

Anwendungen in der Physik

1. In der Elektrotechnik werden Widerstände von Spulen und Kondensatoren durch komplexe Zahlen ausgedrückt, um der Phasenverschiebung von Strom und Spannung in diesen Bauteilen Rechnung zu tragen.

Der Widerstand eines Kondensators mit der Kapazität C berechnet sich nach der Formel

$$R_C = \frac{1}{i\omega C}.$$

Der Widerstand einer Spule mit der Induktivität L berechnet sich nach der Formel

$$R_L = i\omega L.$$

$\omega = 2\pi f$, wobei f die Frequenz der angelegten Spannung ist.

Werden ohmsche Widerstände, Spulen und Kondensatoren in Serie geschaltet, lässt sich der Ersatzwiderstand durch Addition der Einzelwiderstände berechnen. Der Betrag des Ersatzwiderstandes gibt das Verhältnis von Spannung und Stromstärke im Kreis an ($|R_{\text{ges}}| = \frac{U}{I}$).

Bei den folgenden Aufgaben kann ohne Einheiten gerechnet werden.

Berechnen sie den Ersatzwiderstand einer Serienschaltung aus

- (a) einem ohmschen Widerstand mit $5\ \Omega$ und einer Spule mit der Induktivität $L = 0,01\ \text{H}$ bei einer Frequenz von $50\ \text{Hz}$.
- (b) einem ohmschen Widerstand mit $5\ \Omega$ und einem Kondensator mit der Kapazität $C = 0,001\ \text{F}$ bei einer Frequenz von $50\ \text{Hz}$.
- (c) einem ohmschen Widerstand mit $5\ \Omega$, einem Kondensator mit der Kapazität $C = 0,001\ \text{F}$ und einer Spule mit der Induktivität $L = 0,01\ \text{H}$ bei einer Frequenz von $50\ \text{Hz}$.

Lösung: (a) $R_{\text{ges}} = 5 + i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0,01 = 5 + \pi i$, $|R_{\text{ges}}| \approx 5,9$

(b) $R_{\text{ges}} = 5 + \frac{1}{i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0,001} = 5 - \frac{10}{\pi}i$, $|R_{\text{ges}}| \approx 5,9$

(c) $R_{\text{ges}} = 5 + \frac{1}{i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0,001} + i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0,01 = 5 + \left(\pi - \frac{10}{\pi}\right)i$, $|R_{\text{ges}}| \approx 5,0$

2. Berechnen sie für folgende Schaltungen allgemein den Ersatzwiderstand und diskutieren sie die Abhängigkeit des Ersatzwiderstands von der Kreisfrequenz ω .

- (a) Serienschaltung eines ohmschen Widerstands und einer Spule.
- (b) Serienschaltung eines ohmschen Widerstands und eines Kondensators.
- (c) Serienschaltung eines ohmschen Widerstands, einer Spule und eines Kondensators.

Lösung: (a) $R_{\text{ges}} = R + i\omega L \implies |R_{\text{ges}}| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$.

Mit steigendem ω nimmt der Widerstand der Schaltung zu. $\lim_{\omega \rightarrow 0} R_{\text{ges}} = R$ und

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} R_{\text{ges}} = \infty.$$

$$(b) R_{\text{ges}} = R + \frac{1}{i\omega C} \implies |R_{\text{ges}}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}.$$

Mit steigendem ω nimmt der Widerstand der Schaltung ab. $\lim_{\omega \rightarrow 0} R_{\text{ges}} = \infty$ und $\lim_{\omega \rightarrow \infty} R_{\text{ges}} = R$.

$$(c) R_{\text{ges}} = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + (\omega L - \frac{1}{\omega C})i \implies$$

$$|R_{\text{ges}}| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}.$$

Der Widerstand hat für $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ein Minimum. Der Widerstand hat dann den Wert R .

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} R_{\text{ges}} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} R_{\text{ges}} = R.$$

3. Werden ohmsche Widerstände, Spulen und Kondensatoren parallel geschaltet, lässt sich der Kehrwert des Ersatzwiderstandes durch Addition der Kehrwerte der Einzelwiderstände berechnen. Der Betrag des Ersatzwiderstandes gibt das Verhältnis von Spannung und Stromstärke im Kreis an ($|R_{\text{ges}}| = \frac{U}{I}$).

Bei den folgenden Aufgaben kann ohne Einheiten gerechnet werden.

Berechnen sie den Ersatzwiderstand einer Parallelschaltung aus

- einem ohmschen Widerstand mit 5Ω und einer Spule mit der Induktivität $L = 0,01 \text{ H}$ bei einer Frequenz von 50 Hz .
- einem ohmschen Widerstand mit 5Ω und einem Kondensator mit der Kapazität $C = 0,001 \text{ F}$ bei einer Frequenz von 50 Hz .
- einem Kondensator mit der Kapazität $C = 0,001 \text{ F}$ und einer Spule mit der Induktivität $L = 0,01 \text{ H}$ bei einer Frequenz von 50 Hz .

Lösung: (a) $\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0,01} = \frac{1}{5} + \frac{1}{\pi i} \implies R_{\text{ges}} = \frac{5\pi^2 + 25\pi i}{\pi^2 + 25}, |R_{\text{ges}}| \approx 2,7$

(b) $\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{5} + i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0,001 = \frac{1}{5} + 0,1\pi i \implies R_{\text{ges}} = \frac{\frac{1}{5} - 0,1\pi i}{0,04 + 0,01\pi^2},$

$$|R_{\text{ges}}| \approx 2,7$$

(c) $\frac{1}{R_{\text{ges}}} = i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0,001 + \frac{1}{i \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0,01} = \left(\frac{\pi}{10} - \frac{1}{\pi}\right) i, |R_{\text{ges}}| \approx 241$

4. Berechnen sie für folgende Schaltungen allgemein den Ersatzwiderstand und diskutieren sie die Abhängigkeit des Ersatzwiderstands von der Kreisfrequenz ω .

- Parallelschaltung eines ohmschen Widerstands und einer Spule.
- Parallelschaltung eines ohmschen Widerstands und eines Kondensators.
- Parallelschaltung einer Spule und eines Kondensators.

Lösung: (a) $\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} \implies |R_{\text{ges}}| = \frac{\omega LR}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$

Mit steigendem ω nimmt der Widerstand der Schaltung zu.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} R_{\text{ges}} = 0 \text{ und } \lim_{\omega \rightarrow \infty} R_{\text{ges}} = R.$$

(b) $\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R} + i\omega C = \frac{1}{R}(1 + RC\omega i) \implies$

$$R_{\text{ges}} = \frac{R}{1 + RC\omega i} \implies |R_{\text{ges}}| = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}.$$

Mit steigendem ω nimmt der Widerstand der Schaltung ab.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} R_{\text{ges}} = R \text{ und } \lim_{\omega \rightarrow \infty} R_{\text{ges}} = 0.$$

(c) $\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{i\omega L} + i\omega C = (\omega C - \frac{1}{\omega L})i \implies |R_{\text{ges}}| = \frac{\omega L}{|\omega^2 CL - 1|}.$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} R_{\text{ges}} = 0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} R_{\text{ges}} \text{ und } \lim_{\omega \rightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}}} R_{\text{ges}} = \infty.$$