Konstruktion von Kreistangenten

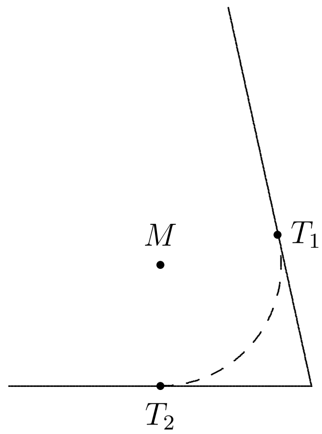
1. Gegeben sind die Punkte A und B mit $\overline{AB} = 5\,\text{cm}$. Konstruiere die Geraden durch B, die von A den Abstand $3\,\text{cm}$ haben!

Lösung:

2. Eine Ecke einer Rasenfläche, an der die geraden Ränder einen Winkel von $70°$ einschließen, soll durch einen Kreisbogen (Radius $r = 4\,\text{m}$) so abgerundet werden, daß beide Ränder ohne Knick in den Kreisbogen übergehen. (Siehe Skizze rechts!)

   (a) Konstruiere den Kreismittelpunkt M, die Berührpunkte T_1 und T_2 und den Rand der Rasenfläche an dieser Ecke im Maßstab $1:100$.

   (b) Begründe die wichtigsten Konstruktionsschritte.



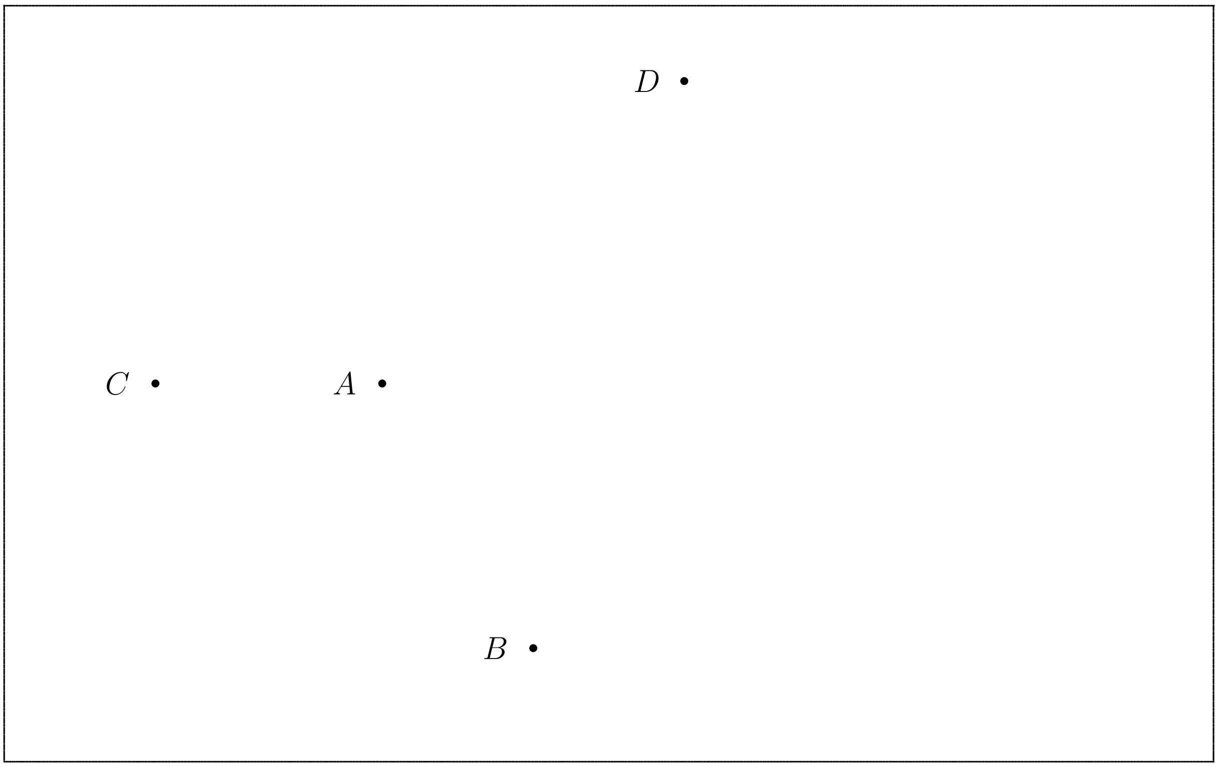
Lösung:

3. Gegeben sind die Punkte A, B, C und D (vgl. Abbildung). Die Gerade $g = CD$ steht auf AB senkrecht.

   (a) Konstruiere die Menge der Mittelpunkte von Kreisen, die durch die Punkte A und B gehen.

   (b) Konstruiere die Kreise, die durch A und B gehen und g als Tangente haben.

   (c) h sei eine zu g parallele Gerade. Wie muß h verlaufen, damit es keinen Kreis durch A und B gibt, der gleichzeitig h als Tangente hat?



Lösung: (a) Die Mittelpunkte aller Kreise durch A und B liegen auf der Mittelsenkrechten zu $[AB]$.

(b) Der Abstand des Mittelpunktes der gesuchten Kreise von A ist so groß wie der Abstand des Parallelenpaars.

(c) Der Schnittpunkt von h mit AB muß zwischen A und B liegen.

4. Gegeben sei eine Geradenkreuzung (g_1, g_2) mit $\sphericalangle(g_1, g_2) = 60^\circ$. S sei der Schnittpunkt von g_1 und g_2.

   (a) Konstruiere <u>einen</u> Kreis k, welcher g_1 und g_2 berührt und den Radius 3,5 cm besitzt!

   (b) Konstruiere <u>eine</u> Sekante durch den Punkt S, welche aus dem Kreis k eine Sehne der Länge $s = 4,5\,\text{cm}$ ausschneidet!

Lösung:

5. Zeichne den Kreis k um $M(4|6)$ mit Radius $r = 2\,\text{cm}$ und den Punkt $P(10|4)$. Konstruiere zwei Tangenten an k, die sich im Winkel 40^0 schneiden und von denen eine durch P geht.

Lösung: Man konstruiert erst eine Tangente t_1 durch P und zeichnet eine beliebige Gerade g, die t_1 unter 40^0 schneidet. Ein Lot auf g durch M schneidet den Kreis im Berührpunkt der gesuchten Tangente t_2.

6. Gegeben ist der Kreis $k(A; r = 2,5\,\text{cm})$ und der Punkt P mit $\overline{AP} = 6\,\text{cm}$. Konstruiere Geraden g und h mit den folgenden Eigenschaften:

   (a) g verläuft durch P und ist Tangente zu k

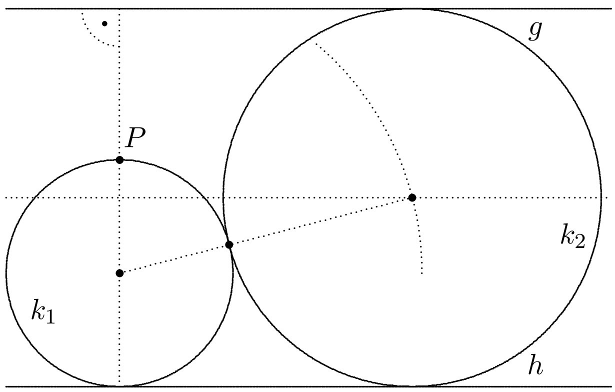
   (b) h hat von A den Abstand $4\,\text{cm}$ und schließt mit g einen Winkel von 40^0 ein (2 Lösungen).

Lösung: Konstruiere eine Tangente g zu k durch P und zeichne eine Gerade h', die g unter 40^0 schneidet. Das Lot zu h' durch A schneidet den Kreis $k'(A; r = 4\,\text{cm})$ in zwei Punkten X und Y. Die Tangenten an k' in X und Y sind die gesuchten Lösungen..

7. Zeichne zwei Parallelen g und h im Abstand von $5\,\text{cm}$ und einen Punkt P zwischen den Parallelen, der von g $2\,\text{cm}$ entfernt ist.

   (a) Konstruiere (möglichst einfach) einen Kreis k_1, der die Gerade h berührt und durch P geht.

   (b) Ein Kreis k_2 berührt beide Parallelen und den Kreis k_1. Konstruiere seinen Mittelpunkt und den Berührpunkt mit k_1 und zeichne k_2.

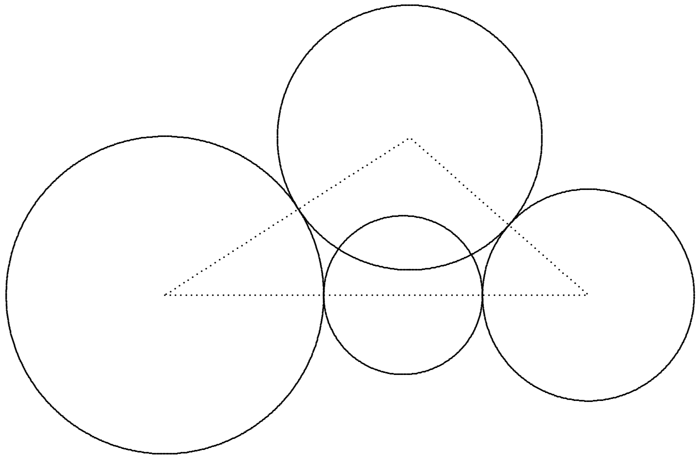


Lösung:

8. Der Abstand $\overline{M_1M_2}$ der Mittelpunkte der beiden Kreise $k_1(M_1; r_1 = 3\,\text{cm})$ und $k_2(M_2; r_2 = 2\,\text{cm})$ beträgt $8\,\text{cm}$. Zeichne beide Kreise.

   (a) Konstruiere den kleinsten Kreis, der k_1 und k_2 von außen berührt.

   (b) Konstruiere einen Kreis mit Radius $r = 2,5\,\text{cm}$, der k_1 und k_2 von außen berührt.



Lösung:

9. Gegeben sind die Punkte A und B im Abstand von 8 cm. Konstruiere eine Gerade g, die von A den Abstand 4 cm und von B den Abstand 2 cm hat, so daß A und B auf verschiedenen Seiten von g liegen. (Planskizze, zeichne A und B in der Blattmitte, Lotkonstruktionen können mit dem Geodreick ausgeführt werden.)

Lösung: Inneres Tangentenpaar an die Kreise um A und B mit den Radien 4 cm bzw. 2 cm.

10. Zeichne einen Kreis $k(M; r = 2\,\text{cm})$ und eine Gerade g, die vom Kreismittelpunkt M den Abstand 4 cm hat. Konstruiere die Kreise mit Radius 3 cm, die die Gerade g und den Kreis k berühren.

Lösung: Die Mittelpunkte der Kreise liegen auf einer Parallelen zu g im Abstand 3 cm und zugleich auf dem Kreis um M mit Radius 5 cm.

11. Gegeben ist eine Gerade g und ein Punkt $P \in g$.

    (a) Konstruiere <u>einen</u> Kreis $k(M; r = 6\,\text{cm})$, der g in P berührt!

    Auf dem Kreis $k(M; r)$ ist <u>ein</u> Punkt B mit $\overline{BP} = 10\,\text{cm}$ zu bestimmen. Außerdem ist ein Punkt A mit $\overline{AP} = 10\,\text{cm}$ und $\overline{AB} = 5\,\text{cm}$ im Inneren von $k(M; r)$ einzuzeichnen.

    (b) Konstruiere nun einen Kreis k', der durch A geht und den Kreis $k(M; r)$ im Punkt B von innen berührt.

    (c) In die von den Kreisen $k(M; r)$ und k' gebildete „Sichel“ sind die Kreise k_1 und k_2 zu konstruieren, die $k(M; r)$ und k' berühren und den Radius 2 cm haben.

    (d) Auf $k(M; r)$ ist <u>ein</u> Punkt C mit $\overline{CP} = 6\,\text{cm}$ zu bestimmen. Konstruiere den Kreis k_3, der $k(M; r)$ von außen im Punkt C und außerdem noch die Gerade g berührt.

Verlangt ist eine übersichtliche, sehr saubere und genaue Konstruktion!
Der Konstruktionsgang muß <u>klar ersichtlich</u> sein!

Lösung:

12. Zeichne einen Kreis k um M mit Radius $r = 5,5\,\text{cm}$ und eine Gerade g, so daß es genau sieben Kreise mit Radius $2\,\text{cm}$ gibt, die g und k berühren. Wie groß ist in diesem Fall der Abstand der Geraden g von M? Konstruiere die Mittelpunkte der sieben Kreise!

Lösung: $d(g; M) = 1,5\,cm$

13. Gegeben seien die Punkte $A(0/4)$, $B(8/0)$, $M(10/6)$ und $T(7/5)$.
    (a) Zeichne die Gerade g durch die Punkte A und B und den Kreis $k_1(M; \overline{MT})$ in ein Koordinatensystem ein! (Platzbedarf nach oben: 15 cm, y-Achse ganz links)
    (b) Gesucht sind die Mittelpunkte aller Kreise, die k_1 in T berühren. Zeichne die Linie ein, auf der diese Mittelpunkte liegen und konstruiere außerdem die Tangente an k_1 im Punkt T !
    (c) Konstruiere einen Kreis, der k_1 in T berührt und zusätzlich g als Tangente hat!

Lösung:

14. Gegeben seien die Punkte $A(5/0)$, $B(13/4)$, $M(3/6)$ und $T(6/5)$.
    (a) Zeichne die Gerade g durch die Punkte A und B und den Kreis $k_1(M; \overline{MT})$ in ein Koordinatensystem ein! (Platzbedarf nach oben: 15 cm, y-Achse ganz links)
    (b) Gesucht sind die Mittelpunkte aller Kreise, die k_1 in T berühren. Zeichne die Linie ein, auf der diese Mittelpunkte liegen und konstruiere außerdem die Tangente an k_1 im Punkt T !
    (c) Konstruiere einen Kreis, der k_1 in T berührt und zusätzlich g als Tangente hat!

Lösung:

15. Gegeben sei folgender

    Satz. *Schneiden sich zwei Tangenten an einen Kreis im Punkt P, so sind die Tangentenberührpunkte T_1 und T_2 von P gleichweit entfernt. (Es gilt also $\overline{T_1P} = \overline{T_2P}$.)*

    Beweise den Satz mit Hilfe eines Kongruenzbeweises! Zeichne zuerst eine Beweisfigur!

Lösung:

16. In einem Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) ist ein Parallelogramm $ABCD$ durch die Punkte $B(6|1)$, $C(5|8)$, $D(1|8)$ gegeben.

    (a) Verwandle in einer sauberen Konstruktion das Parallelogramm $ABCD$ unter Beibehaltung der Seite $[BC]$ in ein inhaltsgleiches Parallelogramm $A'BCD'$, in welchem die Seiten $[A'B]$ und $[D'C]$ einen Abstand von 5,6 cm haben!
    Erläutere dein Vorgehen stichpunktartig!

    (b) Berechne ausführlich die in Teilaufgabe a) entstandene Streckenlänge $\overline{A'B}$!

Lösung: (a) D' liegt auf der Tangente an den Kreis um B mit Radius 5,6 cm und auf AD.
A' liegt auf der Parallele zu $D'C$ und auf AD.

(b) Fläche des Parallelogramms mit verschiedenen Grundseiten berechnen: $5\,\text{cm} \cdot 7\,\text{cm} = 5{,}6\,\text{cm} \cdot \overline{A'B} \Rightarrow \overline{A'B} = 5\,cm$