Auswerten von Zufallsexperimenten

1. Wusstest du, dass im Berufsverkehr im Durchschnitt nur 1,2 Personen in einem Auto sitzen?

   (a) Was bedeutet das?

   (b) Wie waren die Autos besetzt, wenn 10 Autos kontrolliert wurden?

   (c) Bei 40 kontrollierten Autos waren 39 mit je einer Person besetzt. Ist das möglich?

   (d) In 40 Autos saßen 60 Personen. Wie viele Personen saßen durchschnittlich in einem Auto?

   Quelle: Robert Lesewa, Gymnasium Donauwörth

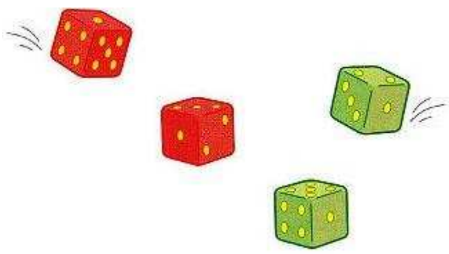
Lösung: (a) Wenn man die Anzahl der Personen a in einer bestimmten Anzahl n von Autos betrachtet, ergibt die relative Häufigkeit der Personen pro Auto den Wert $\frac{a}{n} = 1,2$.

(b) Es gibt verschiedene Möglichkeiten, z. B. $1+1+1+1+1+1+1+1+2+2,\ 5+5+1+1+0+0+0+0+0+0,\ \cdots$

(c) In 40 Autos müssten insgesamt 48 Personen sein, d. h. in einem Auto müssten dann 8 Personen sein!

(d) In einem Auto saßen durchschnittlich $1,5$ Personen.

2. **Würfeltest**



Mit welchem Würfel würfelt man am häufigsten eine 6? Findet heraus, wer von euch den „besten“ 6er Würfel hat. Dabei sollt ihr wie folgt vorgehen.

- Jeder würfelt mit seinem Würfel, der sich in einem Würfelbecher befinden sollte.
- Das Ergebnis eines jeden Wurfes wird in die unten abgebildete Protokolltabelle bei der entsprechenden Wurfnummer eingetragen.
- Wer zuerst bei 60 Würfen angelangt ist, ruft laut „STOP”, alle anderen hören dann sofort mit dem Würfeln auf.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.	41.	42.	43.	44.	45.
46.	47.	48.	49.	50.	51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.

(a) Trage in die Tabelle die (sogenannten absoluten) Häufigkeiten für die einzelnen Augenzahlen ein.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
absolute Häufigkeit						

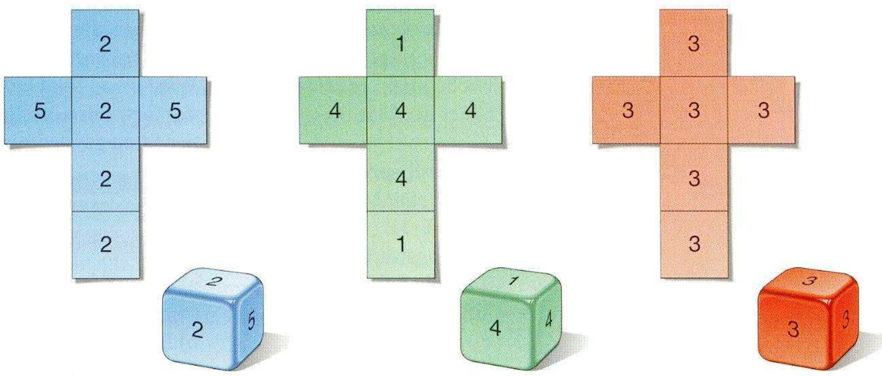
(b) Vergleiche deine Ergebnisse mit denen deines Nachbarn. Gibt es zwischen den einzelnen Würfeln Unterschiede? Begründe warum oder warum nicht!

(c) Was könnte mit dem Begriff ,,relative Häufigkeit” gemeint sein?

Lösung:

3. **Würfel des Herrn Efron**

Die sechs Seiten eines Würfels müssen nicht unbedingt mit den Zahlen von eins bis sechs beschriftet sei, sie können ganz unterschiedliche Beschriftung haben.
Für ein einfaches, aber im Ergebnis recht verblüffendes Würfelspiel kann man die unten abgebildeten „Würfel des Herrn Efron“ verwenden. Es handelt sich dabei um drei unterschiedlich beschriftete Würfel. Ihr könnt sie leicht herstellen, indem ihr auf herkömmliche Würfel kleine Papierstreifen (Würfelnetze) klebt und diese entsprechend beschriftet.



Würfel I Würfel II Würfel III

Spielregel (für zwei Spieler):

- Jeder Spieler erhält sechs Münzen.

- Der erste Spieler wählt einen der drei Würfel.
- Der zweite Spieler wählt einen anderen Würfel.
- Beide Spieler würfeln. Wer die höhere Augenzahl erreicht, gewinnt und erhält vom Verlierer eine Münze.
- Die Schritte $1-4$ werden wiederholt bis ein Spieler keine Münzen mehr hat.

(a) Spiele nach den oben angegebenen Spielregeln.

(b) Welchen Würfel sollte der zweite Spieler wählen, wenn der erste Spieler den Würfel I gewählt hat?

(c) Welchen Würfel sollte der zweite Spieler wählen, wenn der erste Spieler den Würfel III gewählt hat?

Quelle: Mathe Live 8, S. 57f.

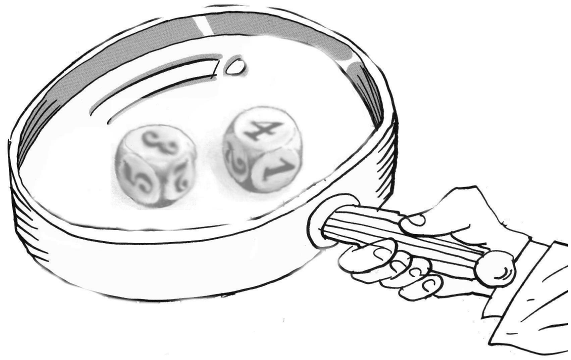
Lösung: (a)

(b) Am besten wählt man den Würfel III:
Würfel III liefert immer 3; Würfel I liefert mit einer relativen Häufigkeit von $\frac{4}{6}$ die Zahl 2. D. h. Würfel III gewinnt mit einer relativen Häufigkeit von $\frac{4}{6}$.

(c) Am besten wählt man den Würfel II:
Würfel III liefert immer 3; Würfel II liefert mit einer relativen Häufigkeit von $\frac{4}{6}$ die Zahl 4 und gewinnt damit.

4. **Getarnte Würfel**

Im Gegensatz zu einem klassischen 6er Würfel sollt ihr in Partnerarbeit einen sechsseitigen Würfel herstellen, auf dem Zahlen aus der Menge 1,2,3,4,5,6 einfach, mehrfach oder gar nicht vorkommen.



Dafür klebt ihr auf die sechs Seiten eines herkömmlichen Würfels kleine Papierschnipsel auf denen eure Zahlen stehen. Wenn ihr damit fertig seid, sucht ihr euch eine andere 2er-Gruppe und würfelt so, dass diese Schüler eueren Würfel nicht sehen können. Lediglich das Ergebnis wird mitgeteilt und in die folgende Tabelle eingetragen:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl (absolute Häufigkeit)						

(a) Wie könnte die Beschriftung des Würfels aussehen?

(b) Wie oft muss man werfen, um eine möglichst sichere Aussage über die Beschriftung des Würfels machen zu können? Begründe!

(c) Was könnte der Grund dafür sein, dass eine Zahl häufiger gewürfelt wird als eine andere, die genauso oft auf dem Würfel ist?

Lösung: (a)

(b) Man muss so lange würfeln, bis sich die relativen Häufigkeiten der Zahlen kaum mehr verändern.

(c) Eine asymmetrische Masseverteilung des Würfels aufgrund der aufgeklebten Papierschnipsel kann zu einer Abweichung führen.

5. **Lego-Steine**

Statt mit einem normalen Spielwürfel kann man auch mit einem Lego-Stein „würfeln“. Nimm einen „Achter“ und beschrifte ihn wie hier gezeigt. Wie bei einem richtigen Spielwürfel haben gegenüberliegende Seiten zusammen die Augenzahl 7. Beim Würfeln sollte ein Würfelbecher benutzt werden. Als Ergebnis notiert man die Augenzahl.

Anne, Gisa und Simon haben vor ihrem Würfeln mit dem Lego-Stein die Chancen für die Augenzahlen 1 bis 6 geschätzt.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Schätzung Anne	2%	10%	31%	45%	10%	2%
Schätzung Peter	1%	7%	40%	36%	12%	4%
Schätzung Gisa	0%	5%	40%	50%	5%	0%
Schätzung Simon	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

(a) Welcher Schätzung würdest du am ehesten zustimmen? Begründe deine Antwort!

(b) Gib selbst eine Schätzung ab und überprüfe die Schätzungen, indem du $100 mal$ mit dem Lego-Stein würfelst. Stelle die absolute und die relative Häufigkeit in einer Tabelle zusammen. Gib nach diesem Versuch eine (möglicherweise verbesserte) Schätzung ab.

(c) Wolfgang behauptet, die Chance für das Würfeln einer Augenzahl hängt vom Flächeninhalt der zugehörigen Seite ab. Berechne die Flächeninhalte, wobei du die Flächen mit 3 und 4 als eben annehmen kannst. Gib den Anteil jedes einzelnen Flächeninhalts an der gesamten Oberfläche an. Vergleich mit den Angaben aus (a).

Quelle: Lambacher Schweizer 8, S. 156

Lösung: (a) Die Schätzung von Simon ist nicht gut, da sie den unterschiedlichen Seiten gleiche Chancen zuordnet.
Gisas Schätzung ist auch nicht gut. Obwohl 1 und 6 kleine Chancen haben, ist die Schätzung 0% nicht gerechtfertigt.
Annes Schätzung ist am besten. Die Chance der Landung auf den größten Flächen ist am größten, und die Chance der Landung auf den kleinsten Flächen ist am kleinsten, aber nicht 0%.

(b)

(c) Seitenlängen mit dem Lineal messen und daraus die Fläche und den Anteil an der Gesamtfläche berechnen:

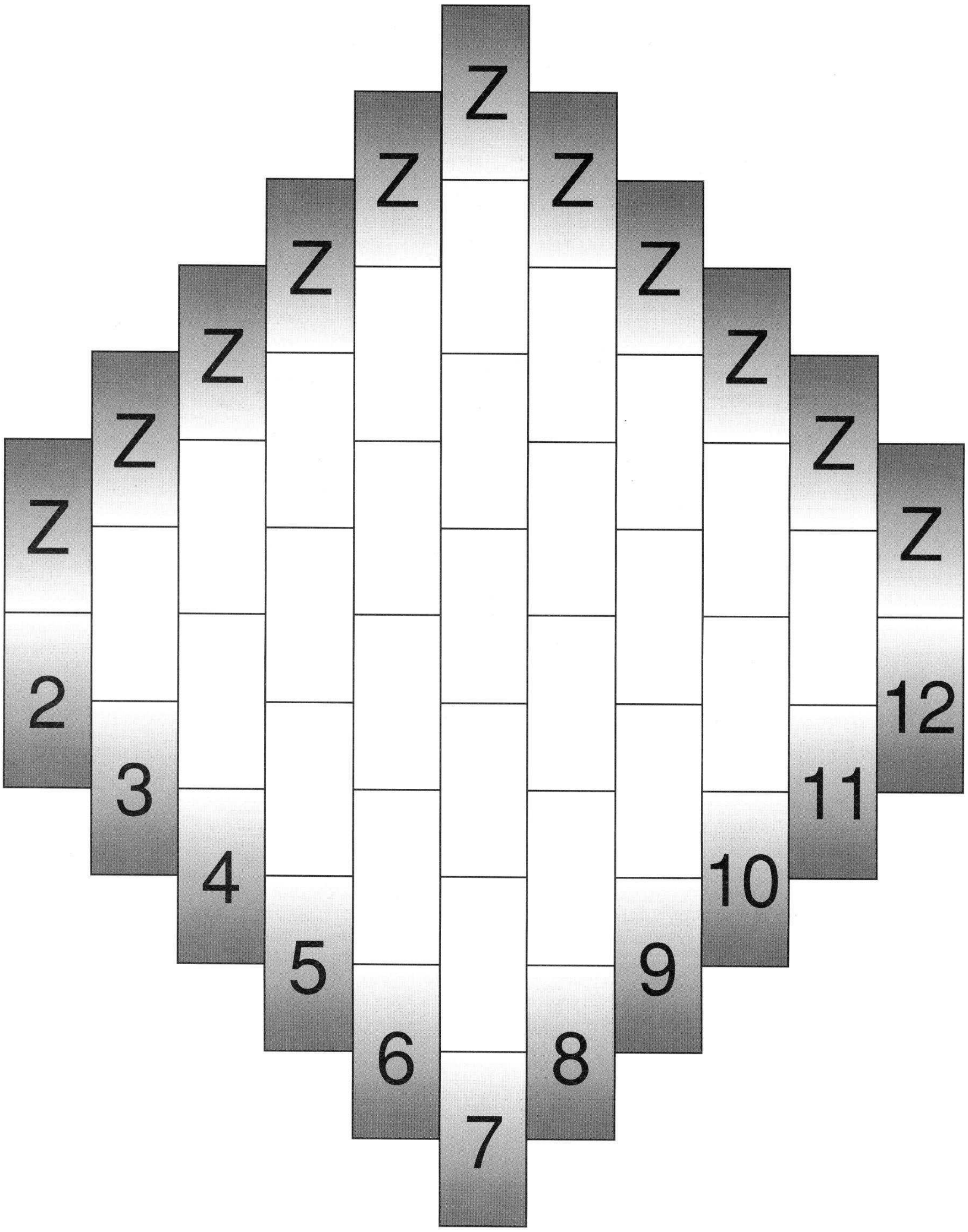
Zahl	Fläche	Anteil an der Gesamtfläche
1 und 6	$1{,}4\,\mathrm{cm}^2$	7,4%
2 und 5	$2{,}9\,\mathrm{cm}^2$	15,4%
3 und 4	$5{,}1\,\mathrm{cm}^2$	27,1%

Gesamtfläche $18{,}8\,\mathrm{cm}^2$.
Wolfgangs Behauptung spiegelt die Tendenz von Annes Schätzung wider. Allerdings ist bei ihm die Wahrscheinlichkeit für die großen Flächen zu klein und die Wahrscheinlichkeit für die kleinen und mittleren Flächen zu groß.

6. **Spiel „Der schnellste Weg“**

Zu Beginn des Spieles wird von jedem Mitspieler ein Spielstein auf eine Startzahl zwischen 2 und 12 gesetzt. Anschließend wird mit zwei Würfeln gewürfelt und die Augensumme gebildet. Stimmt die Augensumme mit der besetzten Startzahl überein, darf man ein Feld vorrücken und nochmals würfeln. Stimmen Augensumme und Startzahl nicht überein, ist der nächste Spieler dran. Wer mit seinem Spielstein auf ein Zielfeld (Z) kommt, hat einen Gewinnpunkt gemacht und darf seinen Stein wieder auf eine beliebige Startzahl setzen.
Gewonnen hat derjenige, der zuerst 3 Gewinnpunkte hat.

Spielplan „Der schnellste Weg..."



(a) Spielt das Spiel in Dreier-Gruppen. Die Mehrfachbelegungen eines Startfeldes ist nicht erlaubt!

(b) Notiert in der folgenden Strichliste wie oft eine Startzahl gewürfelt wurde

Startzahl	Absolute Häufigkeit
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

(c) Notiert in der folgenden Strichliste wie oft eine Startzahl zum Erwerb eines Gewinnpunktes geführt hat.

Startzahl	Gewinnpunkte
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

(d) Wie viele Möglichkeiten / Kombinationen gibt es, eine Startzahl zu werfen?

Startzahl	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Anzahl der Möglichkeiten											

(e) Überlegt euch Variationen des Spiels um es (noch) spannender zu machen (z.B. drei Würfel einsetzen und die geeignete Kombination aus zweien auswählen, mehrere Startfelder besetzen etc.).

Variationen der Aufgabe:

(a) mehrere Spielsteine pro Person

(b) mehrere Würfel pro Person

(c) Personenzahl variieren

(d) eigenes Spielfeld entwerfen

(e) zusätzliche Würfelbedingungen einführen

(f) Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Startzahl berechnen

Lösung: