Achsenspiegelung

1. (a) Zeichne das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck ABC mit $A(2 \mid 0$, $B(7 \mid 1)$ und $C(5 \mid 2)$ in ein Koordinatensystem.
   Platzbedarf: $-1 \leqq x \leqq 8$ und $-4 \leqq y \leqq 4$

   (b) Spiegelt man den Punkt B am Mittelpunkt M_1 der Strecke $[AC]$, so erhält man den Bildpunkt B'.
   Zeichne M_1 und B' ein und lies die Koordinaten von B' ab.

   (c) Spiegle den Punkt C am Mittelpunkt M_2 der Strecke AB (Spiegelbild C').

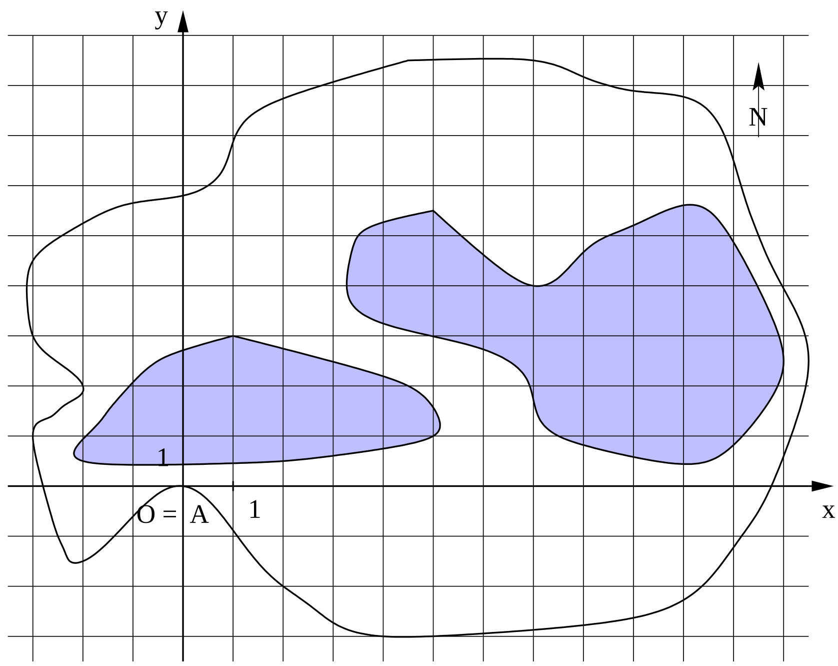
   (d) Lies die Koordinaten des Punktes M_2 ab und berechne die Koordinaten des Bildpunktes C' mit Pfeilen.

   (e) Zeichne die Strecken $[B'C]$, $[B'C']$ sowie $[C'B]$ ein und beweise durch Rechnung: Das Viereck $ABCB'$ ist ein Parallelogramm.

   (f) Entdeckst du in deiner Zeichnung eine Raute? Begründe deine Antwort.

Lösung: (b) $B'(0 \mid 3)$ (d) $C'(4 \mid -3)$
(f) Das Viereck $AC'BC$ ist eine Raute, denn jede Punktspiegelung ist längentreu.

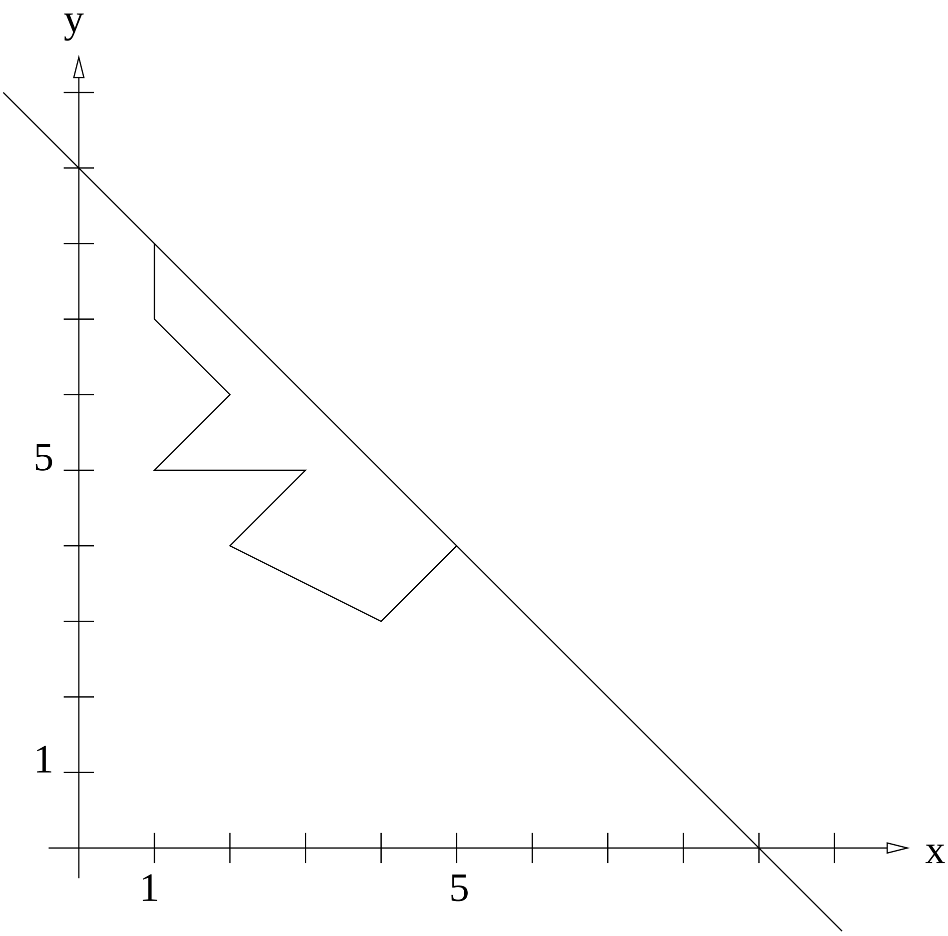
2. Ein alter Pirat hinterlässt seinem Sohn eine Schatzkarte (siehe Zeichnung unten) mit folgender Beschreibung:
   Fahre mit dem Schiff zur Insel „Mariucassa“ und lege am Ankerplatz A an. Gehe 250 Schritte nach Osten und anschließend 100 Schritte nach Norden. Du stehst dann direkt unter einer Kokospalme P. Gehe nun 150 Schritte nach Westen und nochmals 250 Schritte nach Norden. Jetzt erreichst du einen Wasserfall W. Gehe von hier 300 Schritte nach Osten und 50 Schritte nach Süden. Vor dir erhebt sich ein Affenbrotbaum, in dessen Schatten ich für dich eine Schatzkiste vergraben habe. Trage in die Landkarte die Stelle S ein, wo der Sohn nach dem Schatz graben muss und berechne ihre Koordianten auf deinem Schulaufgabenblatt.



50 Schritte entsprechen 1LE

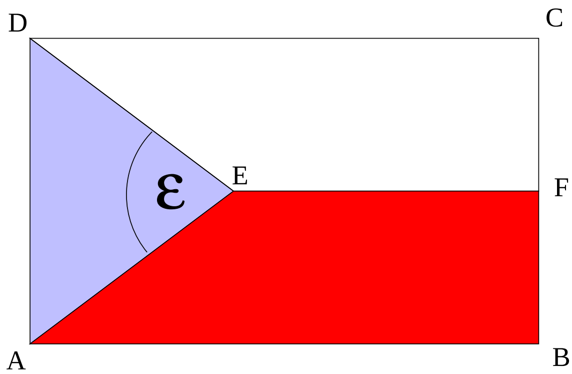
Lösung: Die Koordinaten des Schatzes S heißen $(8|6)$.

3. Ergänze die Figur zu einer achsensysmmetrischen Figur mit der Geraden g als Symmetrieachse!



Lösung: - -

4. Das ist ein Bild der Nationalflagge der Tschechischen Republik.



Es gilt: $\overline{AB} = 9\,\text{cm}$ und $\overline{AD} = \overline{EF} = 6\,\text{cm}$. Der Winkel mit dem Maß ε ist zusätzlich eingezeichnet.

(a) Zeichne die Figur so, dass über dem Rechteck $ABCD$ noch $4\,\text{cm}$ Platz bleibt.

(b) Ermittle sowohl den Flächenanteil des Dreiecks AED als auch den des Vierecks $DEFC$ am Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$.

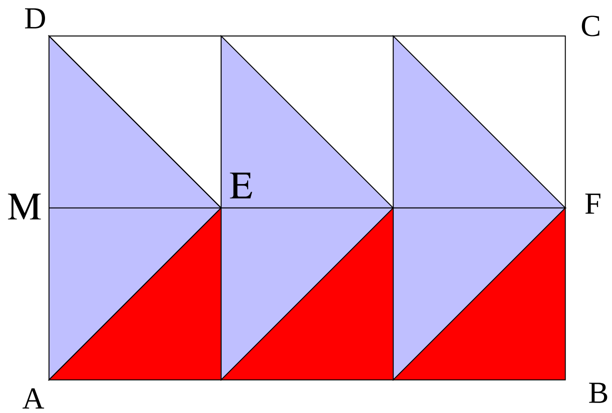
Hinweis: Mache in einer Zeichnung deutlich, wie oft das Dreieck AED in das Rechteck $ABCD$ hinein passt.

(c) Wie ändert sich der Flächenanteil des Dreiecks AED an dem des Rechtecks $ABCD$, wenn bei sonst unveränderten Bedingungen das Winkelmaß ε kleiner wird? Begründe deine Antwort.

(d) Spiegle die Figur an der Achse AE.

Lösung: (a) –

(b)

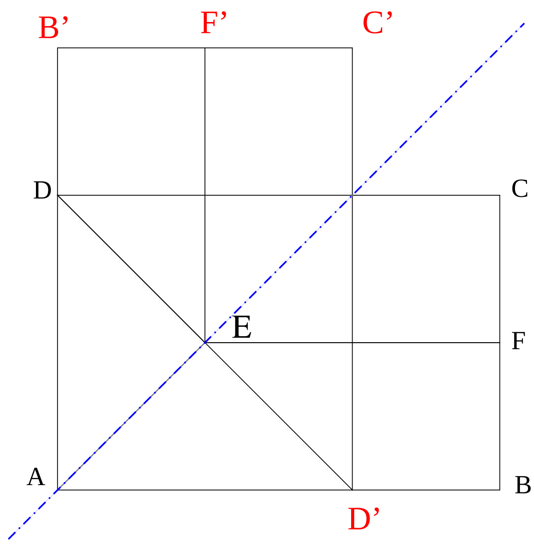


Das Rechteck $ABCD$ besteht aus 6 konguenten Quadraten. Das Dreieck AED ist sich aus Symemtriegründen genau so groß wie eines dieser Quadrate.

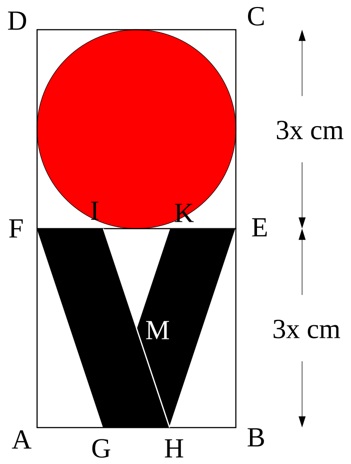
$$\Rightarrow \quad \frac{A(AED)}{A(ABCD)} = \frac{1}{6} \quad \text{und} \quad \frac{A(ABFE)}{A(ABCD)} = \frac{2,5}{6} = \frac{5}{12}\,.$$

(c) Wenn ε kleiner werden soll, dann muss der Punkt E nach rechts wandern. Dadurch wird der Flächenanteil des Dreiecks AED am Rechteck $ABCD$ größer.

(d)



5. Das ist ein Bild des Logos der Firma MARABU, die Farben herstellt.



Die Figur setzt sich aus zwei Quadraten zusammen.
Die Strecken $[AG], [GH], [HB], [FI], [IK]$ und $[KE]$ sind alle gleich lang.

(a) Zeichne die Figur für $x = 1,5$.

(b) Der Mathematiklehrer G. Rade gibt den Auftrag: „Zeichnet von denjenigen Teilfiguren des Logos, die symmetrisch aufgebaut sind, alle Symmetrieachsen ein.“
Da meldet sich Maria: „Das geht in einem Fall gar nicht.“

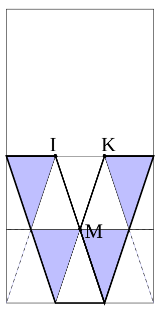
(c) Im unteren Quadrat ist eine V-förmige Figur zu sehen, die sich aus einem Parallelogramm und einem Trapez zusammensetzt.
Ermittle den Anteil dieser Figur an der Gesamtfläche des Logos als Bruch.
Hinweis: Zerlege das Quadrat $ABEF$ in lauter gleiche Dreiecke vom Typ MKI.

Lösung:

(a) –

(b) Maria hat Recht: Der rote Kreis enthält unendlich viele Symmetrieachsen, die man gar nicht alle zeichnen kann.
Ansonsten sind zwei Quadrate, das Rechteck, das Trapez $GHEF$ und zwei gleichschenklige Dreiecke als achsensymmetrische Figuren vorhanden.

(c)



Das untere Quadrat enthält 10 ganze und 4 halbe Dreiecke vom Typ MKI. Also ist die Fläche des ganzen Logos so groß wie 24 solcher Dreiecke.
Das Parallelogramm besteht aus 4 und das Trapez aus 3 solchen Dreiecken. Der V-Teil des Logos nimmt also $\frac{7}{24}$ der Gesamtfläche ein.

6. Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ durch $A(-1 \mid 1)$, $B(2 \mid 0)$, $C(3 \mid 3)$ und $D(0 \mid 4)$. Dieses Quadrat wird an einer Achse s so gespiegelt, dass das Spiegelbild B' des Punktes B die Koordinaten $(0 \mid 2)$ besitzt.

   (a) Zeichne das Quadrat$ABCD$ und den Punkt B' in ein Koordinatensystem.
   Platzbedarf: $-2 \leqq x \leqq 5$ und $-2 \leqq y \leqq 5$.

   (b) Konstruiere die Spiegelachse s mit dem Zirkel.
   Zeichne das Bildquadrat $A'B'C'D'$ ein.
   [Teilergebnis: $A'(1 \mid -1)$]

   (c) Es gilt $[AB] \cap [A'B'] = S$. Zeichne den Punkt S ein.
   Begründe: Der Punkt $S(0,5 \mid 0,5)$ liegt auf der Spiegelachse.

   (d) Es gilt: $\psi \approx 53,13°$.
   Berechne das Maß φ des Winkels BSB' auf zwei Stellen nach dem Komma.

   (e) Welchen besonderen Namen würdest du dem Viereck $SBCB'$ geben?
   Nenne zwei besondere Eigenschaften dieses Vierecks.

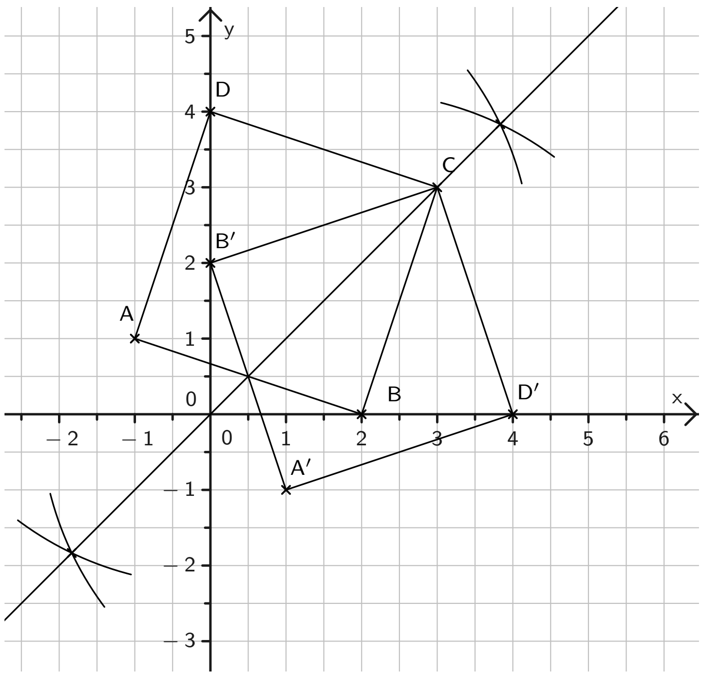
   (f) Begründe: Die Dreiecke $B'CD$ und $BD'C$ haben jeweils gleich lange Seiten.
   Wie nennt man Dreiecke mit dieser Eigenschaft?

Lösung:

(a) –

(b) –

(c)

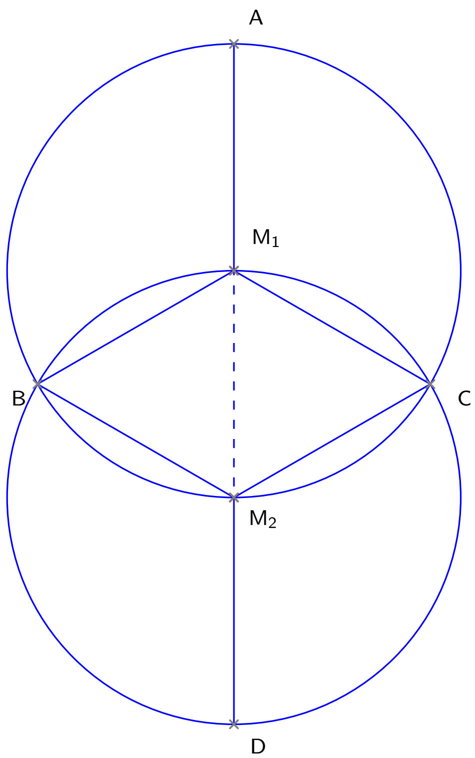


(d) $\varphi \approx 360° - 2 \cdot 90° - 53,13°; \quad \varphi \approx 126,86°$

(e) Es ist ein achsensymmetrischer Drachen.
   - $\overline{CB'} = \overline{CB}$
   - Es besitzt eine Symmetrieachse.

(f) Es gilt: $\overline{BC} = \overline{B'C}$ und $\overline{CD} = \overline{CD'}$
Z.B.: Jede Achsenspiegelung ist längentreu.
Solche Dreiecke nennt man gleichschenklig.

7.



(a) Zeichne die dargestellte Figur für $\overline{M_1M_2} = 3$ cm auf dein Blatt.

(b) Zeichne farbig alle Symmetrieachsen in deine Figur ein.

(c) Welchen besonderen Namen kannst du dem Viereck M_2CM_1B geben. Begründe deine Antwort.

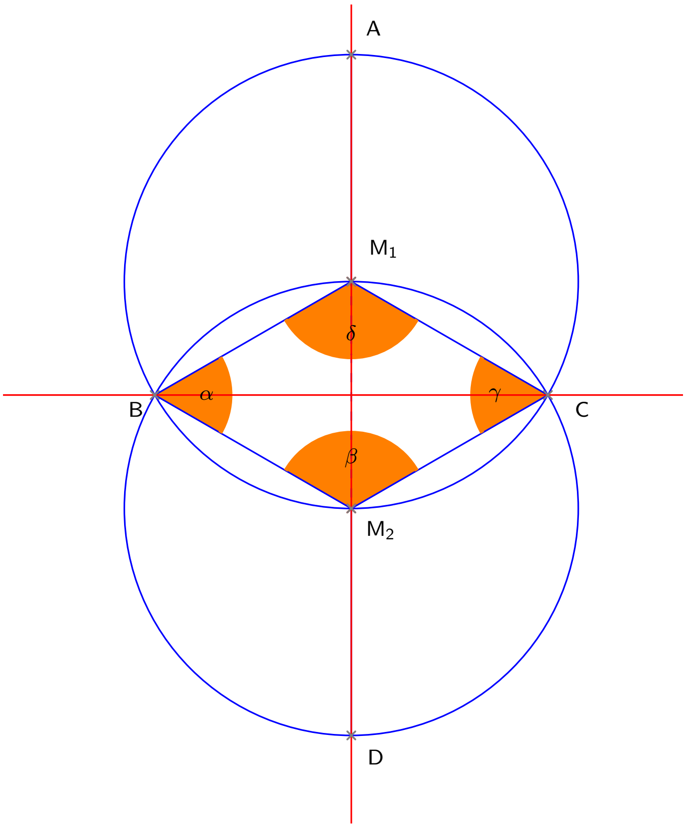
(d) Begründe ohne Messung: Das Maß eines Innenwinkels im Viereck M_2CM_1B beträgt 60°.

(e) Bestimme die Maße der restlichen Innenwinkel des Vierecks M_2CM_1B ohne Messung. Begründe jeweils deine Ergebnisse.

(f) Zeichne das Viereck $BDCA$ ein. Wie oft passt das Viereck M_2CM_1B in das Viereck $BDCA$? Begründe deine Antwort.

Lösung:

(a) –



(b) –

(c) Das Viereck ist eine Raute.

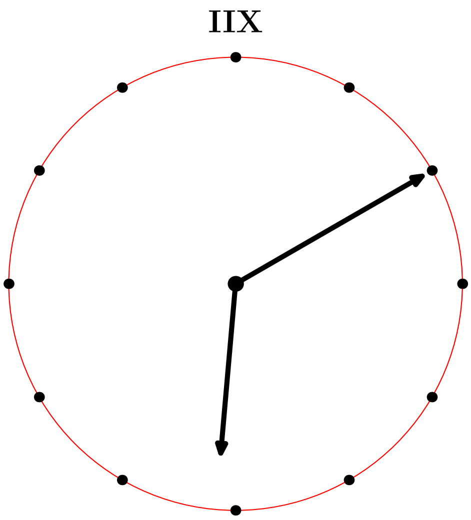
(d) Es gilt z.B. $\alpha = 60°$, denn das Dreieck BM_2M_1 ist gleichseitig.

(e) $\alpha = \gamma = 60°$ (Symmetrie) $\beta = \delta = (306° - 2 \cdot 60°) : 2 = 120°$

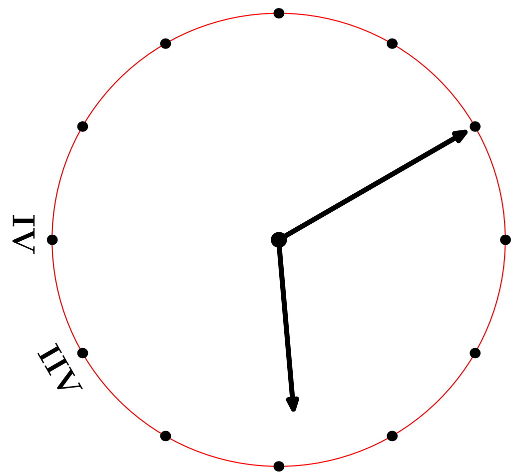
(f) Das Dreieck BCA ist in 3 kongruente Dreiecke zerlegt worden. Das Viereck BM_2CM_1 enthält zwei dieser Dreiecke, das Viereck $BDCA$ enthält 6 dieser Dreiecke. Also ist das große Viereck dreimal so groß wie das kleine.

8.

Figur a)



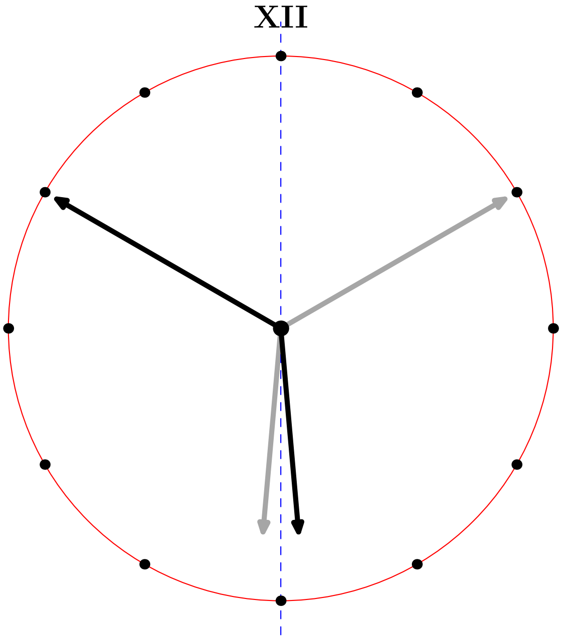
Figur b)



Wie spät ist es jeweils auf den beiden Uhren?

Lösung: **Figur a)**
Offenbar ist die römische Zahl **XII** und damit auch das Zifferblatt spiegelverkehrt dargestellt.

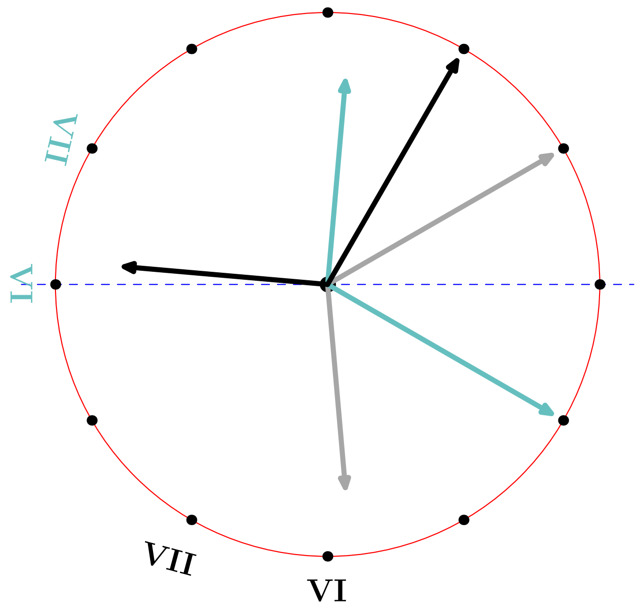
Figur a)



Jetzt ist es also 10 Minuten vor Sechs oder 17:50 Uhr oder 05:50 Uhr.

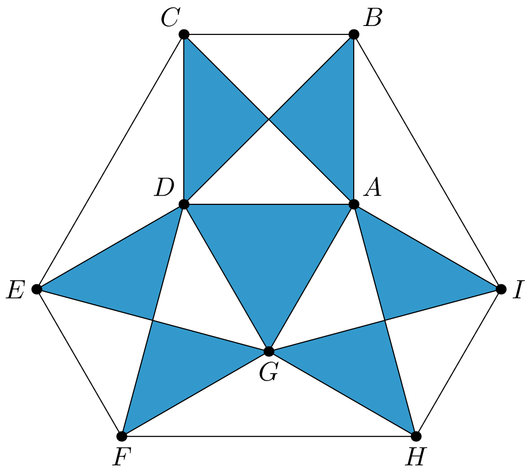
Figur b)
Am Rand links ist die römische Zahl **VII** und damit auch das Zifferblatt spiegelverkehrt (oben und unten sind vertauscht) dargestellt. Nach der entsprechenden Rückspiegelung steht die Uhr dann auf 12:20 Uhr (siehe türkis-gefärbte Zeiger).
Gleichzeitig ist dann die benachbarte Zahl eine **VI**. Normalerweise befindet sich die VI unten in der Mitte. Also ist dass Zifferblatt nicht nur spiegelverkehrt, sondern auch noch um $-90°$ gedreht dargestellt.

Figur b)



Jetzt ist es also 5 Minuten nach Neun oder 09:05 Uhr oder 21:05 Uhr.

9.



Das ist das Logo einer japanischen Firma, die Speichermedien herstellt.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AD} = 4\,\text{cm}$. Beginne mit dem gleichseitigen Dreieck im Zentrum.

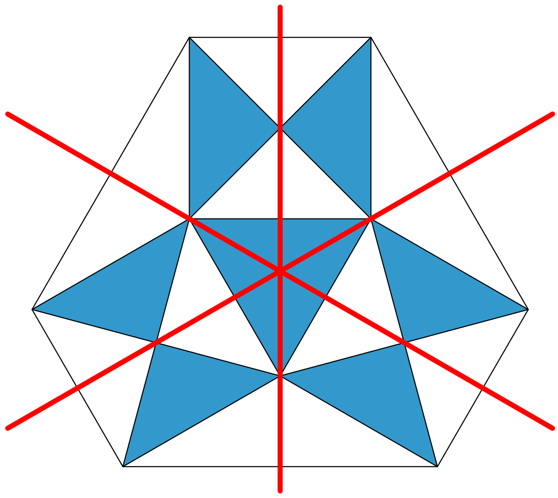
(b) Zeichne die Symmetrieachsen ein.

(c) Wie viele Dreiecke sind zusätzlich durch das Einzeichnen der Symmetrieachsen entstanden?

Lösung: (a) Errichte über jeder Seite des gleichseitigen Dreiecks im Zentrum das entsprechende Quadrat.

Zeichne dann jeweils die Verbindungsstrecke zwischen den äußeren Eckpunkten zweier benachbarter Quadrate.

(b)



(c) Im Inneren des gleichseitigen Dreiecks: **12** zusätzliche Dreiecke.

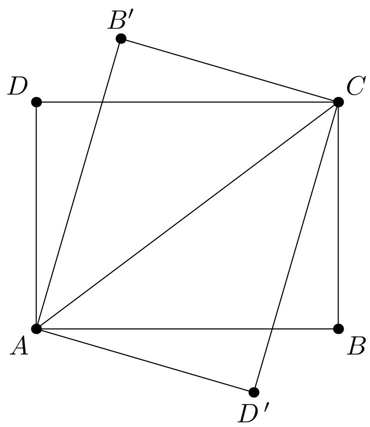
Gleichseitiges Dreieck im Zentrum und die drei benachbarten „weißen“ gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke: **24** zusätzliche Dreiecke.

In den drei „weißen“ gleichschenkligen Dreiecken außen: **6** zusätzliche Dreiecke.

In den drei Quadraten gibt es schließlich **6** zusätzliche Dreiecke. Nicht 12, denn die „weißen“ Paare gleichschenklig-rechtwinkliger Dreiecke, die am gleichseitigen Dreieck im Zentrum liegen, sind schon gezählt.

Es sind also **48** zusätzliche Dreiecke erzeugt worden.

10.



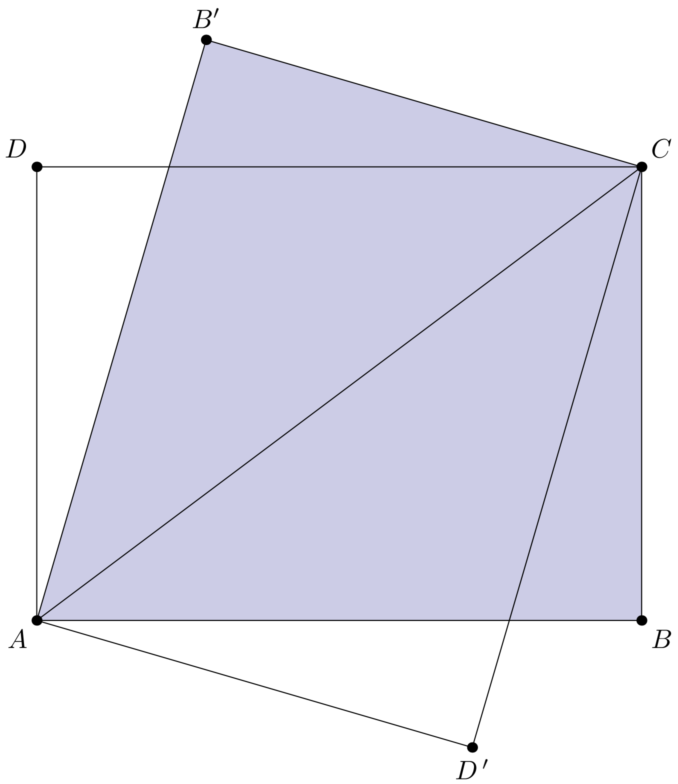
Die Punkte B und D des Rechtecks $ABCD$ wurden an dessen Diagonale $[AC]$ gespiegelt. Dadurch ist das Viereck $AD'CB'$ entstanden.

(a) Zeichne die Figur für $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6\,\text{cm}$.

(b) Begründe:

- Das Rechteck $ABCD$ und das Viereck $AD'CB'$ haben den gleichen Flächeninhalt.
- Das Viereck $ABCB'$ ist ein Drachenviereck.

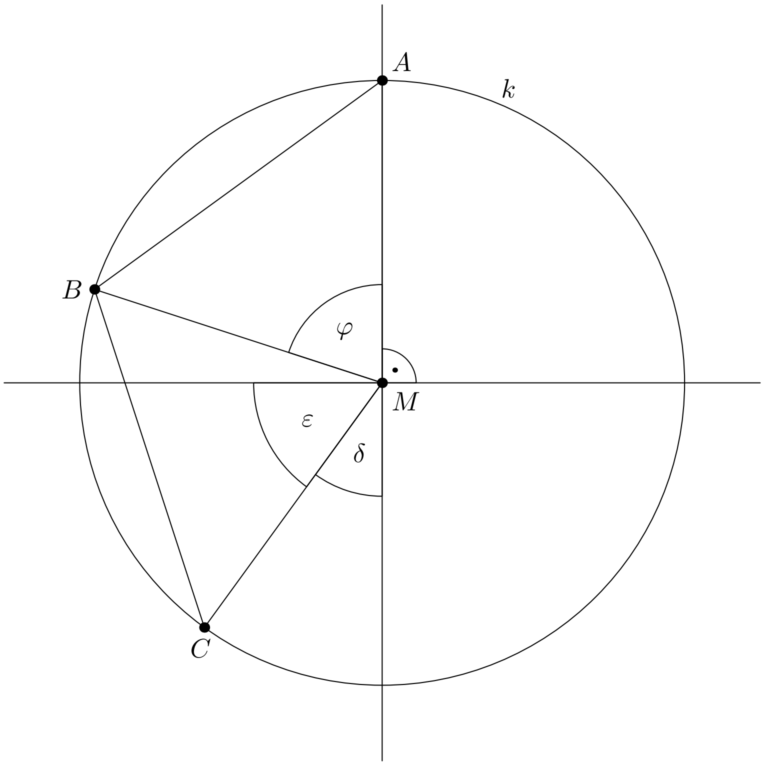
Lösung: (a)



(b)

- Durch die Spiegelung des Punktes B an $[AC]$ wird das Dreieck ABC auf das Dreieck ACB' abgebildet.
  Durch die Spiegelung des Punktes D an $[AC]$ wird das Dreieck ACD auf das Dreieck $AD'C$ abgebildet.
  Jede Achsenspiegelung ist flächentreu, also haben die zwei Vierecke $ABCD$ und $AD'CB'$ den gleichen Flächeninhalt.
- Jede Achsenspiegelung ist längentreu, also gilt:
  $\overline{AB} = \overline{AB'}$ und $\overline{CB} = \overline{CB'}$. Also ist das Viereck $ABCB'$ ein Drachenviereck.

11.



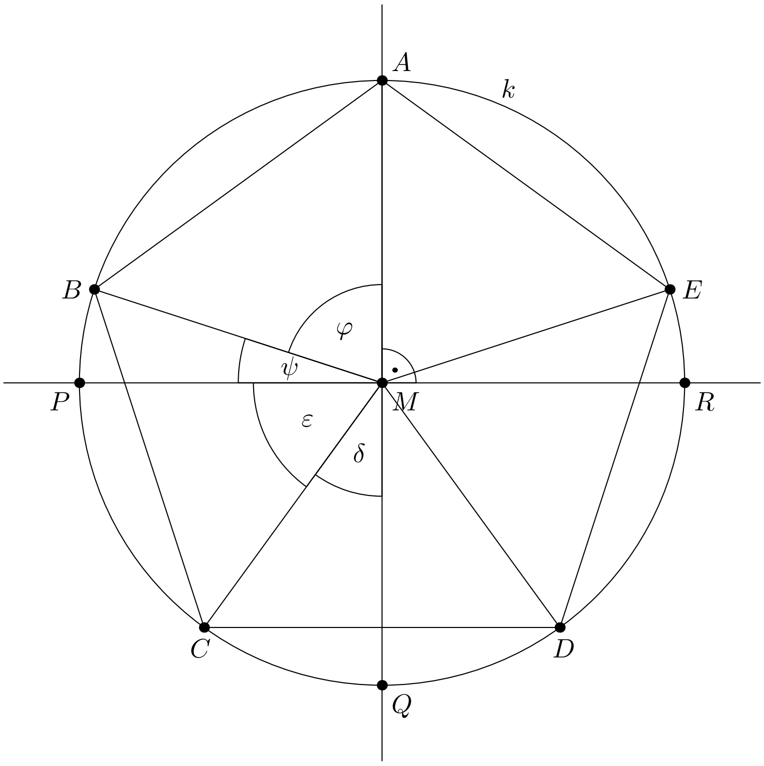
Die Eckpunkte des regelmäßigen Fünfecks $ABCDE$ liegen alle auf der Kreislinie k mit dem Mittelpunkt M.

(a) Ergänze die Figur entsprechend.

(b) Begründe:

- $\varphi = 72°$
- $\varepsilon = 54°$
- $\delta = 36°$.

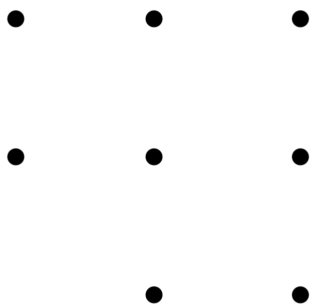
Lösung: (a)



Du kannst die fehlenden Eckunkte D und E z.B. durch Spiegelung der Punkte C und B an der Symmetrieachse AQ des Fünfecks $ABCDE$ erzeugen.

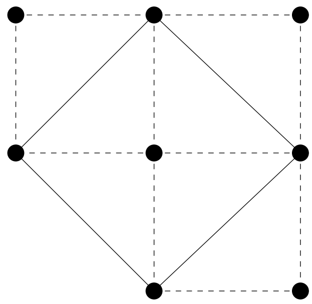
(b)
- Der Mittelpunktswinkel φ tritt in diesem regelmäßigen Fünfeck 5-mal auf:
  $\Rightarrow \quad \varphi = 360° : 5 = 72°$.
- Es gilt: $\psi = 90° - \varphi = 90° - 72° = 18°$.
  Der Winkel BMC besitzt ebenfalls das Maß 72°.
  $\Rightarrow \quad \varepsilon = 72° - \psi = 72° - 18° = 54°$.
- $\delta = 90° - \varepsilon = 90° - 54° = 36°$.

12.



Wie viele Quadrate kannst du erzeugen, wenn du Punkte im Gitter durch Strecken verbindest?
Aus: Känguru der Mathematik 2008, Gruppe Kadett, Österreich 31.03.2008

Lösung:



Die acht Punkte scheinen nur drei Quadrate herzugeben, aber die vier schrägen Strecken liefern ein weiteres Quadrat. Also sind es insgesamt vier Quadrate, die du so erzeugen kannst.
Das große Quadrat hat den gleichen Flächeninhalt wie zwei kleine Quadrate.