Pfadregeln

1. Lisa fährt drei Tage in die Berge zu einem Kurzurlaub. Die Wetterprognose sieht folgende Regenwahrscheinlichkeiten für die Urlaubstage vor:

Wochentag:	Mo	Di	Mi
Regenwahrscheinlichkeit:	10 %	25 %	30 %

   (a) Verwende die Symbole r für „Regentag“ und n für „Nichtregentag“ und erstelle ein Baumdiagramm des dreistufigen Zufallsexperimets „Urlaubswetter“. Welche Mächtigkeit hat der zum Experiment gehörige Ergebnisraum Ω?

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_0 bleibt es den ganzen Urlaub über trocken?

   (c) Schreibe das Ereignis E_1 : „höchstens ein Regentag“ als Menge hin und berechne seine Wahrscheinlichkeit.

   (d) Charakterisiere das Gegenereignis E_2 von E_1 in Worten und berechne dann $P(E_2)$.

Lösung:

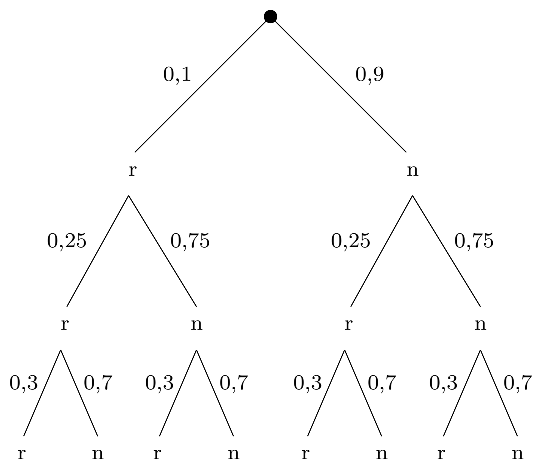
(a) $|\Omega| = 8$

(b) $p_0 = 0{,}9 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}7 = 47{,}25\,\%$

(c) $E_1 = \{\text{nnn,rnn,nrn,nnr}\}$

$$\begin{aligned} P(E_1) &= p_0 + 0{,}1 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}7 + \\ &\quad + 0{,}9 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}7 + \\ &\quad + 0{,}9 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}3 = \\ &= 0{,}4725 + 0{,}0525 + \\ &\quad + 0{,}1575 + 0{,}2025 = 88{,}5\,\% \end{aligned}$$

(d) E_2 : „mindestens 2 Regentage“
$P(E_2) = 1 - P(E_1) = 11{,}5\,\%$



2. Alfons kauft sich einen klapprigen Gebrauchtwagen, der im Mittel bei zehn Fahrten über je 100 km genau einmal mindestens eine Panne hat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Alfons auf der 1000 km langen Fahrt von Garmisch nach Flensburg mindestens eine Panne? Erläutere deine Ansätze!

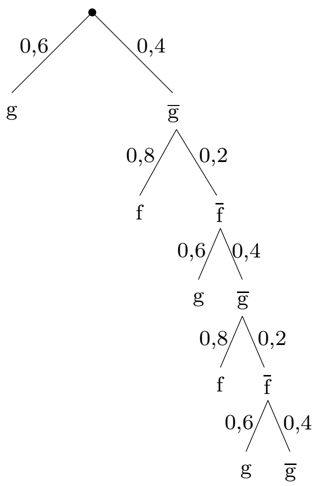
Lösung: Die „Pannenwahrscheinlichkeit pro 100 km“ ist $p = 0{,}1$, die Wahrscheinlichkeit, auf einer 100 km langen Strecke keine Panne zu haben, ist also $\overline{p} = 1 - p = 0{,}9$.
E : „keine Panne auf 1000 km“, $\overline{E}$: „mindestens eine Panne auf 1000 km“
$P(E) = \overline{p}^{10} = 0{,}9^{10} = 0{,}34868, \quad P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 0,6513 = 65{,}13\,\%$

3. Der Girgl und der Fex sind leidenschaftliche Wilderer. Der Girgl trifft eine Gams mit der Wahrscheinlichkeit 60 %, der Fex mit 80 %. Die beiden Freunde gehen gemeinsam auf die Jagd, der Girgl hat drei, der Fex zwei Patronen dabei. Als sie einen Gamsbock sehen, beginnen sie abwechselnd auf ihn zu schießen, der Girgl beginnt. Nach einem Treffer ist die Gams tot und das Schießen beendet.

(a) Erstelle ein Baumdiagramm für das Zufallsexperiment „Gamsschießen“. Verwende die Symbole g, f, $\overline{g}$ und $\overline{f}$ für das Treffen bzw. Nichttreffen des jeweiligen Schützen und schreibe den kompletten Ergebnisraum Ω hin. Gib auch die Mächtigkeit von Ω an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_0 überlebt die Gams?

(b) Schreibe das Ereignis E: „Die Gams wird vom Fex erlegt.“ in der Mengenschreibweise hin und berechne seine Wahrscheinlichkeit. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_{g} wird die Gams dann vom Girgl geschossen?

Lösung:



(a) $\Omega = \{g, \overline{g}f, \overline{g}\overline{f}g, \overline{g}\overline{f}\overline{g}f, \overline{g}\overline{f}\overline{g}\overline{f}g, \overline{g}\overline{f}\overline{g}\overline{f}\overline{g}\}$

$|\Omega| = 6$

$P(\text{„Gams überlebt“}) =$

$= P(\overline{g}\overline{f}\overline{g}\overline{f}\overline{g}) = 0{,}4^3 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}00256 = 0{,}256\,\%$

(b) $E = \{\overline{g}f, \overline{g}\overline{f}\overline{g}f\}$

$$P(E) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 = \\ = 0{,}32 \cdot (1 + 0{,}08) = 34{,}56\,\%$$

$p_{\mathrm{g}} = 1 - P(E) - p_0 = 1 - 0{,}3456 - 0{,}00256 = 65{,}184\,\%$

4. Eva und Sissi gehen zum Essen. Als es ans Bezahlen geht, zieht Sissi ein Kartenspiel hervor. Sie nimmt drei rote und drei schwarze Karten, mischt sie gut durcheinander und legt den Stapel mit dem Rücken nach oben auf den Tisch. Sissi klärt Eva auf: „Wir ziehen abwechselnd je eine Karte, bis eine rote Karte auftaucht. Die Zieherin der ersten roten Karte bezahlt das Essen. Du beginnst.“

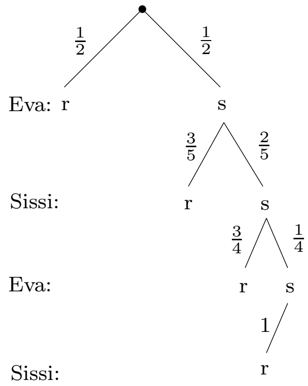
   (a) Verwende die Symbole r und s für das Ziehen einer roten bzw. schwarzen Karte und erstelle ein Baumdiagramm für das Zufallsexperiment „Kartenziehen“. Schreibe den kompletten Ergebnisraum Ω hin und gib seine Mächtigkeit an. Schreibe die Ereignisse E = „Eva bezahlt“ und S = „Sissi bezahlt“ in der Mengenschreibweise hin und berechne ihre Wahrscheinlichkeiten.

   (b) Einige Mahlzeiten später merkt Eva, dass sie öfter bezahlt als Sissi und schlägt eine Variante des Spiels vor: „Wer die zweite rote Karte zieht, bezahlt, unabhängig davon, wer die erste rote Karte gezogen hat.“ Löse Teilaufgabe (a) noch einmal für die neue Spielvariante.

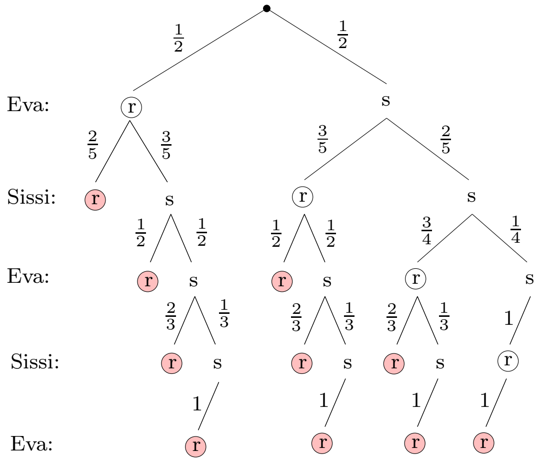
Lösung: (a) $\Omega = \{r, sr, ssr, sssr\}, \quad |\Omega| = 4$

$E = \{r, ssr\},\ P(E) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{13}{20} = 65\,\%$

$S = \overline{E} = \{sr, sssr\},\ P(S) = 1 - P(E) = 35\,\%$



(b) $\Omega = \{rr, rsr, rssr, rsssr, srr, srsr, srssr, ssrr, ssrsr, sssrr\}, \quad |\Omega| = 10$



$E = \{rsr, rsssr, srr, srssr, ssrsr, sssrr\},\ S = \overline{E} = \{rr, rssr, srsr, ssrr\}$

$P(S) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}}_{\frac{2}{10}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}_{\frac{1}{10}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}_{\frac{1}{10}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}}_{\frac{1}{10}} = \frac{5}{10} = 50\,\%$

$P(S) = 1 - P(E) = 50\,\%$

5. In einer Schüssel befinden sich zehn rote und zehn weiße Kugeln. Es werden zufällig drei Kugeln aus der Schüssel gezogen und in ein Glas gelegt.

   (a) Berechne mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse. Schreibe die Ereignisse auch in der Mengenschreibweise hin.

   E_1 : „Im Glas sind drei rote Kugeln.“
   E_2 : „Im Glas sind zwei rote und eine weiße Kugel.“
   E_3 : „Im Glas sind eine rote und zwei weiße Kugeln.“
   E_4 : „Im Glas sind drei weiße Kugeln.“

   (b) Das beschriebene Zufallsexperiment wird fünf mal ausgeführt, wobei die drei Kugeln im Glas vor jedem Experiment wieder in die Schüssel gegeben werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist nie eine weiße Kugel im Glas?

(c) Wie viele rote Kugeln müssen sich vor jedem Experiment mindestens in der Schüssel befinden (Gesamtzahl der Kugeln immer noch zwanzig), damit die gesuchte Wahrscheinlichkeit aus Teilaufgabe (b) größer als zehn Prozent ist?

Lösung: (a) $E_1 = \{rrr\}, \quad E_2 = \{rrw, rwr, wrr\}$

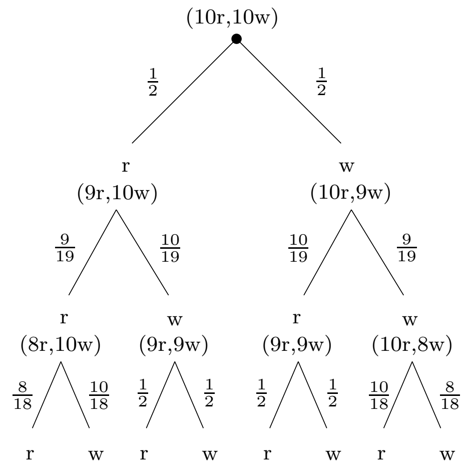
$E_3 = \{rww, wrw, wwr\}, \quad E_4 = \{www\}$

$P(E_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18} = \frac{2}{19} \approx 10{,}5\%$

$$P(E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{10}{18} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{1}{2} = $$
$$= 3 \cdot \frac{5}{38} = \frac{15}{38} \approx 39{,}5\%$$

Aus Symmetriegründen gilt:

$P(E_3) = P(E_2)$ und $P(E_4) = P(E_1)$.



(b) $P(\text{„nie weiß“}) = P(E_1)^5 = \left(\frac{2}{19}\right)^5 = \frac{32}{2\,476\,099} \approx 1{,}29 \cdot 10^{-5}$

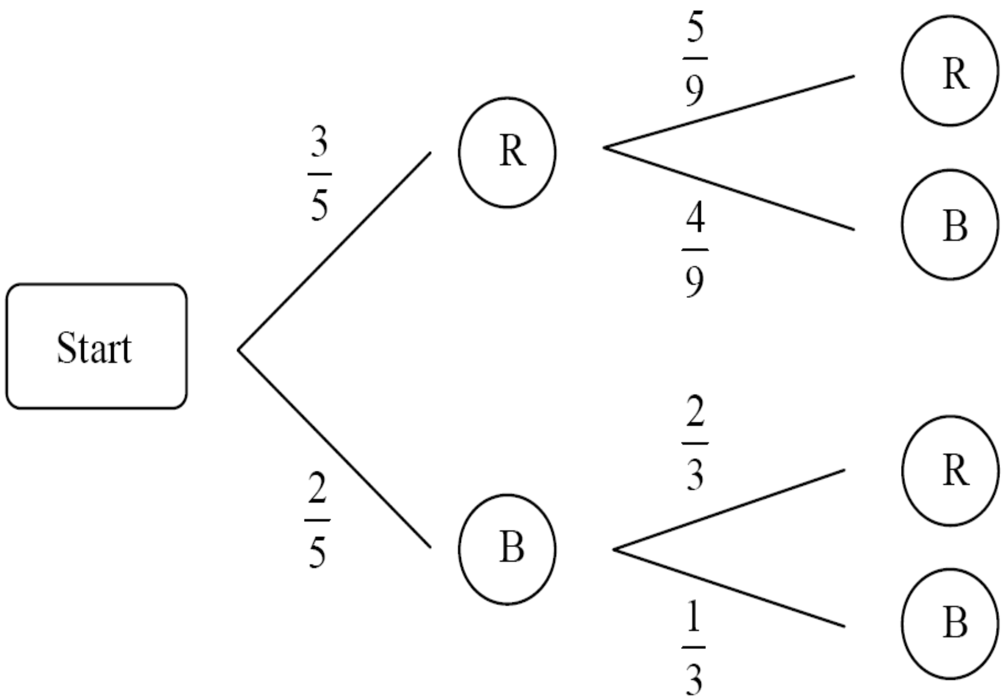
(c) x rote und $20 - x$ weiße Kugeln zu Beginn des Experiments:

$P(E_1) = \frac{x}{20} \cdot \frac{x-1}{19} \cdot \frac{x-2}{18}, \qquad P(E_1)^5 > 0{,}1 \quad \Longrightarrow \quad P(E_1) > 0{,}1^{\frac{1}{5}} \approx 0{,}63$

$x(x-1)(x-2) > 0{,}63 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 = 4316$

$17 \cdot 16 \cdot 15 = 4080, \quad 18 \cdot 17 \cdot 16 = 4896 \quad \Longrightarrow \quad$ mindestens 18 rote Kugeln.

6. Aus einer Urne mit 6 roten und 4 blauen Kugeln werden nacheinander 2 Kugeln gezogen. Zu diesem Zufallsexperiment gehört das nachstehende Baumdiagramm.



(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der zwei verschiedenfarbige Kugeln gezogen werden.

(b) Wurde in diesem Zufallsexperiment mit oder ohne Zurücklegen gezogen? Begründen Sie Ihre Entscheidung anhand des Baumdiagramms.

Quelle: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 10 der Gymnasien 2008

Lösung: (a) $\frac{8}{15}$

(b) ohne Zurücklegen, da sich Wahrscheinlichkeiten verändern

7. Über den berühmten Bergsteiger Wolfgang Bergfried stand unter der Überschrift ,,Überlebte - Alle 14 Achttausender" vor einigen Jahren in der Zeitung:

   Wenn man bedenkt, dass die Todesquote bei den Achttausender-Bergsteigern $3,4\%$ *beträgt, hätte Wolgang Bergfried bei seinen bisher* 29 *Expeditionen zu den höchsten Bergen der Welt mit* 99% *Wahrscheinlicheit umkommen müssen"*

   (a) Wie kommt der Reporter zu dieser Aussage.

   (b) Berechnen Sie den richtigen Wert für die Wahrscheinlichkeit nach 29 Expeditionen umgekommen zu sein.

   EPA Mathematik. 2002

Lösung: (a) $29 \cdot 0,034 = 98,6\%$

(b) $(1 - 0,034)^{29} = 37\%$

8. (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben zwei zufällig ausgewählte Personen am selben Tag Geburtstag?

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben zwei zufällig ausgewählte Personen im selben Monat Geburtstag?

   Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Ulrike Schätz, C. C. Buchner, 2005

Lösung: (a) $\frac{1}{365} \approx 0,27\%$

(b) $\frac{1}{12} \approx 8,3\%$

9. (a) In einer Schule haben 10% der 900 Schüler ein Mofa, 80% ein Fahrrad; 90% der Fahrradbesitzer haben kein Mofa. Wie viele Schüler haben weder ein Mofa noch ein Fahrrad?

   (b) In einem Flugzeug mit 250 Plätzen sind 241 Plätzebelegt. Wie viele verschiedene Möglichkeiten für die Lage der neun freien Plätze gibt es?

   Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Ulrike Schätz, C. C. Buchner, 2005

Lösung: (a) 162 Schüler haben weder Mofa noch Fahrrad

	F	$\overline{F}$	
M	72	18	90
$\overline{M}$	648	162	810
	720	180	900

(b) $\frac{250\cdot 249\cdot 248\cdot 247\cdot 246\cdot 245\cdot 244\cdot 243\cdot 242}{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 9,1\cdot 10^{15}$

10. (a) 22% der in Deutschland geprägten 2 €Münzen werden in München hergestellt. Alex hat drei deutsche 2 €Münzen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind davon zwei in München geprägt?

(b) In der Bevölkerung gibt es etwa 5% Linkshänder. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse mit 30 Schülern kein Linkshänder ist?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse mit 30 Schülern mindestens ein Linkshänder ist?

(d) Jedem fünften Fitnessriegel liegt ein Sammelbild bei. Wie viele Riegel muss Ben mindestens kaufen, um mit mindestens 50% Wahrscheinlichkeit mindestens ein Bild zu erhalten?

Mathe-Bingo, Grundlagen der Stochastik, Ulrike Schätz, C. C. Buchner, 2005

Lösung: (a) $3\cdot 0,22^2\cdot 0,78 = 11\%$

(b) $0,95^{30} = 21\%$

(c) $1-0,95^{30} = 79\%$

(d) $1-0,8^n \geq 0,5 \Rightarrow$ Ben muss mindestens 4 Riegel kaufen.

11. Ein Laplace-Würfel wird solange geworfen, bis entweder eine 6 erscheint oder viermal nacheinander keine 6 erscheint. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Würfel 1, 2, 3, bzw. 4 mal geworfen wird.

Lösung: $p = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^2\cdot\frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^3 = 88\%$

12. „ Ein unmöglicher Saustall"

In einem großen Saustall wirft jede Sau zweimal im Jahr 5 Ferkel. Die Wahrscheinlichkeit für ein männliches Ferkel beträgt 0,45.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in *einem* Fünferwurf mindestens ein weibliches Ferkel ist?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in *einem* Fünferwurf mindestens ein weibliches Ferkel **und** mindestens ein männliches Ferkel ist?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in *einem* Fünferwurf drei weibliche und zwei männliche Ferkel sind?

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in *einem* Fünferwurf mindestens drei weibliche Ferkel sind?

Lösung: (a) $1 - p(\text{fünf män. Ferkel}) = 1 - 0,45^5 = 98\%$

(b) $1 - p(\text{fünf män. Ferkel}) - p(\text{fünf weibl. Ferkel}) = 1 - 0,45^5 - 0,55^5 - 0,= 93\%$

(c) $p = 10 \cdot 0,55^3 \cdot 0,45^2 = 34\%$

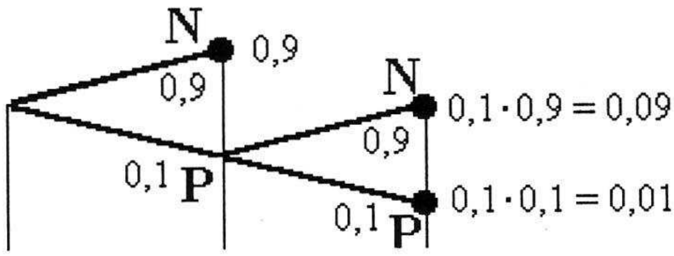
(d) $p(\text{mind. drei weibl. Ferkel}) =$
$p(\text{drei weibl. Ferkel}) + p(\text{vier weibl. Ferkel}) + p(\text{fünf weibl. Ferkel}) =$
$10 \cdot 0,55^3 \cdot 0,45^2 + 5 \cdot 0,55^4 \cdot 0,45^3 + 0,55^5 = 59\%$

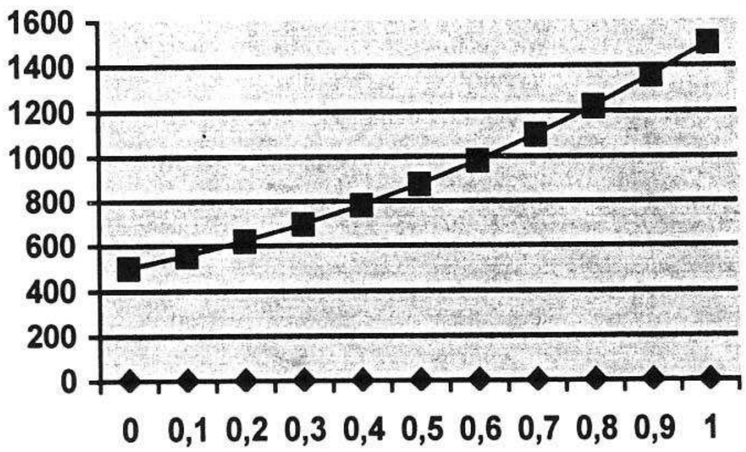
13. **Dopingproben**

Nach einem Sportfest werden jeweils Teile von zwei Urinproben zusammengeschüttet und das Resultat getestet. Fällt der Test positiv aus, testet man die Einzelproben.

Wie viele Proben sind bei 1000 Sportlern zu erwarten, wenn man aus langjähriger Erfahrung weiß, dass 10% (20%, 30%, ...) aller Sportler Doping betreiben?

Lösung: Zur Wahrscheinlichkeit von 10% Baumdiagramm aus Aufgabe 1!!! mit Pfadwahrscheinlichkeiten:





Man hat also für die 1000 Personen in 500 Testpaaren $(0,9 \cdot 1 + 0,09 \cdot 2 + 0,01 \cdot 3) \cdot 500 = 555$ Tests zu erwarten, im Vergleich zu Einzeltests also eine deutliche Ersparnis
Verallgemeinerung (für 20%, 30%, ...) :
Berechnung liefert das neben stehende Ergebnis. Die Vermutung eines quadratischen Zusammenhangs lässt sich bestätigen:

Zu erwarten sind $[(1-p)\cdot 1 + p\cdot(1-p)\cdot 2 + p^2\cdot 3]\cdot 500 = (p^2+p+1)\cdot 500$ Tests (im Vergleich zu 1000 Einzeltests)

14. **Aufgaben zur Anwendung**

Im Hause der Familie Duck halten sich n Enten zu einer Familienfeier auf. Eine muss trotz des scheußlichen Regens hinaus und den Erbonkel Dagobert mit dem Schirm abholen. Donald Duck hält n Streichhölzer in der Hand, eins davon ist gekürzt. Wer dieses zieht, muss hinaus in den Regen.

(a) Soll Trick als erster ziehen, als letzter oder mehr so in der Mitte? Berechnet die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten und nehmt dann Stellung zu Daisys Aussage: „Die ersten und die letzten, die ziehen, haben die besten Chancen, nicht hinaus zu müssen, denn zu Beginn sind noch alle langen Hölzchen da, und bis zum Ende wird wohl kaum gezogen werden, da schon vorher jemand das kurze Streichholz gezogen haben wird. Die in der Mitte sind am schlechtesten dran, weil nur noch etwa die Hälfte der langen Hölzchen da sind und dadurch die Chancen zu verlieren viel größer sind.“

(b) Wenn nur noch Trick und Track im Raum sind, weil alle anderen damit beschäftigt sind, den mit Wasser vollaufenden Keller zu entleeren, wird folgendes Verfahren vereinbart: Trick und Track ziehen abwechselnd eines der n Streichhölzer. Wer zuerst das kurze zieht, muss hinaus in den Regen. Soll Trick jetzt anfangen oder lieber Track den Vortritt lassen?

Lösung: (a) Für jede Ente beträgt die Wahlscheinlichkeit $\frac{1}{n}$.

(b) Bei einer geraden Anzahl von Streichhölzern ist es egal wer anfängt. Bei einer ungeraden Anzahl sollte Trick nicht anfangen. Derjenige, der den ersten Zug macht, muss einmal mehr ziehen, wobei er bei jedem Zug mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{n}$ das kurze Streichholz bekommt.