabel p_6 der Schar nicht an.

(e) Wenn eine dieser Parabeln die x -Achse berührt, dann liegt ihr Scheitel auf der x -Achse. Das ist dort der Fall, wo der Trägergraph aller Scheitelpunkte die x -Achse schneidet. Es gibt offensichtlich zwei solche Schnittpunkte.

10. Gegeben ist eine Parabelschar $p(a)$ mit der Gleichung $y = ax^2 + x - a$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(a) Berechne die Scheitelkoordinaten in Abhängigkeit von a .

$$\left[\text{Ergebnis: } S \left(-\frac{1}{2a} \mid -a - \frac{1}{4a} \right) \right]$$

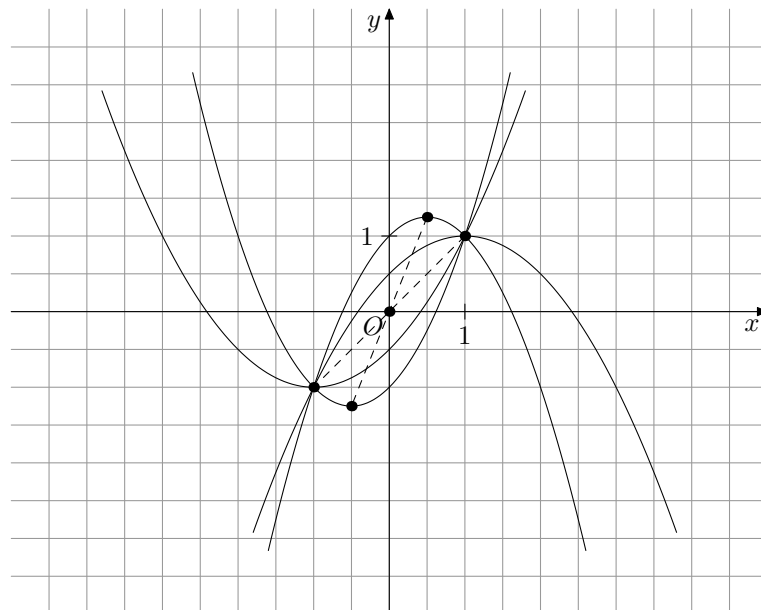
- (b) Begründe: In der Schar gibt es keine Parabel, deren Scheitel auf der y -Achse liegt.
- (c) Begründe: In der Schar gibt es keine Parabel, deren Scheitel im II. Quadranten liegt.
- (d) Tabellarisiere die Scheitelkoordinaten für $a \in \{-1; -0,5; 0,5; 1\}$. Zeichne die zugehörigen Parabeln in ein Koordinatensystem.
Platzbedarf: $-5 \leq x \leq 5$ und $-4 \leq y \leq 4$
- (e) Berechne die Gleichung des Trägergraphen aller Scheitelpunkte $S(x_S \mid y_S)$.
- $$\left[\text{Ergebnis: } y_S = \frac{1}{2x_S} + \frac{x_S}{2} \right]$$
- (f) Begründe: Zu jeder Parabel p der Schar mit dem Scheitel $S(x_S \mid y_S)$ gibt es in der Schar eine kongruente Parabel p' mit dem Scheitel $S'(-x_S \mid -y_S)$.
- (g) Zeige: Jede Parabel der Schar schneidet die x -Achse zwei Punkten.

Lösung: (a) Mit Hilfe einer Formelsammlung kannst du das Ergebnis sofort errechnen.

- (b) Es müsste $x_S = -\frac{1}{2a} = 0$ gelten. Ein Bruch hat aber nur dann den Wert 0, wenn der Zähler den Wert 0 besitzt. Das ist hier jedoch nicht der Fall. Also gibt es keine solche Parabel.
- (c) Läge einer der Scheitelpunkte im II. Quadranten, dann wäre sein Abszissenwert < 0 .
Wegen $x_S = -\frac{1}{2a}$ müsste a positiv sein.
Wegen $y_S = -a - \frac{1}{4a}$ folgt $y_S < 0$.

Dann liegt jedoch der Scheitel im III. und nicht im II. Quadranten.

a	-1	-0,5	0,5	1
$S(x_S \mid y_S)$	(0,5 1,25)	(1 1)	(-1 -1)	(-0,5 -1,25)



(e) Es gilt:

$$x_S = -\frac{1}{2a} \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{1}{2 \cdot x_S} \quad (1)'$$

$$\wedge \quad y_S = -a - \frac{1}{4a} \quad (2)$$

$$(1)' \text{ in } (2): y_S = -\left(-\frac{1}{2 \cdot x_S}\right) - \frac{1}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot x_S}\right)} = \frac{1}{2x_S} + \frac{x_S}{2}$$

(f) Die Tabelle der Aufgabe (d) lässt vermuten, dass ein Vorzeichenwechsel des Parameters a eine Punktspiegelung des betreffenden Parabelscheitels am Koordinatenursprung zur Folge hat. Die Parabel bleibt dabei deckungsgleich zur ursprünglichen Parabel, wechselt aber ihre Öffnungsrichtung (siehe graphische Darstellung).

$$\text{Also: } a' = -a \text{ und } x_{S'} = -\frac{1}{2a'} = -\frac{1}{-2a} = \frac{1}{2a} = -x_S$$

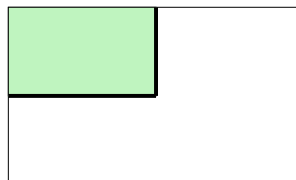
$$\text{und } y_{S'} = -a' - \frac{1}{4a'} = -(-a) - \frac{1}{4 \cdot (-a)} = -\left(-a - \frac{1}{4 \cdot a}\right) = -y_S$$

(g) Schnittpunkte mit der x -Achse verlangen $y = 0 : ax^2 + x - a = 0$.

$$\text{Für die Diskriminante } D^* \text{ ergibt sich: } D^* = 1^2 - 4 \cdot a \cdot (-a) = 1 + 4a^2.$$

$4a^2$ wird nie negativ. Daher bleibt $4a^2 + 1$ stets positiv. Also hat die quadratische Gleichung $ax^2 + x - a = 0$ stets zwei Lösungen. Damit schneidet jede Scharparabel die x -Achse zweimal.

11.

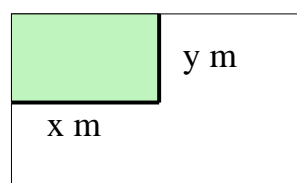


Familie Taerkot hat auf ihrem eingezäunten Grundstück einen 140 m^2 großen Garten angelegt. Er wurde zusätzlich mit einem $25,5 \text{ m}$ langen Maschendrahtzaun abgegrenzt.

(a) Berechne Länge und Breite.

(b) Hätte Familie Taerkot mit $25,5 \text{ m}$ Maschendraht auf die in der Abbildung dargestellte Weise eine noch größere Gartenfläche abgrenzen können?

Lösung: (a)



$$\begin{array}{l} \text{Es gilt:} \\ \wedge \end{array} \quad \begin{array}{l} x + y = 25,5 \quad (1) \\ x \cdot y = 140 \quad (2) \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad y = 25,5 - x \quad (1)'$$

$$(1)' \text{ in } (2): x \cdot (25,5 - x) = 140 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 25,5x - 140 = 0$$

$$\Rightarrow L = \{17,5; 8\}. \text{ Wegen } (1)' \text{ folgt: } y = 8 \vee y = 17,5.$$

Das Gartengrundstück ist 17,5 m lang und 8 m breit (oder umgekehrt).

(b) Für den Flächeninhalt A gilt: $A = x \cdot y \text{ m}^2$.

$$\text{Mit } (1)' \text{ folgt } A(x) = x(25,5 - x) \text{ m}^2 \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = (-x^2 + 25,5x) \text{ m}^2.$$

Der Extremwert muss wegen des negativen Vorzeichens von x^2 ein Maximum sein. Die Berechnung erfolgt z.B. so, als ob du die Scheitelkoordinaten der zugehörigen (nach unten geöffneten) Parabel ermittelst:

$$a = -1 \quad b = 25,5 \text{ und } c = 0:$$

$$x_S = -\frac{25,5}{-2} = 12,75 \text{ und } y_S = 0 - \frac{25,5^2}{-4} = 162,5625 \text{ (Maximum).}$$

Mit dem 25,5 m langen Maschendraht hätte Familie Taerkot auf diese Weise sogar etwas mehr als 162 m^2 einzäunen können.

Die Länge $x = 12,75 \text{ m}$ liefert mit $(1)'$ die Breite $y = (25,5 - 12,75) \text{ m} = 12,75 \text{ m}$. Das bedeutet, dass der flächengrößte Garten eine quadratische Form hätte.

12. Ursula und Hans wollen die folgenden quadratischen Gleichungen lösen:

$$x^2 + 0,5x - 14 = 0 \quad (1)$$

$$x + 2x^2 - 28 = 0 \quad (2)$$

- (a) Hans bekommt für die Gleichung (1) die Lösungsmenge $\{-4; 3,6\}$ heraus. Überprüfe das.
- (b) Danach schaut sich Ursula die Gleichung (2) genauer an. Sie meint schließlich: „Da brauchen wir die Lösungsformel gar nicht. Die beiden Gleichungen müssen dieselben Lösungen haben.“ Wie hat Ursula das erkannt?

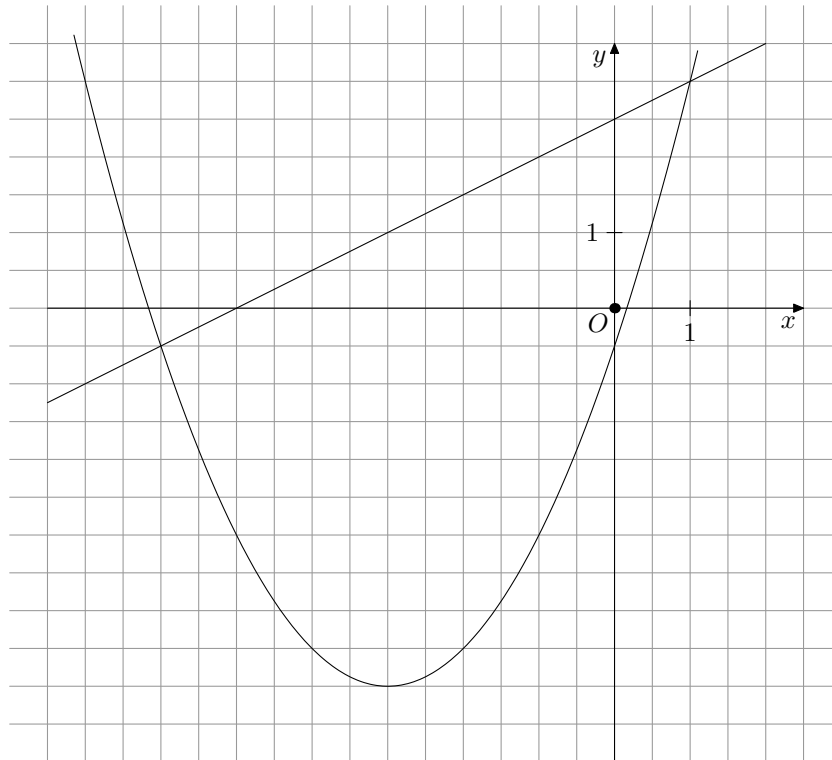
Lösung: (a) Du kannst das durch z.B. Einsetzen überprüfen:

$$-4 \text{ in } (1): (-4)^2 + 0,5 \cdot (-4) - 14 = 0 \text{ ergibt eine wahre Aussage.}$$

$$3,6 \text{ in } (1): 3,6^2 + 0,5 \cdot 3,6 - 14 = 0,76 \neq 0; \text{ d.h. } 3,6 \text{ ist keine Lösung.}$$

- (b) $x^2 + 0,5 - 14 = 0 \mid \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + x - 28 = 0$. Wenn du jetzt noch die Summanden x und $2x^2$ vertauschst, erhältst du die Gleichung (2). Beide Gleichungen sind äquivalent. Also haben sie die gleiche Lösungsmenge.

13.



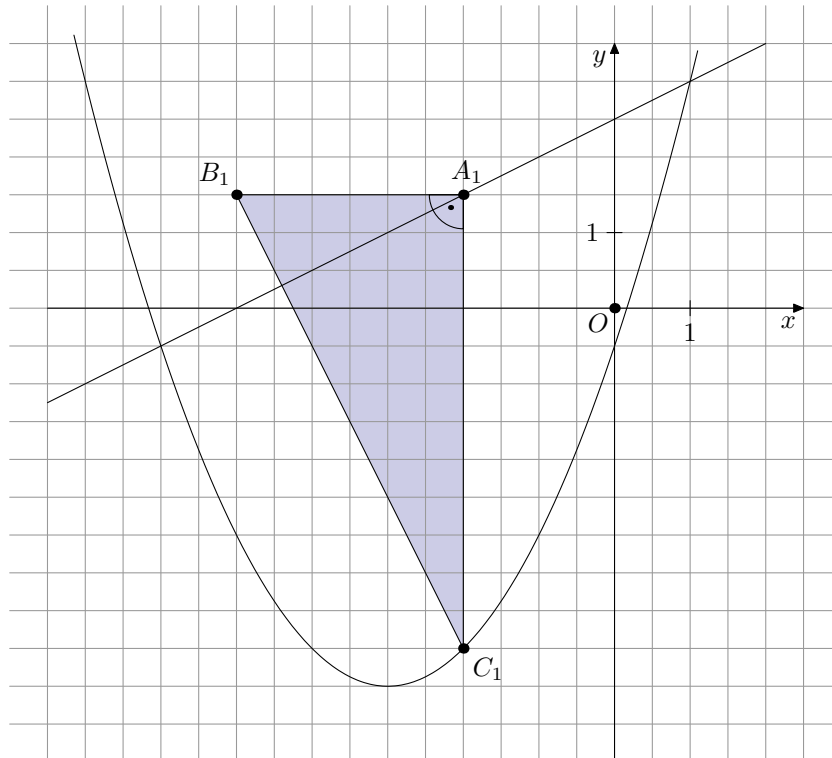
Für die Gleichung einer Parabel p gilt $a = 0,5$. Die Punkte $P(-4 \mid -4,5)$ und $Q(1 \mid 3)$ liegen auf dieser Parabel. Die Parabel p und die Gerade g mit der Gleichung $y = 0,5x + 2$ sind in Ausschnitten dargestellt.

- Zeige durch Rechnung: Die Parabel p hat die Gleichung $y = 0,5x^2 + 3x - 0,5$.
- Berechne die Scheitelkoordinaten der Parabel.
- Es werden nun rechtwinklige Dreiecke $A_n B_n C_n$ mit den folgenden Eigenschaften erzeugt:
 - Die Punkte A_n liegen auf der Geraden g .
 - Die Punkte C_n liegen auf der Parabel p .
 - Die Punkte A_n sind die Scheitel der rechten Winkel aller Dreiecke $A_n B_n C_n$.
 - Die Punkte C_n haben den gleichen Abszissenwert wie die Punkte A_n .
 - Der Abszissenwert der Punkte B_n ist stets um 3 kleiner als der Abszissenwert der Punkte C_n .

Zeichne oben für $x = 2$ das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ ein.

- Gib zwei x -Werte an, für die es kein Dreieck gibt. Begründe deine Wahl.
- Begründe: Unter allen Dreiecken $A_n B_n C_n$ gibt es keines, das zu einem Punkt entartet.

Lösung:



(a)

$$\begin{array}{rcll}
 P(-4 \mid -4,5): & -4,5 & = & 0,5 \cdot (-4,5)^2 + b \cdot (-4,5) + c \\
 Q(1 \mid 3): & 3 & = & 0,5 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\
 \hline
 & -4,5 & = & 8 - 4b + c & (1) \\
 & 3 & = & 0,5 + b + c & (2) \\
 \hline
 (2) - (1): & 7,5 & = & -7,5 + 5b &
 \end{array}$$

$\Rightarrow b = 3$ und z.B. in (2): $c = -0,5$.

Also gilt für p : $y = 0,5x^2 + 3x - 0,5$.

(b) $x_S = -\frac{-3}{2 \cdot 0,5} = -3$ und $y_S = -0,5 - \frac{3^2}{4 \cdot 0,5} = -5 \Rightarrow S(-3 \mid -5)$.

(c) Siehe Zeichnung oben.

(d) An den Schnittpunkten der Parabel mit der Geraden gilt: $x = -6$ bzw. $x = 1$. Dort liegen die betreffenden Punkte A_n und C_n aufeinander. Also gibt es jeweils kein Dreieck.

(e) Weil die Punkte B_n niemals mit den Punkten A_n zur Deckung kommen, kann das betreffende Dreieck höchstens zur Strecke entarten.