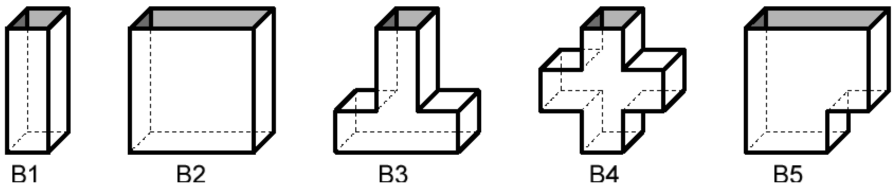
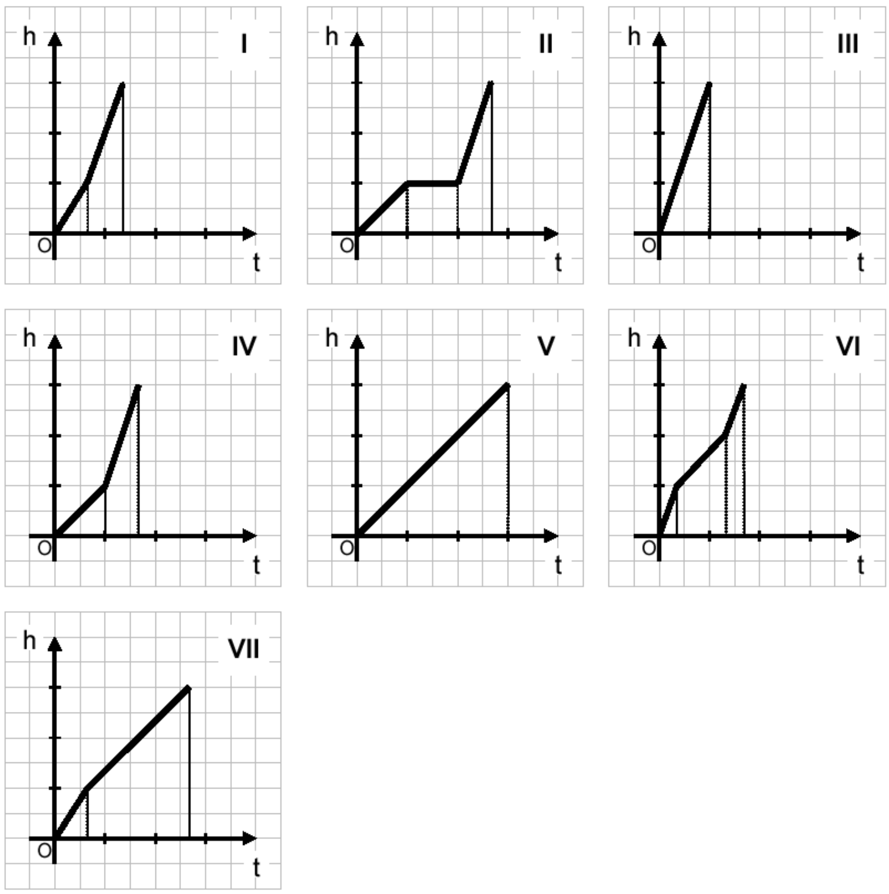
Anwendungsaufgaben

1. Jeder der abgebildeten Behälter wird gleichmäßig mit der gleichen Wassermenge pro Zeiteinheit gefüllt.



Die folgenden grafischen Darstellungen geben die Höhe h des Wasserstandes in Abhängigkeit von der Füllzeit t an.



Ordne die Behälter die zugehörigen Graphen zu.

Quelle: Vergleichsarbeit bundesland- und schulartübergreifend in der Jahrgangsstufe 8, Materialien zur Weiterarbeit

Lösung: B1: III, B2: V, B3: IV, B4: VI, B5: VII

2. Bei alkoholischen Getränken ist es üblich, den Anteil reinen Ethanols am Gesamtvolumen des Weines in Prozenten anzugeben. Ein Hobbywinzer stellt mit einer Präzisionswaage fest, dass 1 Liter seines trockenen Kirschweins eine Masse von 973,125 g hat. Wie viel Prozent Alkohol enthält dieser Wein?

Man kann davon ausgehen, dass es sich bei Wein um eine Mischung aus Wasser und Ethanol handelt. Ein Liter Wasser wiegt 1,0 Kilogramm, ein Liter reines Ethanol wiegt 785 g. Die Anteile an Säure und Restzucker können vernachlässigt werden.

Lösung: Es sei p% der prozentuale Volumenanteil des Alkohols im Kirschwein.
Volumen des Alkohols: $1l \cdot \frac{p}{100}$
Masse des Alkohols: $0,785\frac{kg}{l} \cdot 1l \cdot \frac{p}{100} = 0,785kg \cdot \frac{p}{100}$
Volumen des Wassers: $1l \cdot \frac{100-p}{100}$
Masse des Wassers: $1\frac{kg}{l} \cdot 1l \cdot \frac{100-p}{100} = 1kg \cdot \frac{100-p}{100}$
Masse des Kirschweins: $0,785kg \cdot \frac{p}{100} + 1kg\frac{100-p}{100} = 0,973125kg$
Durch Auflösen nach p ergibt sich ein Prozentsatz von $12,5\%$.

3. Simmerl und Resi kauften in einem Supermarkt in der Stadt Wein zum gleichen Einkaufspreis pro Flasche. Simmerl kaufte 90 Flaschen und Resi 60 Flaschen. In ihrem Dorf verkauften sie den Wein wieder. Simmerl verdiente dabei 30 % und Resi 20 % des jeweiligen Einkaufspreises. Für alle Weinflaschen zusammen zahlten die Dorfbewohner 1776,60 €.

   (a) Was kostete eine Flasche Wein im Einkauf?

   (b) Nach Beendigung des Geschäftes legten Simmerl und Resi ihre Einkünfte in eine gemeinsame Kasse. Wieviel Prozent des Einkaufspreises verdienten sie zusammen?

Lösung: (a) $x \cdot 90 \cdot (1 + 30\%) + x \cdot 60 \cdot (1 + 20\%) = x \cdot 189 = 1776{,}6$
$x = 9{,}4$, d.h. 9,40 € pro Flasche im Einkauf
(b) Gesamter Einkaufspreis: $9{,}4 \cdot (90 + 60) = 1410$, 26% Gewinn

4. (a) Denk dir eine Zahl (nenne sie x), addiere 2, multipliziere mit 3, subtrahiere 4, multipliziere wieder mit 3 und addiere das 6-fache der gedachten Zahl. Welche Zahl muss man sich ursprünglich gedacht haben, um am Ende 366 zu erhalten?

   (b) Denke dir ähnliche Aufgaben aus.

   Quelle: Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur, ISB 2001

Lösung: (a) $((x + 2) \cdot 3 - 4) \cdot 3 + 6x = 366 \Rightarrow 15x + 6 = 366 \Rightarrow x = 24$

5. Um wie viel Uhr zwischen 8 und 9 Uhr decken sich großer und kleiner Zeiger einer Zeigeruhr?

   Quelle: Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur, ISB 2001

Lösung: Verschiedene Lösungsmöglichkeiten:

- Aufstellen einer Gleichung:
  Sei x die gesuchte Minutenzahl. Der Minutenzeiger überstreicht pro Minute $360° : 60 = 6°$, d. h. in x Minuten $6° \cdot x$. Der Stundenzeiger überstreicht pro Minute $(360° : 12) : 60 = 0{,}5°$, d. h. in x Minuten $0{,}5° \cdot x$. Da der kleine Zeiger um 8 Uhr gegenüber dem großen Zeiger einen Vorsprung von $8 \cdot 30° = 240°$ hat, gilt die Gleichung $6° \cdot x = 0{,}5° \cdot x + 240°$, deren Lösung $x = 43\frac{7}{11}$ ist.
- Aufstellen von Funktionstermen:
  $w_{\text{gr. Zeiger}}(x) = 6° \cdot x$ und $w_{\text{kl. Zeiger}}(x) = 0{,}5° \cdot x + 240°$. Das Gleichsetzen der Terme führt zu obiger Gleichung; alternativ bringt eine graphische Lösung (mit nichttrivialer Achsenskalierung) eine Näherungslösung.
- Lösung ohne Gleichung:
  Der große Zeiger legt pro Minute 6° zurück, der kleine Zeiger 0,5°. Der kleine Zeiger hat um 8 Uhr einen Vorsprung von 240°. Pro Minute verringert sich der Vorsprung des kleinen Zeigers um 5,5°. In $240° : 5{,}5° = 43\frac{7}{11}$ Minuten hat damnach der große den kleinen Zeiger eingeholt.

6. 56 Vögel sitzen gelangweilt auf drei Bäumen herum. Vor Langeweile fliegen 4 Vögel vom ersten auf den zweiten und 9 vom zweiten auf den dritten Baum. Nun sind auf dem zweiten Baum doppelt soviel Vögel wie auf dem ersten und auf dem dritten doppelt soviel wie auf dem zweiten. Wie viele Vögel saßen ursprünglich auf jedem Baum?

Lösung: Anzahl der Vögel nach dem Flug auf dem ersten, zweiten, dritten Baum: x, $2x$, $4x \Rightarrow 7x = 56 \Rightarrow x = 8$;
Anzahl der Vögel nach dem Flug auf dem ersten, zweiten, dritten Baum: 8, 16, 32 $\Rightarrow$
Anzahl der Vögel vor dem dem Flug auf dem ersten, zweiten, dritten Baum: 12, 21, 23.

7. Eine Mutter ist viermal so alt wie ihr Sohn, in acht Jahren wird sie nur noch 2,5 mal so alt sein. Wie alt sind beide jetzt?

Lösung: Alter der Mutter jetzt: 32 Jahre
Alter des Sohns jetzt: 8 Jahre

8. (a) An seinem 50. Geburtstag stellt ein Vater fest, dass seine drei Kinder zusammen ebenso alt sind wie er selbst. Die Tochter ist um 6 Jahre älter als der jüngste Sohn, der gerade halb so alt ist wie sein älterer Bruder. Wie alt sind die drei Kinder? Stelle für die Lösung der Aufgabe eine Gleichung auf!
   (b) An seinem 60. Geburtstag stellt ein Vater fest, dass seine drei Kinder zusammen ebensoalt sind wie er selbst. Die Tochter ist um 5 Jahre älter als der jüngste Sohn. Der ältere Sohn ist dreimal so alt wie der jüngste Sohn. Wie alt sind die drei Kinder? Stelle für die Lösung der Aufgabe eine Gleichung auf!

Lösung: (a) jüngster Sohn: x, Tochter $x + 6$, älterer Bruder $2x$, $x + (x + 6) + 2x = 50 \Rightarrow$ jüngster Sohn: 11, Tochter 17, älterer Bruder 22

(b) jüngster Sohn: x, Tochter $x+5$, älterer Bruder $3x$, $x+(x+5)+3x=60 \Rightarrow$ jüngster Sohn: 11, Tochter 16, älterer Bruder 33

9. Eine Mutter ist jetzt dreimal so alt wie ihre Tochter. In 4 Jahren wird sie achtmal so alt sein, wie ihre Tochter vor 7 Jahren war. Wie alt sind Mutter und Tochter jetzt?

Lösung: Alter der Tochter: 12 Jahre, Alter der Mutter: 36 Jahre

10. Ein Vermögen von 14000 € soll an drei Kinder in folgender Weise verteilt werden: Der Sohn erhält als Ausgleich für die Kosten seiner Ausbildung 3000 € weniger als die jüngste Tochter, die ältere Tochter als Entschädigung für ihre Mithilfe im Haushalt 2000 € mehr als diese.

Lösung: Sohn: $x - 3000$ €, jüngste Tochter: x, ältere Tochter: $x + 2000$ €

$(x - 3000\,€) + x + (x + 2000\,€) = 14000\,€ \quad \Longrightarrow$

Sohn: 2000 €, jüngste Tochter: 5000 €, ältere Tochter: 7000 €

11. Der Verdienst einer Halbtageskraft wurde einmal um ein Fünfzehntel und dann noch zweimal um je das 0,2-fache des vorigen Verdienstes erhöht und beträgt jetzt 852,48 €. Wie groß war der Verdienst vor den Erhöhungen?

Lösung: $x \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \cdot (1 + 0{,}2)^2 = 852{,}48\,€$

$$x \cdot \frac{16 \cdot 12^2}{15 \cdot 10^2} = x \cdot \frac{16 \cdot 144}{15 \cdot 100} = x \cdot \frac{16 \cdot 12}{5 \cdot 25} = x \cdot \frac{192}{125} = 852{,}48\,€$$

$$x = 852{,}48\,€ : \frac{192}{125} = \frac{852{,}48 \cdot 125}{192}\,€ = \frac{106\,560}{192}\,€ = 555{,}\text{-}\,€$$

12. Das Gehalt von Herrn Müller wurde zweimal nacheinander um 10% erhöht und beträgt jetzt 5154,60 €. Wie hoch war es ursprünglich?

Lösung: $x \cdot 1{,}1^2 = 5154{,}60\,€ \Longrightarrow x = 4260\,€$

13. Ein Wucherer verlangt jährlich 20 % Zins für ausgeliehenes Geld. Wieviel hat sich Sepp vom Wucherer geliehen, wenn er nach drei Jahren 63 936 € zurückzahlen muss?

Lösung: $x \cdot (1 + 20\,\%)^3 = x \cdot 1{,}2^3 = 63\,936\,€ \quad \Longrightarrow \quad x = 37\,000\,€$

14. Ein Computer kostet mit 15 % Mehrwertsteuer 2875 €. Was kostet das Gerät mit 16 % Mehrwertsteuer?

Lösung: Ohne MWS: x, $\quad x \cdot (1 + 15\,\%) = x \cdot 1{,}15 = 2875\,€ \quad \Longrightarrow \quad x = 2500\,€$

Mit 16 % MWS: $y = 2500\,€ \cdot 1{,}16 = 2900\,€$

15. Als Hausaufgabe mussten die Schüler der Klasse 6 a des Hinterwald-Gymnasiums zu einer ihnen bekannten Zahl x fünf Prozent addieren. Franz und Susi fassten die nicht ganz präzise gestellte Aufgabe verschieden auf, und daher war das Ergebnis von Franz auch um 10 größer als das Ergebnis von Susi. Wie rechneten Franz bzw. Susi und wie lautete x?

Lösung: $\underbrace{x + 5\% \cdot x}_{\text{Franz}} = \underbrace{x + 5\%}_{\text{Susi}} + 10, \quad 5\% \cdot x = 5\% + 10 = 10{,}05, \quad x = 201$

16. Holz verliert beim Trocknen 42 % seiner Masse. Wie schwer war ein Stapel Holz im frischen Zustand, wenn er trocken 812 kg wiegt?

Lösung: $x \cdot \left(1 - \frac{42}{100}\right) = 812\,\text{kg} \quad \Longrightarrow \quad x = 1400\,\text{kg}$

17. Bei einer Physikschulaufgabe gab es 10 % Einser, 20 % Zweier, 30 % Vierer, 15 % Fünfer und 5 % Sechser. Welcher Bruchteil der Schüler hatte einen Dreier? Wie groß war die Durchschnittsnote der Schulaufgabe? Wie viele Schüler haben an der Schulaufgabe teilgenommen, wenn die Prozentangaben exakt sind (nicht gerundet)?

Lösung: 20 % Dreier, Durchschnitt $= \dfrac{10 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 30 \cdot 4 + 15 \cdot 5 + 5 \cdot 6}{100} = 3{,}35$

Ist x die Zahl der Schüler, dann muss $5\,\% \cdot x$ ganzzahlig sein, d.h. x ist ein Vielfaches von 20. Wegen $x \leqq 33$ ist $x = 20$.

18. Fritz eröffnet ein Konto bei der Bank und zahlt einen gewissen Anfangsbetrag ein. Am Ende eines Jahres wird ein Fünfundzwanzigstel des momentan vorhandenen Betrages als Zins dem Konto zugeschlagen. Nach drei Jahren beträgt der Kontostand 3515,20 €. Welchen Betrag hat Fritz bei der Kontoeröffnung einbezahlt?

Lösung: $x \cdot \left(1 + \frac{1}{25}\right)^3 = x \cdot \left(\frac{26}{25}\right)^3 = x \cdot \frac{17576}{15625} = 351520\,\text{Cent} \quad \Longrightarrow \quad x = 3125\,€$

19. Eine sehr spendable Bank zahlt am Jahresende ein Siebtel des Betrages vom Jahresanfang als Zins. Ludwig zahlt Anfang 1996 einen bestimmten Anfangsbetrag bei der Bank ein, Ende 1998 ist sein Konto auf 1024 € angewachsen. Welchen Betrag zahlte Ludwig Anfang 1996 ein?

Lösung: $x \cdot \left(1 + \frac{1}{7}\right)^3 = 1024\,€ \quad \Longrightarrow \quad x = 686\,€$

20. Nach fünf Jahren in einer Firma wird das Gehalt von Kathrin um ein Zehntel aufgebessert, nach weiteren zwei Jahren wird das neue Gehalt um ein Zwanzigstel erhöht und drei Jahre später gibt es eine Gehaltserhöhung um ein Vierzehntel. Nach dieser dritten Erhöhung bekommt Kathrin 2475 € monatlich. Wie groß war Kathrins Anfangsgehalt?

Lösung: $x \cdot \left(1 + \frac{1}{10}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{20}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{14}\right) = \frac{99}{80} \cdot x = 2475\,€ \quad \Longrightarrow \quad x = 2000\,€$

21. Heinz-Rüdiger zahlt einen Lottogewinn bei der Bank ein und läßt ihn drei Jahre dort liegen. Im ersten und im zweiten Jahr zahlt die Bank $\frac{1}{15}$ des jeweiligen Jahresanfangsbetrages als Zins, im dritten Jahr sogar $\frac{1}{14}$. Nach dem dritten Jahr sind 1408 € auf seinem Konto. Welchen Betrag zahlte Heinz-Rüdiger bei der Bank ein?

Lösung: $x \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{14}\right) = 1408\,€ \quad \Longrightarrow \quad x = 1155\,€$

22. Erich zahlt eine kleine Erbschaft bei der Bank ein. Im ersten Jahr zahlt die Bank 2 % Zins, im zweiten Jahr 3 %. Nach dem zweiten Jahr hat Erich 8825,04 € auf dem Konto. Welchen Betrag hat Erich einbezahlt?

Lösung: $x \cdot (1 + 2\,\%) \cdot (1 + 3\,\%) = 8825{,}04\,€ \quad \Longrightarrow \quad x = 8400\,€$

23. Eine Seite eines Rechtecks hat die fünffache Länge der anderen Seite, der Umfang des Rechtecks ist 30 cm. Stelle den Sachverhalt in Form einer Gleichung dar und berechne die Seitenlängen des Rechtecks.

Lösung: 1. Seite: x, 2. Seite: $5x$

$$\begin{aligned} 2 \cdot (x + 5x) &= 30 \qquad (1)\\ 12x &= 30 \\ x &= \frac{30}{12} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \end{aligned}$$

Die Seitenlängen sind 2,5 cm und 12,5 cm.

24. Die Mutter ist fünfmal so alt wie ihre Tochter. Der Opa ist zehnmal so alt wie die Tochter und lebt schon um 28 Jahre mehr als Mutter und Tochter zusammen. Stelle eine Gleichung auf und berechne das Alter der drei Personen.

Lösung: x ist das Alter der Tochter.

$$\begin{aligned} x + 5x + 28 &= 10x \\ 28 &= 10x - x - 5x \\ 28 &= 4x \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Tochter: 7 a Mutter: 35 a Opa: 70 a