

Lösen linearer Gleichungen

1. Bestimme die Lösung der Gleichung

(a) $x - 22 = 6 \cdot (0,5x - 2)$

(b) $22 - x = 8 \cdot (0,5x + 2)$

(c) $x - \frac{3}{4} = -6 \cdot (0,5x - 2)$

(d) $x - 2,2 = -6 \cdot (\frac{2}{3}x - 2)$

Quelle: Bayerischer Mathematik-Test für die Jahrgangsstufe 8 der Gymnasien, 2006

Lösung: (a) $x = -5$ (b) $x = 1\frac{1}{5}$ (c) $x = 3\frac{3}{16}$ (d) $x = 2,84$

2. (a) $P(p|8) \in g : y = 4x - 40; p = \dots$

(b) $2 \cdot 17^0 = \dots$

(c) Flächeninhalt des Rechtecks RON mit $R(0|16)$, $O(0|0)$ und $N(14|0)$.

(d) $6 \cdot x = 30^2; x = \dots$

(e) $120 : x = 600; x = \dots$

Quelle: Kreuzzahlrätsel von Ulrike Schätz

Lösung: (a) 12 (b) 2 (c) 112 (d) 150 (e) $\frac{1}{5}$

3. Aquamaxx

Frau S. aus K. ist es leid, jede Woche ein- oder zweimal zum Getränkemarkt zu fahren, um den entsprechenden Vorrat an Mineralwasser für ihre fünfköpfige Familie zu besorgen. Sie denkt über die Anschaffung eines Wasseraufbereitungsgerätes nach.

Die Firma Aquamaxx bietet ein solches Gerät zum Preis von 120 € an. Die entsprechenden CO_2 -Patronen kosten 16 € und reichen für 40l. $1m^3$ Leitungswasser kostet 8,50 € (einschließlich Abwassergebühren).

Die Hersteller des Aquamaxx behaupten: Bei Verwendung des Gerätes Aquamaxx sind die Kosten für ihr Mineralwasser bereits vor Ablauf eines Jahres geringer, als wenn Sie das Wasser im Getränkemarkt kaufen.

(a) Wie viel kostet ein Kasten Mineralwasser?

(b) Schätze den Tages- bzw. den Wochenbedarf der Familie S.

(c) Stelle die Kosten in einer Tabelle gegenüber (100l, 200l, 300l)

(d) Stelle für beide Möglichkeiten einen Term auf.

(e) Setze die beiden Gleichungen gleich und interpretiere das Ergebnis

Quelle: Sinus-Transfer

- Lösung:* (a) angenommen, 12 Flaschen à 0,7l kosten 7,60 € (ohne Pfand)
 (b) Jedes Kind eine Flasche, Eltern zusammen 3 bis 4 am Tag: ca. 6 Flaschen. 3 – 4 Kisten pro Woche, fast 30l

	100l	200l	300l
(c) Aquamaxx	160,85 €	201,70 €	242,55 €
Kasten	90,48 €	180,96 €	271,44 €

- (d) $90,48 \cdot x = 40,85x + 120$
 Nach 240 l (bzw. 8 Monaten) sind die Kosten für Kasten und Aquamaxx gleich.
 Danach ist Aquamaxx billiger, also stimmt die Aussage von Aquamaxx.

4. Löse die folgende Gleichung ($D = \mathbb{Q}$):

$$3 \cdot (x + 4) = 14 - \frac{2}{3}x$$

Lösung: $L = \{\frac{6}{11}\}$

5. Gegeben ist die Gleichung

$$13 - 2x = x + 10, \quad G = \mathbb{Z}.$$

- (a) Zeige, dass $x = 2$ keine Lösung dieser Gleichung ist.
 (b) Ändere die Gleichung an einer Stelle so ab, dass $x = 2$ die Lösung der abgeänderten Gleichung ist, und führe den Nachweis.

Lösung: (a) Einsetzen (b) z.B.: $13 - 2x = x + 7$

6. Gegeben ist die Gleichung

$$7 - x = 3x + 11, \quad G = \mathbb{Z}$$

- (a) Zeige, dass $x = -1$ die Lösung dieser Gleichung ist.
 (b) Ändere die Gleichung an einer Stelle so ab, dass die Lösungsmenge der abgeänderten Gleichung leer ist, und führe den Nachweis.

Lösung: (a) Entweder $x = -1$ einsetzen oder die Gleichung nach x auflösen.
 (b) z.B. $G = \mathbb{N}$ wählen oder $7 - x = 3x + 12$ usw.

7. Begründe: Die Lösungsmenge der Gleichung $4 - 6x = 3(11 - 2x)$ ist für $G = \mathbb{Q}$ leer.

Lösung: Es ergibt sich $4 - 0 \cdot x = 33$. Das ist für keine Belegung von x erfüllbar.

8. Begründe: Die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + 8 = 6$ ist für $G = \mathbb{Q}$ leer.

Lösung: Es ergibt sich $x^2 = -2$. Es gibt keine Zahl, die mit sich selbst multipliziert einen negativen Produktwert ergibt.

9. Maria hat bei den folgenden Termumformungen Fehler gemacht. Berichtige sie farbig (nicht mit roter Farbe):

(a) $(a - 0,5)^2 = a^2 + a + 2,5$

(b) $(2x + 3)^2 = 2x^2 + 12x + 6$

(c) $(4 - x)(x + 4) = x^2 - 16$

Lösung: (a) $(a - 0,5)^2 = a^2 - a + 0,25$

(b) $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

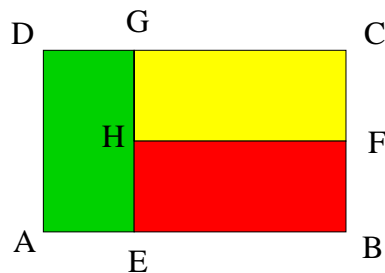
(c) $(4 - x)(x + 4) = 16 - x^2$

10. Löse für $G = \mathbb{Q}$ die folgende Gleichung nach x auf:

$$(x + 3)^2 - (2x - 1)^2 = (3 + x)(x - 3) - 4x^2 - 13$$

Lösung: $x = -3$

11.



Benin ist ein Land in Afrika. Seine Flagge ist oben abgebildet.

Die drei Rechtecke im Inneren sind kongruent. Ihre Seitenlängen stehen jeweils im Verhältnis 2:3. Weiter gilt: $\overline{HF} = 3x$ cm mit $x \in \mathbb{Q}^+$.

(a) Zeichne die Figur für $x = 2$.

(b) Welchen Flächeninhalt besitzt eines der inneren Rechtecke, wenn der Saum der Fahne 1 m 8 cm lang ist?

Lösung:

(a) –

- (b) Es gilt: $\overline{AD} = 2 \cdot \overline{HG} = 4x$ cm und $\overline{AB} = 5x$ cm.
 Dann folgt für den Umfang u : $u(x) = 18x$ cm.
 $18x = 108 \Rightarrow x = 6$ und $2x = 12$ sowie $3x = 18$.
 Damit folgt für den Flächeninhalt A eines dieser Rechtecke im Inneren: $A = 12$ cm \cdot
 18 cm = 216 cm²

12. Löse folgende Gleichungen ($G = \mathbb{Q}$):

(a) $4x - 5 = (x + 3) \cdot 4$

(b) $x \cdot (x - 2) - 3x = x^2 + 5$

(c) $2 \cdot [3 - 4 \cdot (x + 2) - 2] + \frac{1}{2} \cdot [2 - 4 \cdot (x - 1)] = 0$

Lösung: (a) $L = \{\}$ (b) $L = \{-1\}$ (c) $L = \{-1, 1\}$

13. Löse:

(a) $7(8x + 3) - (5x - 3) \cdot 8 = 0$

(b) $\frac{1}{2} \cdot (4x + \frac{1}{3}) - \frac{1}{4}(12x + 1) = (9x - \frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{3}$

(c) $2(x + a) = 6 - 3x + 2a$

Lösung: (a) $x = -2\frac{13}{16}$ (b) $x = 0$ (c) $x = 1\frac{1}{5}$

14. Gib zu folgenden Gleichungen jeweils die Lösungsmenge L_1 zur Grundmenge $G_1 = \mathbb{N}$ und L_2 zu $G_2 = \mathbb{Q}$ an.

(a) $(8x - 1)(x + 3) = 8(x - 2)^2$

(b) $\frac{1}{6}(x - 2) + \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}(\frac{5}{2}x - 1)$

(c) $6(3x - 1) - 7(2x - 1) = 4(x + 9) - 42$

Lösung: (a) $L_1 = \{\}$, $L_2 = \{\frac{7}{11}\}$ (b) $L_1 = G_1$, $L_2 = G_2$ (c) $L_1 = L_2 = \{\}$

15. Bestimme die Lösungsmenge folgender Gleichung ($D = \mathbb{Q}$):

$$5(3 - 5x) - [4(2 + 3x) - 10] + 9x = 3x - 1$$

Lösung: $L = \{\frac{18}{31}\}$

16. Gleichungsparkett

$3,5x + 7,7 = 7(2,9 - x)$	$(z - 5)(z - 6) - z(z - 8) = 0$	$\frac{1}{b-1} = 3$
$\frac{t}{3} - \frac{t+8}{12} = \frac{11}{60}$	$(2x + 6)^2 = 5x^2 - (x - 2)^2$	$\frac{ax}{1+x} = 2$
$\frac{1}{2x} - \frac{1}{3x} = -\frac{5}{6}$	$(7 - \frac{2}{3})y = 7(y - \frac{2}{3})$	$\frac{z}{z-1} = -\frac{1-z}{z}$
$ b - \frac{2}{7} = 0,5$	$0 = 2(ab + ac + bc)$	$\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{f}$
$A = \frac{a+b}{2} \cdot h$	$\frac{w+5}{w-2} = 0$	$(s - \frac{2}{3}) \cdot (2s - 1\frac{1}{4}) = 0$
$(\frac{1}{2} + 2x) \cdot (\frac{1}{2} - 2x) + 2x =$ $(2 - x) \cdot x - \frac{13}{12}$		

Quelle: Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur, ISB 2001

Lösung:

$x = 1,2$	$z = 10$	$b = 1\frac{1}{3}$
$t = 3\frac{2}{5}$	$x = -2$	$x = \frac{2}{a-2}, a = \frac{2}{x} + 2$
$x = -\frac{1}{5}$	$y = 7$	$\frac{1}{2}$
$b_1 = \frac{11}{14}, b_2 = -\frac{3}{14}$	$a = -\frac{bc}{b+c}$ $b = -\frac{ac}{a+c}$ $c = -\frac{ab}{a+b}$	$f = \frac{bg}{b+g}$ $b = \frac{fg}{g-f}$ $g = \frac{bf}{b-f}$
$h = \frac{2A}{a+b}$ $a = \frac{2A}{h} - b$ $b = \frac{2A}{h} - a$	$w = -5$	$s_1 = \frac{2}{3}, s_2 = \frac{5}{8}$
$x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -\frac{2}{3}$		

17. Gegeben ist die Gleichung

$$\frac{2}{5}(x - 7) - \frac{3}{5}(2 - 3x) = x + 2\frac{1}{5}, \quad G = \mathbb{Q}$$

- Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung.
- Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung für die Grundmengen $G_1 = \mathbb{Q}^+$, $G_2 = \mathbb{Z}$, $G_3 = \mathbb{N}$ und $G_4 = \{5; 5\frac{1}{2}; 5\frac{1}{3}; 5\frac{1}{4}; 5\frac{1}{5}; 5\frac{1}{6}\}$.
- Verändere die rechte Seite der Gleichung so, dass $L_1 = \{11\}$, $L_2 = \{0\}$, $L_3 = \{\}$ und $L_4 = G$.
- Lässt sich die Gleichung so abändern, dass $L_5 = \{1; 2\}$?
- Betrachte nun die Gleichung

$$\frac{2}{5}(x - 7) - \frac{3}{5}(2 - 3x) = ax + 2\frac{1}{5}, \quad G = \mathbb{Q}, \quad a \in \mathbb{Q}.$$

Für welche a gibt es genau eine Lösung? Wie lautet dann die Lösungsmenge?
Wie sieht die Lösungsmenge in den übrigen Fällen aus?

- Betrachte nun die Gleichung

$$\frac{2}{5}(x - 7) - \frac{3}{5}(2 - 3x) = x + b \cdot 2\frac{1}{5}, \quad G = \mathbb{Q}, \quad b \in \mathbb{Q}.$$

Welche Einfluss auf die Anzahl der Lösungen hat b ?

- Lösung:* (a) $L = \{5\frac{1}{6}\}$
 (b) $L_1 = \{5\frac{1}{6}\}$, $L_2 = \{\}$, $L_3 = \{\}$, $L_4 = \{5\frac{1}{6}\}$.
 (c) z. B. $\begin{cases} 2(x-7) - 3(2-3x) = x + 9\frac{1}{5} \\ 3(x-7) - 2(2-3x) = x - 4 \\ 5(x-7) - 2(2-3x) = 2\frac{1}{5}x \\ 2(x-7) - 3(2-3x) = 2\frac{1}{5}x - 4 \end{cases}$
 (d) Nein
 (e) Genau eine Lösung für $a \neq \frac{11}{5} \implies L = \left\{ \frac{31}{11-5a} \right\}$
 Für $a = \frac{11}{5}$ folgt $L = \{\}$
 (f) b hat keinen Einfluss auf die Anzahl der Lösungen.

18. Bestimme die Lösungsmengen folgender Gleichungen ($G = \mathbb{Q}$):

- a) $|x - 3| = 1$ b) $|x - 2,75| = 1,25$
 c) $|x - 3,75| = 1,25$ d) $||x - 1| - 2| = 3$

Lösung: (a) $L = \{2; 4\}$, (b) $L = \{4; 1,5\}$, (c) $L = \{5; 2,5\}$, (d) $L = \{-4; 6\}$

19. Bestimme die Lösungsmengen folgender Gleichungen:

- a) $|x - 7| = 12$ b) $|x - 5| = 12$
 c) $|x - 7,38| = 5,42$ d) $|x - 7,39| = 3,41$

Lösung: (a) $L = \{19; -5\}$ (b) $L = \{17; -7\}$
 (c) $L = \{12,8; 1,96\}$ (d) $L = \{10,8; 3,98\}$

20. Bestimme die Lösungsmenge folgender Gleichung ($G = \mathbb{Q}$): $|x - 33,7| = 21,9$

Lösung: $L = \{55,6; 11,8\}$

21. Berechne die Lösungsmengen folgender Gleichungen ($G = \mathbb{Q}$):

- (a) $\frac{5}{4} - x = 3,5$ (b) $|3,5 - x| = 4$

Lösung: (a) $L = \{-2\frac{1}{4}\}$ (b) $L = \{-0,5; +7,5\}$

22. Bestimme die Lösungsmenge über der Grundmenge \mathbb{Q} :

- (a) $|z| + 8 = -6$ (b) $|z| - 8 = 6$ (c) $|x - 5| = 7$

Lösung: (a) $L = \{\}$ (b) $L = \{-14; 14\}$ (c) $L = \{-2; 12\}$

23. Bestimme die Lösungsmenge folgender Gleichung ($G=Q$):

$$2(x+3)^2 - \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right)^2 = 100(1,2x - 0,6)(1,2x + 0,6) - \frac{1}{9}x^2 - 2x \left(71x - \frac{1}{6}\right)$$

Lösung: $-4\frac{23}{48}$

24. Bestimme die Lösungsmenge folgender Gleichung ($G = Q$):

$$(11x - 2)^2 - (7 - 9x)^2 = (6x + 13)^2 + (2x - 5)(2x + 5)$$

Lösung: $L = \{-2\frac{41}{74}\}$

25. Bestimme die Lösungsmenge folgender Gleichungen ($G = Q$):

(a) $(2x - 5)(2x + 5) + (7 - 9x)^2 = (11x + 2)^2 - (6x + 13)^2$

(b) $(1 - 5x)^2 + 3x(8x + 3) = (7x - 1)^2 + 3(1 - x)$

Lösung: (a) $L = \{13\frac{1}{2}\}$ (b) $L = \{\frac{3}{16}\}$

26. Bestimme die Lösungsmenge folgender Gleichungen ($G = Q$):

(a) $(2x - 5)(2x + 5) + (7 - 9x)^2 = (11x + 2)^2 - (6x + 13)^2$

(b) $(1 - 5x)^2 + 3x(8x + 3) = (7x - 1)^2 + 3(1 - x)$

Lösung: (a) $L = \{13\frac{1}{2}\}$ (b) $L = \{\frac{3}{16}\}$

27. Bestimme für folgende Gleichung die Lösung über Q :

$$(2 - x)^2 + 2 \cdot (4x - 2) - 5 \cdot (2 - x) = (x + 3)^2$$

Lösung: $x = 6\frac{1}{3}$

28. Bestimme für folgende Gleichung die Lösung über Q :

$$3 \cdot (4x - 2) + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot (2 - 3x)$$

Lösung: $x = \frac{355}{624}$

29. Löse folgende Gleichung ($D = Q$):

$$(5x + 4)(5x - 4) - (2 - 2x)^2 = (4x - 1)^2 + (2x - 8)(4x + 2) - x(3x - 4)$$

Lösung: $\frac{1}{8}$

30. Berechne die Lösungsmengen folgender Gleichungen zur jeweils angegebenen Grundmenge:

(a) $17x - 13 = 22x + 7, \quad G = \mathbb{Q}$

(b) $x - \frac{1}{4} = \frac{x}{7} + \frac{5}{4}, \quad G = \mathbb{Q}^+$

(c) $13(x - x) = \frac{1}{x}, \quad G = \mathbb{N}$

(d) $7(x - x) = 3 - \frac{21}{7}, \quad G = \mathbb{Z}$

(e) $(x - 3)(x + 5) = 0, \quad G = \mathbb{Z}$

Lösung: (a) $-5x = 20, \quad x = -4 \in G \implies L = \{-4\}$

(b) $\frac{6}{7}x = \frac{6}{4}, \quad x = \frac{6}{4} : \frac{6}{7} = \frac{7}{4} = 1,75 \in G \implies L = \{1,75\}$

(c) $0 = \frac{1}{x} \implies L = \{\}$

(d) $0 = 0 \implies L = G = \mathbb{Z}$

(e) $x - 3 = 0$ oder $x + 5 = 0 \implies L = \{-5; 3\}$

31. Berechne die Lösungsmengen folgender Gleichungen zur jeweils angegebenen Grundmenge:

(a) $27x - 35 = 34x - 18, \quad G = \mathbb{Z}$

(b) $x - \frac{1}{7} = \frac{8}{7} - \frac{x}{8}, \quad G = \mathbb{Q}^+$

(c) $4x - 3 - 7x = 11 - 3x - 14, \quad G = \mathbb{N}$

(d) $x^2 = -9, \quad G = \mathbb{Q}$

(e) $(x + 4)(x - 1)(x - 2) = 0, \quad G = \mathbb{N}$

Lösung: (a) $-7x = 17, \quad x = -\frac{17}{7} \notin G \implies L = \{\}$

(b) $\frac{9}{8}x = \frac{9}{7}, \quad x = \frac{9}{7} : \frac{9}{8} = \frac{8}{7} \in G \implies L = \left\{\frac{8}{7}\right\}$

(c) $-3 - 3x = -3 - 3x \implies L = G = \mathbb{N}$

(d) $x^2 \geq 0$ für alle $x \implies L = \{\}$

(e) $x = -4$ oder $x = 1$ oder $x = 2 \implies L = \{1; 2\}$