Lineare Gleichungen und Ungleichungen

1. Gegeben ist die Gleichung

$$13 - 2x = x + 10, \quad G = \mathbb{Z}\,.$$

   (a) Zeige, dass $x = 2$ keine Lösung dieser Gleichung ist.

   (b) Ändere die Gleichung an einer Stelle so ab, dass $x = 2$ die Lösung der abgeänderten Gleichung ist, und führe den Nachweis.

Lösung: (a) Einsetzen (b) z.B.: $13 - 2x = x + 7$

2. Begründe: Die Lösungsmenge der Gleichung $4 - 6x = 3(11 - 2x)$ ist für $G = \mathbb{Q}$ leer.

Lösung: Es ergibt sich $4 - 0 \cdot x = 33$. Das ist für keine Belegung von x erfüllbar.

3. Gegeben ist die Gleichung

$$7 - x = 3x + 11, \quad G = \mathbb{Z}$$

   (a) Zeige, dass $x = -1$ die Lösung dieser Gleichung ist.

   (b) Ändere die Gleichung an einer Stelle so ab, dass die Lösungsmenge der abgeänderten Gleichung leer ist, und führe den Nachweis.

Lösung: (a) Entweder $x = -1$ einsetzen oder die Gleichung nach x auflösen.
(b) z.B. $G = \mathbb{N}$ wählen oder $7 - x = 3x + 12$ usw.

4. Begründe: Die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + 8 = 6$ ist für $G = \mathbb{Q}$ leer.

Lösung: Es ergibt sich $x^2 = -2$. Es gibt keine Zahl, die mit sich selbst multipliziert einen negativen Produktwert ergibt.

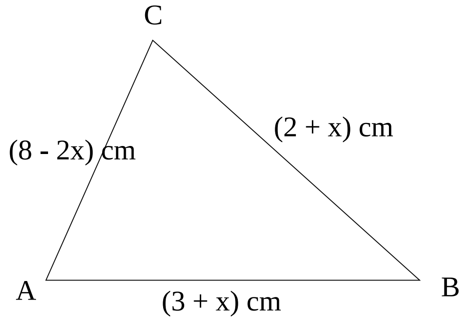
5. Es gilt $x \in \mathbb{Q}^+$.

(a) Zeichne das Dreieck ABC für $x = 1$.

(b) Berechne jeweils den Umfang des Dreiecks ABC für $x \in \{1,5;\ 1,\overline{6};\ 2\frac{1}{8}\}$.
Was stellst du fest?
Ist das immer so? Begründe deine Antwort.

(c) Unter allen möglichen Dreiecken ABC gibt es zwei gleichschenklige. Berechne jeweils alle Seitenlängen.

(d) Was ergibt sich für $x = 4$? Bestimme alle Belegungen von x, für die es überhaupt solch ein Dreieck ABC gibt.



Lösung:

Wir rechnen nur mit Maßzahlen.

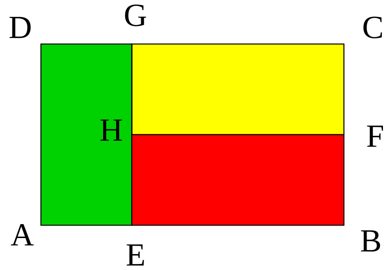
(a) Die Dreiecksseiten sind 3 cm, 6 cm und 4 cm lang.

(b) Wegen $(8 - 2x) + (2 + x) + (3 + x) = 13$ ist der Umfang konstant 13 cm lang.

(c) 1. Fall:
$8 - 2x = 2 + x \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$
$a = 5\,\text{cm}$, $b = 2\,\text{cm}$ und $c = 5\,\text{cm}$
2. Fall:
$8 - 2x = 3 + x \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,\overline{6}\,\text{cm}$
$a = 3,\overline{6}\,\text{cm}$; $b = 4,\overline{6}\,\text{cm}$ und $c = 4,\overline{6}\,\text{cm}$.
3. Fall:
$2 + x = 3 + x$ ist nicht erfüllbar, weil stets $2 + x < 3 + x$ gilt.

(d) Für $x = 4$ wird $\overline{AC} = 0\,\text{cm}$; d.h. das Dreieck entartet zur Strecke.
Es muss $\overline{AC} > 0$ gelten; d.h. es muss $0 < x < 4$ (*)sein.
Gleichzeitig müssen alle Dreiecksungleichungen erfüllt sein:
1. Bedingung: $(8-2x)+(3+x) > 2+x \quad \Leftrightarrow \quad x < 4,5$; ist wegen (*) ohnehin erfüllt.
2. Bedingung: $(8 - 2x) + (2 + x) > 3 + x \quad \Leftrightarrow \quad x < 3,5$ (**)
3. Bedingung: $(2 + x) + (3 + x) > 8 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad x > 0,75$
Mit (**) gibt es nur für $0,75 < x < 3,5$ solche Dreiecke.

6.



Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet.
Die drei Rechtecke im Inneren sind kongruent. Ihre Seitenlängen stehen jeweils im Verhältnis 2:3. Weiter gilt: $\overline{HF} = 3x\,\text{cm}$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$.

(a) Zeichne die Figur für $x = 2$.

(b) Welchen Flächeninhalt besitzt eines der inneren Rechtecke, wenn der Saum der Fahne 1 m 8 cm lang ist?

Lösung:

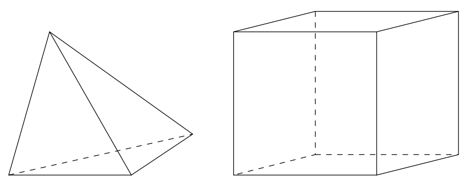
(a) –

(b) Es gilt: $\overline{AD} = 2 \cdot \overline{HG} = 4x\,\text{cm}$ und $\overline{AB} = 5x\,\text{cm}$.
Dann folgt für den Umfang u: $u(x) = 18x\,\text{cm}$.
$18x = 108 \quad \Rightarrow \quad x = 6 \quad \text{und} \quad 2x = 12 \quad \text{sowie} \quad 3x = 18.$
Damit folgt für den Flächeninhalt A eines dieser Rechtecke im Inneren: $A = 12\,\text{cm} \cdot 18\,\text{cm} = 216\,\text{cm}^2$

7. Die eine Seite eines Rechtecks ist 2 cm länger als die andere. Der Rechteckumfang liegt zwischen 60 cm und 62 cm.
Welche Seitenlängen sind dann für die kürzere Seite möglich?

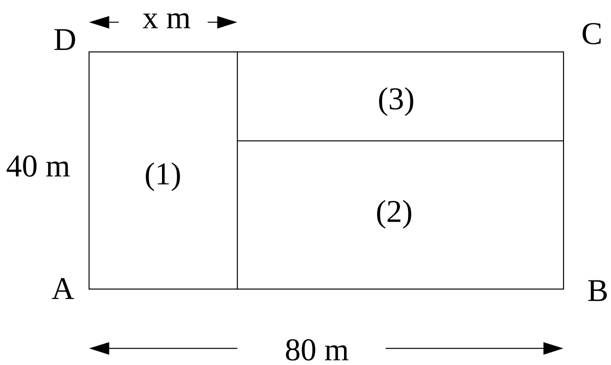
Lösung: Die kürzere Seite liegt zwischen 14 cm und 14,5 cm.

8. In einer Spielzeugkiste befinden sich Würfel und Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche. Es werden 30 Körper mit 300 Kanten gezählt. Wie viele Würfel und wie viele Pyramiden befinden sich in der Kiste?



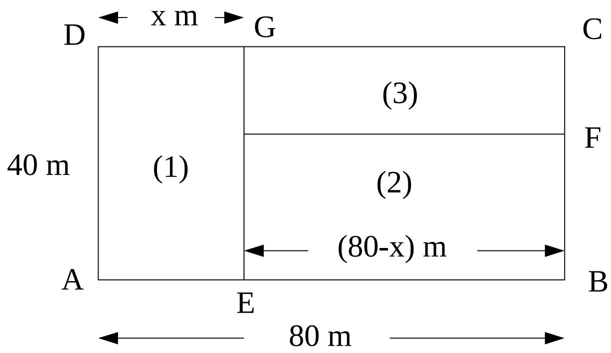
Lösung: Es sind 20 Würfel und 10 Pyramiden.

9.



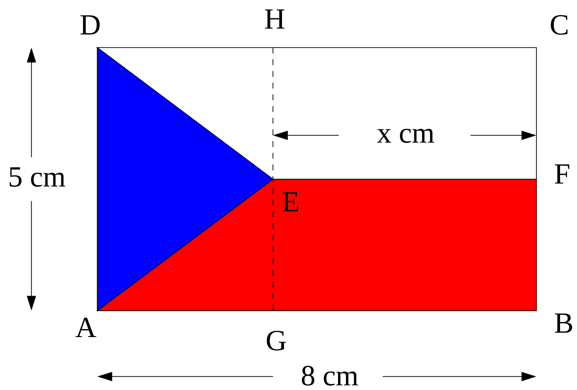
Ein rechteckiges Wiesengrundstück $ABCD$, das zur Gemeinde Besselbach gehört, soll in drei rechteckige Baugrundstücke (1), (2) und (3) aufgeteilt werden. Es gilt stets $x \in \mathbb{Q}^+$. Der dortige Bürgermeister Pickelschau beauftragte seinen Baureferenten Schaufelpick, zu prüfen, ob sich für einen bestimmten x-Wert gleich große Parzellen ergäben.

Lösung:



Es muss einerseits $\overline{BF} = \overline{FC} = \overline{DG} = x\,\text{m}$ gelten.
Wegen $\overline{BC} = 40\,\text{m}$ folgt: $x = 20$. *)
Andererseits muss gleichzeitig $\overline{EB} = \overline{AD}$ gelten:
$\Rightarrow \quad 80 - x = x \qquad \Leftrightarrow \quad x = 40$ **)
Die Ergebnisse *) und **) stehen im Widerspruch. Also gibt es keine Belegung von x, die drei flächengleiche Rechtecke erzeugt.

10. Das ist ein Bild der Nationalflagge der Tschechischen Republik.



Es gilt: $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\overline{AD} = 5\,\text{cm}$ und $\overline{EF} = x\,\text{cm}$.
Zusätzlich wurde die Hilfslinie $[HG]$ gestrichelt eingezeichnet.
Hinweis: Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

(a) Zeichne die Figur für $x = 4,5$.

(b) Berechne den Flächeninhalt A_T des Trapezes $ABFE$ in Abhängigkeit von x.
Hinweis: Verwende für deine Überlegungen die Strecke $[HG]$.
[Ergebnis: $A_T(x) = (1,25x + 10)\,\text{cm}^2$]

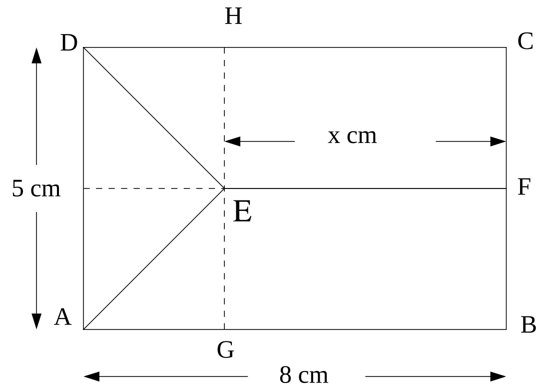
(c) Berechne x so, dass alle drei Teilflächen im Inneren des Rechtecks $ABCD$ gleich groß sind.

(d) Berechne den Flächeninhalt A_D des Dreiecks AED in Abhängigkeit von x. [Ergebnis: $A_D(x) = (20 - 2,5x)\,\mathrm{cm}^2$]

(e) Bestätige das Ergebnis der Aufgabe (c) mit Hilfe der Ergebnisse der Aufgaben (b) und (d).

Lösung: (a) –

(b)



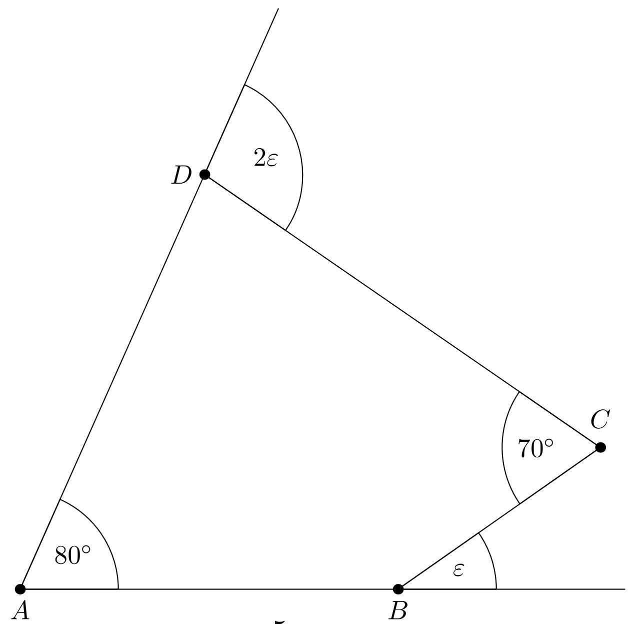
$A(ABFE) = [A(ABCD) - A(AED)] : 2 = [40\,\mathrm{cm}^2 - 0,5 \cdot 5 \cdot (8 - x)\,\mathrm{cm}^2] : 2$
$A_T = 20\,\mathrm{cm}^2 - (10 - 1,25x)\,\mathrm{cm}^2 = (1,25x + 10)\,\mathrm{cm}^2$

(c) Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ muss dreimal so groß sein wie der Flächeninhalt des Trapezes $ABFE$:
$3 \cdot (1,25x + 10) = 40 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8}{3} \approx 2,67$

(d) $A(AED) = A(ABCD) - 2 \cdot A(ABFE) = 40\,\mathrm{cm}^2 - 2 \cdot (1,25x + 10)\,\mathrm{cm}^2$
$A_D(x) = (20 - 2,5x)\,\mathrm{cm}^2$

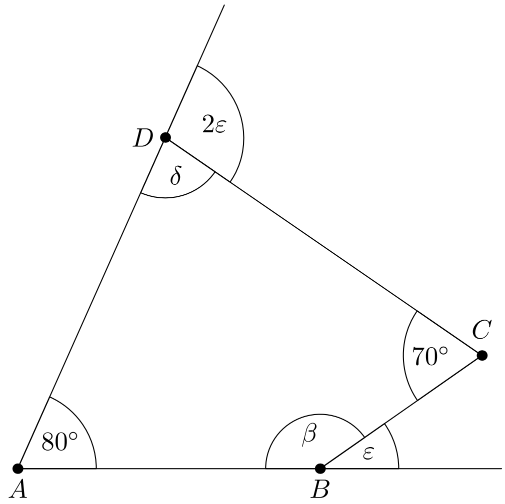
(e) Es muss gelten $A_T = A_D$: $\quad 1,25x + 10 = 20 - 2,5x \quad \Rightarrow \quad x \approx 2,67$

11.



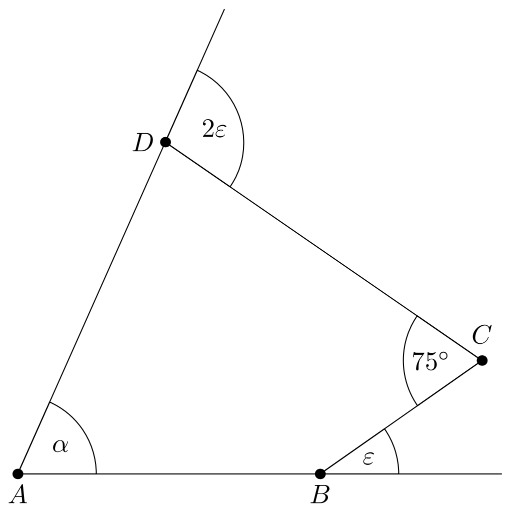
Berechne ε.

Lösung:



Im Viereck $ABCD$ gilt: $80° + \beta + 70° + \delta = 360°$. (*)
β ist der Nebenwinkel von ε : $\beta = 180° - \varepsilon$. (1)
δ ist der Nebenwinkel von 2ε : $\delta = 180° - 2\varepsilon$. (2)
Wir ersetzen in der Gleichung (*) β durch $180° - \varepsilon$ und δ durch $180° - 2\varepsilon$.
Dann ergibt sich: $80° + 180° - \varepsilon + 70° + 180° - 2\varepsilon = 360°$.
$\Leftrightarrow \quad -3\varepsilon = -150° \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = 50°$.

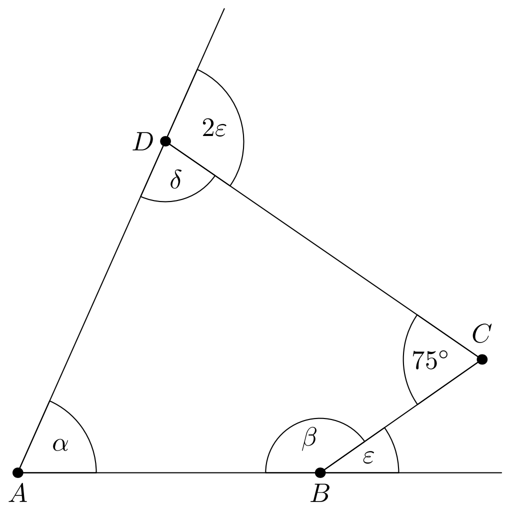
12.



(a) Berechne α für $\varepsilon = 48°$.

(b) Für welche Werte von ε existiert das Viereck $ABCD$?

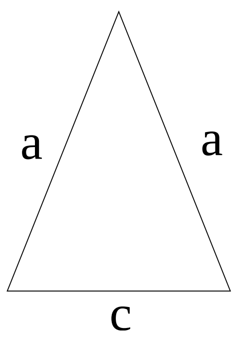
Lösung:



(a) Aus $\varepsilon = 48°$ folgt: $\beta = 180° - 48° = 132°$ und $\delta = 180° - 96° = 84°$.
In jedem Viereck beträgt die Innenwinkelsumme 360°:
$\alpha + 132° + 75° + 84° = 360° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 69°$.

(b) Im Viereck $ABCD$ gilt: $\alpha + \beta + 75° + \delta = 360°$. (*)
β ist der Nebenwinkel von ε : $\beta = 180° - \varepsilon$. (1)
δ ist der Nebenwinkel von 2ε : $\delta = 180° - 2\varepsilon$. (2)
Wir ersetzen in der Gleichung (*) β durch $180° - \varepsilon$ und δ durch $180° - 2\varepsilon$.
Dann ergibt sich: $\alpha + 180° - \varepsilon + 75° + 180° - 2\varepsilon = 360°$.
$\Leftrightarrow \quad \alpha - 3\varepsilon = -75° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 3\varepsilon - 75°$.
Damit das Viereck $ABCD$ existiert, muss $\alpha > 0$ gelten:
$\Leftrightarrow \quad 3\varepsilon - 75° > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon > 25°$.
Wenn du andererseits am Punkt D das Winkelmaß 2ε betrachtest, dann muss $2\varepsilon < 180°$ und damit $\varepsilon < 90°$ gelten.
Insgesamt muss also $25° < \varepsilon < 90°$ gelten.

13.



(a) Um welches besondere Dreieck handelt es sich? Begründe deine Antwort.

(b) Fritz soll für $a = 4{,}8\,\text{cm}$ und $c = 10\,\text{cm}$ ein solches Dreieck konstruieren. Nach einer Weile meint er: „Aber das geht doch gar nicht!“
Begründe, dass Fritz Recht hat.

(c) Zeichne zwei verschiedene gleichschenklige Dreiecke, die jeweils einen Umfang $u = 12\,\text{cm}$ besitzen.

Lösung: (a) Das Dreieck ist gleichschenklig, denn zwei Seiten haben die gleiche Länge a.

(b) In jedem Dreieck müssen zwei Seiten länger als die dritte Seite sein:
Es müsste z.B. $4,8\,\text{cm} + 4,8\,\text{cm} > 10\,\text{cm}$ werden. Diese Bedingung ist nicht erfüllt, also gibt es kein solches Dreieck; Fritz hat Recht.

(c) Zum Beispiel:

a	$4,5\,\text{cm}$	$3\,\text{cm}$
c	$3,7\,\text{cm}$	$3\,\text{cm}$
u	$2 \cdot 4,5\,\text{cm} + 3\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$	$2 \cdot 3\,\text{cm} + 3\,\text{cm} = 12\,\text{cm}$

Es gibt beliebig viele Lösungen.

14. Für alle Ungleichungen gilt: $G = \mathbb{Q}$.

(a) Berechne die Lösungsmenge von $2x - 4 > 0$.

(b) Beründe ohne nach x aufzulösen: Die Ungleichung $6x - 12 > 0$ hat die gleiche Lösungsmenge wie die Ungleichung in der Aufgabe (a).

(c) Bestimme die Lösungsmenge von $1387 \cdot (2x - 4) > 0$.

(d) Bestimme die Lösungsmenge von $(x^2 + 1) \cdot (2x - 4) > 0$.

(e) Bestimme die Lösungsmenge von $(x - 11)^2 \cdot (2x - 4) > 0$.

Lösung: (a) $L = \{x \mid x > 2\}_{\mathbb{Q}}$.

(b) Wenn du die Ungleichung in Aufgabe (a) auf beiden Seiten mit 3 multiplizerst, dann erhältst du die Ungleichung (b). Die Lösungsmenge ändert sich dabei nicht.

(c) Wenn du Ungleichung (a) auf beiden Seiten mit 1387 multiplizerst, dann erhältst du die Ungleichung (c). Die Lösungsmenge ändert sich dabei nicht.

(d) Weil $x^2 + 1$ stets positiv ist, muss $2x - 4$ auch positiv (also > 0) bleiben. An der Lösungsmenge ändert sich nichts.

(e) Weil $x^2 + 1$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ positiv ist, folgt aus den gleichen Gründen wie oben $L = \{x \mid x > 2\}_{\mathbb{Q}}$.

(f) Auf den ersten Blick sieht es so aus, als ob die Lösungsmenge zu den vorigen unverändert bleibt. Doch du musst hier vorsichtiger sein: Der Faktor $(x - 11)^2$ ist nicht für alle Belegungen von x positiv, denn $x = 11$ ist eine Nullstelle dieses Terms; d.h. für $x = 11$ ergibt sich $(11 - 11)^2 \cdot (2 \cdot 11 - 4) = 0$ und nicht > 0 .Das bedeutet: $x = 11$ gehört nicht zur Lösungsmenge.
Damit gilt hier $L = \{x \mid x > 2\}_{\mathbb{Q}} \setminus \{11\}$.

15. Im September 2011 orderte das Kaufhaus X&Y 200 T-Shirts. Davon wurden im gleichen Monat 76 Stück verkauft.
Einen Monat später verteuerte sich dieser Artikel um je einen EURO. In diesem Zeitraum wurden jedoch nur 72 Exemplare verkauft. Es stellte sich heraus, dass die Einnahmen aus dem Verkauf von diesen T-Shirts im Oktober die gleichen waren wie die im September 2011 .
Berechne den Verkaufpreis eines T-Shirts im September 2011 .

Lösung: Preis pro T-Shirt im September 2011: x EURO.
Preis pro T-Shirt im Oktober 2011: $(x+1)$ EURO.
Wir rechnen im Folgenden nur mit Maßzahlen.
$76 \cdot x = 72 \cdot (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 72 \quad \Leftrightarrow \quad x = 18$.
Im September 2011 kostete eines dieser T-Shirts 18 EURO.

16. Carsten rechnet eine Gleichung aus, die er aus dem Buch übertragen hat. Der Lehrer betrachtet seinen Hefteintrag: „Deine Schrift ist wie schon so oft zum Teil unleserlich, aber dein Ergebnis ist richtig.“
In seinem Heft steht (der unleserliche Teil ist durch ein Kästchen ersetzt):

$$\begin{aligned} 2x - \square &= -2 \\ 2x &= 14 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Ermittle auf zwei verschiedene Arten, was im Buch anstelle des Kästchens stand.

Lösung: **1. Möglichkeit:**
Um von der ersten zur zweiten Zeile zu kommen, hat Carsten offenbar auf beiden Seiten der Gleichung im Buch die Zahl 16 addiert. Dadurch fällt das Kästchen in der zweiten Zeile weg. Also stand die unleserliche Zahl 16 anstelle des Kästchens da.
2. Möglichkeit:
Der Lehrer hat $x = 7$ als richtige Lösung bestätigt. Setze diese Lösung in die erste Zeile ein:
$2 \cdot 7 - \square = -2 \quad \Leftrightarrow \quad 14 - \square = -2 \mid -14 \quad \Leftrightarrow \quad -\square = -16 \mid \cdot(-1)$
$\Leftrightarrow \quad \square = 16$.

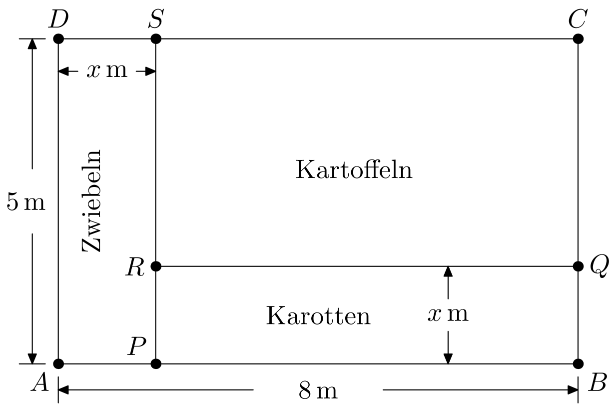
17. Carsten rechnet eine Gleichung aus, die er aus dem Buch übertragen hat. Der Lehrer betrachtet seinen Hefteintrag: „Deine Schrift ist wie schon so oft zum Teil unleserlich, aber dein Ergebnis ist richtig.“
In seinem Heft steht (der unleserliche Teil ist durch ein Kästchen ersetzt):

$$\begin{aligned} 2x - \square &= -2 \\ 2x &= 14 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Ermittle auf zwei verschiedene Arten, was im Buch anstelle des Kästchens stand.

Lösung: **1. Möglichkeit:**
Um von der ersten zur zweiten Zeile zu kommen, hat Carsten offenbar auf beiden Seiten der Gleichung im Buch die Zahl 16 addiert. Dadurch fällt das Kästchen in der zweiten Zeile weg. Also stand die unleserliche Zahl 16 anstelle des Kästchens da.
2. Möglichkeit:
Der Lehrer hat $x = 7$ als richtige Lösung bestätigt. Setze diese Lösung in die erste Zeile ein:
$2 \cdot 7 - \square = -2 \quad \Leftrightarrow \quad 14 - \square = -2 \mid -14 \quad \Leftrightarrow \quad -\square = -16 \mid \cdot(-1)$
$\Leftrightarrow \quad \square = 16$.

18.



Das rechteckige Feld $ABCD$ ist 8 m lang und 5 m breit.
Auf den drei rechteckigen Parzellen werden Karotten, Zwiebeln und Kartoffeln angebaut. Die beiden Streifen für Karotten und Zwiebeln sind jeweils x m breit. Sie besitzen den gleichen Flächeninhalt. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht.

(a) Berechne x. [Ergebnis: x=3]

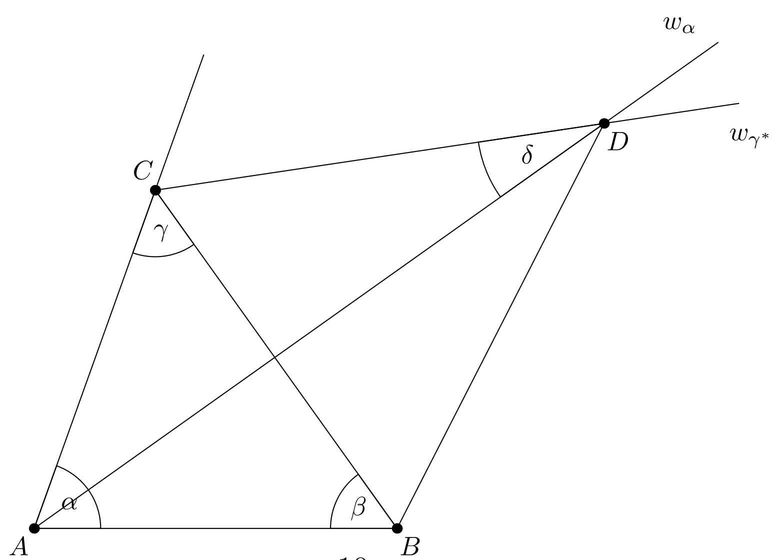
(b) Wie viel Prozent der Gesamtfläche nimmt dann das Kartoffelfeld ein?

Lösung: (a) Es gilt: $\overline{RQ} = (8-x)\,\mathrm{m}$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$.
Dann folgt: $x \cdot (8-x)\,\mathrm{m}^2 = 5 \cdot x\,\mathrm{m}^2 \;\mid\!: (x\,\mathrm{m}^2)$ mit $x > 0$
$\Leftrightarrow \quad 8 - x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$.

(b) $A_{\text{Kartoffelfeld}} = \overline{RQ} \cdot \overline{RS} = 5\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{m}^2$.

$$\frac{A_{\text{Kartoffelfeld}}}{A_{ABCD}} = \frac{10\,\mathrm{m}^2}{40\,\mathrm{m}^2} = 0{,}25 = 25\%\,.$$

19.

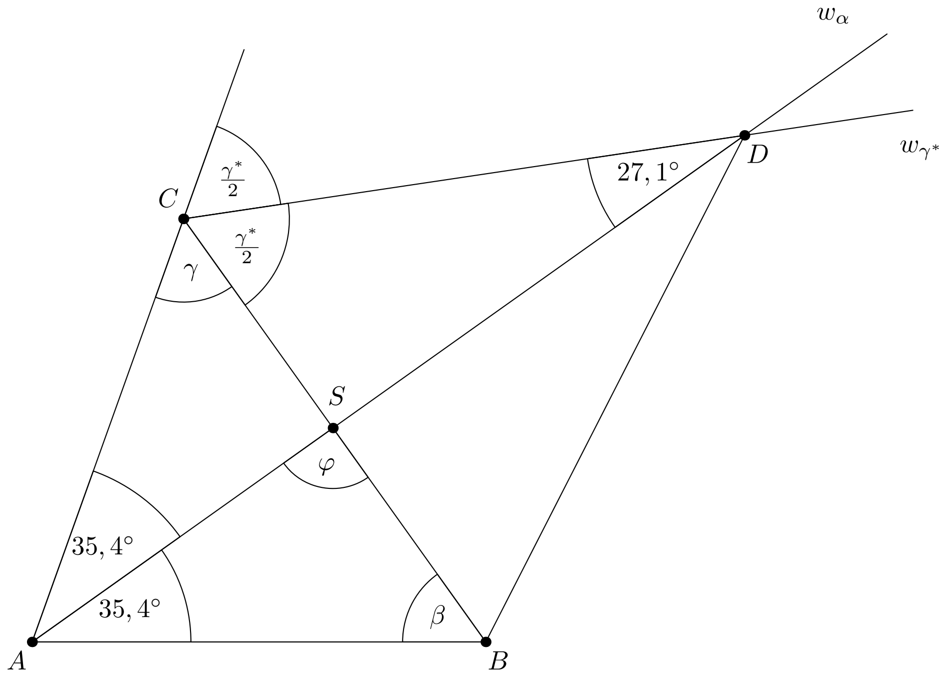


Die Halbgerade w_α halbiert den Winkel α und die Halbgerade w_{γ^*} halbiert den Nebenwinkel von γ. Weiter gilt: $\alpha = 70,8°$ und $\delta = 27,1°$.
Das Viereck $ABDC$ ist nicht achsensymmetrisch.

(a) Berechne die Winkelmaße γ und β. [Teilergebnis: $\beta = 54,2°$]

(b) Begründe, dass es sich bei dem Viereck $ABDC$ nicht um ein achsensymmetrisches Drachenviereck handelt.

Lösung: (a)



Im Dreieck ADC gilt: $35,4° + 27,1° + \dfrac{\gamma^*}{2} + \gamma = 180° \quad (1)$.
Weiter gilt: $\gamma^* = 180° - \gamma$.
In (1): $35,4° + 27,1° + (180° - \gamma) : 2 + \gamma = 180°$.
$\Leftrightarrow \quad 62,5° + 90° - 0,5\gamma + \gamma = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 62,5° + 0,5\gamma = 90°$
$\Leftrightarrow \quad \gamma = 55°$.
Aus der Innenwinkelsumme im Dreieck ABC ergibt sich:
$70,8° + 55° + \beta = 180° \Rightarrow \quad \beta = 54,2°$.

Eine andere Möglichkeit:

$\frac{\gamma^*}{2}$ ist ein Außenwinkel am Dreieck ADC. Jeder Außenwinkel an einem Dreieck ist genau so groß wie die Summe der Maße der beiden nicht anliegenden Innenwinkel. Das bedeutet hier:

$$\frac{\gamma^*}{2} = 35,4° + 27,1° = 62,5° \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^* = 125°.$$

$\gamma = 180° - 125° = 55° \quad \ldots \quad \beta = 54,2°$.

(b) In jedem (achsensymmetrischen) Drachenviereck müssen die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.
Im Dreieck ABS gilt: $\varphi = 180° - 35,4° - 54,2° = 90,4° \neq 90°$.
Das Viereck $ABDC$ ist also kein (achsensymmetrisches) Drachenviereck.