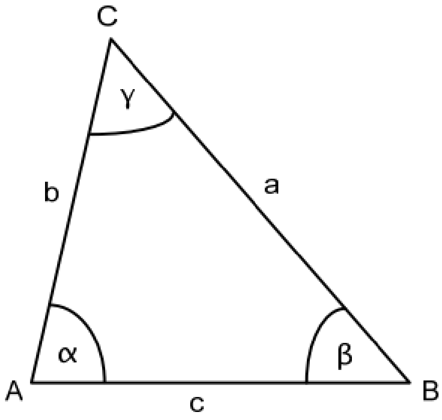
Dreieckskonstruktionen

1. Entscheide jeweils, ob sich mit den unten angegebenen Bestimmungsstücken (siehe auch Zeichnung) ein Dreieck (bis auf seine Lage) eindeutig konstruieren lässt.

   Kreuze an.



(Zeichnung nicht maßstabsgerecht!)

Bestimmungsstücke			ja	nein
c = 5,8 cm	α = 40°	β = 68°	☐	☐
γ = 72°	α = 40°	β = 68°	☐	☐
b = 8,8 cm	c = 5,6 cm	α = 53°	☐	☐
c = 5,8 cm	a = 7,4 cm	α = 68°	☐	☐
c = 6 cm	a = 4 cm	α = 70°	☐	☐

Quelle: VERA C 2008

Lösung: ja, nein, ja, ja, nein

2. Wähle aus den vorgegebenen Größen jeweils **drei** aus und überlege anhand einer Skizze, ob aus den ausgewählten Größen ein Dreieck (eindeutig) konstruierbar ist. Begründe deine Antwort.

   $a = 6\,\text{cm}$, $c = 9\,\text{cm}$, $\alpha = 40°$, $w_\beta = 5\,\text{cm}$, $s_c = 4\,\text{cm}$ und $h_a = 4{,}5\,\text{cm}$

   Quelle: Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur, ISB 2001

Lösung: Eindeutige Konstruktionen für
$(a,\ c,\ s_c)$, $(a,\ c,\ h_a)$, $(c,\ \alpha,\ h_a)$, $(c,\ \alpha,\ s_c)$
Zwei Lösungsdreiecke für $(a,\ c,\ \alpha)$
Keine Lösung: $(c,\ \alpha,\ w_\beta)$, da w_β zu kurz

3. Konstruiere ein Dreieck ABC mit $a = 6\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$ und $c = 7\,\text{cm}$ auf zweifache Weise:
   (a) Lege die Strecke $[BC]$ waagrecht.
   (b) Lege die Seite $[AC]$ waagrecht.
   (c) Ändere die Angaben für das Dreieck so ab, dass mit der abgeänderten Angabe die Konstruktion eines Dreiecks nicht mehr möglich ist. Begründe deine Abänderung ohne neue Konstruktion.

Lösung: (c) z.B. $c = 10{,}5\,\text{cm}$ oder $\alpha = 90{,}01°$

4. Es gibt zwei Möglichkeiten, ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, in dem ein Innenwinkel $120°$ beträgt und eine Seite $6\,\text{cm}$ lang ist.
   Konstruiere diese beiden Dreiecke.

Lösung: - -

5. Es gibt zwei Möglichkeiten, ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Basis $5\,\text{cm}$ lang ist und das Maß irgendeines Innenwinkels $70°$ beträgt.
   Konstruiere diese beiden Dreiecke.

Lösung: 1. Fall: Beide Basiswinkel haben das Maß $70°$. Dann hat der dritte Winkel das Maß $40°$.
2. Fall: Der Winkel an der Spitze hat das Maß $70°$. Dann hat jeder Basiswinkel das Maß $55°$.

6. (a) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $c = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 35°$ und $\gamma = 95°$.
   (b) Ändere die Angaben für das Dreieck ABC an einer Stelle so ab, dass mit der abgeänderten Angabe die Konstruktion eines Dreiecks nicht mehr möglich ist. Begründe deine Wahl.

Lösung: (b) z.B. $a = 7\,\text{cm}$ statt $\alpha = 35°$

7. (a) Von einem Dreieck ABC weiß man: $a = 11{,}3\,\text{cm}$ und $\gamma = 60°$. Außerdem besitzt das Dreieck ABC eine Symmetrieachse.
   Konstruiere das Dreieck. Was fällt dir auf?
   (b) Von einem weiteren Dreieck ABC weiß man: $\alpha = 47°$, $a = 4{,}5\,\text{cm}$ und $\overline{AC} = \overline{AB}$. Berechne die restlichen Innenwinkel dieses Dreiecks.

Lösung: (a) Das Dreieck ist gleichseitig.
(b) Das Dreieck ist gleichschenklig: $\beta = \gamma = 66{,}5°$

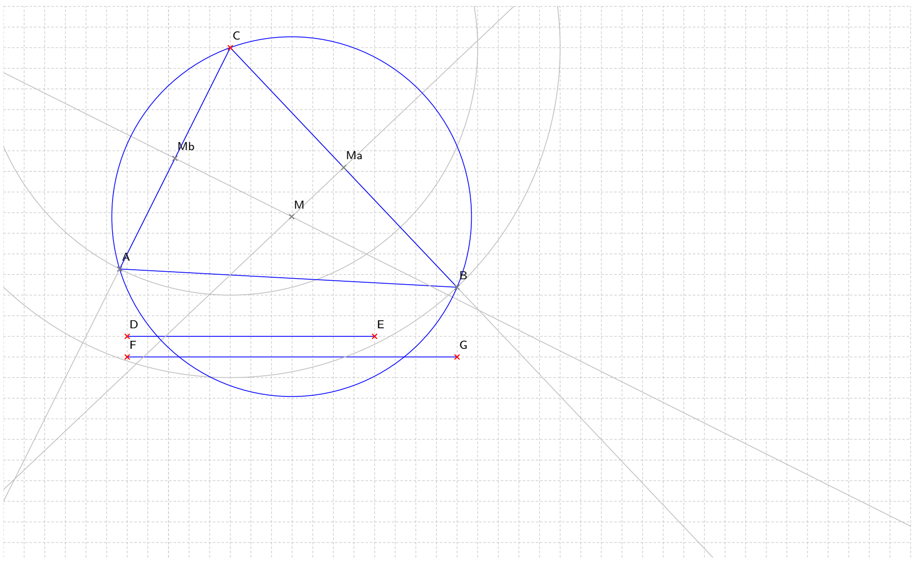
8. (a) Konstruiere ein Dreieck ABC aus $c = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 92°$ und $a = 8\,\text{cm}$.
   (b) Ändere eine der Angaben für das Dreieck ABC so ab, dass dann die Konstruktion des Dreiecks nicht mehr möglich ist. Begründe deine Abänderung.

Lösung: (b) z.B. statt $a = 8\,\text{cm}$: $\beta = 90°$
oder $c = 9\,\text{cm}$ statt $c = 6\,\text{cm}$.

9. Konstruiere ein Dreieck mit $b = 6\,\text{cm}$, $a = 8\,\text{cm}$ und $\gamma = 70°$.

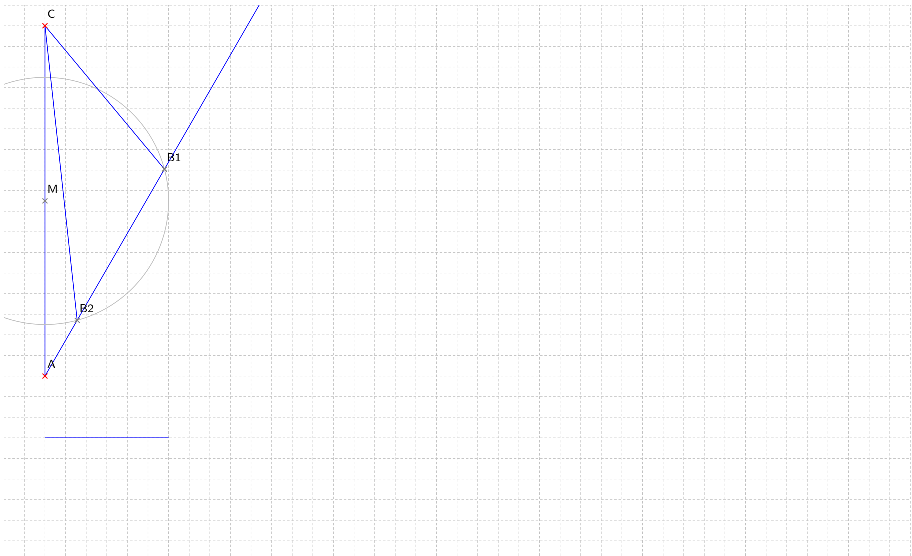
   Konstruiere den Umkreismittelpunkt dieses Dreiecks.

Lösung: C ist Scheitel des Winkels γ, A liegt auf $\text{k}(\text{C}, b)$ und dem ersten Schenkel von γ. B liegt auf $\text{k}(\text{C}, a)$ und dem zweiten Schenkel von γ.
M ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.



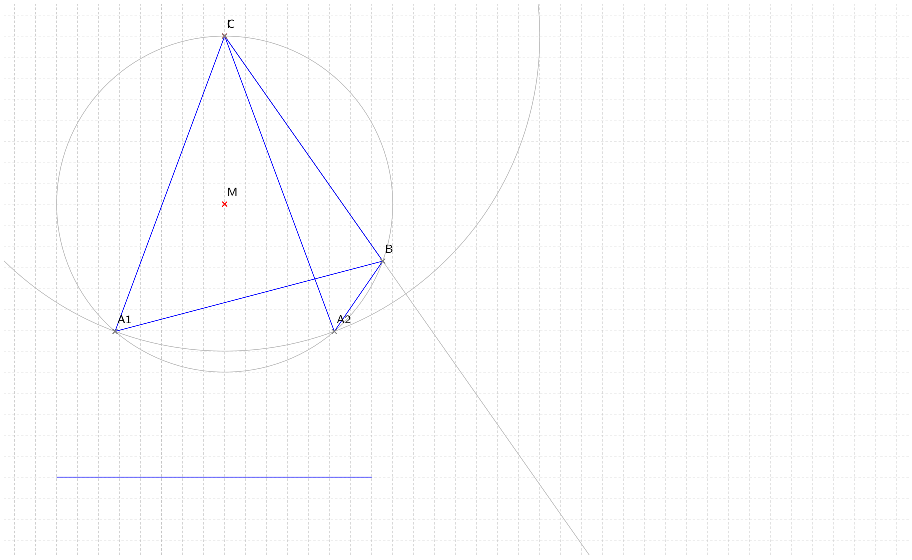
10. Konstruiere ein Dreieck mit $b = 9\,\text{cm}$, $\alpha = 35°$ und $s_b = 3\,\text{cm}$.

Lösung: A und C sind Endpunkte der Seite b. M ist Mittelpunkt von b. B liegt an dem ersten Schenkel von α und auf dem Kreis um M mit Radius s_b. Zwei Lösungsdreiecke $\triangle \text{AB}_1\text{C}$ und $\triangle \text{AB}_2\text{C}$.



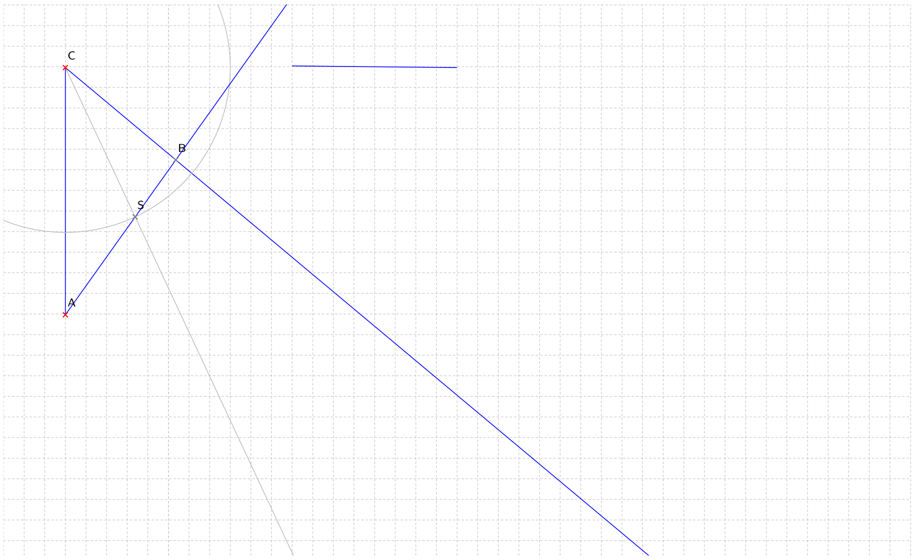
11. Konstruiere ein Dreieck aus folgenden Stücken (M ist der Mittelpunkt des Umkreises): $b = 7{,}5\,\text{cm}$, Umkreisradius $r = 4\,\text{cm}$ und $\tilde{\gamma} = \sphericalangle \text{MCB} = 35°$.

Lösung: C liegt auf dem Kreis um M mit Radius r beliebig. A liegt auf dem Kreis um C mit Radius b und auf dem Kreis um M mit Radius r. B liegt auf dem zweiten Schenkel des Winkels $\tilde{\gamma}$ und auf dem Kreis um M mit Radius r.



12. Im $\triangle$ABC ist S der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von γ und der Seite c. Konstruiere mit Zirkel und Lineal ein Dreieck mit $b = 6\,\text{cm}$, $\overline{\text{CS}} = 4\,\text{cm}$ und $\gamma = 50°$.

Lösung: A und C sind Endpunkte der Seite b. S liegt auf dem Kreis um C mit Radius $\overline{\text{CS}}$ und auf der Winkelhalbierenden von γ. B liegt auf der Halbgeraden [AS und auf dem zweiten Schenkel von γ.



13. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck mit Schenkellänge 6 cm und mit einem Winkel an der Spitze von 45° (ohne Winkelmesser!).

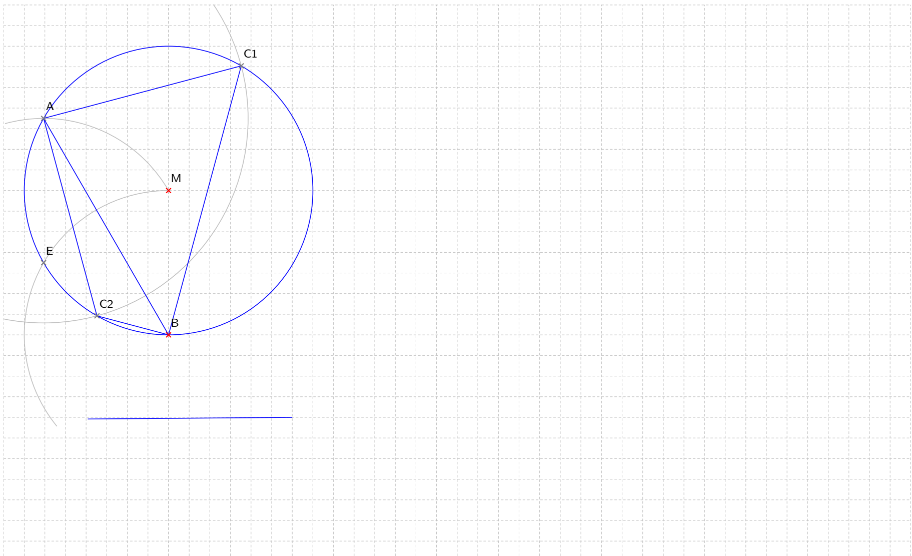
Lösung:

14. In einem Dreieck ABC sind der Höhenschnittpunkt H(6,5|4) und die Eckpunkte A(6|0) und B(12|5) gegeben. Konstruiere das Dreieck ABC.

Lösung:

15. (a) Konstruiere ein Dreieck, von dem Folgendes gegeben ist:
    $b = 5\,\text{cm}$, Umkreisradius $r = 3{,}5\,\text{cm}$, $\sphericalangle$ AMB $= 120°$
    M ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks.
    (b) Konstruiere ein Dreieck, von dem Folgendes gegeben ist:
    $a = 5\,\text{cm}$, Umkreisradius $r = 4\,\text{cm}$, $\sphericalangle$ AMB $= 120°$
    M ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks.

Lösung: (a) B liegt auf k(M, r). A liegt auf dem freien Schenkel des Winkels $\sphericalangle$AMB $= 120°$ und auf k(M, r). C auf k(M, r) und auf k(A, b).
Zwei Lösungsdreiecke $\triangle ABC_1$, $\triangle ABC_2$



(b) B liegt auf $k(M, r)$. A liegt auf dem freien Schenkel des Winkels $\sphericalangle AMB = 120°$ und auf $k(M, r)$. C auf $k(M, r)$ und auf $k(B, a)$.
Zwei Lösungsdreiecke $\triangle ABC_1$ und $\triangle ABC_2$.