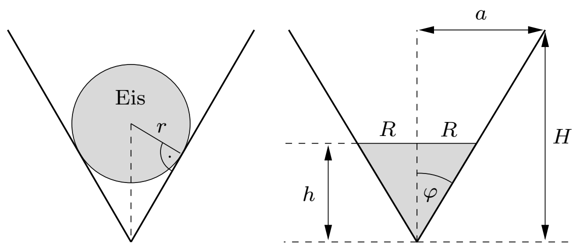
Zylinder, Kegel und Kugel - Volumen und Oberfläche

1. Eine Kugel Speiseeis (Radius r) liegt in einem kegelförmigen Sektglas der Höhe H und der Weite $2a$ (siehe Abbildung). Das Eis schmilzt in der Sonne ohne Volumenänderung und bildet im Glas einen kleinen See der Tiefe h.



   (a) Drücken Sie h durch r und den Winkel φ (siehe Abb.) aus.

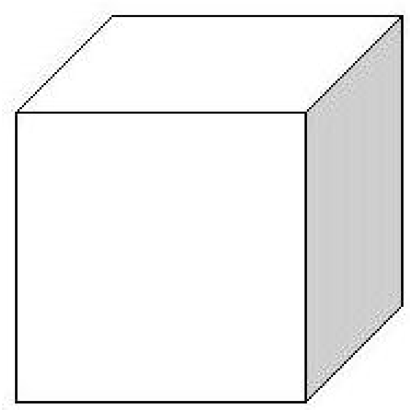
   (b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen a und H, wenn $h = 2r$ gilt?

Lösung: (a) $\frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{1}{3} R^2 \pi h = \frac{\pi}{3} h^3 \tan^2 \varphi \quad \Longrightarrow \quad h = r \sqrt[3]{\frac{4}{\tan^2 \varphi}}$

(b) $h = 2r \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[3]{\frac{4}{\tan^2 \varphi}} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{4}{\tan^2 \varphi} = 8 \quad \Longrightarrow \quad \tan \varphi = \frac{a}{H} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$H = a\sqrt{2}$$

2. **Maximales im Würfel**



   Setze in den Würfel

   (a) eine Kugel,

   (b) einen Kegel,

   (c) einen Zylinder

   (d) eine Pyramide

   mit maximalem Volumen. Vergleiche die Volumina und Oberflächeninhalte der Körper mit dem Volumen und dem Oberflächeninhalt des Würfels.

Lösung:

3. **Heißluftballon**

Viel heiße Luft bringt einen mit Sicherheit nach oben. Niemand weiß das besser als Ian Ashpole. Der 43-Jährige stand in England auf der Spitze eines Heißluftballons. Die Luft-Nummer in 1500 Meter Höhe war noch der ungefährlichste Teil der Aktion. Kritischer war der Start: Nur durch ein Seil gesichert, musste sich Ashpole auf dem sich füllenden Ballon halten. Bei der Landung strömte dann die heiße Luft aus einem Ventil direkt neben seinen Beinen vorbei. Doch außer leichten Verbrennungen trug der Ballonfahrer keine Verletzung davon.

(a) Wie viel Luft sind wohl in diesem Heißluftballon?

(b) Wie viel Stoff benötigte man zur Herstellung dieses Ballons?

Quelle: Herget, W. et al.: Produktive Aufgaben

Lösung: Je mehr man mathematisch vorgebildet ist, umso mehr mathematisches Instrumentarium wird man bei dieser Aufgabe wie selbstverständlich einsetzen - und zwar ohne darüber nachzudenken, ob diese hoch genauen Instrumente wirklich genauere Ergebnisse liefern.

So könnte man hier den Heißluftballon sehr genau modellieren, etwa durch eine obere Halbkugel und einen zylindrischen Kegel. In der Analysis bietet sich die Interpretation als Rotationskörper an, wobei der Fantasie für die zugrunde gelegte Kurve (fast) keine Grenzen gesetzt sind - hoffentlich ist das Integral dann elementar lösbar; und wenn nicht, könnte man es schließlich noch numerisch lösen. Aber es geht (auch) hier einfacher: In jedem Fall ist man darauf angewiesen, die Maße des Ballons aus dem Foto zu entnehmen und in die Wirklichkeit hochzurechnen (Proportionen/Verhältnis/Dreisatz). Einziger Bezugspunkt dafür ist wohl der Mann auf der Spitze des Ballons. Daraus ergibt sich für die Höhe des Ballons (ohne Gondel) und ebenso für seine Breite etwa $20 - 25\,\mathrm{m}$. Bei dieser unvermeidbaren Unschärfe sind solch feinsinnige Modellierungen wie die oben aufgeführten schlichtweg „oversized“.
Ein ganz einfaches Modell leistet schon das Gewünschte: Etwa ein Würfel, den wir uns „nach Augenmaß“ so vorstellen, dass er an den Ecken über den Ballon herausragt, seine Seitenfläche aber teilweise in den Ballon „hineintauchen“ - oder eine entsprechend dimensionierte Kugel als geeignete „Ersatz-Form“ für den Ballon.
Auf diese Weise kann man als gute Näherung einen Würfel mit einer Kantenlänge von 16m wählen oder eine Kugel mit einem Durchmesser von etwa $20\,\mathrm{m}$. Das Volumen des Würfels ist besonders einfach: $V = 4096\,\mathrm{m}^3$ und für die Kugel erhalten wir
$V = \frac{4\pi}{3} \cdot 10 \approx 4180\,\mathrm{m}^3$.
Beide Modelle liefern für das Volumen also rund $4000\,\mathrm{m}^3$, das sind 4 Millionen Liter, und für die Oberfläche ungefähr $1500\,\mathrm{m}^2$ - mit wenig Rechnung, aber geschickten, der Situation angepassten Überlegungen!

4. **Rotierende Figuren**

   Die äußeren Quadrate in der unten stehenden Abbildung haben jeweils die Seitenlänge a.

   (a) Bestimme die prozentualen Anteile der Teilflächen.

   (b) Die Figur rotiert - sofern vorhanden - um eine frei wählbare Symmetrieachse.

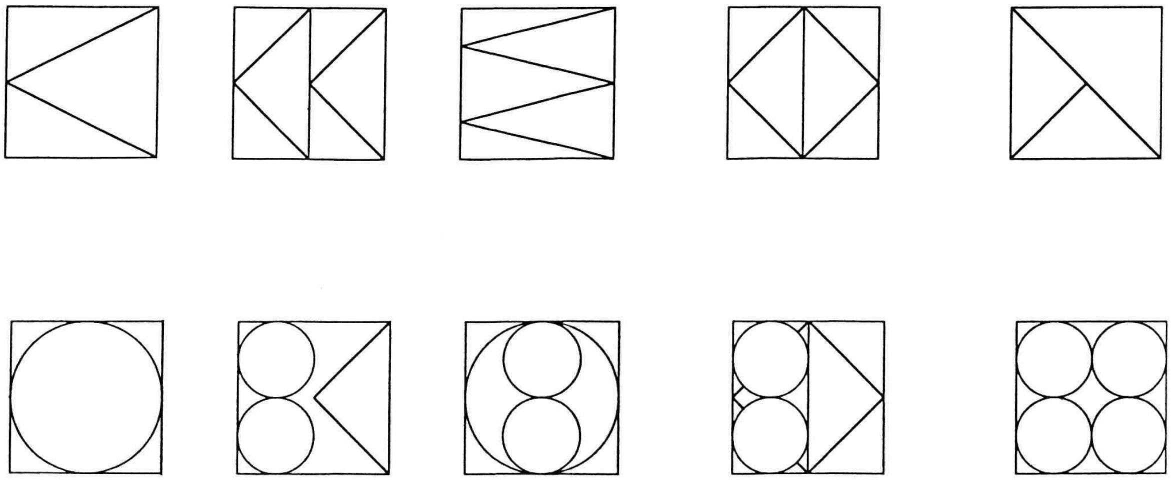
      i. Bestimme das Verhältnis der Volumina der entstehenden Körper. Die Bezugsgröße ist der durch das rotierende Quadrat entstehende Körper.

      ii. Bestimme das Verhältnis der Oberflächeninhalte der entstehenden Körper. Wähle als Bezugsgröße:

         A. den Flächeninhalt des Quadrates;

         B. den Oberflächeninhalt des durch das rotierende Quadrat entstehenden Körpers.

   (c) Finde selbst weitere geeignete Figuren und untersuche sie.



Lösung:

5. **Aufgaben zur Anwendung**

   Ein Turmdach hat die Form eines Kegels mit dem Grundkreisdurchmesser $d = 4,8\,\text{m}$ und der Höhe $h = 6\,\text{m}$.

   (a) Berechne den umbauten Raum

   (b) Wie teuer ist die Belegung mit Dachplatten, wenn für $1\,\text{m}^2$ Dachbelegung 285 € berechnet werden?

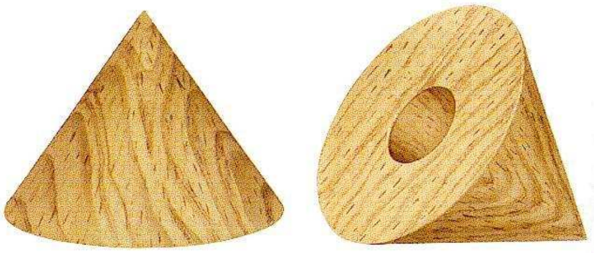
Lösung:

6. **Aufgaben zur Anwendung**

   Ein Holzkegel (Buche: $0,7\frac{g}{cm^3}$) hat ein Gewicht von $665\,\text{g}$ und eine Höhe von $7,5\,\text{cm}$.

   (a) Berechne den Radius des Kegels.

   (b) Welchen Durchmesser muss eine $4\,\text{cm}$ tiefe Bohrung haben, damit das Gewicht des Kegels auf $650\,\text{g}$ verringert wird?



Lösung:

7. **Aufgaben zur Anwendung**

   Über ein Förderband werden $2\,\mathrm{m}^3$ Sand wie nebenstehend abgebildet aufgeschüttet. Welche Bodenfläche bedeckt der Sandhaufen bei einer Höhe von $0,8\,\mathrm{m}$?

Lösung:

8. **Aufgaben zur Anwendung**

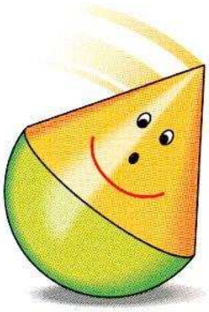
   Ein $11\,\mathrm{cm}$ hohes Stehaufmännchen besteht aus einer Halbkugel von $4\,\mathrm{cm}$ Radius und einem aufgesetzten Kegel. Beide Teile sind aus dem gleichen Material.

   (a) Wie groß ist der Rauminhalt?

   (b) Wie viel Prozent des Rauminhaltes befinden sich in der Ruhelage unterhalb des Kugelmittelpunktes?

   (c) Damit ein Stehaufmännchen funktioniert, darf der aufgesetzte Kegel höchstens so schwer sein wie die Halbkugel. Ist das hier der Fall?

   (d) Wie hoch darf bei einem Stehaufmännchen der aufgesetzte Kegel höchstens sein, damit das Stehaufmännchen funktioniert?



Lösung:

9. Taucht man einen Strohhalm (Durchmesser 3 mm) in Seifenlauge und zieht ihn wieder heraus, bleibt in ihm auf einer Länge von 7 mm Seifenlauge zurück. Daraus bläst man eine Seifenblase mit einem Durchmesser von 8 cm. Wie dick ist die Haut der Seifenblase?

Lösung: $V_{Zylinder} = 1,5^2 \cdot \pi \cdot 7\text{mm}^3 \approx 50\text{mm}^3$
$O_{Seifenblase} = 4 \cdot \pi \cdot 40^2\text{mm}^2 \approx 20000\text{mm}^2$
$d_{Seifenblasenhaut} = V_{Zylinder} : O_{Seifenblase} = 0,0025\text{mm}$

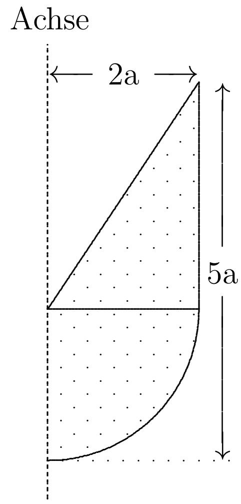
10. (a) Eine Glaskugel mit 12 cm Durchmesser wird in einen möglichst kleinen zylinderförmigen Karton verpackt. Wieviele Prozent des zur Verfügung stehenden Raumes werden verschenkt?
    (b) Der Glasbläser hat die Kugel aus einem 3 cm dicken Tropfen Glas geblasen. Wie dick ist die Glaswand der Kugel?

Lösung: $\frac{2\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi r^3} = 33\%$
$\frac{4\pi}{3} r_0^3 \approx 4\pi R^2 d$ ergibt $d \approx 0{,}3$ mm; eine exakte Rechnung liefert dasselbe Ergebnis.

11. In einem Messzylinder mit dem inneren Radius $R = 1{,}2$ cm steht eine Flüssigkeit 3 cm hoch. Diese Flüssigkeit wird in ein Reagenzglas mit dem inneren Radius $r = 0{,}6$ cm gegossen. Wie hoch (in cm) steht die Flüssigkeit im Reagenzglas vom untersten Punkt aus gemessen?
Hinweis: Betrachten Sie das Reagenzglas als Zylinder mit angesetzter Halbkugel!

Lösung: 12,2 cm

12. Berechnen Sie die Gesamtoberfläche des Rotationskörpers in Abhängigkeit von a und π!



Lösung: $O = a^2\pi(20 + 2\sqrt{13})$

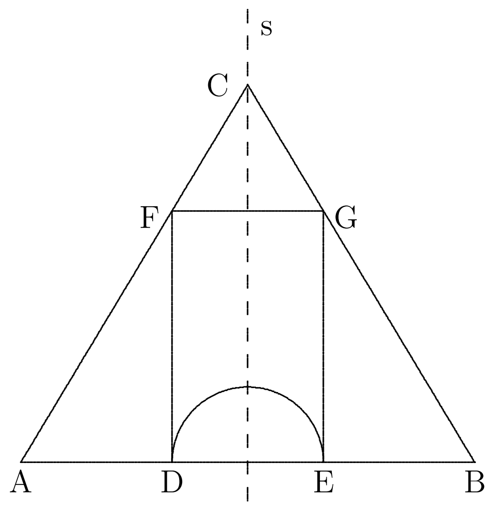
13. Eine Kugel wird in einem möglichst kleinen zylinderförmigen Karton verpackt. Wieviel Prozent des Zylindervolumens bleiben frei?

Lösung: 33%

14. Einer Kugel vom Radius r ist ein Zylinder mit der Höhe $h = 1{,}5r$ einbeschrieben. Wie verhalten sich die Rauminhalte der beiden Körper?

Lösung: $V_Z : V_K = 63 : 128$

15. Aus dem gleichseitigen Dreieck ABC der Seitenlänge $2a$ werde die Figur $DEFG$ mit dem Halbkreisbogen DE herausgestanzt. Das restliche Flächenstück rotiere um die Achse s. Ferner gilt $\overline{CG} = \frac{2}{3}a$.
Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers in Abhängigkeit von a und stellen Sie das Ergebnis in möglichst einfacher Form dar!

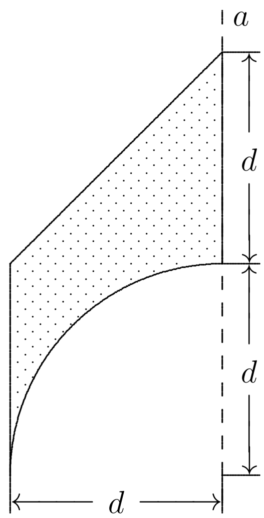


Lösung: Strahlensatz!
$V_{Rot} = \frac{1}{81}a^3\pi \cdot \left(21\sqrt{3}+2\right)$

16. Durch Rotation der schraffierten Fläche um die Achse a entsteht ein Rotationskörper (runder Turm mit halbkugelförmigem Innenraum).

    (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Dachfläche in Abhängigkeit von d.

    (b) Berechnen Sie den Rauminhalt des Rotationskörpers in Abhängigkeit von d. Das Ergebnis soll möglichst weit vereinfacht werden.



Lösung: $A = \sqrt{2}\pi d^2$ und $V = \frac{2}{3}\pi d^3$

17. Tennisbälle werden in Sportgeschäften häufig in zylindrischen Blechdosen angeboten. dabei werden 4 Bälle übereinander in der Dose gestapelt. Wie groß ist der in der Dose verbleibende Hohlraum, wenn man von einem Balldurchmesser von 7cm ausgeht. Um welchen Anteil des Dosenvolumens handelt es sich dabei?

Lösung: Anteil $\frac{1}{3}$, Volumen $359cm^3$

18. Ein Hohlzylinder (Höhe $h = 10\,\mathrm{cm}$; Außendurchmesser $d = 3\,\mathrm{cm}$; Wanddicke $a = 2\,\mathrm{mm}$) aus Blei wird geschmolzen und
a) in eine Vollkugel
b) in eine Hohlkugel mit gleicher Wanddicke a
umgeformt. Berechne jeweils den Außendurchmesser der Kugel!

Lösung: a) $d_K = 3{,}2\,\mathrm{cm}$; b) $d_K = 5{,}4\,\mathrm{cm}$

19. Einer Kugel vom Radius R ist ein Zylinder einbeschrieben, dessen Mantelfläche sich zur Kugeloberfläche wie $1:2$ verhält. (Schnittskizze!)

    (a) Zeigen Sie, dass diese Bedingung nur erfüllt ist, wenn der Zylinderradius halb so groß ist wie die Zylinderhöhe!

    (b) Welchen prozentualen Anteil des Kugelvolumens macht das Zylindervolumen aus?

Lösung: 53,0%

20. Einem geraden Kreiskegel vom Grundkreisradius r, dessen Axialschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, lassen sich eine Kugel vom Radius R_e einbeschreiben und eine Kugel vom Radius R_u umbeschreiben.
    (a) Zeichnen Sie einen gemeinsamen Axialschnitt der drei Körper für $r = 3\,\text{cm}$!
    (b) Stellen Sie allgemein die Radien R_e und R_u der beiden Kugeln in Abhängigkeit von r dar!
    (Teilergebnis: $R_e = \frac{r}{3}\sqrt{3}$)
    (c) Wie verhalten sich die Volumina von umbeschriebener Kugel, Kegel und einbeschriebener Kugel?

Lösung: (b) $R_u = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$ (c) $V_u : V_{Ke} : V_e = 32 : 9 : 4$

21. Ein auf der Spitze stehender gleichseitiger Hohlkegel (d.h. ein Axialschnitt des Kegels ergibt ein gleichseitiges Dreieck) ist teilweise mit Wasser gefüllt. Wirft man in den Kegel eine Kugel mit dem Radius r, so wird diese gerade ganz von Wasser bedeckt und der Kegel ganz mit Wasser gefüllt. Berechnen Sie die Tiefe des Wassers vor und nach dem Hineinwerfen der Kugel!

Lösung: vorher: $r\sqrt[3]{15}$; nachher: $3r$

22. In einen auf der Spitze stehenden gleichseitigen Hohlkegel (d.h. ein Axialschnitt des Kegels ergibt ein gleichseitiges Dreieck) wird eine Kugel vom Radius r geworfen. Die Kugel taucht dabei gerade vollständig in den Kegel ein. Wie verhalten sich die Oberflächeninhalte von Kegel und Kugel?

Lösung: $O_{Ke} : O_{Ku} = 9 : 4$

23. Einer Kugel vom Radius r wird ein gerader Kegel der Höhe $4r$ umbeschrieben.
    (a) Berechnen Sie den Öffnungswinkel α des Kegels (Planfigur).
    (b) Wie groß ist der Radius des Berührkreises?
    (c) Welches Verhältnis bilden Mantelfläche und Kugeloberfläche?

Lösung: (a) $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$
(b) $\varrho = \sqrt{8}\sin\frac{\alpha}{2}$
(c) $3 : 2$

24.