Zahlbereichserweiterungen und Strukturen

1. Untersuchen sie, ob die komplexen Zahlen ohne Null ($\mathbb{C} \setminus \{(0|0)\}$) mit der Verknüpfung
$$z_1 \circ z_2 = (a_1|b_1) \circ (a_2|b_2) = (a_1 \cdot a_2|b_1 \cdot b_2)$$
eine Gruppe bilden.

Lösung: $(1|1)$ ist offensichtlich das neutrale Element der Verknüpfung. Es haben jedoch nicht alle Zahlen ein inverses Element:
Annahme: $(x|y)$ ist das inverse Element zu $(1|0) \Rightarrow$
$(1|0) \circ (x|y) = (x|0) \neq (1|1)$ für alle x und y.

2. Untersuchen sie, ob die komplexen Zahlen (ohne 0) mit der Verknüpfung
$$z_1 \circ z_2 = (a_1|b_1) \circ (a_2|b_2) = (a_1b_2 + a_2b_1|a_1a_2 + b_1b_2)$$
eine Gruppe bilden.

Lösung: Abgeschlossenheit der Menge bezüglich der Verknüpfung ist klar.
Das Kommutativgesetz gilt:
$z_2 \circ z_1 = (a_2|b_2) \circ (a_1|b_1) = (a_2b_1 + a_1b_2|a_2a_1 + b_2b_1) = z_1 \circ z_2$
Das Assoziativgesetz gilt:
$(z_1 \circ z_2) \circ z_3 = (a_1b_2b_3 + a_1a_2a_3 + b_1a_2b_3 + b_1b_2a_3|(a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3 + b_1b_2b_3)$
$(0|1)$ ist das neutrale Element der Verknüpfung.
$\left(-\frac{a_1}{b_1^2 - a_1^2}\middle|\frac{b_1}{b_1^2 - a_1^2}\right)$ wäre das inverse Element von $z_1 = (a_1|b_1)$, es existiert jedoch nur für $a_1^2 \neq b_1^2$. Die Menge der Komplexen Zahlen ohne 0 ist bezüglich der angegebenen Verknüpfung keine Gruppe.